

SĕMA  
BOLETÍN NÚMERO 48  
Septiembre 2009

sumario

Editorial . . . . .	5
Artículos . . . . .	7
<i>Some recent controllability results for the three-dimensional Stokes system with two scalar controls</i> , por S. Guerrero . . . . .	7
<i>Tracking fluid interfaces approaching singular events</i> , por H.D. Ceniceros . . . . .	31
<i>Sembrando el caos</i> , por S. Ibáñez, A. Pumariño, J.A. Rodríguez . . . . .	59
<i>On some models describing cellular movement: The macroscopic scale</i> , por C. Morales-Rodrigo . . . . .	85
Matemáticas e Industria . . . . .	113
<i>Jornadas de Experiencia en Transferencia de Tecnología Matemática</i> , por M. Lezaun, A. Madoz, M. Mateos . . . . .	113
<i>Informe de la OCDE sobre Matemáticas en la Industria</i> , por M. Lezaun . . . . .	133
Resúmenes de tesis doctorales . . . . .	139
Anuncios . . . . .	143

# Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

## Grupo Editor

P. Pedregal Tercero (U. Cast.-La Mancha)      E. Fernández Cara (U. de Sevilla)  
E. Aranda Ortega (U. Cast.-La Mancha)      A. Donoso Bellón (U. Cast.-La Mancha)  
J.C. Bellido Guerrero (U. Cast.-La Mancha)

## Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla)      A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)  
C. Conca Resende (U. de Chile)      A. Delshams Valdés (U. Pol. de Cataluña)  
Martin J. Gander (U. de Ginebra)      Vivette Girault (U. de París VI)  
Arieh Iserles (U. de Cambridge)      J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia)  
P. Pedregal Tercero (U. Cast.-La Mancha)      I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid)  
Benoît Perthame (U. de París VI)      O. Pironneau (U. de París VI)  
Alfio Quarteroni (EPF Lausanne)      J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)  
L. Vega González (U. del País Vasco)      C. Wang Shu (Brown U.)  
E. Zuazua (Basque Center App. Math.)

## Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)  
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)  
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)  
Historia Matemática: J.M. Vegas Montaner (U. Comp. de Madrid)  
Resúmenes: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)  
Noticias de SĒMA: C.M. Castro Barbero (Secretario de SĒMA)  
Anuncios: Ó. López Pouso (U. de Santiago de Compostela)

## Página web de SĒMA

<http://www.sema.org.es/>

## e-mail

[info@sema.org.es](mailto:info@sema.org.es)

---

Dirección Editorial: Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla - La Mancha. Avda. de Camilo José Cela s/n. 13071. Ciudad Real. [boletin.sema@uclm.es](mailto:boletin.sema@uclm.es)

ISSN 1575-9822.

Depósito Legal: AS-1442-2002.

Imprime: Gráficas Lope. C/ Laguna Grande, parc. 79, Políg. El Montalvo II 37008. Salamanca.

Diseño de portada: Ernesto Aranda

Ilustración de portada: poliedros hechos con papel (*buckyhedros*  $5^{12}-6^{30}$ ,  $5^{12}-6^{110}$ ,  $5^{12}-6^{30}$  y *dodecaedro stellado*) reproducidas por cortesía de Víctor Larios ([www.uaq.mx/matematicas/origami](http://www.uaq.mx/matematicas/origami)).

**Consejo Ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada**  
SĒMA

**Presidente**

Carlos Vázquez Cendón

**Vicepresidente**

Rosa María Donat Beneito

**Secretario**

Carlos Manuel Castro Barbero

**Vocales**

Sergio Amat Plata

Rafael Bru García

Jose Antonio Carrillo de la Plata

Inmaculada Higuera Sanz

Carlos Parés Madroñal

Pablo Pedregal Tercero

Luis Vega González



Estimados socios,

En el momento de preparar estos párrafos nos encontramos a unos días de la celebración de nuestro XXI CEDYA / XI CMA. Como bien sabéis, esta vez ha sido el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla-La Mancha, al que pertenece este Grupo Editor, el encargado de organizar este evento central para la vida de nuestra sociedad. Muy probablemente, en el momento de leer estas palabras, tal evento será ya historia. Deseamos que, efectivamente, haya sido ése lugar de encuentro y sana discusión científica que viene siendo nuestro congreso desde hace muchos años. Tanto el programa científico como la capacidad y experiencia del equipo organizador local nos invitan a confiar en que esta edición será un gran éxito. Aprovechamos esta oportunidad para transmitir nuestra más calurosa felicitación a todo el equipo organizador por la labor realizada preparando este encuentro. Nos consta que lo han hecho con mucha ilusión.

En cuanto a los contenidos de este número, encontraréis cuatro trabajos científicos de interés firmados por S. Guerrero; H.D. Ceniceros; S. Ibáñez, A. Pumariño y J.A. Rodríguez; y C. Morales-Rodrigo, los cuales esperamos sean de vuestro interés. Además aparecen dos artículos en la sección de Matemáticas e Industria en relación con las *Jornadas de Experiencia en Transferencia de Tecnología Matemática* y un resumen del informe de la OCDE sobre *Matemáticas en la Industria*.

Permitidnos insistir en que estamos abiertos a vuestros comentarios para poder mejorar nuestro Boletín. No tenéis más que enviarnos vuestras sugerencias a la dirección del Boletín.

Recibid un cordial saludo,

Grupo Editor  
boletin.sema@uclm.es



## SOME RECENT CONTROLLABILITY RESULTS FOR THE THREE-DIMENSIONAL STOKES SYSTEM WITH TWO SCALAR CONTROLS

SERGIO GUERRERO

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6),  
UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions,  
Paris, F-75005 France

guerrero@ann.jussieu.fr

### Abstract

In this paper, we deal with the three-dimensional Stokes and Navier-Stokes systems modeling incompressible viscous flows in a bounded domain  $\Omega$  and equipped with Dirichlet boundary conditions. We prove that the Stokes system is null controllable by means of two scalar distributed controls supported in any subdomain of  $\Omega$ . Then, we prove that the Navier-Stokes system is locally exactly controllable to smooth trajectories by means of two scalar distributed controls as long as the intersection of the control domain and the boundary  $\partial\Omega$  is ‘large’.

**Mots-clés:** *Stokes system, Navier-Stokes system, Carleman inequalities*

**Classement AMS:** *34B15 35Q30 93B05 93C10*

## 1 Introduction

In this paper, we are going to present some null controllability results for the three-dimensional Stokes system with two scalar controls. Sometimes these results will lead to local controllability results for the Navier-Stokes system. This will be made precise below.

Let us first motivate our problem with some background on the subject.

One of the main contributors to the controllability of partial differential equations is O. Yu. Imanuvilov who, together with A. V. Fursikov, popularized the use of global Carleman estimates in the context of null controllability. See, for instance, the papers [15], [12], [17] and [16]. Another relevant contributor has been E. Zuazua, who was able to deduce global controllability results for some nonlinear systems for the first time in [26].

---

Partially supported by the “Agence Nationale de la Recherche” (ANR), Project ContrôleFlux, number JCJC-6-137283.

Fecha de recepción: 22/04/2009. Aceptado (en forma revisada): 24/06/2009.

The controllability of partial differential equations has been the object of intensive research during the last years. In 1978, D.L. Russell [23] made a survey of the most relevant results which were available in the literature up to that time. In that paper, the author described a number of different tools that were developed to address controllability problems, often inspired and related to other subjects concerning partial differential equations: multipliers, moment problems, nonharmonic Fourier series, etc. More recently, J.-L. Lions introduced the so called *Hilbert Uniqueness Method* (H.U.M.; for instance, see [18],[19]). That was the starting point of a fruitful period on the subject.

In order to introduce our working system, let  $\Omega$  be a nonempty bounded connected open subset of  $\mathbf{R}^3$  of class  $C^\infty$ . Let  $T > 0$  and let  $\omega \subset \Omega$  be a (small) nonempty open subset which is the *control domain*. We will use the notation  $Q := \Omega \times (0, T)$  and  $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$ .

Let us introduce the controlled Navier-Stokes system, that governs the behavior of a viscous incompressible flow:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v1_\omega & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

The controllability properties of the Navier-Stokes system have been the subject of intensive research these last years. The question was first considered by J.-L. Lions in [20], where *approximate controllability* was conjectured. This was followed by several papers, where various partial (positive) answers were furnished. See [7], [1], [3] and [22]. Concerning null controllability and exact controllability to the trajectories, the first local results were given in [13].

For some of the results presented below we will need the additional hypothesis that the control domain ‘touches’ the boundary of  $\Omega$  at a nontrivial set, more precisely, that

$$\overline{\omega} \cap \partial\Omega \text{ contains a (relative) nonempty open set of } \partial\Omega. \quad (2)$$

Let us recall the definition of some usual spaces in the context of the Stokes equations (see, for instance, [24]):

$$V = \{y \in H_0^1(\Omega)^3 : \nabla \cdot y = 0 \text{ in } \Omega\}$$

and

$$H = \{y \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \cdot y = 0 \text{ in } \Omega, y \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Let  $a : Q \mapsto \mathbf{R}$  and  $B : Q \mapsto \mathbf{R}^3$  be two bounded measurable functions. We introduce our control system:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(t, x)y + (B(t, x) \cdot \nabla)y + \nabla p = v1_\omega & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$



Here,  $y_0 \in H$  is the initial condition and  $v = (v_1, v_2, v_3)$  is the control function.

It is well-known that the null controllability for this system holds, that is to say, for every  $y_0 \in H$  and every  $T > 0$ , there exists  $v \in L^2(Q)^3$  such that the solution  $y \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; H)$  of (3) satisfies

$$y|_{t=T} = 0 \text{ in } \Omega.$$

This result was proved in [16] under the assumption  $(a, B) \in W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega)^4)$ . The same result was proved in [9] as long as  $(a, B) \in L^\infty(Q)^4 \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^4)$ , with a different proof.

The main objective of this paper is to prove the null controllability of (3) with only 2 scalar controls, that is to say, when  $v_i = 0$  for some given  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Our first main result is the following (see [10]):

**Théorème 1** *Let  $(a, B) \in L^\infty(Q)^4 \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^4)$  and let  $\omega$  satisfy (2). Then, there exists  $i \in \{1, 2, 3\}$  and a constant  $C > 0$  depending only on  $\Omega$  and  $\omega$  such that, for every  $y_0 \in H$  there exists a control  $v \in L^2(Q)^3$  with  $v_i \equiv 0$  in  $Q$  satisfying*

$$\|v\|_{L^2(Q)^3} \leq e^{C(1+1/T^4)} \|y_0\|_{L^2(\Omega)^3}$$

and such that the associated solution  $y$  of (3) satisfies

$$y|_{t=T} = 0 \text{ in } \Omega.$$

The second main result in this paper establishes the null controllability of (3) with no condition on  $\omega$ , but with  $a \equiv 0$  and  $B \equiv 0$ :

**Théorème 2** *Let  $a, B \equiv 0$ . Then, there exists a constant  $C > 0$  depending only on  $\Omega$  and  $\omega$  such that, for every  $y_0 \in H$  and every  $i \in \{1, 2, 3\}$ , there exists a control  $v \in L^2(Q)^3$  with  $v_i \equiv 0$  in  $Q$  satisfying*

$$\|v\|_{L^2(Q)^3} \leq e^{C(1+1/T^9)} \|y_0\|_{L^2(\Omega)^3}$$

and such that the associated solution  $y$  of (3) satisfies

$$y|_{t=T} = 0 \text{ in } \Omega.$$

**Remarque 1** As proved in [21], there are nonempty bounded connected open sets  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  with Lipschitz boundary such that, even with  $\omega = \Omega$ , the null controllability of (3) does not hold with two vanishing components for the control (i.e. if one imposes, for example,  $v_1 = v_2 = 0$ ). See also [6] for a torus.

In order to prove Theorems 1 and 2, we introduce the *adjoint system*:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(t, x)\varphi - \nabla \cdot (B(t, x)\varphi) + \nabla\pi = 0 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{in } Q, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \varphi|_{t=T} = \varphi_T & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

with  $\varphi_T \in H$ . It is well-known (see, e.g. [2, Theorem 2.44, pages 56–57]) that the results stated in Theorems 1 and 2 are equivalent to the following *observability inequality*:

$$\int_{\Omega} |\varphi(0, x)|^2 dx \leq e^{K(T)} \sum_{j=1, j \neq i}^3 \iint_{\omega \times (0, T)} |\varphi_j|^2 dt dx, \quad (4)$$

where  $K(T) := C(1 + 1/T^4)$  in the case of Theorem 1 and  $K(T) := C(1 + 1/T^9)$  in the case of Theorem 2 and  $C > 0$  only depends on  $\Omega$  and  $\omega$ .

We will now give the ideas of the proof of inequality (4) in both situations.

- The case of Theorem 1.

Let  $\mathcal{O} \subset \Omega$  be an open set. Under the assumptions  $(a, B) \in L^\infty(Q)^4 \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^4)$  the following inequality was proved in [9]:

$$\iint_Q \rho_0(t) (|D^2 \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2) dx dt \leq C \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) |\varphi|^2 dx dt, \quad (5)$$

where

$$\rho_i(t) := \exp \left\{ \frac{-K_i}{t^4(T-t)^4} \right\}, \quad i = 0, 1,$$

with  $0 < K_1 < K_0 < 2K_1$  (see Theorem 1 in that reference).

We use this inequality for a suitable open set  $\mathcal{O} \subset \omega$  which ‘touches’ the boundary  $\partial\Omega$  and moreover satisfies

$$\forall P \in \mathcal{O}, \{P + \mathbf{R}e_i\} \cap \partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad \text{for some } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (6)$$

This is always possible since  $\omega$  satisfies (2). This gives a representation formula of  $\varphi_i$  in terms of the other two components of the vector-valued function  $\varphi$ . Injecting this formula into (5) provides the desired result. More details will be given in Section 2.

- The case of Theorem 2.

Using the fact that  $\Delta\pi = 0$ , we have that  $\Delta\varphi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) satisfies the homogeneous heat equation

$$\partial_t \Delta\varphi_j + \Delta(\Delta\varphi_j) = 0 \text{ in } Q.$$

Unfortunately, no boundary conditions are prescribed for  $\Delta\varphi_j$ . Therefore, we can only deduce a Carleman estimate for  $\varphi_j$  of the form

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1, j \neq i}^3 \iint_Q \rho_2(t, x) |\varphi_j|^2 dt dx \\ & \leq C \sum_{j=1, j \neq i}^3 \left( \iint_{\omega \times (0, T)} \rho_2(t, x) |\varphi_j|^2 dt dx + \iint_{\Sigma} \rho_3(t, x) \left| \frac{\partial \nabla \Delta\varphi_j}{\partial n} \right|^2 dt d\sigma \right), \end{aligned}$$

where the boundary terms on the right hand side have to be estimated. To this end, the idea is to use a priori estimates relying on the regularizing effect of the Stokes system (see Lemma 3 below). This will provide an estimate of the boundary terms but with an additional integral depending on  $\varphi_i$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1, j \neq i}^3 \iint_Q \rho_2(t, x) |\varphi_j|^2 dt dx \\ & \leq C \left( \sum_{j=1, j \neq i}^3 \iint_{\omega \times (0, T)} \rho_2(t, x) |\varphi_j|^2 dt dx + \iint_Q \rho_4(t, x) |\varphi_i|^2 dt d\sigma \right). \end{aligned}$$

Finally, using the divergence-free condition on  $\varphi$  and the properties of the weight functions, we can absorb the weighted integral of  $|\varphi_i|^2$  with the help of the left hand side.

Let us remark that these ideas were already developed in [14] in order to prove the null controllability of coupled Stokes systems.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 we give the ideas of the proof of Theorem 1 and in Section 3 we prove Theorem 2.

## 2 Proof of the first result

We recall that it suffices to prove the observability inequality (4). Let  $\mathcal{O} \subset \omega$  be a nonempty open set satisfying (6). Notice that the following inequality was proved in [9]:

$$\iint_Q \rho_0(t) (|D^2 \varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2) dx dt \leq C \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) |\varphi|^2 dx dt, \quad (7)$$

where

$$\rho_i(t) := \exp \left\{ \frac{-K_i}{t^4(T-t)^4} \right\}, \quad i = 0, 1,$$

with  $0 < K_1 < K_0 < 2K_1$ .

Without loss of generality, we suppose that  $i = 1$ . For each  $x \in \mathcal{O}$ , let  $\ell(t, x)$  be the segment joining the point  $(t, x)$  and the point  $(t, x^*)$ , where

$$x^* := \{x + \mathbf{R}e_1\} \cap \partial \mathcal{O} \cap \partial \Omega.$$

Then, using the Dirichlet boundary condition and the divergence-free condition on  $\varphi$ , we have that

$$|\varphi_1(t, x)| = \left| \int_{\ell(t, x)} (\partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3)(t, s, x_2, x_3) ds \right|,$$

for all  $(t, x) \in (0, T) \times \mathcal{O}$ . From (7), the integral we have to estimate is

$$\begin{aligned} & \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) |\varphi_1|^2 dx dt = \\ & \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) \left| \int_{\ell(t, x)} (\partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3)(t, s, x_2, x_3) ds \right| dx dt \\ & \leq C_1 \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) \left( \int_{\ell(t, x)} (|\partial_2 \varphi_2|^2 + |\partial_3 \varphi_3|^2)(t, s, x_2, x_3) ds \right) dx dt. \end{aligned}$$

Applying Fubini's formula and denoting by  $\tilde{\ell}(t, x)$  the segment joining the point  $(t, x)$  and the point  $(t, \hat{x})$ , where

$$\hat{x} := \{x + \mathbf{R}e_1\} \cap (\partial\mathcal{O} \setminus (\partial\Omega \cap \partial\mathcal{O})),$$

we find

$$\begin{aligned} & \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) |\varphi_1|^2 dx dt \\ & \leq C_1 \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) (|\partial_2 \varphi_2|^2 + |\partial_3 \varphi_3|^2) \left( \int_{\tilde{\ell}(t, x)} ds \right) dx dt \quad (8) \\ & \leq C_2 \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) (|\partial_2 \varphi_2|^2 + |\partial_3 \varphi_3|^2) dx dt. \end{aligned}$$

Let us now introduce a function  $\theta \in C^2(\mathbf{R}^3)$  satisfying  $\theta \geq 0$ ,  $\theta(x) = 1$  for all  $x \in \mathcal{O}$  and vanishing in a neighborhood of  $\Omega \setminus \omega$ . Then, several integration by parts provide

$$\begin{aligned} & \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) \partial_2 \varphi_2 \partial_2 \varphi_2 dx dt \leq \iint_{(0, T) \times \omega} \theta(x) \rho_1(t) \partial_2 \varphi_2 \partial_2 \varphi_2 dx dt \\ & = - \iint_{(0, T) \times \omega} \rho_1(t) (\theta(x) \partial_{22} \varphi_2 - (1/2) \partial_{22} \theta(x) \varphi_2) \varphi_2 dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Recall that

$$\rho_1(t) = \exp \left\{ \frac{-K_1}{t^4(T-t)^4} \right\} = \rho_{11}(t) \rho_{12}(t),$$

with

$$\rho_{11}(t) = \exp \left\{ \frac{-K_0}{2t^4(T-t)^4} \right\}, \quad \rho_{12}(t) = \exp \left\{ \frac{-K_1 + K_0/2}{t^4(T-t)^4} \right\}.$$

Using Young's inequality in (9), we have

$$\begin{aligned} & \iint_{(0, T) \times \mathcal{O}} \rho_1(t) \partial_2 \varphi_2 \partial_2 \varphi_2 dx dt \\ & \leq \varepsilon \iint_{(0, T) \times \omega} (\rho_{11}(t))^2 |\partial_{22} \varphi_2|^2 dx dt + C_\varepsilon \iint_{(0, T) \times \omega} (\rho_{12}(t))^2 |\varphi_2|^2 dx dt, \end{aligned}$$

for all  $\varepsilon > 0$ . Here, we have used that  $(\rho_1(t)) \leq (\rho_{12}(t))^2$ . Obviously, one can prove the same inequality for  $\varphi_3$ . Combining these inequalities with (8) and (7), we find that

$$\iint_Q \rho_0(t) (|D^2\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2) dx dt \leq C \iint_{(0,T) \times \omega} (\rho_{12}(t))^2 (|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) dx dt. \quad (10)$$

Thanks to the property  $K_0 < 2K_1$ , the observability inequality (4) is an immediate consequence of (10).

**Remarque 2** The result stated in Theorem 1 implies a local controllability result for the Navier-Stokes system. More precisely, let  $(\bar{y}, \bar{p})$  be a smooth solution of

$$\begin{cases} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) \bar{y} + \nabla \bar{p} = 0 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot \bar{y} = 0 & \text{in } Q, \\ \bar{y} = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Let  $\omega$  satisfy condition (2). Then, there exists  $i \in \{1, 2, 3\}$  and  $\delta > 0$  such that if  $\|y_0 - \bar{y}_0\|_{L^4(\Omega)^3} < \delta$ , there exists a control  $v \in L^2(Q)^3$  satisfying  $v_i \equiv 0$  in  $Q$  and a solution  $(y, p)$  of

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla \bar{p} = 0 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (12)$$

such that

$$y(T, x) = \bar{y}(T, x) \quad \forall x \in \Omega.$$

This property is called the (local) *exact controllability to the trajectories* and was established, under some suitable regularity assumptions on  $\bar{y}$ , in [10]. Its proof relies on an application of the so called Liusternik implicit function theorem.

### 3 Proof of the second result

#### 3.1 Some previous estimates

For the proof of the observability inequality needed to establish Theorem 2, we follow a classical approach, consisting of obtaining a suitable estimate of the Carleman kind. For a systematic use of this kind of estimates see, for instance, [12] or [16].

In order to establish the estimate, we have to define some weight functions:

$$\alpha(t, x) = \frac{\exp\{20\lambda\|\eta^0\|_\infty\} - \exp\{\lambda(18\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))\}}{t^9(T-t)^9},$$

$$\alpha^*(t) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(t, x), \quad \xi(t, x) = \frac{e^{\lambda(18\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^9(T-t)^9}, \quad \xi^*(t) = \min_{x \in \bar{\Omega}} \xi(t, x). \quad (13)$$

Here,  $\eta^0 \in C^2(\bar{\Omega})$  satisfies

$$|\nabla \eta^0| > 0 \text{ in } \bar{\Omega} \setminus \omega_0, \quad \eta^0 > 0 \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad \eta^0 \equiv 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (14)$$

where  $\omega_0$  is a nonempty open subset of  $\mathbf{R}^3$  such that  $\bar{\omega}_0 \subset \omega$ . The existence of such a function  $\eta^0$  is given in [12, Lemma 1.1, Chapter 1] (see also [2, Lemma 2.68, Chapter 1]). Weights of the kind (13) were first considered in [12].

Accordingly, we define  $I_0(s, \lambda; \cdot)$  as follows:

$$I_0(s, \lambda, g) := s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla g|^2 dt dx + s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |g|^2 dt dx$$

for any sufficiently regular function  $g : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}$  and

$$I_0(s, \lambda, g) := \sum_{i=1}^3 I_0(s, \lambda, g_i)$$

for any regular  $g = (g_1, g_2, g_3) : \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbf{R}^3$ . We also introduce

$$I(s, \lambda; g) := s^{-1} \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^{-1} (|g_t|^2 + |\Delta g|^2) dt dx + I_0(s, \lambda, g). \quad (15)$$

Now, we state all the technical results we need. The first one is a regularity result for the solutions of the Stokes system:

**Lemma 3** *For every  $T > 0$  and every  $f \in L^2(0, T; H)$ , there exists a unique*

$$u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \cap H^1(0, T; H)$$

*such that, for some  $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , one has:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = f & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{on } \Sigma, \\ u|_{t=0} = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (16)$$

*Furthermore, there exists a constant  $C > 0$  depending only on  $\Omega$  such that*

$$\|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)^3)} + \|u\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega)^3)} \leq C \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)}. \quad (17)$$

In order to deal with more regular solutions, let us introduce some compatibility conditions. Let  $r$  be an integer  $\geq 1$ . We will say that  $f$  satisfies the compatibility condition of order  $r$  if, for any nonnegative integer  $k \leq r - 1$ , we have

$$\nabla p^k(x) = \sum_{i=0}^k (\partial_t^i \Delta^{k-i} f)(0, x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

where  $p^0 \equiv 0$  and, for any  $k \geq 1$ ,  $p^k$  is the solution of the Neumann boundary-value problem

$$\begin{cases} \Delta p^k = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} p^k = \sum_{i=0}^{k-1} (\partial_t^i \Delta^{k-i} f)(0, x) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

One has the following lemma (see, for instance, [?, Section IV], [?, Theorem 6, pages 100-101], [25]):

**Lemma 4** *Let  $T > 0$  and let  $r$  be a positive integer. There exists  $C > 0$  depending only on  $r$  and  $\Omega$  such that, for every  $f \in L^2(0, T; H^{2r}(\Omega)^3 \cap H) \cap H^r(0, T; H)$  satisfying the compatibility condition of order  $r$ , the solution  $u$  of (16) satisfies*

$$\begin{aligned} u &\in X_r := L^2(0, T; H^{2r+2}(\Omega)^3) \cap H^{r+1}(0, T; L^2(\Omega)^3), \\ \|u\|_{X_r} &\leq C(\|f\|_{L^2(0, T; H^{2r}(\Omega)^3)} + \|f\|_{H^r(0, T; L^2(\Omega)^3)}). \end{aligned} \quad (18)$$

The second result is a nice property coming from the definition of the previous weights:

**Lemma 5** *Let  $r \in \mathbf{R}$ . There exists  $C > 0$  depending only on  $r$ ,  $\Omega$  and  $\omega_0$  such that, for every  $T > 0$  and every  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,*

$$\begin{aligned} s^2 \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha \xi^{r+2}} |u|^2 dt dx &\leq C \left( \iint_Q e^{-2s\alpha \xi^r} |\nabla u|^2 dt dx \right. \\ &\left. + s^2 \lambda^2 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha \xi^{r+2}} |u|^2 dt dx \right), \end{aligned} \quad (19)$$

for every  $\lambda \geq C$  and every  $s \geq CT^{18}$ .

The proof of this lemma can be found in [4], for instance.

The third technical result concerns the Laplace operator:

**Lemma 6** *Let  $\gamma(x) = \exp\{\lambda \eta^0(x)\}$  for  $x \in \Omega$  and let  $r \in \mathbf{R}$ . Then, there exists  $C > 0$  depending only on  $r$ ,  $\Omega$  and  $\omega_0$  such that, for every  $T > 0$  and every*

$u \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} & \tau^{r+3} \lambda^{r+5} \int_{\Omega} e^{2\tau\gamma} \gamma^{r+3} |u|^2 dx + \tau^{r+1} \lambda^{r+3} \int_{\Omega} e^{2\tau\gamma} \gamma^{r+1} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq C \left( \tau^r \lambda^{r+1} \int_{\Omega} e^{2\tau\gamma} \gamma^r |\Delta u|^2 dx + \tau^{r+3} \lambda^{r+5} \int_{\omega_0} e^{2\tau\gamma} \gamma^{r+3} |u|^2 dx \right), \end{aligned} \quad (20)$$

for every  $\lambda \geq C$  and every  $\tau \geq C$ .

The proof of this lemma can be readily deduced from the corresponding result for parabolic equations included in [12, Remark 1.2, Chapter 1]. The original result was stated for  $r = 0$ ; then, using this result for the function  $\gamma^{r/2} u \in H_0^1(\Omega)$ , we obtain (20).

The fourth and last technical result is an estimate which holds for any energy solution of the heat equations with non-homogeneous Neumann boundary conditions:

**Lemma 7** *There exists  $C > 0$  depending only on  $\Omega$  and  $\omega_0$  such that, for any  $T > 0$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f_1 \in L^2(Q)$ ,  $f_2 \in L^2(Q)^3$  and  $f_3 \in L^2(\Sigma)$ , the weak solution  $u$  of*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f_1 + \nabla \cdot f_2 & \text{in } Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + f_2 \cdot n = f_3 & \text{on } \Sigma, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (21)$$

satisfies

$$\begin{aligned} I_0(s, \lambda; u) & \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dt dx + \iint_Q e^{-2s\alpha} |f_1|^2 dt dx \right. \\ & \left. + s^2 \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^2 |f_2|^2 dt dx + s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha^*} \xi^* |f_3|^2 dt d\sigma \right) \end{aligned} \quad (22)$$

for every  $\lambda \geq C$  and every  $s \geq C(T^9 + T^{18})$ .

Lemma 7 is essentially proved in [8]. In fact, the inequality proved there concerns the same weight functions as in (22) but with  $t(T-t)$  instead of  $t^9(T-t)^9$ . Then, one can follow the steps of the proof in [8] (see Theorem 1 in that reference) and adapt the arguments just taking into account that

$$\partial_t \alpha := \alpha_t \leq CT\xi^{10/9} \quad \text{and} \quad \partial_{tt} \alpha := \alpha_{tt} \leq CT^2\xi^{11/9}, \quad (23)$$

with  $C > 0$  independent of  $s$ ,  $\lambda$  and  $T$ .

### 3.2 Proof of Theorem 2

As we said in the Introduction, the task is reduced to prove the observability inequality (4). In this section we denote by  $C$  various positive constants which



depends only on  $\Omega$  and  $\omega$  (they depend also on the choice of  $\eta^0$  and  $\omega_0$ , but one can consider that these are determined by  $\Omega$  and  $\omega$ ).

We introduce the adjoint system

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi = 0 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{in } Q, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \varphi|_{t=T} = \varphi_T & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (24)$$

and we denote by  $\varphi_j$  for  $j = 1, 2, 3$  the components of  $\varphi$ .

We are going to establish estimate (4) for  $i = 2$ . Of course, the same can be done for  $i = 1$  and  $i = 3$ . One has the following result:

**Proposition 8** *There exists a positive constant  $C$  depending only on  $\Omega$  and  $\omega$  such that*

$$\begin{aligned} & s^8 \lambda^{10} \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^8} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx + s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi_2|^2 dt dx \\ & \leq C s^9 \lambda^{10} \iint_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\alpha\xi^9} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx, \end{aligned} \quad (25)$$

for every  $s \geq C(T^9 + T^{18})$  and every  $\lambda \geq C$ .

**Remark 3** Starting from the Carleman inequality (25), one can follow the steps in [11] and prove the observability inequality (4) for  $i = 2$ . So, once Proposition 8 is established, the proof of Theorem 2 is finished.

**Proof of Proposition 8:** Note that, by a simple density argument, we may assume, without loss of generality, that  $\varphi$  is of class  $C^6$  on  $[0, T] \times \overline{\Omega}$ . We also observe that, using the divergence-free condition, we have

$$\Delta\pi = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T).$$

Then, we apply the operator  $\nabla\Delta = (\partial_1\Delta, \partial_2\Delta)$  to the equations satisfied by  $\varphi_1$  and  $\varphi_3$ . Introducing  $(\psi_1, \psi_3) := (\nabla\Delta\varphi_1, \nabla\Delta\varphi_3)$ , we have

$$\psi_{j,t} + \Delta\psi_j = 0 \quad \text{in } Q, \quad \text{for } j = 1, 3. \quad (26)$$

We apply Lemma 7 to the components  $\psi_1$  and to  $\psi_3$  with  $f_1 = 0$  and  $f_2 = 0$  and we have

$$\begin{aligned} I_0(s, \lambda; \psi_1) + I_0(s, \lambda; \psi_3) & \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha\xi^3} (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) dt dx \right. \\ & \left. + s\lambda \iint_{\Sigma} e^{-2s\alpha^*} \xi^* \left( \left| \frac{\partial\psi_1}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial\psi_3}{\partial n} \right|^2 \right) d\sigma dt \right), \end{aligned} \quad (27)$$

for every  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C(T^9 + T^{18})$ .

The rest of the proof is divided in three steps:

- In Step 1, we will prove that  $I(s, \lambda; \psi_1)$  and  $I(s, \lambda; \psi_3)$  can be estimated from below by the left hand side of inequality (25).
- In Step 2, we will estimate the normal derivatives appearing in the right hand side of (27).
- Finally, in Step 3, we will estimate all the local terms by the local terms of  $\varphi_1$  and  $\varphi_3$  appearing in the right hand side of (25).

Step 1:

**1.1)** Estimate of  $\varphi_1$  and  $\varphi_3$ :

We use Lemma 5 with  $r = 3$ ,  $u := \Delta\varphi_1$  and  $u := \Delta\varphi_3$ . We get the existence of a positive constant  $C$  such that

$$\begin{aligned} s^5 \lambda^6 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dt dx \\ \leq C s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dt dx, \quad (28) \\ + C s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) dt dx, \end{aligned}$$

for every  $\lambda \geq C$  and every  $s \geq CT^{18}$ .

Next, we would like to recover some terms in  $\varphi_1$  and  $\varphi_3$  and a term in  $\nabla\varphi_1$  and  $\nabla\varphi_3$  using  $\Delta\varphi_1$  and  $\Delta\varphi_3$ . This is done by applying Lemma 6 to  $u := \varphi_1(t, \cdot)$  and  $u := \varphi_3(t, \cdot)$  (which are functions in  $H_0^1(\Omega)$  for t a.e.) and  $r = 5$ :

$$\begin{aligned} \tau^8 \lambda^{10} \int_{\Omega} e^{2\tau\gamma} \gamma^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dx + \tau^6 \lambda^8 \int_{\Omega} e^{2\tau\gamma} \gamma^6 (|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_3|^2) dx \leq \\ C \left( \tau^5 \lambda^6 \int_{\Omega} e^{2\tau\gamma} \gamma^5 (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dx + \tau^8 \lambda^{10} \int_{\omega_0} e^{2\tau\gamma} \gamma^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dx \right), \end{aligned}$$

for every  $\lambda, \tau \geq C$ . Now, we take

$$\tau := \frac{s \exp\{18\lambda\|\eta^0\|_{\infty}\}}{t^9(T-t)^9}$$

in this inequality. Observe that this can be done whenever  $s \geq CT^{18}$  and  $\lambda \geq C$  (recall that we must have  $\tau \geq C$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} & s^8 \lambda^{10} \int_{\Omega} e^{2s\xi} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dx + s^6 \lambda^8 \int_{\Omega} e^{2s\xi} \xi^6 (|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_3|^2) dx \\ & \leq C \left( s^5 \lambda^6 \int_{\Omega} e^{2s\xi} \xi^5 (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dx + s^8 \lambda^{10} \int_{\omega_0} e^{2s\xi} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dx \right), \end{aligned} \right.$$

(the definition of  $\xi$  is given in (13)). Then, we multiply this inequality by

$$\exp \left\{ -2s \frac{e^{20\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{t^9(T-t)^9} \right\},$$

we integrate in  $(0, T)$  and we obtain (recall the definition of  $\alpha$  also given in (13)):

$$\begin{aligned} & s^8 \lambda^{10} \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^8} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx + s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2\alpha\xi^6} (|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_3|^2) dt dx \\ & \leq C \left( s^5 \lambda^6 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^5} (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dt dx \right. \\ & \quad \left. + s^8 \lambda^{10} \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha\xi^8} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx \right), \end{aligned}$$

for every  $s \geq CT^{18}$  and every  $\lambda \geq C$ . Combining this with (28), we get the following estimate for  $\varphi_1$  and  $\varphi_3$ :

$$\begin{aligned} & s^8 \lambda^{10} \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^8} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx + s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^6} (|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_3|^2) dt dx \\ & + s^5 \lambda^6 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^5} (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dt dx \\ & \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha\xi^3} (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) dt dx \right. \\ & \quad + s^8 \lambda^{10} \int_0^T \int_{\omega_0} e^{-2s\alpha\xi^8} (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx \\ & \quad \left. + s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha\xi^5} (|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_3|^2) dt dx \right), \end{aligned} \tag{29}$$

for every  $s \geq C(T^9 + T^{18})$  and every  $\lambda \geq C$ .

### 1.2) Estimate of $\varphi_2$ :

We recall that the minimum of the weights  $e^{-2s\alpha}$  and  $\xi$  is reached at the boundary  $\partial\Omega$ , where  $\alpha = \alpha^*$  and  $\xi = \xi^*$  do not depend on  $x$ ; see (13) for more details. From the zero divergence condition  $\partial_2\varphi_2 = -(\partial_1\varphi_1 + \partial_3\varphi_3)$ , we find

$$\begin{aligned} & s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\partial_2\varphi_2|^2 dt dx = s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 (|\partial_1\varphi_1 + \partial_3\varphi_3|^2) dt dx \\ & \leq Cs^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} \xi^{6^*} (|\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\varphi_3|^2) dt dx. \end{aligned} \tag{30}$$

Using that  $\varphi_2|_{\partial\Omega} = 0$  and  $\Omega$  is bounded, we have that

$$\int_{\Omega} |\varphi_2|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\partial_2\varphi_2|^2 dx$$

where  $C$  only depends on  $\Omega$ . Since  $\alpha^*$  and  $\xi^*$  do not depend of  $x$ , we also have:

$$s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi_2|^2 dt dx \leq C s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\partial_2 \varphi_2|^2 dt dx.$$

Combining this with (30), we obtain

$$s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi_2|^2 dt dx \leq s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} \xi^6 (|\nabla \varphi_1|^2 + |\nabla \varphi_3|^2) dt dx. \quad (31)$$

Step 2:

In this step, we estimate the boundary terms in the right hand side of (27), that is, the quantity

$$\left\| s^{1/2} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{1/2} \frac{\partial \nabla \Delta \varphi_1}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\| s^{1/2} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{1/2} \frac{\partial \nabla \Delta \varphi_3}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

Using integrations by parts, we readily have

$$\begin{aligned} & \left\| s^{1/2} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{1/2} \frac{\partial \nabla \Delta \varphi_1}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\| s^{1/2} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{1/2} \frac{\partial \nabla \Delta \varphi_3}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ & \leq \| (s\xi^*)^{2/9} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} \varphi_1 \|_{L^2(H^5(\Omega))} \| (s\xi^*)^{7/9} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} \varphi_1 \|_{L^2(H^4(\Omega))} \\ & \quad + \| (s\xi^*)^{2/9} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} \varphi_3 \|_{L^2(H^5(\Omega))} \| (s\xi^*)^{7/9} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} \varphi_3 \|_{L^2(H^4(\Omega))} \end{aligned} \quad (32)$$

(recall that  $\alpha^*$  and  $\xi^*$  do not depend on  $x$ ). Our goal is to estimate these two terms.

In order to do this, we first consider the function

$$\tilde{\varphi} := s^{17/9} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{17/9} \varphi := \theta_1(t) \varphi.$$

Let us point out that  $\tilde{\varphi}$ , together with  $\tilde{\pi} := \theta_1(t) \pi$ , fulfills the following problem (see (24)):

$$\begin{cases} -\tilde{\varphi}_t - \Delta \tilde{\varphi} + \nabla \tilde{\pi} = -\theta_{1,t} \varphi & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot \tilde{\varphi} = 0 & \text{in } Q, \\ \tilde{\varphi} = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \tilde{\varphi}|_{t=T} = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (33)$$

From (17), we get

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega)^3)} + \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,T,L^2(\Omega)^3)} \leq C \|\theta_{1,t} \varphi\|_{L^2(Q)^3}.$$

From the definition of the weight functions (see (13)), we see that

$$|\theta_{1,t}| \leq CT s^{26/9} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^3 \leq C s^3 \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^3 \quad (34)$$

for every  $s \geq CT^9$  and every  $\lambda \geq C$  so

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega)^3)} + \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,T,L^2(\Omega)^3)} \leq C\|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|_{L^2(Q)^3}. \quad (35)$$

Let now

$$\hat{\varphi} := s^{7/9}\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{7/9}\varphi := \theta_2(t)\varphi.$$

It is clear that  $\hat{\varphi}$ , together with  $\hat{\pi} := \theta_2(t)\pi$ , fulfills system (33) with  $\theta_1$  replaced by  $\theta_2$ . Using (18) with  $r = 1$ , we find

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^2(0,T,H^4(\Omega)^3) \cap H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C(\|\theta_{2,t}\varphi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^3)} + \|(\theta_{2,t}\varphi)_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}). \quad (36)$$

Estimating the weight functions as in (34), we have

$$|\theta_{2,t}| \leq Cs^{17/9}\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{17/9} = C\theta_1$$

and

$$|\theta_{2,tt}| \leq Cs^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3,$$

for every  $s \geq CT^9$ , so

$$\begin{aligned} & \|\hat{\varphi}\|_{L^2(0,T,H^4(\Omega)^3)} + \|\hat{\varphi}\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \\ & \leq C(\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)^3)} + \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega)^3)} + \|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}). \end{aligned}$$

Using (35), we get

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^2(0,T,H^4(\Omega)^3)} + \|\hat{\varphi}\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leq C\|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}. \quad (37)$$

Finally, we define the function

$$\varphi^* =: s^{-1/3}\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{-1/3}\varphi.$$

The same computations performed with  $\tilde{\varphi}$  and  $\hat{\varphi}$  and an application of (18) with  $r = 2$  lead to

$$\begin{aligned} \|\varphi^*\|_{L^2(0,T;H^6(\Omega)^3)} & \leq C(\|\hat{\varphi}\|_{L^2(0,T,H^4(\Omega)^3)} + \|\hat{\varphi}\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \\ & \quad + \|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}). \end{aligned}$$

Combining this with (37), we get

$$\|\varphi^*\|_{L^2(0,T;H^6(\Omega)^3)} \leq C\|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|_{L^2(Q)^3}. \quad (38)$$

Thanks to an interpolation argument between the spaces  $L^2(H^6)$  and  $L^2(H^4)$ , estimates (37) and (38) provide

$$\|s^{2/9}\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{2/9}\varphi\|_{L^2(0,T;H^5(\Omega)^3)} \leq C\|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|_{L^2(Q)^3}, \quad (39)$$

for  $\lambda \geq C$  and  $s \geq CT^9$ . Coming back to (32) and using (36) and (39), we find that

$$\begin{aligned} & \left\| s^{1/2} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{1/2} \frac{\partial \nabla \Delta \varphi_1}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\| s^{1/2} \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^{1/2} \frac{\partial \nabla \Delta \varphi_3}{\partial n} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ & \leq C \|s^3 \lambda^{1/2} e^{-s\alpha^*} (\xi^*)^3 \varphi\|_{L^2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (40)$$

for  $\lambda \geq C$  and  $s \geq CT^9$ .

This ends Step 2.

Putting together (27), (29) and (40), we have for the moment the following inequality:

$$\begin{aligned} & s^8 \lambda^{10} \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx + s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi_2|^2 dt dx \\ & s \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_1|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \Delta \varphi_1|^2 + s^4 \lambda^4 \xi^4 |\Delta \varphi_1|^2) dt dx \\ & s \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_3|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \Delta \varphi_3|^2 + s^4 \lambda^4 \xi^4 |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \\ & \leq C \left( s^6 \lambda \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi|^2 dt dx + s^8 \lambda^{10} \int_0^T \int_{\omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx \right. \\ & \quad + s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta \varphi_1|^2 + |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \\ & \quad \left. + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\nabla \Delta \varphi_1|^2 + |\nabla \Delta \varphi_3|^2) dt dx \right), \end{aligned} \quad (41)$$

for every  $s \geq C(T^9 + T^{18})$  and every  $\lambda \geq C$ .

Now, we see that the first term in the right hand side can be absorbed by

the left hand side as long as  $\lambda \geq C$ . For the moment, we have

$$\begin{aligned}
& s^8 \lambda^{10} \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx + s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi_2|^2 dt dx \\
& s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_1|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \Delta \varphi_1|^2 + s^4 \lambda^4 \xi^4 |\Delta \varphi_1|^2) dt dx \\
& s\lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_3|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \Delta \varphi_3|^2 + s^4 \lambda^4 \xi^4 |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \\
& \leq C \left( s^8 \lambda^{10} \iint_{\omega_0}^T e^{-2s\alpha} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx \right. \\
& \quad + s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta \varphi_1|^2 + |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \\
& \quad \left. + s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\nabla \Delta \varphi_1|^2 + |\nabla \Delta \varphi_3|^2) dt dx \right), \tag{42}
\end{aligned}$$

for every  $s \geq C(T^9 + T^{18})$  and every  $\lambda \geq C$ .

### Step 3:

In this final step, we estimate the two last local terms in the right hand side of (42) in terms of  $|\varphi_1|^2$  and  $|\varphi_3|^2$  and small constants multiplied by the left hand side of (42).

We start by estimating the terms on  $\nabla \Delta \varphi_1$  and  $\nabla \Delta \varphi_3$ . Let  $\omega_1$  be an open subset satisfying  $\omega_0 \subset\subset \omega_1 \subset\subset \omega$  and let  $\rho_1 \in C_c^2(\omega_1)$  with  $\rho_1 \equiv 1$  in  $\omega_0$  and  $0 \leq \rho_1$ . Then, an integration by parts gives

$$\begin{aligned}
& s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\nabla \Delta \varphi_1|^2 + |\nabla \Delta \varphi_3|^2) dt dx \\
& \leq s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} \rho_1 e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\nabla \Delta \varphi_1|^2 + |\nabla \Delta \varphi_3|^2) dt dx = \\
& \quad - s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} \rho_1 e^{-2s\alpha} \xi^3 \Delta^2 \varphi_1 \Delta \varphi_1 dt dx \\
& \quad + \frac{s^3 \lambda^4}{2} \iint_{\omega_1 \times (0, T)} \Delta(\rho_1 e^{-2s\alpha} \xi^3) |\Delta \varphi_1|^2 dt dx \\
& \quad - s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} \rho_1 e^{-2s\alpha} \xi^3 \Delta^2 \varphi_3 \Delta \varphi_3 dt dx \\
& \quad + \frac{s^3 \lambda^4}{2} \iint_{\omega_1 \times (0, T)} \Delta(\rho_1 e^{-2s\alpha} \xi^3) |\Delta \varphi_3|^2 dt dx.
\end{aligned}$$

Using the Cauchy-Schwarz's inequality for the first and third terms in the right hand side and the estimate

$$|\Delta(\rho_1 e^{-2s\alpha} \xi^3)| \leq C s^2 \lambda^2 \xi^5 e^{-2s\alpha}, \quad s \geq CT^{18}, \lambda \geq C$$

for the second and fourth ones, we obtain for every  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} s^3 \lambda^4 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\nabla \Delta \varphi_1|^2 + |\nabla \Delta \varphi_3|^2) dt dx \\ \leq C_\epsilon s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta \varphi_1|^2 + |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \\ + \epsilon s \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_1|^2 + |\Delta^2 \varphi_3|^2) dt dx \end{aligned}$$

for every  $s \geq CT^{18}$  and every  $\lambda \geq C$ . Using this in (42), we obtain

$$\begin{aligned} s^8 \lambda^{10} \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx + s^6 \lambda^8 \iint_Q e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^6 |\varphi_2|^2 dt dx \\ s \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_1|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \Delta \varphi_1|^2 + s^4 \lambda^4 \xi^4 |\Delta \varphi_1|^2) dt dx \\ s \lambda^2 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi (|\Delta^2 \varphi_3|^2 + s^2 \lambda^2 \xi^2 |\nabla \Delta \varphi_3|^2 + s^4 \lambda^4 \xi^4 |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \\ \leq C \left( s^8 \lambda^{10} \int_0^T \int_{\omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^8 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx \right. \\ \left. + s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta \varphi_1|^2 + |\Delta \varphi_3|^2) dt dx \right), \end{aligned} \tag{43}$$

for every  $s \geq C(T^9 + T^{18})$  and every  $\lambda \geq C$ .

Let us now estimate  $\Delta \varphi_1$  (the same can be done for  $\Delta \varphi_3$ ). Let  $\omega_2$  be an open subset satisfying  $\omega_1 \subset \subset \omega_2 \subset \subset \omega$  and let  $\rho_2 \in C_c^2(\omega_2)$  with  $\rho_2 \equiv 1$  in  $\omega_1$  and  $\rho_2 \geq 0$ . Then, integration by parts gives

$$\begin{aligned} s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\Delta \varphi_1|^2 dt dx &\leq s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_2 \times (0, T)} \rho_2 e^{-2s\alpha} \xi^5 |\Delta \varphi_1|^2 dt dx \\ &= -s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_2 \times (0, T)} \rho_2 e^{-2s\alpha} \xi^5 (\nabla \Delta \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1) dt dx \\ &\quad - s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_2 \times (0, T)} \nabla(\rho_2 e^{-2s\alpha} \xi^5) \cdot \nabla \varphi_1 \Delta \varphi_1 dt dx. \end{aligned}$$

Using again the Cauchy-Schwarz's inequality for the first term and estimate

$$|\nabla(\rho_2 e^{-2s\alpha} \xi^5)| \leq C s \lambda \xi^6 e^{-2s\alpha}, \quad s \geq CT^{18}, \lambda \geq C$$



for the second one, we obtain for every  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} s^5 \lambda^6 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\Delta \varphi_1|^2 dt dx &\leq C_\epsilon s^7 \lambda^8 \iint_{\omega_2 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\nabla \varphi_1|^2 dt dx \\ + \epsilon s^3 \lambda^4 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \Delta \varphi_1|^2 dt dx & \end{aligned} \quad (44)$$

for every  $s \geq CT^{18}$  and every  $\lambda \geq C$ . Finally, we locally estimate  $\nabla \varphi_1$  and  $\nabla \varphi_3$  in terms of  $\varphi_1$  and  $\varphi_3$  by a completely analogous argument:

$$\begin{aligned} s^7 \lambda^8 \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^7 (|\nabla \varphi_1|^2 + |\nabla \varphi_3|^2) dt dx \\ \leq C_\epsilon s^9 \lambda^{10} \iint_{\omega_2 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^9 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_3|^2) dt dx \\ + \epsilon s^5 \lambda^6 \iint_Q e^{-2s\alpha} \xi^5 (|\Delta \varphi_1|^2 + |\Delta \varphi_3|^2) dt dx. \end{aligned}$$

This estimate, together with (43) and (44), readily gives the desired Carleman inequality (25). This concludes the proof of Proposition 8.

## 4 Some open problems

### 4.1 Local exact controllability of the Navier-Stokes system with two scalar controls and general control subdomains

Let us consider the Navier-Stokes system

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = v 1_\omega & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (45)$$

It would be interesting to know whether (45) is locally exactly controllable to the smooth trajectories with controls having one vanishing component but with no assumption on  $\omega$ . Let us recall that, in Remark 2, we proved that this is the case when  $\omega$  satisfies (2).

Let us consider the quasi-Stokes system

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(t, x)y + (B(t, x) \cdot \nabla) y + \nabla p = v 1_\omega & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

We would like to prove that, when  $a$  and  $B$  are regular enough, this system is null controllable with controls having one vanishing component and no assumption

on the control domain. Then, a fixed-point argument would yield the desired result for the Navier-Stokes system.

Another approach relies on considering the Stokes system with a right-hand side:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = v1_\omega + f & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Here, one has to prove that, if  $e^{C/(T-t)}f \in L^2(Q)^3$  (for instance), there exists  $v$  with one vanishing component such that  $y|_{t=T} \equiv 0$ . Thanks to the quadratic nature of the nonlinear term  $(y \cdot \nabla)y$ , this would provide a result for the Navier-Stokes system, at least when  $\bar{y} \equiv 0$ .

These two properties for the linear systems seem to be open.

#### 4.2 Local exact controllability of the Navier-Stokes system in a torus with one scalar control

Let  $L_1 > 0$  and  $L_2 > 0$  and let  $\mathbb{T}_2$  be the flat torus  $(\mathbf{R}/L_1\mathbb{Z}) \times (\mathbf{R}/L_2\mathbb{Z})$ . Consider the Navier-Stokes system with distributed control in some open set  $\omega$ . For the sake of simplicity, let us suppose that the vanishing component is the second one:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 1_\omega(v_1, 0) & \text{in } (0, T) \times \mathbb{T}_2, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } (0, T) \times \mathbb{T}_2, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \mathbb{T}_2. \end{cases} \quad (46)$$

The linearized system around 0 is the following:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = 1_\omega(v_1, 0) & \text{in } (0, T) \times \mathbb{T}_2, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } (0, T) \times \mathbb{T}_2, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{in } \mathbb{T}_2. \end{cases} \quad (47)$$

Let us consider the space

$$H_0 := \left\{ y = (y_1, y_2) \in H : \int_{\mathbb{T}_2} y_2 dx = 0 \right\}.$$

We recall that the Cauchy problem for (46) and (47) is well posed for an initial data  $y_0 \in L^2(\mathbb{T}_2)^2$ ,  $v_1 \in L^2((0, T) \times \mathbb{T}_2)$  and  $y \in L^2((0, T); H^1(\mathbb{T}_2))^2 \cap H^1((0, T); H^{-1}(\mathbb{T}_2))^2$ . Observe that  $H_0$  is invariant for (46) and (47). However, (47) is far from being null controllable in  $H_0$ . Indeed, let  $n \in \mathbb{Z}$ , let  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ , and let  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{T}_2)$  be defined by

$$\zeta(x_1, x_2) := \lambda_1 \sin\left(\frac{2n\pi x_1}{L_1}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{2n\pi x_1}{L_1}\right), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{T}_2. \quad (48)$$

Let us multiply the second equation in (47) by  $\zeta$ . Integrating this new equality on  $\mathbb{T}_2$ , simple integrations by parts show that, whatever is  $v_1 \in L^2(Q)$ , any solution  $y$  to (47) satisfies

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}_2} \zeta y_2 dx = -\frac{4n^2 \pi^2}{L_1^2} \int_{\mathbb{T}_2} \zeta y_2 dx. \quad (49)$$

In particular

$$\left( \int_{\mathbb{T}_2} \zeta y_0 \cdot e_2 dx \neq 0 \right) \Rightarrow (y(T, \cdot) \neq 0),$$

where  $e_2 := (0, 1)$ .

In order to get a null controllability result for the Navier-Stokes system, one has to take into account the nonlinear term  $(y \cdot \nabla)y$ . This has been done in [5], where the authors use the so called *return method* to prove a local result.

It would be interesting to know if the same result holds locally to the nonzero trajectories of (46). The strategy developed in [5] does not seem to be able to deal with this situation.

## References

- [1] J.-M. CORON, *On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions*, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var., **1** (1996), 35–75.
- [2] J.-M. CORON, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, 136. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [3] J.-M. CORON and FURSIKOV, A.V., *Global exact controllability of the 2-D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary*, Russian J. Math. Physics, Vol. 4, **No. 4** (1996), 1–19.
- [4] J.-M. CORON and S. GUERRERO, *Null controllability of the N-dimensional Stokes system with N – 1 scalar controls*, to appear in Journal of Differential Equations.
- [5] J.-M. CORON and S. GUERRERO, *Local null controllability of the two-dimensional Navier-Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component*, to appear in J. Math. Pures et Appliquées.
- [6] J. I. DÍAZ, A. V. FURSIKOV, *Approximate controllability of the Stokes system on cylinders by external unidirectional forces*, J. Math. Pures Appl. (9), 76 (1997), no 4, 353–375.
- [7] FABRE, C., *Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems*, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var., **1** (1995/96), 267–302.

- [8] E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS, S. GUERRERO AND J.-P. PUEL, *Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: The linear case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 12 (2006), no. 3, 442–465.
- [9] E. FERNÁNDEZ-CARA, S. GUERRERO, O. YU. IMANUVILOV, J.-P. PUEL, *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl. (9) 83 (2004), no. 12, 1501–1542.
- [10] E. FERNÁNDEZ-CARA, S. GUERRERO, O. YU. IMANUVILOV, J.-P. PUEL, *Some controllability results for the  $N$ -dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with  $N-1$  scalar controls*, SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no. 1, 146–173.
- [11] E. FERNÁNDEZ-CARA, E. ZUAZUA, *The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case*, Adv. Differential Equations, no. 5 (2000), p. 465–514.
- [12] A. V. FURSIKOV, O.YU. IMANUVILOV, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes vol. 34 (1996), Seoul National University, Korea.
- [13] A. V. FURSIKOV and O. YU. IMANUVILOV, *Local exact controllability of the Navier-Stokes equations*, Res. Inst. Math. - GARC Preprint Series, 95-92, Feb. 1996.
- [14] S. GUERRERO, *Controllability of systems of Stokes equations with one control force: existence of insensitizing controls*, Annal. de l'Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, **24** (2007), 1029–1054.
- [15] O. YU. IMANUVILOV, *Controllability of parabolic equations* (Russian), Mat. Sbornik. Novaya Seriya, **186** (1995), 109–132.
- [16] O. YU. IMANUVILOV, *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **6** (2001), 39–72.
- [17] O. YU. IMANUVILOV and M. YAMAMOTO, *Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York, **218** (2001), 113–137.
- [18] J.-L. LIONS, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Review, **30** (1988), 1–68.
- [19] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation et Perturbations de Systèmes Distribués*, Tomes 1 & 2. Masson, RMA **8** & **9**, Paris 1988.
- [20] J.-L. LIONS, *Are there connections between turbulence and controllability ?*, Lecture Notes Control and Inf. Sciences 144 (1990), Springer-Verlag, A. Bensoussan and J.-L. eds.

- [21] J.-L. LIONS, E. ZUAZUA, *A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences*. In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 221–235. Dekker, New York, 1996.
- [22] J.-L. LIONS and E. ZUAZUA, *Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier-Stokes equations*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **XXVI** (1998), 605–621.
- [23] D. L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions*, *SIAM Review*, **20** (1978), 639–739.
- [24] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. Studies in Mathematics and its applications*, **2**; North Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford (1977).
- [25] R. TEMAM, *Behaviour at time  $t = 0$  of the solutions of semilinear evolution equations*, *J. Differential Equations* **43** (1982), no. 1, 73–92.
- [26] E. ZUAZUA, *Exact boundary controllability for the semilinear wave equation*, *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, **10** (1989), 357–391.



## TRACKING FLUID INTERFACES APPROACHING SINGULAR EVENTS

HECTOR D. CENICEROS

Department of Mathematics  
University of California, Santa Barbara

`hdc@math.ucsb.edu`

### Abstract

The motion of fluid interfaces often lead to singular events which include pinching, break-up, coalescence, and cusp formation. Numerical simulation can play a key role in the investigation of these fundamental phenomena which is of significant scientific and technological interest. This is however a formidable task which demands an accurate resolution of disparate time and length scales and a faithful representation of physical forces. A survey of front-tracking methods for the investigation of singular or near singular events in interfacial rheology is presented. This review is focused on immersed interface and boundary integral type methods. Recent advances and some salient remaining challenges are also discussed.

**Mots-clés:** *Front-tracking methods, break-up, coalescence, topological singularities, multi-phase flows, surface tension*

**Classement AMS:** *65N38 76B07 76B45 76B70 76D07 76D27*

## 1 Introduction

The dynamics of fluid interfaces that bound drops, bubbles, jets, or layers of fluids with different material properties is a source of intriguing and fascinating singular and small-scale phenomena which include pinching, break-up, coalescence, cusp formation, short capillary waves, and many of the fundamental instabilities in fluids. These examples have inspired, over the course of several decades, the development of many numerical approaches to follow the motion of these free boundaries for a variety of flows. The methods are broadly divided into two main types: *front-tracking and front-capturing*. In a front-tracking method [58, 82, 36, 34, 35, 48], the fluid interface is evolved in time by updating an explicit representation of the interface in the form of links, elements, or Lagrangian markers. In contrast, in a front-capturing approach the interface is embedded as a level set of a function defined in the

---

Fecha de recepción: 19/03/2009. Aceptado (en forma revisada): 07/06/2009.

entire fluid (computational) domain. This function could be an approximation to the distance to the interface (level set method [57, 24, 76]), a volume fraction of one of the two component in a two-phase flow (Volume-Of-Fluid method [69, 63, 66, 60]), or a concentration-related order parameter (phase field method [25, 3, 45, 13, 6, 46, 88]).

Despite significant advances, both approaches, tracking and capturing, have shortcomings when it comes to dealing with topological singularities. In tracking, a decision has to be made to allow or not a topological transition (e.g. break-up, merging) and if so when and how an interfacial reconnection is to be performed. The process remains unsatisfactorily manual and different procedures can lead to dramatically different outcomes (see for example [56]). On the other hand, in a front-capturing method, the transition through a topological singularity occurs without user intervention. While this can be advantageous for some applications that do not require small-scale details of the flow, it is a serious drawback for the investigation of the interfacial rheology immediately preceding a singular or near singular event. The realization of such singular phenomena is very much flow-dependent. Real fluid interfaces can remain in extreme close proximity for some time without reconnecting. Unfortunately, a front-capturing method typically precipitates a topological change under such conditions. Moreover, interacting fluid interfaces frequently develop small-scale structure in the form of localized curvature variations, and short, capillary waves which are difficult to resolve with a front-capturing approach. Thus, despite post-singularity limitations, front-tracking methods appear to be more suitable for the investigation of the interfacial rheology leading to a potential topological singularity.

In this article, we review two classes of tracking methods for the investigation of a potentially singular events in an interfacial flow. The methods considered are based on the boundary integral approach and the immersed boundary method. The presentation and discussion are focused on 2D flows. We present an illustrative example of flow-induced drop coalescence and a case Rayleigh-Taylor instability for both inviscid and viscous flows.

## 2 Boundary integral methods

Boundary integral methods are a powerful numerical tool for a specialized class of problems. These methods have been used extensively to study the motion of single or multiple drops or bubbles in Stokes flows (see e.g. the reviews [1, 2] and [74, 52, 49, 91, 26, 28]). The boundary integral approach is attractive because it reduces the problem to one defined on the interface only. Thus, it provides a framework within which it is possible to achieve, at least in principle, high resolution of interfacial quantities, which is necessary for the investigation of the small scale phenomena that occur during the fundamental processes of coalescence and break-up.

In what follows we are going to assume that we have a fluid interface or immersed boundary  $\Gamma$  represented in parametric form at time  $t$  as  $\mathbf{X}(\alpha, t)$  for



$\alpha \in B$ . Here  $\alpha$  is a Lagrangian parameter, not necessarily arclength, and  $B \subset \mathbb{R}$ .

### 2.1 Inviscid flows

The first example we consider is a density-stratified fluid. The system consists of two infinite layers of fluid which are inviscid, incompressible, and irrotational. A fluid interface  $\Gamma$  separates the layers. We denote the fluid quantities above the interface with the subscript 2 and those below the interface with subscript 1. The fluid in each layer satisfies Euler's equations

$$\rho_i \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i \right) = -\nabla p_i - \rho_i \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad (2)$$

for  $i = 1, 2$ , where  $\rho_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ , and  $p$  are the density, velocity, and pressure respectively. The constant force  $\mathbf{g}$  represents the gravity acceleration. Due to the assumption of irrotationality, we have that in the bulk fluid

$$\nabla \times \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Two boundary conditions are imposed on  $\Gamma$ . A kinematic boundary condition which states that the normal velocity is continuous across  $\Gamma$  and a dynamic boundary condition which takes the form of the so-called Laplace-Young law

$$[p]_{\Gamma} = \tau \kappa, \quad (4)$$

where  $[p]_{\Gamma}$  denotes the jump of pressure across the interface  $\Gamma$ ,  $\kappa$  is the mean curvature, and  $\tau$  is the surface tension coefficient. Note that, in consistency with the kinematic boundary condition, the tangential velocity at the fluid interface is not uniquely determined as it may have a jump discontinuity across  $\Gamma$ .

In two dimensions, it is convenient to work with a complex position variable  $z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t)$  where  $x$  and  $y$  are the two components of  $\mathbf{X}(\alpha, t)$ . Closed (periodic) interfaces and open but periodically extended interfaces in the horizontal direction are commonly used configurations. For the latter we have  $z(\alpha, t) = \alpha + p(\alpha, t)$ , where  $p(\alpha, t)$  is a  $2\pi$ -periodic function of  $\alpha$ .

Taking the tangential velocity to be the average of the limiting velocities above and below the interface, the interface evolves according to the Birkhoff-Rott equation

$$\frac{d\bar{z}}{dt}(\alpha, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(\alpha', t) \cot \frac{1}{2}(z(\alpha, t) - z(\alpha', t)) d\alpha', \quad (5)$$

where the periodicity has been employed to obtain a closed form of the kernel. In (5)  $\bar{z}$  is the complex conjugate of  $z$  and  $\gamma$  is the unnormalized vortex sheet strength. The above integral should be understood as the Cauchy principal-value integral. If the interface is closed, then  $z(\alpha, t)$  is a periodic function of  $\alpha$  the the Birkhoff-Rott equation becomes

$$\frac{d\bar{z}}{dt}(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha'. \quad (6)$$

Using Euler's equations (1) on both sides of  $\Gamma$  we can obtain an evolution equation for this vortex sheet strength in the form [8]:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2A \left( \text{Re} \left\{ \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} z_\alpha \right\} + \frac{1}{8} \partial_\alpha \left( \frac{\gamma^2}{|z_\alpha|^2} \right) + gy_\alpha \right) + S\kappa_\alpha, \quad (7)$$

where  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  is the Atwood number and  $S = \tau/(\rho_1 + \rho_2)$  is a scaled surface tension parameter. Due to the first term in the right hand side of (7), this is a Fredholm integral equation of the second kind for  $d\gamma/dt$ . It can be shown that this equation has a globally convergent Neumann series [8] and as a result, it can be solved efficiently via fixed point iteration. Of course, if  $A = 0$  (density matched case) then  $d\gamma/dt$  is given explicitly; this is the classical, inertial vortex sheet case. Equations (5) and (7) completely determine the motion of the free boundary.

### 2.1.1 Numerical methods

The design of numerical methods for (5) or (6) and (7) appears deceptively simple; just specify a quadrature  $Q_h$  to evaluate the integral in (5), an approximation  $D_h$  to the derivative  $\partial_\alpha$ , and a time stepping scheme. Unfortunately, boundary integral methods for inviscid flows are notoriously sensitive to numerical instabilities [50, 67, 30]. This problem is exacerbated by the presence of surface tension as it contributes with nonlinear terms with high order derivatives. In the case of 2D water waves, Beale, Hou, and Lowengrub [10] showed that a delicate balance of leading order singular operators that exists at the continuum level must be retained at the discrete level to achieve numerical stability. As a consequence,  $Q_h$  and  $D_h$  cannot be chosen independently. The stability analysis in [10] was subsequently extended to the more general case of two-fluid interfaces with surface tension in [16].

The presence of surface tension also induces a time-step constraint to explicit time integration schemes of the form

$$\Delta t < \frac{C}{S} (\min_i \Delta s_i)^{3/2}, \quad (8)$$

where  $\Delta s_i = |z_\alpha| h$  is the spacing between Lagrangian markers,  $h = 2\pi/N$ , and  $N$  is the total number of markers or interfacial points. This constraint is typically a severe one due to excessive clustering of Lagrangian points as these are advected by the flow. The numerical stiffness introduced by surface tension was a serious limitation to long time simulations of interfacial flows in 2D via boundary integral techniques. An efficient approach that overcame this difficulty was proposed by Hou, Lowengrub, and Shelley [41]. The central idea of their method is to employ more convenient variables to describe the interface position, namely the tangent angle  $\theta$  and the arclength metric  $\sigma = |z_\alpha|$ , to extract leading order terms at small scales (high wave numbers), and to treat the latter implicitly. Indeed, in terms of  $\theta$  and  $\sigma$ , we have that the curvature has the simple form  $\kappa = \frac{1}{|z_\alpha|} \theta_\alpha$ . Henceforth, we denote with the subscript  $\alpha$

differentiation with respect to that variable. This expression for the curvature can be further simplified by selecting a parametrization or frame that produces a spatially independent arclength metric  $|z_\alpha|$ , i.e. one in which the Lagrangian particles remain equidistributed in arclength. Such a dynamic parametrization change can be achieved by exploiting the freedom in specifying the tangential velocity [41].

Let  $W = \frac{d\bar{z}}{dt}$ , then we can write the flow's normal and tangential components of the velocity at  $\Gamma$  as  $U^N = -Im\{e^{i\theta}W\}$  and  $U^T = Re\{e^{i\theta}W\}$  with  $Re$  and  $Im$  denoting the real and imaginary parts respectively. The boundary integral representation (5) and (7) can be reformulated in the new frame and variables as

$$\sigma_t = (U^T + U^A)_\alpha - \theta_\alpha U^N. \quad (9)$$

$$\theta_t = \frac{1}{\sigma} [U_\alpha^N + \theta_\alpha (U^T + U^A)], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_t = S \left( \frac{\theta_\alpha}{\sigma} \right)_\alpha + \left( \frac{\gamma}{\sigma} U^A \right)_\alpha \\ - 2A \left[ Re\{\sigma e^{i\theta} W_t\} + \frac{1}{8} \left( \frac{\gamma}{\sigma} \right)_\alpha^2 + g\sigma \sin\theta - U^A Re\{e^{i\theta} W_\alpha\} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

where  $U^A$  is an added tangential velocity that can be used to control the spacing of Lagrangian particles. In particular, one could choose a  $U^A$  that renders a space-independent  $\sigma$  that is equal to its average at all times

$$\sigma(\alpha, t) = \langle \sigma \rangle, \quad (12)$$

where  $\langle \cdot \rangle$  stands for the mean in  $\alpha$  over one period. It is easy to show that if

$$U^A = -U^T + \int_0^\alpha [\theta_\alpha U^N - \langle \theta_\alpha U^N \rangle] d\alpha', \quad (13)$$

then the constraint (12) is enforced at all times provided it holds initially. With this choice of  $U^A$ , (9) becomes the ordinary differential equation

$$\sigma_t = -\langle \theta_\alpha U^N \rangle. \quad (14)$$

The leading order terms at small scales can be easily extracted from this formulation. Extending the periodic integrand in (5) to the entire real line we can write

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha')}{z(\alpha) - z(\alpha')} d\alpha' = \frac{1}{2iz_\alpha} \mathcal{H}[\gamma] + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha') g(\alpha, \alpha') d\alpha', \quad (15)$$

where  $\mathcal{H}$  is the Hilbert transform defined by

$$\mathcal{H}[f](\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\alpha')}{\alpha - \alpha'} d\alpha', \quad (16)$$

and  $g$  is a smooth function. Thus, it follows that

$$U^N(\alpha, t) = \frac{1}{2\sigma} \mathcal{H}[\gamma](\alpha, t) + R_s[\gamma](\alpha, t), \quad (17)$$

where  $R_s$  is a smoothing operator in the sense that if  $z(\alpha, t)$  is a real analytic function of  $\alpha$  for  $t \leq T$  and  $\sigma > 0$  then the Fourier transform of  $R_s$  satisfies  $\hat{R}_s[\gamma] = O(e^{-\rho|k|\hat{\gamma}})$  for large wavenumber  $|k|$ . Here,  $\rho > 0$  is the width of the strip of analyticity about the real axis. If  $z(\alpha, t)$  is only  $C^m$  then  $\hat{R}_s[\gamma] = O(|k|^{-m}\hat{\gamma})$ . Thus, at high modes,

$$\frac{1}{\sigma} U_\alpha^N \sim \frac{1}{2\sigma^2} \Lambda[\gamma],$$

where  $\Lambda = \partial_\alpha \mathcal{H}$  and by  $\sim$  we mean equivalent modulo a smoothing operator. The evolution equations for  $\theta$  and  $\gamma$  can now be written in a form that reveals the leading order behavior at small scales:

$$\theta_t = \frac{1}{2\sigma^2} \Lambda[\gamma] + P, \quad (18)$$

$$\gamma_t = \frac{S}{\sigma} \theta_{\alpha\alpha} + Q, \quad (19)$$

where  $P$  is defined as the right hand side of (10) minus the high mode leading term and  $Q$  is the right hand side of (11) without the surface tension term. Note that both leading order terms in (18) and (19) are diagonal in Fourier space. Consequently, a semi-implicit discretization in which these two terms are treated implicitly while keeping  $P$  and  $Q$  explicitly produces a simple  $2 \times 2$  linear system for each mode  $k$ . A fourth order implicit/explicit SBDF method [4] has been used successfully in several applications [41, 42, 16, 17, 18, 23].

The leading order terms at small scales (high modes) balance each other out. Indeed, if we multiply (18) by  $\Lambda[\theta]$  and (19) by  $\gamma/(2S\sigma)$  and note that  $\theta_{\alpha\alpha} = -\Lambda^2\theta$  we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \theta \Lambda[\theta] d\alpha = -\frac{1}{2\sigma^2} \int \Lambda[\theta] \Lambda[\gamma] d\alpha + \dots \quad (20)$$

$$\frac{1}{4\sigma S} \frac{d}{dt} \int \gamma^2 d\alpha = -\frac{1}{2\sigma^2} \int \Lambda[\theta] \Lambda[\gamma] d\alpha + \dots \quad (21)$$

To guarantee numerical stability it is crucial to maintain this type of balance among leading order terms at the discrete level. This balance and hence numerical stability can be achieved with a spectral spatial discretization and suitable de-aliasing filtering as proved in [16]. For both configurations,  $\Gamma$  closed or  $z(\alpha, t) = \alpha + p(\alpha, t)$  with  $p(\alpha, t)$  periodic, it is possible to obtain a spectral discretization in  $\alpha$  of the evolution equations (9)-(11). The Birkhoff singular integral in (5) or in (6) can be computed with spectral accuracy via the alternate-point trapezoidal rule [71, 70]

$$W_i = \frac{1}{4\pi i} \sum_{\substack{j=-N/2+1 \\ (j-i) \text{ odd}}}^{N/2} \gamma_j \cot \frac{1}{2}(z_i - z_j) 2h, \quad (22)$$

where  $h = 2\pi/N$ , with  $N$  even. This quadrature results from Richardson extrapolation and cancels out the kernel's singularity. Derivatives with respect to  $\alpha$  can be computed (pseudo) spectrally via the Fast Fourier Transform (FFT).

### 2.1.2 Potential pinch-off in unstably stratified 2D flows

One of the fundamental instabilities in incompressible fluids takes place at the interface of two fluids with different densities when the lighter fluid is accelerated into the heavier fluid [31]. This instability is called Rayleigh-Taylor (RT) [65, 77] and is believed to play a preeminent role in fluid mixing which is important in a wide variety of applications. Due to its fundamental relevance and applications, several numerical studies have been performed [27, 7, 64, 9, 78, 33, 39, 35, 84, 5, 40] and the RT instability has also served as a test case for numerical methods of multi-phase flows [38, 11, 63, 16, 60].

In the absence of any regularizing mechanism, an unstably stratified inviscid fluid system is linearly ill-posed due to the RT instability. Surface tension can provide a physically-based regularization to the RT instability and at the same time also be a driving force in nonlinear regimes. A number of experimental [83] and numerical studies [78, 11, 60, 16] of the RT instability have shown that for an interface that is initially a single-mode perturbation of a flat sheet (single-mode setup), at small to moderate Atwood numbers, the interface develops thin fluid fingers that subsequently roll-up and form a mushroom shaped configuration. However, in some of the numerical studies that show roll-up and eventual drop formation there is no surface tension and thus the regularizing mechanisms are purely numerical. Thus, to understand the critical effects of surface tension it is of paramount importance that these are captured accurately and are not overshadowed by numerically induced regularizations. This is particularly relevant near a potentially singular event such as pinch-off or drop formation. The spectrally accurate, non-stiff, boundary integral method described in 2.1.1 provides an effective tool for such an investigation in the case of inviscid flows.

As an illustration of the importance of surface tension effects on the long-time motion of an unstably stratified *inviscid* fluid we consider a case originally reported in [16] of an initial single mode perturbation

$$z(\alpha, 0) = \alpha + i\epsilon \cos(2\pi\alpha), \quad (23)$$

$$\gamma(\alpha, 0) = 0, \quad (24)$$

where  $\epsilon = 0.1$  and we take  $A = -0.1$ ,  $g = 10$ , and  $S = 0.005$ . Figure 1 shows the time evolution of the interface for a calculation employing  $N = 1024$  and  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ . Near  $t = 0.8$ , the interface becomes vertical in two symmetric positions about  $x = 0.5$ . Two small fluid fingers develop and subsequently roll up. A close-up look at the subsequent dynamics is presented in Fig. 2 where capillary waves emanating from the rolled up fingers could be clearly observed. Opposite to the finger tips of the heavier fluid, small bumps with high curvature develop and the two opposite sections of the interface approach

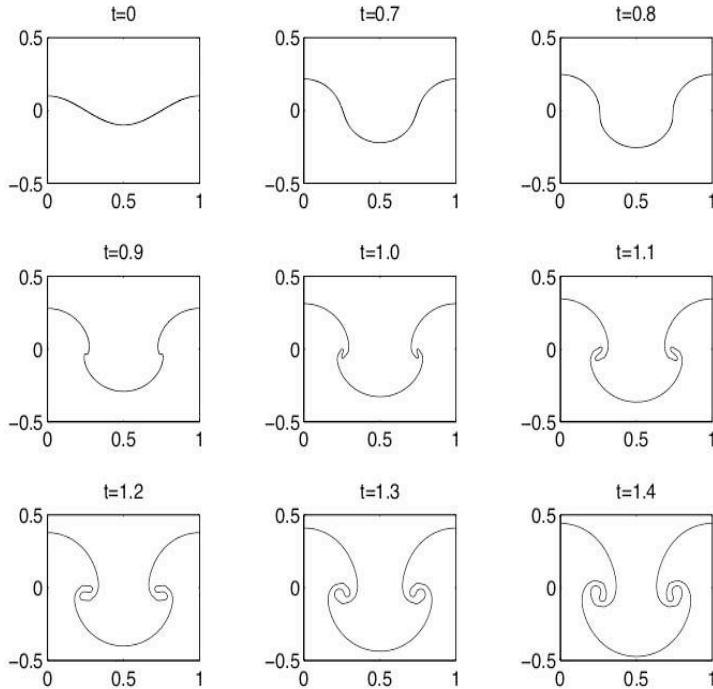


Figure 1 – Unstably stratified inviscid flow: Time evolution of the interface with  $A = -0.1$  and  $S = 0.005$ .  $N = 1024$  and  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ .

each other during roll-up. During this process a thin film ensues and the interfacial portions in close proximity develop large curvatures as the thin film drains. Figure 3a shows the interface profile at  $t = 1.785$  and Fig. 3b displays the minimum interfacial separation or thin film thickness which continues to decrease in time. The monotone behavior of the thin film thickness is a strong indication of a finite-time topological singularity formation. A fit to a curve of the form  $d(t) = C(t_c - t)^{2/3}$ , shown as a solid line in Fig. 3b, shows good agreement with the numerical data. This suggests that the interface might collapse with a  $2/3$  exponent but a further numerical and analytical study is needed to have a more conclusive answer; this is still an open problem.

A remarkably similar topological singularity formation was also observed by Hou, Lowengrub, and Shelley [42] in their investigation of vortex sheet (density matched) undergoing Kelvin-Helmholtz instability in the presence of surface tension. The coinciding aspects of these two different problems, Kelvin-Helmholtz instability and RT instability, suggests that surface tension leads to and ultimately determines the type of interfacial collapse. This topological singularity is truly surprising as it is driven by surface tension and it takes place in a 2D flow where the azimuthal component of the curvature is absent.

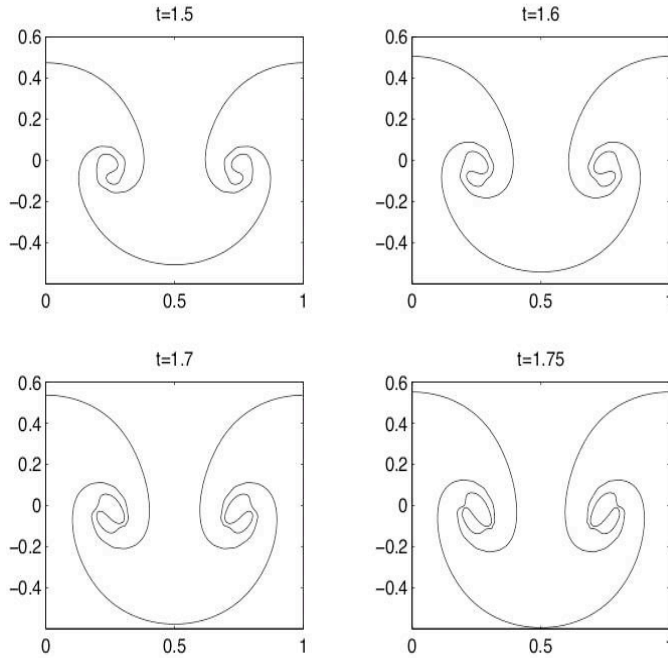


Figure 2 – Unstably stratified inviscid flow:  $A = -0.1$  and  $S = 0.005$ . Sequence of interface positions.  $N = 2048$  and  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ .

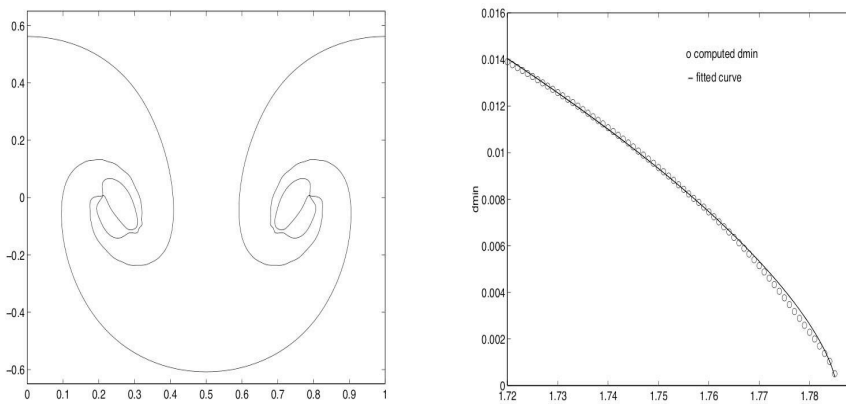


Figure 3 – Unstably stratified inviscid flow:  $A = -0.1$  and  $S = 0.005$ . (a) Interface position at  $t = 1.785$  and (b) minimum separation against time. The circles represent the computed values and the solid line a fitted curve of the form  $d(t) = C(t_c - t)^{2/3}$ .

## 2.2 Stokes flows

The problem of flow-induced drop coalescence has received considerable recent attention due to the role that this process plays in the formation of polymer blends, which is currently the major route to new polymeric materials with desired macroscopic properties. The understanding of the conditions for coalescence and their dependence on fluid and flow properties is critical for controlling this process.

In coalescence experiments with drops whose diameters are  $O(100)$  microns [47, 86], the Reynolds number  $Re$ , which is a relative measure of inertia versus viscous forces, is very small and inertia can be neglected (Stokes flow). In such situations, a boundary integral representation of the interfacial velocity can be obtained in terms of the jump in the interfacial surface force. This representation, as a computational method, was first described by Youngren and Acrivos [87] and since then significant progress has been made in the extensions of the boundary integral formulation and on improvements of its accuracy as reviewed by Pozrikidis [61, 62].

Let us consider two drops of Newtonian fluid with viscosity  $\mu_d$  surrounded by an unbounded Newtonian fluid of viscosity  $\mu_e$  and affected by an external flow field  $\mathbf{u}^\infty$ . Neglecting inertia terms, the velocity components  $u_j$  on the drop surfaces  $S_1$  and  $S_2$  can be written in the following boundary integral representation (using the summation convention over repeated indices) [61] :

$$u_j(\mathbf{x}_0) = \frac{2}{1+\lambda} u_j^\infty(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{4\pi\mu_e(1+\lambda)} \int_S G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [f_i(\mathbf{x})]_S dS(\mathbf{x}) + \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \frac{1}{4\pi} \int_S u_i(\mathbf{x}) T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (25)$$

for  $\mathbf{x}_0 \in S$  and  $j = 1, 2, 3$ . Here  $\lambda = \mu_d/\mu_e$ ,  $S = S_1 + S_2$ ,  $n_k$  denotes the components of the (outward) unit normal, and  $[f_i(\mathbf{x})]_S$  expresses the jump in the interfacial force. For example, in the case of uniform surface tension  $[f_i(\mathbf{x})]_S = 2\tau\kappa n_i$ , where  $\tau$  is the surface tension coefficient and  $\kappa$  is the mean curvature, is the classical Laplace-Young formula. In (25),  $G_{ij}$  is the Stokeslet tensor (free space Green's function)

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{\delta_{ij}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}, \quad (26)$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta.  $T_{ijk}$  is the associated stress tensor

$$T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -6 \frac{(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^5}. \quad (27)$$

The integral involving  $G$  is known as the single-layer potential while that involving  $T$  is referred to as the double-layer potential. Given the interfacial force jump  $[f]_S$ , (25) represents a Fredholm integral equation for the interfacial velocity. When the viscosity of the drop and the ambient fluid are matched the velocity is given solely by the single layer integral.



Due to the non-removable singular nature of the integrands in both the single-layer potential and the double-layer potential the design of quadratures with high order uniform accuracy is a challenging problem. The following two flow identities

$$\int_S G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (28)$$

$$\int_S T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) n_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = -4\pi\delta_{ij}, \quad (29)$$

for  $\mathbf{x}_0 \in S$ , are often employed to ameliorate the singularities and to produce bounded integrands. However, it is important to note that higher order derivatives of the integrands remain singular. In addition, the evaluation of the integrals in three dimensions is a costly operation. While there has been some progress in the application of fast multipole techniques to expedite the computation of these boundary integrals [90], the level of resolution and high accuracy required in the 3D exploration of topological singularity events, such as coalescence and break-up, remains largely unattainable.

To reduce the computational complexity, often an assumption of axial symmetry is taken. With this axi-symmetric flow assumption an analytic integration around the axis of symmetry can be performed using cylindrical coordinates and the surface integrals in (25) reduce to line integrals over the curve  $C$  traced by the drops on a plane with fixed (zero) azimuthal angle (see e.g. [61]). The resulting kernels of these line integrals can be expressed in terms of complete elliptic integrals [61]. Using (28)-(29) and the trapezoidal rule it is possible to obtain second order quadratures for the line integrals. Recently, higher order quadratures with error corrections obtained from asymptotic expansions have been proposed in [19].

The components of the normal as well as the curvature can be evaluated with standard finite differences, with splines, or spectrally. To evolve the fluid interfaces (the trace  $C$  of the drops) we again have freedom in specifying the tangential velocity. Thus, we may write

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{u} + U^A \mathbf{t}, \quad (30)$$

where  $\mathbf{t}$  is a unit tangent vector. Equation (30) can be integrated with a high order Runge-Kutta method or a multi-step method.

The following example of flow-induced coalescence in axi-symmetric geometry illustrate some of the computational challenges to investigate this important singular phenomenon.

### 2.2.1 Drop coalescence

In a drop coalescence problem the interfacial region of interaction, which is expected to experience the largest deformation, is very much fixed or can be easily predicted. As a consequence, high resolution can be obtained adaptively

by specifying the additional tangential velocity  $U^A$  so that

$$\sigma(\alpha, t) = R(\alpha) \langle \sigma \rangle, \quad (31)$$

where  $R > 0$  is a smooth function of mean one. Naturally,  $R$  should be chosen to be small around the interaction region that requires high resolution. Examples of such a  $R$  have been presented in [41, 85].

In a Stokes flow approximation coalescence cannot occur in finite time due to lubrication forces unless long-range, van der Waals-type of forces, are taken into account. To a first approximation, these could be modeled by introducing a disruptive pressure into the interfacial force jump so that the surface tension force gets replaced by

$$[f_i(\mathbf{x})]_S = 2\tau\kappa n_i - \frac{A_H^*}{h(\mathbf{x})^3} n_i, \quad (32)$$

where  $A_H^*$  is a scaled Hamaker constant and  $h(\mathbf{x})$  is the drop-drop separation distance (see e.g. [47]).

We present next results originally reported in [85] for a numerical investigation of flow-induced coalescence of two equal-sized drops in axisymmetric flows. The simulation is performed with using the boundary integral formulation described in this section. Normal and tangent vectors, as well as the curvature are computed spectrally by periodic extension of the drop position variable  $\mathbf{X}(\alpha, t)$ . An adaptive Lagrangian mesh is obtained by employing a  $U^A$  to enforce (31) with a judiciously chosen  $R$  to accurately resolve localized, high curvature regions and integration of (30) is performed with a second order Runge-Kutta scheme. The flow is characterized by a capillary number  $Ca = \mu_e GR/\tau$ , where  $G$  is the strain rate of the imposed, steady, bi-axial flow  $\mathbf{u}^\infty$  (to simulate head-on collisions), and  $R$  is the radius of the undeformed drops. The viscosity ratio is  $\lambda = 0.19$ ,  $R = 27.2\mu m$ , and  $A_H^* = 4.99 \times 10^{-11}$ .

Figure 4 compares the center-to-center distance  $d$  of the drop as a function of the dimensionless time  $tG$  for an experiment with that obtained from the boundary integral simulations for  $Ca = 0.0207$ . The insets display the computed drop profile at  $t = 0.815$  when  $d = 2R$  and at  $tG = 2.041$ . The numerical simulation predicts very well the drainage time of the thin film separating the two drops as well as their deformation. Moreover, with the numerics we can look at the interfacial deformation in the neighborhood of the contact region (thin film shape). Such an observation is impossible in the experiments. Figure 5 presents a close-up of the thin film change as it evolves dynamically. The fluid interfaces experience a large deformation at the impending collapse. High resolution is essential for capturing this singular event.

### 3 Immersed boundary-type methods

Fluid interfaces that bound drops, bubbles, and layers composing multi-phase systems can be viewed as immersed structures or boundaries interacting with the flow. There is a myriad of technologically and scientifically important

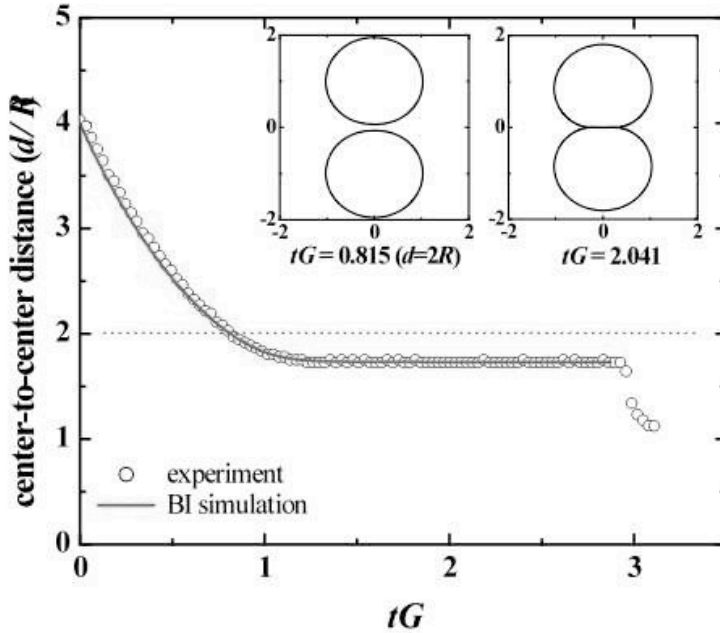


Figure 4 – Comparison of experimentally measured center-to-center distance ( $d/R$ ) versus time  $tG$  with numerical values from boundary integral simulation.  $Ca = 0.0207$ ,  $\lambda = 0.19$ .

problems that can be also described as the interaction of a flow (often of a processing nature) and immersed structures which could be solid or fluid, elastic or rigid, and could come in a broad range of length scales, from nano to macro. Aerodynamic design, insect flight, swimming of microorganisms, cardiac fluid dynamics, and processing of polymeric materials are just a few examples.

The Immersed Boundary (IB) Method introduced by Peskin [58] is a versatile tool for simulating flow-structure interaction for a wide range of applications [59]. The method employs a Lagrangian representation of the immersed structures and their interfacial forces and an Eulerian description of the flow variables (velocity and pressure). The Lagrangian description (tracking) of the immersed boundaries, which does not have to conform to the Eulerian grid, provides a vast structure-building capability while the Eulerian flow description permits the use of efficient flow solvers. The power of the IB Method lies in a seamless connection of the two descriptions by the use of two operations: *spreading* (of interfacial forces) and *interpolation* (of velocity at the immersed boundary), both achieved via mollified delta functions.

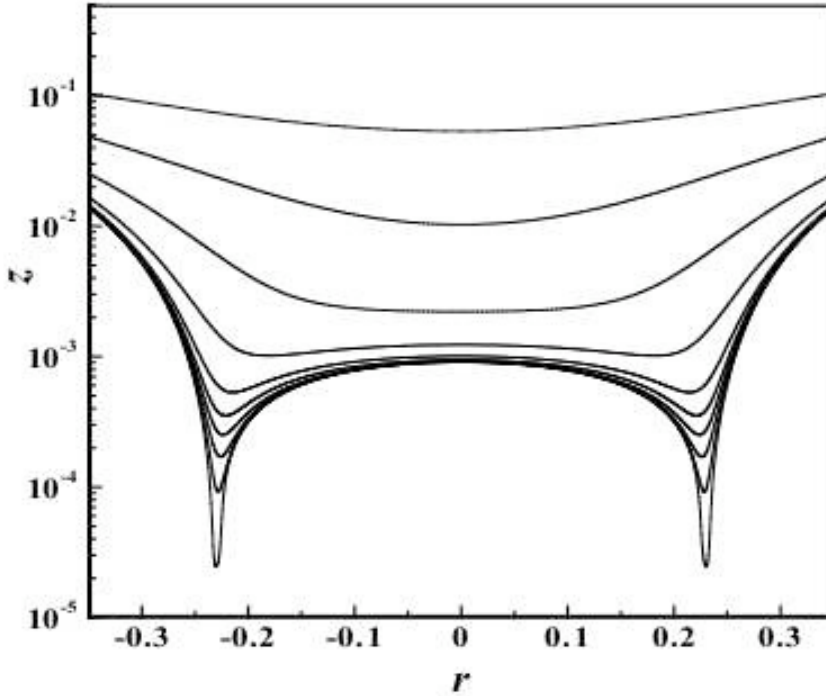


Figure 5 – Profile of the thin film gap as it evolves in time (top to bottom).  $Ca = 0.0207$ ,  $\lambda = 0.19$ .

To describe the method, let us consider an incompressible, Newtonian fluid occupying a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ . Inside this domain we assume that there is an immersed, neutrally buoyant, elastic structure (also referred to as boundary or interface). This fluid-immersed interface is composed of a system  $\Gamma$  of elastic fibers whose position at any time  $t$  is represented in Lagrangian form by  $\mathbf{X}(s, t)$ , where  $s \in B$  is a Lagrangian parameter. The interface  $\Gamma$  need not be closed or even continuous. The governing equations are:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (35)$$

where  $\rho$  and  $\mu$  are the density and viscosity, respectively (both assumed to be constant in the original formulation of the method). Here  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and  $p(\mathbf{x}, t)$  are the velocity field and the pressure, respectively, described in terms of the Eulerian, Cartesian coordinate  $\mathbf{x}$ . The term  $\mathbf{f}$  represents the singularly

supported interfacial (tension) force of the immersed structure acting onto the fluid. The system (33)-(35) is supplemented with initial and boundary conditions. For concreteness in this discussion, let us assume periodic boundary conditions and that  $\Omega$  is a rectangular domain in the plane.

The seamless connection of the Lagrangian representation of the immersed structure with the Eulerian representation of the flow is achieved via the identities:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) d\mathbf{x}, \quad (36)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_B \mathbf{F}(\mathbf{X}(\cdot, \cdot), s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds, \quad (37)$$

where  $\delta$  denotes the Dirac delta distribution. In the IB Method,  $\delta$  is replaced by  $\delta_h(\mathbf{x}) = d_h(x)d_h(y)$  and  $d_h$  is an approximation of the one-dimensional delta which has a support of  $O(h)$ . Thus, interfacial forces are actually spread onto the fluid domain via the discrete version of (37). In (37),  $\mathbf{F}$  represents the elastic force density of  $\Gamma$  and is described in Lagrangian coordinates. It is typically a nonlinear function of the interfacial configuration,  $\mathbf{F} = \mathcal{A}(\mathbf{X})$ . For example, if the tangent direction  $\mathbf{t}$  along the fibers varies smoothly and if the local elastic energy density is assumed to depend only on the tangential strain  $|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}|$  then

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right| \right) \mathbf{t} \right), \quad (38)$$

where  $T(|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}|)$  is the fiber (interfacial) tension. In particular, if  $T$  is constant, we obtain the uniform surface tension force of a clean (surfactant-free) fluid interface.

In a large number of applications, the structures (immersed boundaries) are very stiff and strong *tangential* forces on these interfaces induce severe time-step restrictions for explicit discretizations [73, 72]. Fully implicit methods and some suitable semi-implicit schemes remove this hindering constraint but seemingly at a cost that renders these options impractical [80, 54]. Recently, there has been some progress towards obtaining robust and practical semi-implicit methods in 2D [55, 44, 43, 15] but the corresponding 3D problem remains largely unsolved.

The IB approach can also be used in the case of variable material properties, i.e. for multi-phase flows by endowing it with a procedure to update  $\rho$  and  $\mu$  in time. This is however a nontrivial problem as these material properties might have large (several orders of magnitude) discontinuity jumps (e.g. air-water) across fluid interfaces. Since the material properties are constant in each of the bulk phases and the interface motion is limited by the CFL condition to less than a mesh size in each time step, it is computationally appealing to update these quantities only in a vicinity of the fluid interface.

Several approaches have been proposed in the literature to address this problem. In tracking methods, the simplest procedure would be to sweep the discrete interface element-wise and identify on which side of each element (line segment) the Eulerian grid points next to it appear. However, this

straightforward *local* procedure [81] yields incorrect results when two interfaces or two disparate segments of the same interface lie too close to each other [82, 79]. To prevent this problem, a more *global* approach, where the whole interface is examined for each Eulerian grid point, must be used. Unverdi and Tryggvason [82] proposed a fluid indicator of this type which is built as the solution of a Poisson equation. This equation incorporates the global properties of the interface and can be fast and efficiently solved for typical rectangular domains. However, it must be solved on the entire computational domain and does not take advantage of the fact that the material quantities only change in a vicinity of the interface. Moreover, as reported in [79], this procedure produces oscillations near the fluid interface and inaccuracies away from it.

In the Level Set Method approach [57], the interface is implicitly given by the zero level set of a function  $\phi$  initialized as the signed distance to the fluid interface. Unlike the material properties themselves,  $\phi$  is continuous and can thus furnish a natural fluid indicator for multi-phase incompressible flows. Moreover,  $\phi$  can be evolved easily via a simple advection equation. Inspired by this observation, a hybrid Level Set-Front Tracking (LeFT) approach was first proposed in [14]. In this hybrid setting, the IB Method equations are supplemented by the level set equation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (39)$$

and the momentum equation changes to

$$\rho(\phi) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu(\phi) [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] + \rho(\phi) \mathbf{g} + \mathbf{f}. \quad (40)$$

Note that the interfacial force  $\mathbf{f}$  is obtained from the explicit Lagrangian representation of the immersed boundary  $\mathbf{X}(\alpha, t)$  using (37) and the interfacial configuration is evolved employing (36). Thus, in this hybrid formulation, the level set function is solely used as a fluid indicator. Given  $\phi$ , the material quantities are obtained by the relations

$$\rho(\phi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)H(\phi), \quad (41)$$

$$\mu(\phi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)H(\phi), \quad (42)$$

where  $\rho_1, \rho_2$  and  $\mu_1, \mu_2$  are the constant densities and viscosities, respectively and  $H(\phi)$  is the Heaviside function defined by

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < 0, \\ 1 & \text{if } \phi \geq 0. \end{cases} \quad (43)$$

Updating  $\phi$  through (39), as it is usually done, quickly leads to a loss of the distance function property of  $\phi$  ( $|\nabla \phi| = 1$ ) due to flow distortion and a re-initialization or re-distancing procedure [76], in which an auxiliary PDE is solved to try to restore  $\phi$ , has to be employed. Moreover, the evolution equation (39) is

solved in the entire computational domain and the local nature of its variation is usually not exploited. An alternative, computationally optimal scheme to compute  $\phi$  was proposed in [21]. The central idea is to employ a fast algorithm (Closest Point Transform, CPT) from *Computational Geometry* [53]. This geometric approach replaces the standard procedures for updating the level set function with an efficient strategy to obtain the signed distance function locally, at optimal cost, and at machine precision for a piece-wise linear representation of the fluid interface.

There has been a recent trend to develop hybrid approaches in an attempt to overcome some of the inherent limitations of traditional tracking and capturing methodologies [60, 75, 14, 32, 29, 21, 89]. The hybrid level-set/front-tracking approach is a particular example of such hybrid strategies that seek to exploit the best features of two different approaches by merging them into one method.

### 3.1 Adaption

Due to the multi-component nature of the flow, the fluid interfaces are subjected to surface tension which plays a fundamental role in nearly all multi-phase flows of physical interest. The presence of a fluid interface acting with a singular force leads to large gradients localized in a vicinity of the free boundary. Moreover, surface tension can induce the production of focused centers of vorticity and to other small scale phenomena whose adequate capturing often demands computationally prohibitive fine resolutions to uniform grid approaches. This problem can be overcome with a judicious use of a *local mesh refinement technique*.

In the context of the IB and IB-based methods spatial adaption has been incorporated in the form of adaptive mesh refinements (AMR) by Roma, Peskin, and Berger [68] and more recently by Griffith, Hornung, McQueen, and C. S. Peskin [37] and by Cenicerros, Roma, da Silveira-Neto, and Villar [22]. This approach employs the hierarchical grid structure proposed by Berger and Colella [12]. Regions of the flow bearing special interest (such as neighborhoods of a fluid interface, regions of high vorticity, etc.) are covered by block-structured grids, defined as a hierarchical sequence of nested, progressively finer levels (*composite grids*). Each level is formed by a set of disjoint rectangular grids and the refinement ratio between two successive refinement levels are constant and equal to two. Ghost cells are employed around each grid, for all the levels, and underneath fine grid patches to formally prevent the finite difference operators from being redefined at grid borders and at interior regions which are covered by finer levels. Values defined in these cells are obtained from interpolation schemes, usually with second or third order accuracy, and not from solving the equations of the problem. The description of composite grids is given in greater details in [12].

There are three main steps in the AMR approach. *Flagging*: a decision is made to mark a particular set of cells whose collection gives the region where refinement is to be applied. *Grid generation*: grids in each level are generated according to the flagged cells by applying the algorithm for point clusterig due to

Berger and Rigoutsos [51]. *Multi-level solves*: effective iterative methods to solve the linear systems that arise in the projection method on the composite grid need to be employed. Multi-level multigrid methods are typically the natural choices and these can be implemented on a level-by-level basis.

### 3.2 RT instability in viscous flow

As we have seen, for inviscid 2D flows at small to moderate Atwood numbers, the interface develops thin fluid fingers that subsequently roll-up and appear to eventually collapse with the adjacent fluid interface giving rise to a topological singularity [16]. A relevant question is how small but finite viscosity would affect such a singular event. Recently, a first examination of the problem has been presented in [22] with the use of an AMR-based LeFT method. The setup in [22] is same as that in the aforementioned inviscid case with the exception of nonzero ( $10^{-4}$ , cgs units) matched viscosities. Specifically,  $A = -0.1$ ,  $\tau = 0.005$ , and  $g = 10$ . The computational domain is the rectangle  $\Omega = [0, 1] \times [-1.5, 1.5]$ , the velocity satisfies the homogeneous Dirichlet condition at the north and at the south borders, and periodic condition in the horizontal direction.

Snapshots of the interfacial profile during the late stages of the motion are presented in Fig. 6. While there is a similar dynamics to that in the inviscid case there are also notable differences in the fine structure of the fluid fingers (c.f. Fig. 2). There are traces of capillary waves emanating from the fingers as in the inviscid counterpart but the interface motion in the viscous flow is much more complex and the fingers undergo a more pronounced deformation and a stretching leading up to a formation of thin, filament-like structures ( $t = 2.28$ ). The close proximity of interfacial segments suggests a possible pinch-off scenario as that in the inviscid case [16]. However, a close look at the time behavior of the minimum distance between adjacent, opposite interfacial segments, Fig. 7, reveals a contrasting outcome. Slightly before  $t = 2.26$ , the decrease of the minimum distance saturates, as clearly indicated by the two highest adaptive resolutions,  $32 \times 64L6$  and  $32 \times 64L7$ , equivalent to uniform grid resolutions of  $1024 \times 2048$  and  $2048 \times 4096$ , respectively. This behavior is reminiscent of the near pinching roll-up observed in a 2D viscous interface undergoing Kelvin-Helmholtz instability where viscous effects appear to prevent finite-time pinching [20, 43]. For the unstably stratified flow, the effects of a viscosity stratification (whether or not this might induce pinch-off) remain to be investigated.

## 4 Concluding Remarks

As the examples presented here illustrate, the accurate capturing of topologically singular or near singular events in the dynamics of fluid interfaces is a challenging problem. But the investigation of these striking events could help to elucidate fundamental phenomena in interfacial rheology as well as to provide an examination of the range of validity of the underlying models.



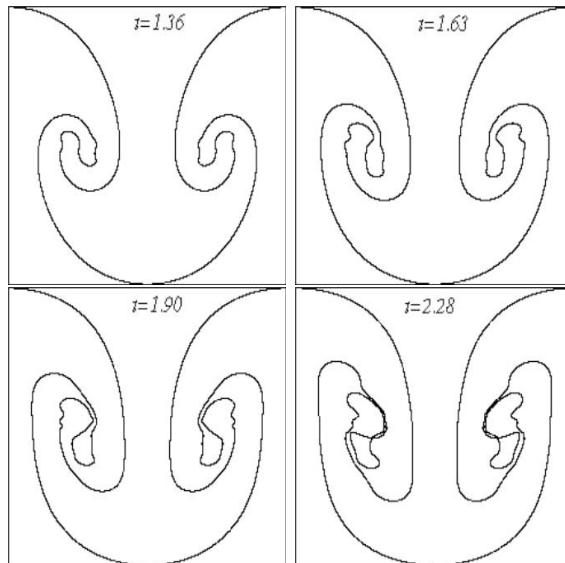


Figure 6 – Unstably stratified *viscous* flow:  $A = -0.1$  and  $\tau = 0.005$ ,  $\mu = 10^{-4}$ . Interfacial profiles.

Topological singularities are not to be taken for granted; they constitute a complex process which is very much flow-dependent and largely not well-understood. The numerical investigation of this type of interfacial problems demands a judicious selection of accurate numerical approaches to ensure that these extremely important singular events are not induced numerically.

We have focused here on 2D problems and on front-tracking methodology based on boundary integral and immersed boundary approaches. More effort is needed to develop the corresponding methodologies in 3D to the level that is required for investigating the small scale details of singular events such as flow-induced coalescence or drop break-up. A strong synergy among theory, experiments, and numerical simulations seems indispensable for the investigation of these important processes. In particular, one could check the accuracy of the theory by comparing experimental results with numerical predictions and as a result improve the models to more faithfully capture the underlying physics. In particular, the numerical investigation of topologically singular problems with models that take into account molecular force interactions coupled to the (macro) flow and that more accurately describe the de facto varying material properties in the vicinity of a fluid interface as well as non-uniform surface tension due to surfactants remains an open and challenging field, particularly in 3D.

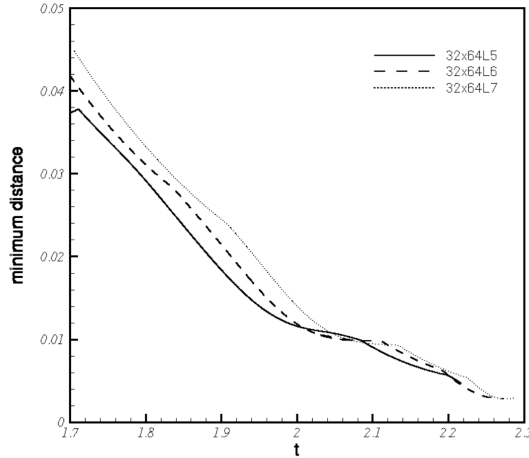


Figure 7 – Evolution of the minimum distance from disparate interface segments.

### Acknowledgments

The author gratefully acknowledges support by the National Science Foundation under Grant # DMS 0609996.

### References

- [1] A. Acrivos. The breakup of small drops and bubbles in shear flows. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 404:1–11, 1983.
- [2] A. Acrivos. The deformation of small viscous drops and bubbles in shear flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 16:45–66, 1984.
- [3] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler. Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30:139, 1998.
- [4] U. M. Ascher, S. J. Ruuth, and B. Wetton. Implicit-Explicit Methods for Partial Differential Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(3):797–823, 1995.
- [5] S. M. Asida, E. Livne, J. Stein, and L. Metzker. 3-D simulations of Rayleigh-Taylor instability using "VULCAN/3D". *Astrophysics and Space Science*, 298:363–367, 2005.
- [6] V. E. Badalassi, H. D. Cenicerros, and S. Banerjee. Computation of multiphase systems with phase field models. *J. Comput. Phys.*, 190:371–397, 2003.

- [7] G. R. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag. Vortex simulations of the Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 23:1485–1490, 1980.
- [8] G. R. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag. Generalized vortex methods for free-surface flow problems. *J. Fluid Mech.*, 123:477–501, 1982.
- [9] G. R. Baker, D. I. Meiron, and S. A. Orszag. Boundary integral methods for axisymmetric and three dimensional Rayleigh-Taylor instability problems. *Physica D*, 12:19–31, 1984.
- [10] J. T. Beale, T. Y. Hou, and J. S. Lowengrub. Convergence of a boundary integral method for water waves. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(5):1797–1843, 1996.
- [11] J. B. Bell and D. L. Marcus. A second-order projection method for variable density flows. *J. Comput. Phys.*, 101:334–348, 1992.
- [12] Berger, M.J. & Colella, P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 82:64–84, 1989.
- [13] F. Boyer. A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows. *Computer & Fluids*, 31(1):41, 2002.
- [14] H. D. Ceniceros. The effect of surfactants on the formation and evolution of capillary waves. *Phys. Fluids*, 15(1):245–256, 2003.
- [15] H. D. Ceniceros, J. E. Fisher, and A. M. Roma. Efficient solutions to robust, semi-implicit discretizations of the Immersed Boundary Method. *J. Comput. Phys.*, 228, 7137–7158, 2009.
- [16] H. D. Ceniceros and T. Y. Hou. Convergence of a non-stiff boundary integral method for interfacial flows with surface tension. *Math. Comput.*, 67:137–182, 1998.
- [17] H. D. Ceniceros and T. Y. Hou. Dynamic generation of capillary waves. *Phys. Fluids*, 11(5):1042–1050, 1999.
- [18] H. D. Ceniceros, T. Y. Hou, and H. Si. Numerical study of Hele-Shaw flow with suction. *Phys. Fluids*, 11(9):2471–2486, 1999.
- [19] H. D. Ceniceros, A. Karniala, and M. Nitsche. High order quadratures for the evaluation of interfacial velocities in axi-symmetric Stokes flows. Submitted, 2009.
- [20] H. D. Ceniceros and A. M. Roma. Study of long-time dynamics of a viscous vortex sheet with a fully adaptive non-stiff method. *Phys. Fluids*, 16:4285–4318, 2004.
- [21] H. D. Ceniceros and A. M. Roma. A multi-phase flow method with a fast, geometry-based fluid indicator. *J. Comput. Phys.*, 205:391–400, 2005.

- [22] H. D. Ceniceros, A. M. Roma, A. da Silveira-Neto, and M. M. Villar. A robust, fully adaptive hybrid level-set/front-tracking method for two-phase flows with an accurate surface tension computation. Submitted, 2009.
- [23] H. D. Ceniceros and J. M. Villalobos. Topological reconfiguration in expanding Hele-Shaw flow. *J. Turbulence*, 3:037, 2002.
- [24] Y. C. Chang, T. Y. Hou, B. Merriman, and S. Osher. A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 124:449–464, 1996.
- [25] R. Chella and V. Viñals. Mixing of a two-phase fluid by a cavity flow. *Phys. Rev. E*, 53:3832, 1996.
- [26] V. Cristini, J. Blawdziewich, and M. Loewenberg. Drop breakup in three-dimensional viscous flows. *Phys. Fluids*, 10:1781–1783, 1998.
- [27] B. J. Daly. Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 10(2):297–307, 1967.
- [28] R. H. Davis. Buoyancy-driven viscous interaction of a rising drop with a smaller trailing drop. *Phys. Fluids*, 11(5):1016–1028, 1999.
- [29] F. S. de Sousa, N. Mangiavacchi, L. G. Nonato, A. Castelo, M. F. Tomé, V. G. Ferreira, J. A. Cuminato, and S. Mckee. A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3D multi-fluid flows with free surfaces. *J. Comput. Phys.*, 198:469–499, 2004.
- [30] J. W. Dold. An efficient surface-integral algorithm applied to unsteady gravity waves. *J. Comput. Phys.*, 103:90–115, 1992.
- [31] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge University Press, New York, 1981.
- [32] S. Manservigi E. Aulisa and R. Scardovelli. A mixed markers and volume-of-fluid method for the reconstruction and advection of interfaces in two-phase and free-boundary flows. *J. Comput. Phys.*, 188:611–639, 2003.
- [33] A. Elgowany and N. Ashgriz. Rayleigh-Taylor instability of viscous fluid layers. *Phys. Fluids*, 9(6):1635–1649, 1997.
- [34] J. Glimm, J. Grove, X.-L. Li, and D. C. Tan. Robust computational algorithms for dynamic interface tracking in three dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(6):2240–2256, 2000.
- [35] J. Glimm, J. W. Grove, X.L. Li, W. Oh, and D. H. Sharp. A critical analysis of Rayleigh-Taylor growth rates. *J. Comput. Phys.*, 169:652–677, 2001.

- [36] J. Glimm, J.W Grove, X.-L. Li, K. M Shyue, Y.N Zeng, and Q. Zhang. Three-dimensional front tracking. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(3):703–727, 1998.
- [37] B. E. Griffith, R. D. Hornung, D. M. McQueen, and C. S. Peskin. An adaptive, formally second order accurate version of the immersed boundary method. *J. Comput. Phys.*, 223:10–49, 2007.
- [38] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [39] X. He, R. Zhang, S. Chen, and G. D. Doolen. On the three-dimensional Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 11(5):1143–1152, 1999.
- [40] M. Horikoshi and K. Nishihara. Vortex generation and deformation of the interface in three-dimensional Rayleigh-Taylor instability. *J. Phys. IV France*, 133:209–212, 2006.
- [41] T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, and M. J. Shelley. Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension. *J. Comput. Phys.*, 114:312–338, 1994.
- [42] T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, and M. J. Shelley. The long-time motion of vortex sheets with surface tension. *Phys. Fluids*, 9(7):1933–1954, 1997.
- [43] T. Y. Hou and Z. Shi. An efficient semi-implicit immersed boundary method for the Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 227:8968–8991, 2008.
- [44] T. Y. Hou and Z. Shi. Removing the stiffness of elastic force from the immersed boundary method for 2D Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 227:9138–9169, 2008.
- [45] D. Jacqmin. Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *J. Comput. Phys.*, 155:96–127, 1999.
- [46] J. Kim, K. Kang, and J. Lowengrub. Conservative multigrid methods for Cahn-Hilliard fluids. *J. Comput. Phys.*, 193:511–543, 2004.
- [47] L.G. Leal. Flow-induced coalescence of drops in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 16:1833–1851, 2004.
- [48] A. L. F. Lima, A. Silveira-Neto, and J. J. R. Damasceno. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *J. Comput. Phys.*, 189:351–370, 2003.
- [49] M. Loewenberg and E. J. Hinch. Numerical simulation of a concentrated emulsion in shear flow. *J. Fluid Mech.*, 321:395–419, 1996.

- [50] M. S. Longuet-Higgins and E. D. Cokelet. The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 350:1–26, 1976.
- [51] M. J. Berger and I. Rigoutsos. An algorithm for point clustering and grid generation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 21(5):1278–1286, September/October 1991.
- [52] M. Manga and H.A. Stone. Buoyancy-driven interactions between deformable drops at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 256:647–683, 1993.
- [53] Mauch, S. *Efficient Algorithms for Solving Static Hamilton-Jacobi Equations*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2003.
- [54] A. A. Mayo and C. S. Peskin. An implicit numerical method for fluid dynamics problems with immersed elastic boundaries. In A. Y. Cheer and C. P. Van Dam, editors, *Fluid Dynamics in Biology: Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Biofluidynamics*, pages 261–277. American Mathematical Society, 1993.
- [55] Y. Mori and C. S. Peskin. Implicit second-order immersed boundary methods with boundary mass. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:2049–2067, 2008.
- [56] M. R. Nobari, Y.-J. Jan, and G. Tryggvason. Head-n collision of drops—A numerical investigation. *Phys. Fluids*, 8(1):29–42, 1996.
- [57] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79:12–49, 1988.
- [58] C. S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys*, 25:220–252, 1977.
- [59] C. S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, pages 477–517, 2002.
- [60] S. Popinet and S. Zaleski. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 30:775–793, 1999.
- [61] C. Pozrikidis. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1992.
- [62] C. Pozrikidis. Interfacial dynamics for Stokes flows. *J. Comput. Phys.*, 169(2):250, 2001.
- [63] E. G. Puckett, A. S. Almgren, J. B. Bell, D. L. Marcus, and W. J. Rider. A high order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 100:269–282, 1997.

- [64] D. I. Pullin. Numerical studies of surface-tension effects in nonlinear Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instability. *J. Fluid Mech.*, 119:507–532, 1982.
- [65] Lord Rayleigh. Investigation of the character of equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 14:170–177, 1883.
- [66] W. J. Rider and D. B. Kothe. Reconstructing volume tracking. *J. Comput. Phys.*, 141:112, 1998.
- [67] A. J. Roberts. A stable and accurate numerical method to calculate the motion of a sharp interface between fluids. *IMA J. Appl. Math.*, 31:13–35, 1983.
- [68] A. M. Roma, C. S. Peskin, and M. J. Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. *J. Comput. Phys.*, 153:509–534, 1999.
- [69] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31:567–603, 1999.
- [70] M. J. Shelley. A study of singularity formation in vortex sheet motion by a spectrally accurate vortex method. *J. Fluid Mech.*, 244:493–526, 1992.
- [71] A. Sidi and M. Israeli. Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations. *J. Sci. Comput.*, pages 67–91, 1988.
- [72] J. M. Stockie and B. R. Wetton. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes. *J. Comput. Phys.*, 154:41–64, 1999.
- [73] J. M. Stockie and B. T. R. Wetton. Stability analysis for the immersed fiber problem. *SIAM J. Appl. Math.*, 55(6):1577–1591, 1995.
- [74] H.A. Stone and L. G. Leal. Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *J. Fluid Mech.*, 198:399–427, 1989.
- [75] M. Sussman and E. G. Puckett. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.*, 162:301–337, 2000.
- [76] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114:146–159, 1994.
- [77] G. I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 201:192–196, 1950.

- [78] G. Tryggvason. Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability. *J. Comput. Phys.*, 75:253–282, 1988.
- [79] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y.-J. Jan. A front-tracking method for computations of multiphase flow. *J. Comput. Phys.*, 169:708–759, 2001.
- [80] C. Tu and C. S. Peskin. Stability and instability in the computations of flows with moving immersed boundaries: a comparison of three methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(6):1361–1376, 1992.
- [81] H. S. Udaykumar, H.-C. Kan, W. Shyy, and R. Tran-Son-Tay. Multiphase dynamics in arbitrary geometries on fixed cartesian grids. *J. Comput. Phys.*, 137:366–405, 1997.
- [82] S. O. Unverdi and G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multifluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100:25–37, 1992.
- [83] J. T. Waddell, C. E. Niederhaus, and J. W. Jacobs. Experimental study of Rayleigh-Taylor instability: low Atwood number liquid systems with single-mode initial perturbations. *Phys. Fluids*, 13(5):1263–1273, 2001.
- [84] S. V. Weber, G. Dimonte, and M. M. Marinak. Arbitrary Lagrange-Eulerian code simulations of turbulent Rayleigh-Taylor instability in two and three dimensions. *Laser and Particle Beams*, 21:455–461, 2003.
- [85] Y. Yoon, F. Baldessari, H. D. Ceniceros, and L. G. Leal. Coalescence of two equally-sized deformable drops in an axisymmetric flow. *Phys. Fluids*, 19:102102, 2007.
- [86] Y. Yoon, A. Hsu, and L.G. Leal. Experimental investigation of the effects of copolymer surfactants in flow-induced coalescence of drops. *Phys. Fluids*, 19:023102, 2007.
- [87] G. K. Youngren and A. Acrivos. On the shape of a gas bubble in a viscous extensional flow. *J. Fluid Mech.*, 76:433, 1976.
- [88] P. Yue, J. J. Feng, C. Liu, and J. Shen. A diffuse-interface method for simulating two-phase flows of complex fluids. *J. Fluid Mech.*, 515:293–317, 2004.
- [89] X. Zheng, J. Lowengrub, A. Anderson, and V. Cristini. Adaptive unstructure volume remeshing-II: Application to two- and three-dimensional level-set simulations of multiphase flow. *J. Comput. Phys.*, 208:626–650, 2005.
- [90] A. Z. Zhinchenko and R. H. Davis. Large-scale simulations of concentrated emulsion flows. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 361:813–845, 2003.



- [91] A. Z. Zinchenko, M. A. Rother, and R. H. Davis. A novel boundary integral algorithm for viscous interaction of deformable drops. *Phys. Fluids*, 9:1493–1511, 1997.



## SEMBRANDO EL CAOS

SANTIAGO IBÁÑEZ, ANTONIO PUMARIÑO  
J. ANGEL RODRÍGUEZ\*

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Oviedo  
C. Calvo Sotelo s/n 33007 Oviedo, España.

jarodriguez@uniovi.es

### Resumen

“Todo cambia constantemente, todo fluye (panta rhei), todo es devenir” Herakleitos (Efeso, 540 a. J. C.).

La visión de este universo en constante evolución ha cambiado en el último siglo. Se expone cómo el determinismo científico se desvanece ante la presencia de los atractores extraños, y se plantean vías para abordar el estudio de la complejidad dinámica que se manifiesta en la mayoría de los fenómenos. Con la mente puesta en los procesos biológicos, se propone establecer una jerarquía en la complejidad dinámica a través de adecuadas secuencias de bifurcaciones locales. La propuesta parte de suponer que toda dinámica global se puede desplegar desde una singularidad que actúa como semilla. Algunos resultados refuerzan esta propuesta y se vuelven muy útiles para comprender la dinámica de sistemas (redes celulares) que surgen por acoplamiento de sistemas más sencillos (células).

**Palabras clave:** *Caos, atractores extraños, despliegues de singularidades*

**Clasificación por materias AMS:** *37Dxx 37Gxx*

## 1 Determinismo e indeterminismo científico

En la concepción del mundo que sigue al Helenismo, el reposo era el estado natural de las cosas. A pesar de que el reposo absoluto repugna a la mente tanto como el vacío o la nada, esta concepción se mantuvo hasta los albores de la Edad Moderna. La refutación del geocentrismo a partir de las propuestas de Giordano Bruno y Copérnico, confirmadas por las observaciones de Galileo, supuso un tránsito paulatino hacia una visión dinámica del universo. Sólo a través de un

---

Fecha de recepción: 01/05/2009. Aceptado (en forma revisada): 18/06/2009.

\*Miembros del Grupo de Sistemas Dinámicos (coco.ccu.uniovi.es/gsd/) de la Universidad de Oviedo.

cambio de mentalidad de este tipo se podría haber llegado a la noción de inercia y a las leyes fundamentales de la Mecánica Clásica, establecidas por Newton. En la actualidad la sentencia de Heráclito de Efeso es inherente a nuestra visión del mundo y toda la actividad científica parece interesarse en último término por alguno de los muchísimos procesos en los que descomponemos el permanente cambio del universo.

Aislado, si es posible, uno de estos procesos de la frecuente interacción de otros fenómenos, se determinan y miden las magnitudes que intervienen y se postulan las leyes que parecen gobernar su comportamiento. Las medidas de las magnitudes se traducen a variables estado, que toman valores en espacios dotados de la estructura matemática necesaria para formular las leyes del comportamiento, y tratar de predecir la evolución de las variables. Se construye así lo que se conviene en llamar un modelo matemático.

La segunda ley de la Mecánica Clásica y otras leyes del comportamiento de los cambios físicos más elementales se expresaron mediante ecuaciones diferenciales cuyas soluciones deberían de ajustarse cuantitativamente a las observaciones experimentales. En muchas ocasiones este objetivo se alcanzó satisfactoriamente, y resolver ecuaciones diferenciales parecía la ruta principal hacia el conocimiento del medio físico. Esta idea se coronaba con el bien conocido pronunciamiento determinista de Laplace.

Con demasiada frecuencia las soluciones de las ecuaciones diferenciales no eran expresables mediante funciones elementales, lo que impulsó la generalización del concepto de función y el desarrollo del análisis funcional. Es en este nuevo contexto donde se formula el concepto de problema bien planteado (unicidad y regularidad de la solución respecto a las condiciones iniciales), punto de partida para un desarrollo teórico que se inicia a finales del siglo XIX acorde con el ideal determinista. El desarrollo de los métodos numéricos ha empujado en esta dirección y en la actualidad muchos procesos, especialmente aquéllos que se modelan mediante ecuaciones en derivadas parciales, se tratan de acuerdo con las exigencias del problema bien planteado. Su formulación ha de garantizar la existencia y unicidad de solución, que podrán ser simuladas mediante aproximaciones en espacios funcionales donde se aplican los diferentes algoritmos numéricos.

Desde esta convicción determinista se puede explicar la propuesta de estudiar la estabilidad del sistema solar, reto de finales del siglo XIX que contaba con un premio de la corona sueca. Sin embargo, como consecuencia del famoso trabajo [39], con el que H. Poincaré accede al galardón, surgirá la alerta sobre la predicibilidad científica de los modelos matemáticos. Sobre una sección transversal a una órbita periódica de un campo vectorial, Poincaré definió un difeomorfismo, conocido hoy en día como la aplicación que lleva su nombre, a fin de reducir el estudio de las soluciones en un entorno de la órbita periódica al análisis de las iteraciones de dicho difeomorfismo. El punto de corte  $p$  de la sección transversal con la órbita periódica es un punto fijo de dicha aplicación. Cuando este punto es hiperbólico de tipo silla existen dos variedades invariantes que se cortan en dicho punto. Una de ellas, la estable, es tangente en  $p$  al autoespacio estable, y las iteraciones positivas por la aplicación de Poincaré de

todos sus puntos convergen a  $p$ . La otra variedad, la inestable, es la variedad estable para la inversa de la aplicación de Poincaré. Ambas variedades se pueden cortar en un punto  $z \neq p$  que recibe el nombre de punto homoclínico. Las sucesivas imágenes de  $z$  por la aplicación de Poincaré y por su inversa son de nuevo puntos homoclínicos, que obligan a las variedades a intersectarse una y otra vez, formando una maraña cuya complejidad fue destacada por Poincaré. A pesar de esta llamada de atención, el estudio de la posible complicación dinámica asociada a la presencia de intersecciones homoclínicas no se inició de inmediato y su desarrollo tuvo lugar a partir de los años sesenta, en los términos que resumiremos más adelante. Mientras tanto, salvo planteamientos como el principio de incertidumbre de Heisenberg, la fuerte concepción de un universo regido por un principio determinista (“Dios no juega a los dados”) mantuvo el estudio cuantitativo como la vía principal para comprender el universo que nos rodea. Esta idea se reforzó con la llegada de los computadores en la segunda mitad del pasado siglo hasta llevar a Von Neumann, en una reedición del principio determinista de Laplace, a vaticinar el éxito de los pronósticos meteorológicos mediante una nutrida red de toma de datos y un seguimiento numérico de los modelos correctamente planteados. Sin embargo, como una linterna que a la vez que proyecta luz en una dirección determinada ilumina también el entorno que le rodea, los avances del cálculo numérico ayudaron a vislumbrar su propia frontera. En su bien conocido trabajo [28], E. N. Lorenz desveló que el tratamiento numérico del flujo de un campo tridimensional cuadrático simulaba una dinámica asintótica (el atractor de Lorenz) de una complejidad geométrica sorprendente y de total impredecibilidad debida a la amplificación exponencial de los errores iniciales. Puesto que el campo estudiado por Lorenz era una simplificación de ciertos desarrollos de Fourier en las ecuaciones que gobiernan los fenómenos de convección atmosférica, las predicciones meteorológicas parecen estar fuera de un pronóstico fiable en plazos temporales deseables.

Después del trabajo de Lorenz y al amparo del desarrollo del cálculo numérico, abundantes publicaciones presentaron modelos sencillos (campos, o iteración de difeomorfismos o aplicaciones, todos en baja dimensión) cuyo tratamiento numérico mostraba la presencia de una gran complejidad dinámica que aparecía después de una secuencia típica de transiciones. Las primeras de estas publicaciones [14],[22], entre otras, aportaron ejemplos canónicos cruciales para orientar en el futuro el estudio de la complejidad dinámica. Por su protagonismo en el desarrollo de este artículo adelantamos la familia de difeomorfismos  $H_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$  estudiada por Hénon [22], en la que se muestra, para  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$ , la existencia de una dinámica asintótica con alta sensibilidad a los errores iniciales y confinada sobre un conjunto de manifiesta estructura fractal: el atractor de Hénon. Otros modelos teóricos, como las iteraciones de sencillas funciones en variable compleja tratadas por Mandelbrot, descubrieron originales estructuras geométricas de inigualable belleza, que representaban con frecuencia formas frecuentes de la naturaleza y estimularon el entusiasmo de determinados sectores intelectuales. Todos estos ejemplos fueron mostrando, en el escenario ideal de los modelos matemáticos,

nuevas dinámicas susceptibles de ser realizadas en los procesos reales, que deberían de ser comprendidas y clasificadas.

En resumen, desde la obtención de las leyes del comportamiento de los cambios físicos más elementales hasta el estudio actual de los numerosos procesos que componen, por ejemplo, el complejo fenómeno de la vida, se postularon principios y se plantearon modelos que permitieron comprender la naturaleza de los cambios y predecir, a veces, aspectos de su evolución. Ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, ecuaciones diferenciales con retardo, ecuaciones en diferencias, procesos estocásticos, ecuaciones funcionales en general, aparecen constantemente en la bibliografía para modelar los más diversos procesos del mundo que nos rodea. El estudio de estos modelos permite concluir a veces resultados cuantitativos de inminente utilidad práctica. Otras veces, el anhelo cuantitativo, animado por el gran desarrollo que las simulaciones numéricas alcanzaron en las últimas décadas, desemboca en una desalentadora impredecibilidad científica, en la medida en la que datos iniciales muy aproximados no implican resultados ajustados después de un tiempo de evolución razonable. La literatura había reservado para este tipo de comportamientos el calificativo de extraño, bien por raro o por desconocido. Sin embargo, en la actualidad ninguna de estas dos acepciones se puede sostener, pues la naturaleza y la abundancia de tales comportamientos han sido bien comprendidas, aunque con ello aparecieron dramáticas barreras del determinismo científico. Situados ya al otro lado de esta barrera, en medio de la complejidad dinámica, se hizo necesario desarrollar, a modo de una teoría de la observación, una exposición ordenada de la diversidad dinámica y de las abundantes transiciones que se iban encontrando. Nació así lo que inicialmente se denominó la teoría de la bifurcación, desarrollada a partir del concepto de estabilidad estructural introducido por Andronov y Pontryagin [3] y que atiende, exclusivamente, a los cambios cualitativos que ocurren en la dinámica de los sistemas cuando estos se perturban.

Restringiendo la teoría de la bifurcación al conjunto de campos que derivan de un potencial, R. Thom desarrolló su famosa teoría de catástrofes [52], según la cual, los distintos comportamientos dinámicos vienen clasificados por las singularidades del potencial. La situación en el caso de la teoría de la bifurcación no resulta tan simple. Para singularidades con variedad central de dimensión  $n \leq 2$  fue posible encontrar familias genéricas de campos  $X_\mu$  que despliegan una singularidad  $X_0$ , para  $\mu = 0$ , de tal modo que todas las dinámicas de los campos en un entorno de  $X_0$  están presentes en la familia  $X_\mu$ , ver, por ejemplo, [51]. En el caso de una variedad central de dimensión  $n \geq 3$ , la mayor riqueza y complejidad dinámica hace que la obtención de este tipo de familias, denominadas versales, no sea posible. A pesar de esta dificultad, el estudio de las singularidades de los campos vectoriales en dimensión tres, o superior, resulta de gran importancia. Nuestro grupo de trabajo ha centrado parte de su investigación en el estudio de estas singularidades [11], [12], [24], [25] y nos hemos interesado en la búsqueda de la singularidad de menor codimensión desde la que se pueda desplegar una determinada dinámica: la existencia de atractores

extraños.

Los atractores extraños son conjuntos invariantes del flujo que capturan toda la dinámica asintótica de un entorno para acabar exhibiendo una dinámica interna impredecible y una estructura complicada. A veces, como en el caso del solenoide de Smale, fueron construidos mediante un proceso de suspensión (atractores extraños asociados a una órbita periódica), otras veces, como en el caso del atractor de Lorenz, su presencia se visualiza directamente de la simulación numérica y su génesis se explica a partir de la existencia de lazos homoclínicos. Pero, ¿son los atractores extraños tan abundantes como para poder desempeñar un papel relevante en la interpretación del universo? Para dar una respuesta satisfactoria es deseable que se puedan encontrar en los escenarios más simples posibles, en aquéllos que se puedan observar con facilidad.

Más fácil de encontrar que el doble lazo homoclínico que justifica la existencia del atractor de Lorenz, o que una órbita periódica con variedades invariantes intersecándose transversalmente, es un lazo homoclínico simple para un punto de equilibrio de tipo foco-silla. Bajo condiciones genéricas Sil'nikov [47] probó que en un entorno de este lazo existen infinitas órbitas periódicas de un conjunto numerable de periodos, lo que era un anticipo de la complejidad dinámica que cabía esperar. La persistencia de atractores extraños en un escenario tan sencillo, incluso la coexistencia no genérica de infinitos de ellos, fue probada en [41] y [42]. La abundancia de este escenario, y por consiguiente la abundancia de atractores extraños, se puso de manifiesto en [25] al probar que las órbitas homoclínicas de tipo Sil'nikov se encuentran en cualquier despliegue genérico de la singularidad nilpotente de codimensión tres. Existen evidencias numéricas de que estas configuraciones se puedan obtener en despliegues genéricos de la única singularidad de codimensión dos con variedad central tridimensional: la singularidad Hopf-cero. La prueba analítica es una cuestión abierta en desarrollo [13]. Resultados de este tipo permiten interpretar las singularidades como semillas de las dinámicas y nos reafirman en el postulado de que todo tipo de dinámica ha de tener un centro primario organizador: una singularidad desde la que se pueda desplegar genéricamente. A fin de garantizar la abundancia de tal singularidad y su fácil localización en las aplicaciones, conviene que su codimensión sea la menor posible.

Con esta idea de la singularidad como semilla dinámica, el paso siguiente es aplicarla para comprender cómo sistemas simples se pueden acoplar a fin de generar dinámicas más complicadas. Se trata de descubrir así rutas hacia la complejidad. Una idea precursora en este sentido fue el trabajo de A. Turing [53] tratando de generar comportamiento periódico acoplando sistemas lineales de reacción-difusión que poseían individualmente un simple equilibrio globalmente atractor: una metáfora de la generación de vida desde el equilibrio. El modelo de Turing no era estructuralmente estable y ello condujo a S. Smale [49] a resolver la cuestión acoplando campos de dimensión cuatro. Trabajos posteriores han rebajado hasta dos la dimensión de los campos.

Los resultados en [24] y [25] han abierto un camino contundente a la hora de probar la generación de caos por acoplamiento de sistemas simples y han

sido aplicados con éxito en un reciente trabajo [10], donde se prueba que el acoplamiento por difusión lineal de dos Brusselator (modelo simple de reacción química en dos variables) conduce a la presencia de atractores extraños. Este resultado va más lejos que las transiciones periódicas propuestas por A. Turing y S. Smale y enriquece considerablemente su metáfora. Además, sugiere un camino para comprender la dinámica generada por acoplamiento, por ejemplo en redes celulares, que es una ruta frecuente hacia la complejidad de los seres vivos. Las dinámicas en estas redes tienen que ver con su arquitectura, que contempla tanto la dinámica interna de cada célula como el tipo de interacción entre ellas.

Con paso rápido se ha pretendido describir en qué modo el enfoque del estudio de los sistemas dinámicos ha cambiado durante el último siglo. El ideal determinista ha sido relegado por modelos muy simples de evidente impredecibilidad. La complejidad dinámica que manifiestan algunos procesos no es patrimonio de modelos con un gran número de variables y la riqueza dinámica presente en modelos de baja dimensión resulta de difícil clasificación. Tratando de aportar luz al estudio de esta complejidad, nuestro grupo asumió como postulado de trabajo que, al igual que todo ser vivo se desarrolla a partir de un germen, todo tipo cualitativo de dinámica se puede desplegar genéricamente a partir de la dinámica de una singularidad que sirve de indicador para localizarla. Además, las singularidades son los elementos más fáciles de detectar en el retrato de fases de un campo vectorial, incomparablemente más fáciles que las estructuras globales: órbitas periódicas o lazos homoclínicos o heteroclínicos, en cuya vecindad se suele probar la existencia de dinámicas caóticas: existencia de atractores extraños.

La elección del título podría sin duda ser menos sensacionalista, pero responde a esa inflación manifiesta a la hora de captar la atención del lector. Si ha llegado con interés a este punto, podrá acceder seguidamente a una exposición más detallada de los conceptos y resultados manejados en esta introducción. En la Sección 2 se explica el concepto de caos, es decir, de atractor extraño y los resultados que establecen su abundancia. La Sección 3 recoge cuestiones fundamentales sobre la teoría de la bifurcación, en especial aquéllas necesarias para comprender el papel que juegan en la clasificación dinámica las singularidades estudiadas en la Sección 4. En la Sección 5 se explica cómo las singularidades pueden servir para localizar dinámicas caóticas en sistemas de dimensión  $2n$  generados por acoplamiento de dos campos de dimensión  $n$  y se comenta la utilidad de estas ideas en el estudio de la dinámica de redes celulares. La aplicabilidad del estudio de los sistemas dinámicos a la comprensión de procesos complejos en biología (morfogénesis, por ejemplo) motiva algunas reflexiones en una última y breve sección.



## 2 La abundancia del caos.

En un régimen laminar o en ausencia de turbulencia ..., palabras con las que se establecen algunos resultados en dinámica de fluidos, son un ejemplo de cómo restringirse a condiciones propicias. Más allá de esta hipótesis, las leyes de comportamiento no estaban claras, la naturaleza de la turbulencia era desconocida. La propuesta de Landau, que trataba de explicar dicha naturaleza mediante la presencia de comportamientos cuasiperiódicos (composición de comportamientos periódicos de periodos inconmensurables), no prosperó al comprobarse que tales situaciones no eran abundantes. Propuesta visionaria más certera fue dada en [44], donde los autores sugieren que el comportamiento turbulento en fluidos podría ser causado por la presencia de atractores que son localmente el producto cartesiano de un conjunto de Cantor y una variedad bidimensional, los llamados atractores extraños. Un atractor será en lo sucesivo un *compacto invariante minimal* con un recinto de atracción *abierto y no vacío*. El término extraño se usará para hacer énfasis en la dinámica interna del atractor y no en su estructura geométrica. Así, un atractor se dirá extraño si contiene una órbita densa con algún exponente de Lyapunov positivo, lo que implica la sensibilidad exponencial a los errores iniciales y, por consiguiente, la impredecibilidad de su dinámica. La dinámica de los sistemas que presentan atractores extraños se denominan caóticas y, en su más amplia acepción, *caos* es sinónimo de existencia de atractores extraños. Para comprender la abundancia del caos se hace necesario sustituir el estudio de un modelo concreto por toda una categoría de modelos sobre una variedad ambiente e introducir en ella conceptos abstractos y propiedades matemáticas que se traduzcan en propiedades dinámicas observables. Esta categoría será la de los sistemas dinámicos (campos o difeomorfismos sobre una variedad diferenciable  $M$ ), o la de los semi-sistemas dinámicos (iteración de aplicaciones no invertibles), si se quieren considerar procesos no reversibles.

El modelo dinámico más simple que se puede plantear es la iteración de un difeomorfismo sobre una variedad unidimensional. Cuando la variedad es un intervalo, toda la dinámica viene condicionada por el comportamiento local en un entorno de los posibles puntos fijos del difeomorfismo, que, a su vez, está determinado por el primer término no nulo de su desarrollo de Taylor. Cuando la variedad es una circunferencia, dos nuevas dinámicas pueden aparecer según existan o no puntos periódicos. En ausencia de estos puntos surge la posibilidad de órbitas densas, de acuerdo con el teorema de Denjoy [9]. Esta dinámica sobre un escenario unidimensional se complica extraordinariamente cuando se considera un sem-isistema dinámico, esto es, la iteración de una aplicación no inyectiva, en lugar del sistema dinámico definido por la iteración del difeomorfismo. Éste es el caso de la ecuación en diferencias  $x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1-x_n)$ , planteada muy temprano por Verhulst [55] como alternativa realista al crecimiento Malthusiano de una población. Su sorprendente riqueza dinámica según los distintos valores de  $a \in [0, 4]$  ha sido el objeto del célebre artículo de Feigenbaum [14] y, a pesar de la sencillez del escenario, este ejemplo ha servido para introducir el concepto de renormalización y para comprender un patrón

de comportamiento que se puede extender a una categoría que lo generaliza: las aplicaciones unimodales sobre el intervalo. Este comportamiento no es ni mucho menos trivial y su estudio ha demandado el empleo de técnicas muy diversas. Desde la dinámica combinatoria y la *teoría kneading* hasta la *teoría ergódica*, en la dinámica unidimensional se han desarrollado multitud de estrategias e ideas que resultaron de gran utilidad en ese camino inevitable que va desde lo más simple a lo más complicado, ver [30]. Por ejemplo, en [5] se prueba que para la familia unimodal  $\varphi_a(x) = 1 - ax^2$  definida sobre el intervalo  $[-1, 1]$ , existe un conjunto de valores del parámetro  $a \in (0, 2)$ , suficientemente próximo a  $a = 2$  y con medida de Lebesgue positiva, para los cuales la órbita del punto crítico  $x = 0$  tiene exponente de Lyapunov positivo ( $|d\varphi_a^n(\varphi_a(0))| \geq e^{cn}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ). Pronto comentaremos la importancia de este resultado en el estudio de la dinámica en dimensión superior.

Aumentando una unidad la dimensión del espacio de fases, la complejidad dinámica surge también para la iteración de un difeomorfismo. De acuerdo con el teorema de Hartman, poca riqueza dinámica cabe esperar en un entorno de un punto fijo hiperbólico, pero, a diferencia del caso unidimensional, los puntos fijos hiperbólicos pueden contribuir al nacimiento de una complejidad dinámica global, tal y como fue alertado por Poincaré [39].

Supongamos que  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de una variedad bidimensional  $M$  con un punto fijo  $p = f(p)$  de tipo silla. Entonces, tal y como se dijo en la sección anterior, siendo  $E^u$  y  $E^s$  los respectivos autoespacios inestable y estable de la diferencial de  $f$  en  $p$ , existen una variedad invariante inestable  $W^u(p) = \{x \in M : f^{-n}(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$  y una variedad invariante estable  $W^s(p) = \{x \in M : f^n(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$ , tangentes en  $p$  a  $E^u$  y  $E^s$ , respectivamente. Estas variedades pueden intersectarse en un punto  $z \neq p$  que recibe el nombre de punto *homoclínico*. Es obvio que, si  $z \in W^u(p) \cap W^s(p)$ , entonces  $f^m(z) \in W^u(p) \cap W^s(p)$  para cualquier  $m \in \mathbb{Z}$ . Esta infinidad de puntos de corte de las variedades invariantes a lo largo de la órbita del punto homoclínico obliga a ambas variedades a cortarse dibujando una maraña precursora de una notable complejidad dinámica.

Casi medio siglo tuvo que pasar para volver sobre la advertencia de Poincaré. En 1935, G. Birkhoff [7] probó que, en general, cerca de un punto homoclínico existe un conjunto extremadamente intrincado de órbitas periódicas, la mayoría con un periodo muy alto. Este resultado quedó totalmente clarificado cuando S. Smale [48] colocó en un entorno de un punto homoclínico transversal su famoso ingenio geométrico: la aplicación herradura. Con extraordinaria belleza, Smale conjugó con el *shift* de Bernoulli la dinámica que existe cerca de un punto homoclínico transversal, ilustrando por primera vez la persistencia de comportamientos cuasi-aleatorios. El conjunto invariante  $\Lambda$  que soporta la dinámica de la herradura de Smale es un conjunto hiperbólico con una órbita densa que tiene un exponente de Lyapunov positivo, pero no es observable, en el sentido de que no tiene un recinto de atracción no vacío. Con la aplicación herradura en su mente, Smale [48] construyó un difeomorfismo, denominado solenoide, como una aplicación de Poincaré para un flujo tridimensional que

deja invariante la región acotada por un toro. Este difeomorfismo presenta un atractor (un compacto invariante minimal con recinto de atracción no vacío) que, como  $\Lambda$ , posee una órbita densa con un exponente de Lyapunov positivo. El atractor del solenoide es, en definitiva, un atractor extraño y fue el prototipo que inspiró la propuesta sobre la turbulencia dada en [44]. Además, este atractor, como ocurre también con  $\Lambda$ , es completamente persistente, en el sentido de que, para pequeñas perturbaciones del solenoide, continúa existiendo un atractor del mismo tipo (homeomorfo). Una propiedad que se generaliza a cualquier compacto invariante hiperbólico [50].

La ingeniosa construcción del solenoide ha sido crucial para motivar el concepto de atractor extraño. Sin embargo, su existencia en el ámbito de los flujos tridimensionales no puede explicar la complejidad dinámica observada en la familia de Hénon [22], ni tan siquiera en la familia de campos tridimensionales estudiada por Lorenz [28]. Ninguno de estos atractores es completamente persistente. La existencia de los atractores se mantiene para pequeñas perturbaciones de las ecuaciones de Lorenz, pero estos atractores no son homeomorfos. En la familia de Hénon los atractores sólo existen para valores de los parámetros sobre un conjunto de medida de Lebesgue positiva con interior vacío. Por lo tanto, si estos atractores no hiperbólicos son realmente extraños, entonces la presencia del caos podría ser más general que la dada por la existencia de atractores extraños hiperbólicos. Pero, ¿existen realmente atractores extraños no hiperbólicos?

La primera prueba matemática de la existencia de atractores extraños no hiperbólicos fue dada en [6] para la familia de Hénon. En este extraordinario trabajo, M. Benedicks y L. Carleson probaron que, para valores próximos a  $a = 2$  y  $b = 0$ , la familia de Hénon tiene atractores extraños persistentes: existen para valores del parámetro sobre un conjunto de medida de Lebesgue positiva. Por consiguiente, son observados con probabilidad positiva. La prueba de este resultado parte del hecho de que la familia de Hénon  $H_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$  para  $b > 0$  es conjugada a la familia  $\tilde{H}_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + \sqrt{b}y, \sqrt{b}x)$ , que es una perturbación de la familia uniparamétrica  $H_{a,0}(x, y) = (1 - ax^2, 0)$ , cuya dinámica viene dada por la dinámica de la familia unimodal  $\varphi_a(x) = 1 - ax^2$ . Por lo tanto, para  $b > 0$  suficientemente pequeño, algunas propiedades dinámicas de  $\varphi$ , estudiadas en [5], se pueden elevar, no sin gran esfuerzo, a la familia  $H_{a,b}(x, y)$ . Se dice por ello que  $H_{a,b}(x, y)$  es un buen despliegue de la familia  $\varphi_a$ .

Las intrincadas ideas de [6] fueron utilizadas en [31] para probar que, si  $f_\mu$  es una familia de difeomorfismos de una superficie que tiene para  $\mu = \mu_0$  una tangencia homoclínica entre las variedades de un punto fijo hiperbólico  $p$  de tipo silla disipativo, entonces  $f_\mu$  despliega genéricamente atractores extraños persistentes de tipo Hénon. Para ello, L. Mora y M. Viana definieron una renormalización en un entorno de un punto homoclínico con el fin de transformar una familia genérica de difeomorfismos que desplegaban dicha tangencia en una familia tipo Hénon: una familia que, como la de Hénon, fuese un buen despliegue de la familia cuadrática.

La existencia de atractores extraños se entiende como sinónimo de caos y

representa por antonomasia la complejidad dinámica observable (persistente) y mejor comprendida. Después de [31], esta complejidad queda definitivamente vinculada a los puntos homoclínicos y las advertencias de Poincaré se confirmaban cien años más tarde. La abundancia de esta complejidad es la consecuencia de la abundancia de tangencias homoclínicas en familias de difeomorfismos [37].

Al interesarnos, para completar la sección, por sistemas dinámicos continuos (flujos de campos vectoriales), la existencia de dinámica caótica se ha de buscar necesariamente en dimensión  $n \geq 3$ . Que un comportamiento caótico no se pueda encontrar para campos de dimensión  $n = 2$  es una consecuencia del teorema de Poincaré-Bendixon que establece que el conjunto límite de cualquier órbita acotada es una órbita cerrada o una unión de separatrices. Sobre una intersección transversal a una órbita cerrada no trivial se puede definir la aplicación de Poincaré. Esta aplicación es un difeomorfismo sobre una variedad de dimensión  $n - 1$ . Cuando  $n \geq 3$ , este difeomorfismo puede exhibir toda la riqueza dinámica expuesta anteriormente.

El proceso mediante el cual se asocia a un difeomorfismo  $\varphi$  un campo con una órbita periódica cuya aplicación de Poincaré coincida con  $\varphi$  se conoce con el nombre de suspensión. La suspensión de difeomorfismos que tengan atractores extraños es un modo de argumentar la presencia de caos en la dinámica de campos vectoriales de dimensión  $n \geq 3$ . Sin embargo, probar en una familia de campos vectoriales la existencia de una órbita cerrada con una aplicación de Poincaré asociada que tenga atractores extraños, es un doble reto. Primero se ha de establecer la existencia de la órbita cerrada no trivial, que bien se puede conseguir a partir de la existencia de una bifurcación de Hopf. Segundo, para la aplicación de Poincaré asociada a esta órbita cerrada, se ha de analizar la posición de sus variedades invariantes. En propuestas concretas el problema puede ser abordado numéricamente, pero un tratamiento analítico es generalmente inviable. Sin embargo, resulta más fácil probar la presencia de caos en familias de campos vectoriales si se presta atención a las órbitas homoclínicas de ciertos puntos de equilibrio hiperbólicos. Por ejemplo, mediante la existencia de un doble lazo homoclínico para un punto de equilibrio con autovalores reales se explica el atractor de Lorenz [28]. Existen, no obstante, escenarios mucho más generales que no requieren la restricción que implica la presencia de una simetría. El más sencillo y común de los escenarios se tiene cuando un campo vectorial tiene una órbita homoclínica para un punto de equilibrio con autovalores  $\lambda$  y  $-\rho \pm i\omega$  tales que  $0 < \rho < \lambda$ . En estas condiciones Sil'nikov [47] estableció el siguiente resultado:

**Teorema 1** *Sea  $x'(t) = X(x)$  un campo analítico con  $X(0) = 0$ . Sea  $p(t)$  tal que  $p'(t) = X(p(t))$  y tal que  $p(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Supongamos que los autovalores de  $DX(0)$  son  $\lambda$  y  $-\rho \pm i\omega$  con  $0 < \rho < \lambda$ . Entonces en todo entorno de la órbita homoclínica  $\Gamma_0 = \{x = p(t) : t \in \mathbb{R}\}$  existe un conjunto numerable de órbitas periódicas.*

Una versión geométrica de este resultado fue dada de forma muy elegante por

Tresser [54], probando que lo que ocurría en el entorno de  $\Gamma_0$  era esencialmente la formación de una infinidad de herraduras de Smale. Puesto que los argumentos se siguen principalmente de la linealización del flujo en un entorno del punto de equilibrio, la regularidad del campo se puede rebajar hasta clase  $C^1$  a trozos.

El teorema de Sil'nikov bien podría ser considerado una traducción para campos del resultado de Birkhoff y el trabajo de Tresser el análogo a la interpretación geométrica que Smale había hecho del resultado de Birkhoff. Sin embargo, a diferencia de éste, donde el punto homoclínico era transversal, en el teorema de Sil'nikov la órbita homoclínica no es transversal y, por consiguiente, no persiste para perturbaciones del campo. En [54] se construyó un campo regular a trozos con una órbita homoclínica del tipo de  $\Gamma_0$ . En [43] se prueba la existencia de familias genéricas de campos cuadráticos que tienen órbitas homoclínicas del tipo de  $\Gamma_0$ . Por consiguiente, la configuración de Sil'nikov es abundante en los modelos no lineales mas sencillos y resulta de interés primordial comprender si en un escenario tan simple se pueden generar atractores extraños.

El hecho de que  $\Gamma_0$  no persista para pequeñas perturbaciones del campo implica que estas perturbaciones destruyen infinidad de herraduras de Smale en el entorno de  $\Gamma_0$  y ello comporta un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. De hecho, cuando se destruyen estas herraduras tienen lugar despliegues de tangencias homoclínicas y aparecen genéricamente atractores extraños no hiperbólicos persistentes, tal y como se prueba en [31]. Toda esta complicada dinámica que puede darse al perturbar una órbita homoclínica de tipo Sil'nikov ha sido estudiada en [41]. En esta referencia se pueden encontrar las intrincadas técnicas introducidas en [6] para probar la persistencia de atractores extraños no hiperbólicos en la familia de Hénon, clarificadas posteriormente en [31] y que han sido extendidas en [41] a familias de difeomorfismos desplegando la familia unimodal  $f_{\lambda,a}(x) = \lambda^{-1} \log a + x + \lambda^{-1} \log \cos x$ , que surge de la aplicación retorno asociada a la conexión homoclínica y que es bien diferente de la aplicación cuadrática. Esta adaptación de las técnicas de [6] a una familia de difeomorfismos que no es necesariamente de tipo Hénon y que despliega una familia unimodal tan atípica como  $f_{\lambda,a}$ , sugiere ya el alcance general de estas técnicas en la prueba de la existencia de atractores extraños no hiperbólicos, tal y como se establece en [57].

### 3 Observación dinámica.

Sea  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^r(M)$  el conjunto de los campos de clase  $C^r$  sobre una variedad compacta  $M$  de clase  $C^r$  y sea  $\tau$  la  $C^r$  topología. Se dice que dos campos de  $\mathcal{X}$  son topológicamente equivalentes si sus retratos de fase son homeomorfos, es decir, si existe un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  que lleva órbitas de uno en órbitas del otro conservando el sentido de recorrido de las órbitas, pero no necesariamente su parametrización.

En la medida en la que los retratos de fase describen la dinámica de los campos, la equivalencia topológica, que representaremos por  $\sim$ , se traduce en una cierta equivalencia dinámica. A fin de poner orden en la observación de las

distintas dinámicas tenemos ya una terna  $(\mathcal{X}, \tau, \sim)$ , que denominamos espacio de observación. Un elemento  $X \in \mathcal{X}$  es *observable* si es interior a su clase de equivalencia. El interior de una clase de equivalencia se presenta como un conjunto homogéneo desde el punto de vista dinámico.

En el contexto de la observación dinámica, los elementos observables se denominan estructuralmente estables, lo que significa que son campos cuyas propiedades dinámicas se mantienen cuando se perturban ligeramente. Representemos el conjunto de estos campos por  $\Xi$ . Los cambios topológicos en el retrato de fase y, en consecuencia, las transiciones dinámicas que estos cambios implican ocurren en el conjunto de bifurcación  $\mathcal{X} \setminus \Xi$ .

A partir de este planteamiento surgen ya de forma natural algunas cuestiones de interés:

1.- Caracterizar el conjunto abierto  $\Xi$  de los campos estructuralmente estables y estudiar su tamaño (densidad o medida) en  $\mathcal{X}$ .

2.- Buscar la disposición relativa en  $\Xi$  de las distintas clases de equivalencia e investigar la naturaleza de las diferentes dinámicas que tienen los elementos del conjunto de bifurcación  $\mathcal{X} \setminus \Xi$

Por supuesto, el último objetivo determinaría todas las transiciones que pueden ocurrir desde cada una de las diferentes dinámicas y aportaría un elocuente ordenamiento en el universo modelado por  $\mathcal{X}$ . Por ejemplo, es bien sabido que, si tomamos como  $\mathcal{X}$  el espacio de los campos lineales en  $\mathbb{R}^n$ , entonces las dos cuestiones anteriores se resuelven satisfactoriamente. Un campo lineal es estructuralmente estable si y sólo si es hiperbólico (autovalores con parte real no nula). Los hiperbólicos son densos en  $\mathcal{X}$  y además contienen sólo  $n + 1$  clases de equivalencia topológica, correspondiendo cada una a un índice de estabilidad (número de autovalores con parte real negativa).

Cuando  $\mathcal{X}$  es el conjunto  $X^r(M)$  formado por los campos de clase  $C^r$  con  $r \geq 1$  definidos sobre una variedad bidimensional  $M$  compacta, orientada y suficientemente regular, la primera cuestión tiene también una respuesta satisfactoria [38]:

**Teorema 2** .- *Sea  $M$  una variedad bidimensional regular compacta y orientable. Un campo  $X \in X^r(M)$ , con  $r \geq 1$ , es estructuralmente estable si y sólo si:*

*i.- El conjunto  $\omega$ -límite de cualquier órbita es un elemento crítico: un punto de equilibrio o una órbita periódica.*

*ii.- Todos los elementos críticos son hiperbólicos.*

*iii.- Las variedades invariantes de los elementos críticos se cortan transversalmente.*

*Además, el conjunto de los campos estructuralmente estables es denso en  $X$ .*

Sin embargo, en relación con la segunda cuestión, ni siquiera es posible conocer, como en el caso lineal, el número de clases de equivalencia: incluso para campos polinomiales no podemos determinar el número de ciclos límite (problema 16 de Hilbert), que es un invariante para cada clase de equivalencia.

De acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior, la situación en dimensión  $n > 2$  es mucho más complicada. Para comprenderlo basta recordar el comportamiento de los difeomorfismos definidos sobre una superficie que tienen puntos homoclínicos y trasladar los resultados a los campos tridimensionales por el ya explicado proceso de suspensión. Consideremos entonces el espacio  $\text{Dif}^r(M)$  formado por los  $C^r$ -difeomorfismos definidos sobre una variedad compacta  $M$ , dotado de la  $C^r$  topología. Se dice que  $f_1, f_2 \in \text{Dif}^r(M)$  son topológicamente equivalentes (conjugados) si existe un homeomorfismo  $h$  de  $M$  tal que  $f_1 \circ h = h \circ f_2$ . A fin de caracterizar el conjunto estructuralmente estable en este nuevo espacio de observación, se define el conjunto no errante  $\Omega(f)$  de  $f \in \text{Dif}^r(M)$  como el conjunto de puntos  $x \in M$  tales que, para todo entorno  $U$  de  $x$  y para cada  $n_0 \in \mathbb{N}$ , existe  $n > n_0$  verificando  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Cuando el conjunto  $\Omega(f)$  es hiperbólico y coincide con la clausura de los puntos periódicos se dice que  $f$  verifica el Axioma A. La caracterización del conjunto estructuralmente estable se da en el siguiente teorema [29]:

**Teorema 3** . *Sea  $M$  una variedad compacta. Un difeomorfismo  $f \in \text{Dif}^1(M)$  es estructuralmente estable si y sólo si:*

- i.-  $f$  satisface el Axioma A*
- ii.- Las variedades invariantes de los puntos de  $\Omega(f)$  están en posición general (cuando se cortan lo hacen transversalmente)*

A pesar de que difeomorfismos con dinámica tan rica como la aplicación herradura y el solenoide, que ya aporta un atractor extraño, son difeomorfismos estructuralmente estables, los difeomorfismos hiperbólicos y, por tanto los estructuralmente estables, no son densos para la  $C^r$  topología con  $r > 1$ . Resulta entonces natural preguntarse qué extraños difeomorfismos ocuparán un conjunto de bifurcación tan amplio. Una serie de trabajos de S. Newhouse durante la década de los setenta fue avanzando la respuesta a esta cuestión. Cuando  $M$  es una superficie<sup>1</sup>, se demostró en [32] que existe un conjunto abierto  $U \subset \text{Dif}^r(M)$  tal que el conjunto de los difeomorfismos que tienen una tangencia homoclínica es denso en  $U$ . En [33] se probó que existe un conjunto residual  $R \subset U$  tal que todo  $f \in R$  tiene infinitos atractores periódicos. Finalmente, se probó en [34] que, arbitrariamente próximo a cada  $C^r$ -difeomorfismo que tenga una tangencia homoclínica, se puede encontrar un abierto del tipo de  $U$ . Estos resultados sugieren un papel preponderante dentro del conjunto de bifurcación de los difeomorfismos que tienen alguna tangencia homoclínica. J. Palis recogió este protagonismo de las tangencias homoclínicas y la importancia de la dinámica asociada en las siguientes conjeturas:

**Conjetura 1** *Para  $r \geq 1$ , los  $C^r$ -difeomorfismos de una superficie<sup>2</sup> con alguna tangencia homoclínica son densos en el conjunto de los difeomorfismos no hiperbólicos.*

<sup>1</sup>No se conoce si los difeomorfismos hiperbólicos (Axioma A) de una superficie son densos en la topología  $C^1$ . En dimensión superior existen contraejemplos.

<sup>2</sup>En [35] se pueden ver condiciones adicionales para una extensión a dimensión superior.



**Conjetura 2** *Cualquier familia uniparamétrica de  $C^r$ -difeomorfismos de una superficie que despliegan genéricamente una tangencia homoclínica tienen atractores (o repulsores) extraños persistentes: aparecen para valores del parámetro en un conjunto con medida de Lebesgue positiva.*

Una prueba parcial de la primera conjetura se da en [40], donde se demuestra que todo difeomorfismo sobre una superficie se puede  $C^1$  aproximar bien por uno hiperbólico o por uno que tenga una tangencia homoclínica. La segunda conjetura fue probada en [31], según se avanzó en el párrafo anterior, y deja claro que, frente a un caos estructuralmente estable representado por los atractores hiperbólicos, existe un caos de transición, persistente, pero no estructuralmente estable, que viene representado por atractores extraños no hiperbólicos. Para estos atractores, E. Colli [8] probó que en el conjunto de familias de difeomorfismos  $F = (f_\mu)_\mu$  que despliegan una tangencia homoclínica para  $\mu = 0$  existe un conjunto residual  $\mathcal{F}$  tal que, si  $F = (f_\mu)_\mu \in \mathcal{F}$  entonces existe una sucesión  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de intervalos y una sucesión  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $I_n$  tales que  $I_n \rightarrow 0$ , cada  $D_n$  es denso en  $I_n$  y, si  $\mu \in D_n$ , entonces  $f_\mu$  tiene infinitos atractores extraños de tipo Hénon. Atendiendo a este resultado y al dado en [33] para atractores periódicos, se plantea la existencia de familias  $k$ -paramétricas genéricas  $F = (f_\mu)_\mu$  que tengan infinitos atractores (extraños o no) para valores del parámetro en un conjunto  $P_F \subset \mathbb{R}^k$  con medida de Lebesgue positiva. Como respuesta a esta cuestión, Palis hizo una nueva conjetura:

**Conjetura 3** *La medida de Lebesgue del posible conjunto  $P_F$  es genéricamente cero.*

La situación que se da en el espacio  $Dif^r(M)$  de los difeomorfismos sobre una superficie se tiene también en el espacio  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^r(M)$  de los campos tridimensionales, incluso sin necesidad de recurrir al proceso de suspensión. Tomemos, por ejemplo, un campo que verifique las condiciones del teorema de Sil'nikov. Perturbaciones arbitrariamente pequeñas de este campo fuerzan la destrucción de infinidad de herraduras que implica la existencia de infinitas tangencias homoclínicas y la presencia por lo tanto de atractores extraños no hiperbólicos [41]. De hecho, en [41] se construye una familia no genérica de campos  $X_\mu \in \mathcal{X}$  tal que para un determinado valor del parámetro  $\mu = \mu_0$  el campo  $X_{\mu_0}$  tiene una órbita homoclínica cuya aplicación retorno asociada tiene, para  $\mu \neq \mu_0$  sobre un conjunto de medida de Lebesgue positiva, un número arbitrario de atractores extraños no hiperbólicos. La coexistencia simultánea de una infinidad de estos atractores extraños no hiperbólicos y persistentes para dicha familia se prueba en [42]. En [21] se prueba que infinitos de estos atractores pueden coexistir en un contexto más general, aunque no de forma persistente. La existencia de una familia genérica con infinitos atractores extraños persistentes aportaría una respuesta negativa a la Conjetura 3.

Como consecuencia de lo expuesto se comprende que la partición que la equivalencia topológica define en el espacio  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^r(M)$  cuando  $M$  es una



variedad tridimensional resulta ya considerablemente complicada. Clases de equivalencia con interior no vacío, que incluso pueden representar dinámicas caóticas, se encuentran desperdigadas y rodeadas de un conjunto de bifurcación también con interior no vacío, donde aparecen con probabilidad positiva atractores extraños no hiperbólicos. Tratar de determinar la disposición de las distintas clases de equivalencia en este espacio  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^r(M)$  de dimensión infinita es una pretensión también de dimensión infinita.

Ante tal dificultad, se puede proceder como quien corta un órgano para estudiar su estructura interna. Se pueden tomar secciones de  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^r(M)$ , que vendrán dadas por familias  $X_\mu \in \mathcal{X}^r(M)$  dependientes de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^k$ . La disposición de la partición dinámica en  $\mathcal{X}$  define sobre el espacio de parámetros  $\mathbb{R}^k$  otra partición conocida con el nombre de diagrama de bifurcaciones: conjuntos abiertos de parámetros para los que corresponden campos estructuralmente estables rodeados de regiones de parámetros que se corresponden con dinámicas de transición. La representación de estos diagramas de bifurcación ha tenido un gran aliado en el cálculo numérico que permite obtener órbitas periódicas, variedades invariantes y exponentes de Lyapunov, entre otros ingredientes dinámicos. El acceso a estas técnicas numéricas y el hecho de que estas familias  $X_\mu$  aparecen en las aplicaciones favoreció la proliferación en la literatura de estos diagramas y de abundante simulación numérica.

#### 4 Gérmenes del caos.

El bien conocido teorema de rectificación del flujo (flow-box) nos dice que todos los flujos son  $C^k$  conjugados en un entorno de un punto regular (laminares). Por otra parte el teorema de Hartman garantiza la estabilidad estructural del flujo en todo entorno de un punto singular hiperbólico. Por consiguiente todo cambio en la dinámica de un flujo ha de tener lugar localmente en un entorno de una singularidad no hiperbólica o bien ha de ser de naturaleza global. La complicación dinámica que en la sección anterior se ha situado en el espacio de observación  $(\mathcal{X}, \tau, \sim)$  ha sido explicada en términos de bifurcaciones globales: involucran órbitas periódicas y variedades invariantes, que son estructuras globales. Sin embargo estas estructuras generalmente sólo se pueden detectar mediante refinados algoritmos numéricos, más aún cuando se pretenden detectar en una posición no persistente.

Ciertamente, los únicos elementos de un campo que se pueden obtener con relativa facilidad son las singularidades (puntos de equilibrio) de un campo. Pero, ¿qué relación puede existir entre las singularidades de un campo y sus bifurcaciones globales? A tal pregunta nosotros hemos dado una respuesta deseable, una conjetura o, simplemente, un planteamiento de trabajo, que enunciamos del siguiente modo: toda bifurcación global se encuentra en el entorno de una adecuada singularidad no hiperbólica. De la misma manera suponemos que toda clase de equivalencia dinámica, digamos en campos

tridimensionales, tiene en su frontera singularidades no hiperbólicas. Entonces nos propusimos buscar entre ellas la menos degenerada, la cual haría el papel de un punto de referencia (indicador, mojón) de la dinámica en el intrincado conjunto cociente de  $(\mathcal{X}, \tau, \sim)$ .

En lo sucesivo entenderemos por singularidad tanto un punto de equilibrio  $\theta$  de un campo  $X$  que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer situado en el origen, como la clase de equivalencia (germen de  $X$ ) formada por todos aquellos campos que coinciden con  $X$  en un entorno de  $\theta$ . Las singularidades no hiperbólicas se estudian, en principio, atendiendo al 1-jet del campo. Según las condiciones necesarias para cancelar la parte real de alguno de los autovalores tendremos diferentes singularidades. Por otra parte, la pérdida de hiperbolicidad permite que términos de  $k$ -jets de orden superior afecten a la dinámica y de ahí que algunas condiciones sobre estos términos puedan ser relevantes. Estas condiciones se dan después de reducir el  $k$ -jet a su forma normal y definen una estratificación  $G^n \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$  sobre el conjunto  $G^n$  de los gérmenes de campos vectoriales definidos en un entorno de la singularidad. Los elementos de  $B_k$  quedan caracterizados por un conjunto minimal de  $k$  igualdades, siendo este cardinal  $k$  la codimensión de las singularidades pertenecientes a  $B_k \setminus B_{k+1}$ .

Sea  $X \in B_k \setminus B_{k+1}$  una singularidad de codimensión  $k$ . La estrategia para investigar las posibles dinámicas de los campos próximos a  $X$  es tomar familias  $X_\mu$  de campos en  $\mathcal{X}^r$  dependiendo de un parámetro  $\mu \in V \subset \mathbb{R}^k$ , donde  $V$  es un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^k$  y tal que  $X_0 = X$ . Cada una de estas familias se denomina un despliegue de  $X$  y su intersección con el conjunto  $\mathcal{X}^r \setminus \Xi$  define sobre el espacio de parámetros el correspondiente diagrama de bifurcaciones. Abundan en la literatura estudios numéricos para familias concretas  $X_\mu$ , con interés en aplicaciones, que tratan de describir este conjunto de bifurcaciones y de evidenciar dinámicas relevantes. La filosofía que subyace en este trabajo es bien diferente y responde a un enfoque más general que pueda aportar criterios teóricos para una comprensión global de las transiciones dinámicas: se trata de encontrar la menor codimensión  $k$  tal que en cualquier despliegue genérico  $X_\mu$  de  $X \in B_k \setminus B_{k+1}$  exista una determinada dinámica. En consonancia con lo expuesto hasta ahora cabe preguntarse cuál es la singularidad menos degenerada (menor codimensión) que despliega un campo en las condiciones del teorema de Sil'nikov. En [24], se prueba que estas condiciones y, consecuentemente la riqueza dinámica asociada, se puede desplegar genéricamente desde la singularidad nilpotente de codimensión cuatro cuyo 3-jet es  $C^\infty$  conjugado a

$$j_3(X_0) = y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + (a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_3x^3 + \dots) \frac{\partial}{\partial z},$$

donde  $a_{12} \neq 0$  y  $a_3 \neq 0$ . En [25] se prueba este mismo resultado para la singularidad nilpotente de codimensión tres, cerrando así al mismo tiempo una conjetura planteada por Arneodo y otros [4] en 1985.

**Teorema 4** . *Sea  $X$  una singularidad de clase  $C^\infty$  con 3-jet  $C^\infty$  conjugado a*

$$j_3(X_0) = y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + (a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_3x^3 + \text{otros términos de orden tres}) \frac{\partial}{\partial z},$$

Entonces las órbitas homoclínicas de Sil'nikov aparecen en todo despliegue genérico  $X_\mu$  de  $X$ .

La dinámica de cada una de las singularidades anteriores ha sido estudiada en [11]. Ambas tienen comportamientos sencillos que se transforman en dinámicas complejas (caóticas) a medida que se introducen perturbaciones lineales infinitesimales. Reivindicando para las Matemáticas el papel de la metáfora, nos resulta agradable concebir el papel de estas perturbaciones lineales como el efecto que la tierra ejerce para desplegar la vida interna de una semilla e interpretar como ésta a la singularidad de menor codimensión. Encontrar definitivamente la semilla del caos tridimensional pasa por el estudio de la única singularidad de codimensión dos que tiene una variedad central de dimensión tres. Se trata de la singularidad Hopf-cero, ver [20]. Las observaciones numéricas sugieren que la configuración de Sil'nikov, y por lo tanto el caos, están también presentes en despliegues genéricos de esta singularidad.

Concluiremos esta sección subrayando que resultados en la línea anterior proporcionan auténticos criterios de existencia de caos. Estos criterios son expresables en términos del desarrollo del campo en cada una de sus singularidades.

## 5 El acoplamiento conduce al caos.

Se deduce de lo expuesto más arriba que sistemas muy simples y de muy baja dimensión (iteración de polinomios reales de grado dos) son capaces de generar dinámicas muy complicadas. Pero también es claro que la complejidad dinámica se incrementa a medida que aumenta la dimensión del espacio de fases. Un camino usual para que esto ocurra es el acoplamiento de procesos simples para manifestarse conjuntamente como un proceso mucho más complicado. Resulta por lo tanto natural tratar de analizar las distintas transiciones dinámicas que pueden ocurrir en este proceso frecuente de interacción para descubrir pautas que permitan establecer algún tipo de jerarquía en esta cadena de transiciones que conducen a más y más complejidad dinámica. El objetivo de esta sección es mostrar cómo por acoplamiento de sistemas con dinámica trivial puede surgir genéricamente un comportamiento caótico. Para hacer esto usaremos los criterios de existencia de caos dados en la sección anterior a partir de los despliegues de las singularidades del campo.

El interés por el estudio de sistemas acoplados se manifiesta ya en [53]. En este artículo, A. Turing proponía el sistema de reacción-difusión

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = f(\vec{u}) + \nabla(D\nabla \vec{u})$$

como modelo para la química de la morfogénesis en Biología Molecular. El vector  $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ , dependiente de una variable espacial  $x$  y del tiempo  $t$ , recoge las concentraciones de  $m$  sustancias, cada una de ellas con su propio coeficiente de difusión  $D_i$ . La dinámica de la reacción está determinada por la función  $f$  y  $D$  representa la matriz diagonal de coeficientes de difusión. La discretización del término de difusión conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas del tipo

$$\vec{u}'_i = F(\vec{u}_i) + \sum_{j=1}^m a_{ij} D(\vec{u}_j - \vec{u}_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

donde  $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^k$  para  $i = 1, \dots, m$ ,  $D$  es una matriz  $k \times k$ , los coeficientes  $a_{ij}$  toman el valor cero o uno, siendo  $a_{ii} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Si  $a_{ij} = 1$ , significa que existe interacción entre el sistema  $i$  y el subsistema  $j$ , con variables de estado  $\vec{u}_i$  y  $\vec{u}_j$ , respectivamente. En [53] se dan ejemplos lineales donde aparecen oscilaciones que, por su linealidad, no son estructuralmente estables y, por consiguiente, no son de valor en el proceso de morfogénesis.

Motivado por las ideas de A. Turing, S. Smale cuestiona en [49] la posibilidad de generar oscilaciones estructuralmente estables mediante el acoplamiento por difusión lineal de dos sistemas iguales con dinámica trivial (con un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable). La respuesta resulta ser afirmativa y en [49] se construyen ejemplos del tipo 1 con  $m = 2$  y  $k = 4$ . Posteriormente, en [23] se da un ejemplo para  $k = 3$  y luego en [1] para  $k = 2$ . En esta última referencia, a diferencia de las dos anteriores donde los ejemplos se construyen ad hoc, la presencia de un ciclo límite se consigue acoplando las ecuaciones del Brusselator

$$\begin{aligned} x' &= A - (B + 1)x + x^2y \\ y' &= Bx - x^2y, \end{aligned} \quad (2)$$

que, con mayor o menor aceptación, se encuentra frecuentemente en la literatura como un modelo de reacción química.

La dinámica de este sistema es bien conocida. El primer cuadrante es invariante, como se debe esperar del carácter positivo de las variables y, además, si  $B < A^2 + 1$  entonces todas las órbitas que parten de él son atraídas por el único punto de equilibrio  $(A, B/A)$ . Para  $B > A^2 + 1$  el equilibrio se vuelve inestable y surge un ciclo límite atractor mediante una bifurcación de Hopf. Al acoplar dos Brusselator mediante una difusión lineal se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x'_1 &= A - (B + 1)x_1 + x_1^2y_1 + \lambda_1(x_2 - x_1) \\ y'_1 &= Bx_1 - x_1^2y_1 + \lambda_2(y_2 - y_1) \\ x'_2 &= A - (B + 1)x_2 + x_2^2y_2 + \lambda_1(x_1 - x_2) \\ y'_2 &= Bx_2 - x_2^2y_2 + \lambda_2(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (3)$$

en el que la existencia de oscilaciones espontáneas se sigue como consecuencia de una bifurcación de Hopf en los puntos de equilibrio que surgen después de que en el punto  $(A, B/A, A, B/A)$  se produzca una bifurcación *pitchfork* [20].

Especialmente en [49], cualquier atractor con dinámica interna se interpreta como un atractor vivo, frente a la morbilidad de un punto de equilibrio. De ahí un cierto interés, para posibles propuestas biológicas, de plantear formas plausibles de obtener atractores vivos a partir de reposos globalmente estables. Llegados a este punto, ¿por qué no buscar los atractores con la dinámica más rica (atractores extraños) emergiendo por acoplamiento de sistemas con dinámica trivial?

Como suele ocurrir en la historia de los sistemas dinámicos, se han dado con anterioridad [2], [26], [45], evidencias numéricas de la presencia de caos en tales acoplamientos, sin la prueba rigurosa de su existencia ni el análisis de su naturaleza. En [10] hemos tratado esta cuestión y se ha probado analíticamente la aparición de atractores extraños en el acoplamiento (3) de dos Brusselators. Para ello, siguiendo las ideas expuestas en la sección anterior, probamos que la familia (3), dependiente de los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  despliega genéricamente singularidades nilpotentes de codimensión tres y, por consiguiente, atractores extraños. De hecho, el método de la prueba va un poco más lejos al demostrar la existencia de un centro organizador de dimensión cuatro: una singularidad nilpotente en  $\mathbb{R}^4$  no reducible por el teorema de la variedad central. Concretamente, se prueba que existe un punto  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  en el espacio de parámetros para el cual el sistema (3) tiene una singularidad nilpotente de codimensión cuatro que es desplegada genéricamente por (3). Una vez probado que cualquier despliegue de una singularidad nilpotente  $n$  dimensional de codimensión  $n$  contiene a su vez despliegues genéricos de singularidades nilpotentes  $(n-1)$  dimensionales de dimensión  $(n-1)$ , aplicando el Teorema 4 se concluye el siguiente resultado:

**Teorema 5** *Sea el sistema (3) definido por el acoplamiento por difusión lineal de dos Brusselators. Existe un punto  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  en el espacio de parámetros tal que arbitrariamente cerca existen valores de los parámetros  $(A, B, \lambda_1, \lambda_2)$  para los que 3 tiene atractores extraños no hiperbólicos y persistentes.*

El acoplamiento de sistemas dinámicos es la forma de describir la dinámica de una red celular. La dimensión del sistema resultante aumenta considerablemente y, por consiguiente, complica las posibilidades dinámicas del mismo. Para comprender toda la complejidad dinámica que puede presentarse es imprescindible estudiar las singularidades y las bifurcaciones locales que puedan desplegar. Si el número de células es elevado, ni el simple cálculo de estas singularidades resulta sencillo. En el caso de redes homogéneas, formadas por  $m$  células iguales  $u_j$ , la dinámica viene descrita por un sistema  $u'_j(t) = f(u_j(t))$ , con  $j = 1, \dots, m$ , y los puntos de equilibrio del campo  $f$  determinan sobre el hiperplano de sincronización  $u_1 = u_2 = \dots = u_m$  singularidades del sistema resultante. Las bifurcaciones que tienen lugar en estas singularidades se conocen con el nombre de rupturas de sincronización y su estudio se puede simplificar al considerar la simetría que introduce el carácter invariante del hiperplano de sincronización. En (3), por ejemplo, tiene lugar una bifurcación pitchfork-Hopf,

ver [20], que podría propiciar una ruptura de la sincronización directamente hacia el caos. Sin embargo, por el momento, no se han encontrado evidencias numéricas de dicho fenómeno.

El estudio de las rupturas de sincronización y su dependencia respecto de la arquitectura de la red son los primeros pasos en la elaboración de una teoría general sobre redes celulares. Una abundante bibliografía está ya disponible [16], [17], [19], [27], [46]. En [19], por ejemplo, se prueba que los patrones de sincronización asociados a un equilibrio hiperbólico de la red son rígidos en el sentido de que el patrón no cambia cuando el campo es perturbado. ¿Se verifica también este resultado para órbitas periódicas hiperbólicas? Esta cuestión estaría resuelta si se prueba para redes celulares un resultado análogo al “Equivariant Hopf Theorem” dado en [18]. En un reciente trabajo [16], se prueba en el contexto de las redes celulares homogéneas un resultado análogo al “Equivariant Branching Lemma”. Sin embargo, la adaptación del “Equivariant Hopf Theorem” es un objetivo más difícil, debido a la presencia de ciertas simetrías espacio-temporales que no están claras en el contexto de las redes celulares.

Fuera del hiperplano de sincronización no parece que la arquitectura de la red tenga una influencia tipificable. Ningún subespacio invariante restringe las posibilidades dinámicas en un entorno de las singularidades y por lo tanto su estudio resultará, si cabe, más complicado. Para comprender estos comportamientos lejos de la sincronía se continuará con el programa de trabajo que a lo largo de estos años ha sido desarrollado en relación con el estudio de los despliegues de singularidades. Así en (3), además de la singularidad pitchfork ya mencionada, faltan por estudiar los distintos comportamientos que se puedan desplegar desde la singularidad nilpotente. La variedad central de esta singularidad tiene dimensión cuatro y en tal ambiente puede aparecer un nuevo lazo, el bifoco homoclínico, cuya dinámica asintótica no ha sido completamente estudiada. Algunos resultados sobre bifurcaciones periódicas han sido dados en [15]. Sin embargo, parece claro que en el entorno del bifoco homoclínico han de existir atractores extraños persistentes.

¿Serán algunos de estos atractores bidimensionales y consecuentemente el bifoco homoclínico el escenario más simple donde de modo natural puedan aparecer tales atractores extraños bidimensionales persistentes? La respuesta a esta cuestión nos retorna a la Sección 3 y a la necesidad de extender los argumentos de Benedicks y Carleson a buenos despliegues de ciertas aplicaciones bidimensionales. Pero, ¿quién jugará ahora el papel de los puntos críticos de la familia cuadrática y el de los puntos de plegamiento de la familia de Hénon? El problema se presenta extraordinariamente complicado.

## 6 Hacia una biología teórica.

Lejos quedan aquellas primeras ecuaciones diferenciales que permitieron deducir las leyes formuladas por Kepler, como escasa se vuelve la inquietud matemática que reduce su aplicación al modelado y estudio de procesos aislados y bien

planteados que concluye, frecuentemente, con elocuentes y certeras simulaciones de su evolución. Esta tarea fue y continuará siendo de extraordinario valor y contempla aún interesantes y difíciles problemas abiertos. Sin embargo, gran parte de la actividad científica se esfuerza en la comprensión de fenómenos complejos que resultan difíciles de descomponer en otros elementales. La vida, por ejemplo, es un fenómeno ilustrativo por antonomasia. Los innumerables procesos que tienen lugar en el desarrollo de un embrión o la generación de un tumor, creando su propia infraestructura de sostén (angiogénesis) y de colonización (reproducción, metástasis), constituyen fenómenos que pueden ser identificados, pero imposibles de modelar. A pesar de ello, la Biología ha acumulado en los últimos años una gran cantidad de conocimiento tan útil y contrastado en las aplicaciones como carente de un cuerpo de teoría como el que está bien presente en las ciencias físicas. Los numerosos e importantes avances en Bioquímica, por ejemplo, semejan un amplio conocimiento de los procesos de combustión de una nave espacial que deseásemos dirigir a un punto del espacio sin conocer previamente las leyes de la Mecánica Celeste. Pero, ¿ha de seguir estudiándose la complejidad biológica sin que la matemática tenga algo importante que decir?

En las últimas décadas se han publicado numerosos artículos dedicados a procesos específicos de la Biología. Las ecuaciones diferenciales son muy socorridas para modelar propagación de epidemias, crecimiento de poblaciones, evolución de infecciones y, muy especialmente, las ecuaciones de reacción difusión, para procurar modelos de formación de patrones. Frecuentes son también las ecuaciones diferenciales con retardo de acuerdo con los retrasos que, a diferencia de los fenómenos físicos, existen casi siempre en las respuestas fisiológicas. Cuando la aproximación determinista al fenómeno no parece sugerente, toda una batería de análisis estadístico se incorpora al estudio para inferir con mayor o menor acierto interpretaciones del comportamiento y concluir, en último término, con modelos estocásticos. Toda esta actividad fue diseminando por la literatura los términos Biomatemática, Bioestadística o Biometría. Sin embargo, tenemos una tímida impresión de que todos estos resultados han aportado a la Biología muchísimo menos que la Teoría de la Evolución, un principio variacional ni tan siquiera planteado en términos matemáticos. Pero, si esto es así, ¿por qué sucede?

Las gran mayoría de las aportaciones en Biomatemática son estudios de procesos aislados, concretos, con modelos dinámicos formulados de una forma precisa, cuyo análisis se contrasta finalmente con las medidas experimentales. Son, por decirlo de algún modo, políticamente correctos dentro del pensamiento determinista. Sin embargo, los procesos fundamentales y más intrigantes de la Biología, como son los ligados al crecimiento, se manifiestan como una cascada de cambios interconectados cuyas dinámicas e interacciones no siempre están claras, aunque la dinámica conjunta converja a un estado final cualitativamente diferenciado y estructuralmente estable. ¿Será posible, por ejemplo, formular propuestas para el proceso global de la morfogénesis que, sin necesidad del exhaustivo conocimiento de las numerosas transformaciones que intervienen, expliquen la evolución de las formas?

Hace ya mucho tiempo que esta pregunta ha suscitado respuestas. Una antigua referencia en este sentido es el libro de Waddington y otros [56], cuyo título tomamos para esta sección. De su contenido se recomiendan especialmente las aportaciones de R. Thom. En pocas páginas, Thom tradujo al discurso de los sistemas dinámicos, con énfasis en su teoría de las catástrofes, algunos conceptos biológicos propuestos para explicar el desarrollo embrionario. Esta precursora matematización del proceso de morfogénesis constituye, a nuestro entender, un ejemplo claro de lo que el pensamiento matemático puede aportar al estudio de los procesos complejos. Nos gustaría contribuir con esta cita a reeditar sus ideas y extenderlas en la medida que nos permiten los avances realizados durante los últimos años en el estudio de la dinámica abstracta. Nuestro pronunciamiento, nuestra metáfora o nuestro postulado de trabajo, como se nos permita decir, de que toda dinámica ha de ser entendida a partir del despliegue de una singularidad, no es más que una extensión del planteamiento de R. Thom, que pretende ser contemplado en el marco más general de la Teoría de la Bifurcación. Puede ser interpretada como el tradicional deseo de estética en el discurso filosófico o, quizás, como una necesidad. Es una necesidad, puesto que no encontramos otro camino mejor para procurar un avance en el estudio de la complejidad, pero también tiene algo de convicción, en la medida que se van obteniendo resultados matemáticos que refuerzan la percepción que uno se va haciendo del mundo exterior. El despliegue de una singularidad recuerda la germinación de una semilla y lo evocan una infinidad de procesos en los que la singularidad parece desplazarse a lo largo de la dinámica dispuesta a ser desplegada en un momento posterior. Un ejemplo de estas singularidades viajeras son las células madre que están cobrando recientemente tanto interés en el estudio de la oncogénesis y parecen estar presentes en todos los desarrollo de los seres vivos. ¿Cómo formular en el contexto de la dinámica abstracta esta noción de singularidad viajera capaz de ser desplegada en un tiempo posterior de la evolución dinámica?

En las Matemáticas y, especialmente en las áreas menos aplicadas, vive el sentimiento de que todo resultado es susceptible de tener traducción al mundo real. Nosotros participamos de este sentimiento en el contexto de los sistemas dinámicos, al menos en un sentido recíproco: la evolución de un fenómeno real ha de tener su representación en la dinámica abstracta. No oculta este optimismo la ficción aparente que media entre las últimas cuestiones y unas respuestas convincentes. Sin embargo, se ha de reconocer que una buena dosis de ficción, al menos de imaginación, estuvo presente también en muchas propuestas físicas donde las Matemáticas acabaron jugando un papel decisivo. Las distintas concepciones del átomo podrían ser un buen ejemplo de ello. Incluso en este punto alguien que haya reflexionado sobre la evolución del conocimiento, desde la experiencia sensorial a la memoria y desde ésta a la deducción más abstracta, podría introducir aquí mejores puntualizaciones.



## Referencias

- [1] J.C. Alexander. *Spontaneous oscillations in two 2-component cells coupled by diffusion*. J. Math. Biol. **23** -2 (1986): 205-219.
- [2] J.C. Alexander. *A period-doubling bubble in the dynamics of two coupled oscillators*. Lecture Notes in Biomath. **66**, Springer (1986): 208-220.
- [3] A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, L. S. *Systèmes Grossières*, C.R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS (N.S.) 14 (1937) 247–251.
- [4] A. Arneodo, P. Couillet, E. Spiegel, C. Tresser. *Asymptotic chaos*. Physica D **14** (1985): 327-347.
- [5] M. Benedicks; L. Carleson. *On iterations of  $1 - ax^2$  on  $(-1,1)$* . Ann. Math.**122**, (1985): 1-25.
- [6] M. Benedicks; L. Carleson. *The dynamics of the Hénon map*. Ann. Math.**133**, (1991), 73-169.
- [7] G.D. Birkhoff. *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*. Mem. Pont. Acad. Sci. Novi. Lyncaei **1**, (1935): 85-216.
- [8] E. Colli. *Infinitely many coexisting strange attractors*. Annales Institute H. Poincaré, vol **15**, Iss 5, (1998), 539-579.
- [9] A. Denjoy. *Sur les courbes définies par le equations différentielles a la surface du tore*. J. Math. Pure et Appl. **11**, série 9 (1932):333-375.
- [10] F. Drubi, S. Ibáñez, J.A. Rodríguez. *Coupling leads to chaos*. Jour. Diff. Eq. **239** (2007): 371-383.
- [11] F. Dumortier, S. Ibáñez. Nilpotent singularities in generic 4-parameter families of 3-dimensional vector fields. Jour. Diff. Eq. **127**, (1996): 590-647.
- [12] F. Dumortier, S. Ibañez, H. Kokubu, New aspects in the unfolding of the 2 nilpotent singularity of codimension three, Dyn. Syst. 16 n° 1, (2001): 63-95.
- [13] F. Dumortier, S. Ibañez, H. Kokubu, C. Simó. *About the unfolding of a Hopf-zero singularity*. Preprint.
- [14] M. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. Jour. Stat. Phys. **19** (1978): 25-52.
- [15] A.C. Fowler, C.T. Sparrow, *Bifocal homoclinic orbits in four dimensions*. Nonlinearity **4**, (1991): 1159-1182.
- [16] M. Golubitsky, and R. Lauterbach. Bifurcations from Synchrony in Homogeneous Networks: Linear Theory. (Enviado a SIAM J. Appl. Dynam. Sys.),

- [17] M. Golubitsky, I. Stewart. *Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism*. Bull. Amer. Math. Soc. **43** (2006): 305-364.
- [18] M. Golubitsky, I. Stewart, and D.G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory II*. Applied Mathematics Sciences, 69. Springer-Verlag, New York, (1988).
- [19] M. Golubitsky, I. Stewart, and A. Török. Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows. *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* **4** (1) (2005) 78-100.
- [20] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences, vol. 42, Springer-Verlag, New York, (1990).
- [21] A.J. Homburg. *Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria*. *Nonlinearity*, **15** -4 (2002): 1029-1050.
- [22] M. Hénon. *A Two-dimensional mapping with a strange attractor*. *Comm. Math. Phys.*, **50**, (1976), 69-77.
- [23] L. N. Howard. *Nonlinear oscillations*. *Lectures in Appl. Math.* **17**, A.M.S. (1979): 1-67.
- [24] S. Ibáñez; J.A. Rodríguez. *Sil'nikov bifurcations in generic 4-unfoldings of a codimension-4 singularity*. *Jour. Diff. Eq.*, **120**, (1995), 411-428.
- [25] S. Ibáñez; J.A. Rodríguez. *Sil'nikov configurations in any generic unfolding of the nilpotent singularity of codimension three on  $\mathbb{R}^3$* . *Jour. Diff. Eq.*, **208**, (2005): 147-175.
- [26] I. Lengyel, I.R. Epstein. *Diffusion-induced instability in chemical reacting systems: Steady-state, multiplicity, oscillation and chaos*. *Chaos* **1**, (1991): 69-76.
- [27] M.C.A. Leite, M. Golubitsky, *Nonlinearity* **19** (2006): 2313-2363.
- [28] E.N. Lorenz. *Deterministic non-periodic flow*. *J. Atmos. Sci.*, **20**, (1963), 130-141.
- [29] R. Mañé. *Publ. Math. I. H. E. S.*, **66**, (1988), 161-210.
- [30] W. de Melo, S. van Strein. *One-dimensional dynamics*. Springer-Verlag (1993).
- [31] L. Mora; M. Viana. *Abundance of strange attractors*. *Acta Math.* **171**, (1993) 1-71.
- [32] S. Newhouse. *Nondensity of Axiom A (a) on  $S^2$* . *Proc. Symp. Pure Math.*, **14**, AMS, (1970), 191-202.

- [33] S. Newhouse. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*. *Topology*, **13**, (1974), 9-18.
- [34] S. Newhouse. *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*. *Pub I.H.E.S.*, **50**, (1979), 101-151.
- [35] J. Palis. *A global view of Dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors*. *Géométrie complexe et systèmes dynamiques. Astérisque*, **261**, (2000), 335-347.
- [36] J. Palis, M. Viana, *High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors*, *Ann. of Math.* **140** (1994), pp. 207–250.
- [37] J. Palis, J.C. Yoccoz. *Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimension*, *Acta Math.* **172** (1994), pp. 91–136.
- [38] M. Peixoto. *Structural stability on two-manifolds*. *Topology* **1**, (1962), 101-120.
- [39] H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. *Acta Math.* **13** (1890): 1-270.
- [40] E. Pujals; M. Sambarino. *Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms*, *Ann. of Math. (2)* **151**, (2001), 961-1023.
- [41] A. Pumariño; J.A. Rodríguez. *Coexistence a persistence of strange attractors*. *Lect. Notes in Math.***1658**. Springer,(1997).
- [42] A. Pumariño; J.A. Rodríguez. *Coexistence and persistence of infinitely many strange attractors*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **21**, (2001), 1-13.
- [43] J. A. Rodríguez. *Bifurcations to homoclinic connections of the focus-saddle type*. *Arch. Rat. Mech. and Anal.* **93**, (1986): 81-90.
- [44] D. Ruelle; F. Takens. *On the nature of turbulence*. *Comm. Math. Phys.* **20**,(1971),167-192, / **23**, 343-344.
- [45] I. Schreiber, M. Marek. *Strange attractors in coupled reaction-diffusion cells*. *Phys. D*, **5** (2-3) (1982): 258-272.
- [46] I. Stewart, M. Golubitsky, and M. Pivato. *Patterns of synchrony in coupled cell networks*. *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* **2** (2003) 609-646.
- [47] L.P. Sil'nikov. *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions*. *Sov. Math. Dokl.* **6**, (1965), 163-166.
- [48] S. Smale. *Differentiable dynamical systems*. *Bull. Am. Math. Soc.*, **73**, (1967), 747-817.
- [49] S. Smale. *A mathematical model of two cells via Turing's equation*. *Lect. on Math. in the Life Sciences* **6**, A.M.S. (1974): 15-26.

- [50] M. Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer-Verlag (1987).
- [51] F. Takens. Forced oscillations and bifurcations. Applications of global analysis, I (Sympos., Utrecht State Univ., Utrecht, 1973): 1–59
- [52] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénese*. Benjamin, Reading (1972).
- [53] A. Turing. *The chemical basis of the morphogenesis*. Philos. Trans. Roy. Soc. B, **237**, (1952): 37-72.
- [54] C. Tresser. *Modèles simples de transition vers la turbulence*. Thèse d'Etat. Université de Nice, (1981).
- [55] P.F. Verhulst. *Mathematical researches into the law of population growth increase*. N. Memoires de l'Acad. Roy. Scinces et Belles-Lettres de Bruxelles **18** (1845): 1-45.
- [56] C.H. Waddington y otros, *hacia una biología teórica*. Alianza Universidad. Madrid (1976).
- [57] Q. Wang, L. S. Young.- *Toward a theory of rank one attractors*. Annals of Mathematics (2) **167** (2008): 349-480.

## ON SOME MODELS DESCRIBING CELLULAR MOVEMENT: THE MACROSCOPIC SCALE

C. MORALES-RODRIGO

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico  
Universidad de Sevilla

`crislianm@us.es`

### Abstract

Along this work we will consider several models of partial differential equations that describe cellular movement. We will introduce some mathematical techniques in order to describe the behaviour of the solutions of these models.

**Mots-clés:** *Tumor invasion, Angiogenesis, Keller-Segel model, Convergence to setady states, Blow-up*

**Classement AMS:** *35B40 35K50 35K57 35K65 92C17*

## 1 Introduction

One of the most important characteristics of living systems is their interaction with the environment in which they reside. Frequently, the way of interaction involves movement towards or away from an external stimulus or signal and such a response to the stimulus is called *taxis*. The process which leads to taxis is very complex but, basically, it is divided in three steps. In the first step, the cell detects the extracellular signal by specific receptors on its surface. Then the cell processes the signal and, finally, the cell alters its motile behaviour. Depending on the nature of the signal we have different kinds of taxis (see for instance [36]), for example aerotaxis, chemotaxis, galvanotaxis, haptotaxis, phototaxis, etc.

The following question arises: how this phenomenon can be described with mathematical terminology? The answer to this question is not simple but surely involves different scales, subcellular, cellular or mesoscopic and macroscopic and each of them can be described in a continuous or discrete setting. Another subsequent question are which is the relationship between different scales or

---

Fecha de recepción: 16/06/2009. Aceptado (en forma revisada): 10/08/2009.  
Partially supported by FQM 131 (Junta de Andalucía).

how the individual behaviour influences the collective one. These questions, although important are not addressed here. We will just focus on a particular kind of continuous models concerning the motion of cells at the macroscopic scale.

Along this work, we will assume that the organisms respond to the spatial gradient of the stimulus. Moreover, we will suppose that the organisms also move without any preferable direction, see [35] for a justification. In some cases we will add a term which describes the process of birth and death of the organisms. To be more precise, throughout this work, the equation that describes the motion of the organisms is given by

$$u_t = \underbrace{\Delta u}_{\text{Diffusion}} \pm \underbrace{\nabla \cdot (\phi(u, v) \nabla v)}_{\text{Taxis}} + \underbrace{f(u, v)}_{\text{Reaction}} \quad (1)$$

where  $f : [0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : [0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  and  $u, v$  denote the concentration of organisms and the stimulus or signal density respectively.

While, in general, the taxis term leads to aggregation, the diffusive term always has a dispersive effect. Therefore, there is a competition between the taxis term and the diffusive one and three different regimes are possible:

- The diffusive dominant regime. This means that the diffusive term is dominant and the effect of the taxis can be ignored for large times. Consequently, as time goes to infinity, the solution to (1), if exists and is unique, behaves like the solution to the heat equation with the reaction term  $f(u, v)$ .
- The taxis dominant regime. Here, the taxis term is strong enough to generates singularities either in finite time or infinite time.
- The equilibrium or transition regime.

In the next Sections we will deal with various models related to (1) that serve to illustrate diffusive dominant, taxis dominant and the equilibrium regimes.

In the sequel,  $C$  denotes a generic positive constant.

## 2 Chemorepulsion

Probably one of the most famous models in mathematical biology is the Keller-Segel system. Such a model was proposed in [27] in order to describe a very particular stage in the life of many species of cellular slime molds, the aggregative stage. At this stage, the amoebas *begin to aggregate in a number of "collecting points" or centers. At each center a slug forms, migrates and eventually forms a multicellular fruiting body* ([27] p. 399). The aggregation is induced by the presence of a chemical substance produced by some of the amoebae. This particular case of taxis, induced by a chemical, is called chemotaxis. We will make some comments about the Keller-Segel system in the last Section. In this Section we assume that the cells produce a chemical

and the chemical acts as a repellent. So, the cells escape from the chemical moving away from its gradient. Here, we study the following model that was proposed in [40]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \underbrace{\Delta u}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\nabla \cdot (u \nabla v)}_{\text{Chemotaxis}} \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \underbrace{D \Delta v}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\beta v}_{\text{Decay}} + \underbrace{u}_{\text{Production}} \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x) \quad \text{in } \Omega, \end{array} \right. \quad (2)$$

where  $\Omega$  is an open bounded subset of  $\mathbb{R}^N$  with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $n$  denotes the outward unit normal vector to  $\partial\Omega$  and  $D$  and  $\beta$  are positive real numbers.

Our first step is to show that (2) admits a unique positive local in time solution. This is proved with help of the abstract theory for quasilinear parabolic problems presented in [2].

**Théorème 1** *Let  $p > N$  be given and consider the initial condition  $(u_0, v_0) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$  with  $u_0, v_0 \geq 0$ . Then (2) has a unique local in time classical solution*

$$(u, v) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, T_{max}); \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}); \mathbb{R}^2),$$

with  $u(x, t), v(x, t) \geq 0$  for each  $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T_{max})$ ;  $T_{max}$  denotes the maximal existence time. Moreover, if there exists a function  $w : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$  such that, for each  $T > 0$ ,

$$\|(u(t), v(t))\|_\infty \leq w(T), \quad 0 < t < \min\{T, T_{max}\}, \quad (3)$$

then  $T_{max} = +\infty$ .

At this point we must wonder if the solution provided by the previous theorem is global in time or not, that is, whether  $T_{max} = +\infty$  or  $T_{max} < +\infty$ . Notice that the physical interpretation of (2) suggests that  $T_{max} = +\infty$ . Therefore we should try to prove (3) and, to this aim, we use a recursive argument.

A first attempt, not the best one, can be the following: We integrate in the space variable the  $u$ -equation of (2) and we get

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u = 0, \quad (4)$$

which implies

$$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1, \quad 0 < t < T_{max}. \quad (5)$$

A direct consequence of (5) is that, for every measurable set  $E \subset \Omega$  with positive Lebesgue measure we have

$$\liminf_{t \rightarrow T_{max}^-} \left( \sup_{x \in E} u(x, t) \right) < +\infty.$$

So, the set of blow-up points for  $u$  has zero Lebesgue measure. Now, from the uniformly  $L^1$ -bound (5) coming from the  $u$ -equation we can use parabolic regularity theory in the  $v$ -equation to get uniform bounds for  $v$ :

**Lemma 2** *Assume that  $0 < t_0 < T_{max}$  and  $1 \leq \gamma < N$ . Let us set  $\gamma^* = N\gamma/(N-\gamma)$ . If  $\|u(t)\|_\gamma \leq C_1$  for all  $t \in [t_0, T_{max})$  then for each  $p \in [1, \gamma^*)$  there exists  $C_2$  depending on  $N, C_1$  and  $p$  such that*

$$\|v(t)\|_{W^{1,p}} \leq C_2, \quad t \in [t_0, T_{max}).$$

The proof of this Lemma can be obtained from the representation by linear semigroups of the  $v$ -equation; see for instance [25, Lemma 4.1].

As we see, in this procedure we are regarding the system (2) as a set of separated equations. For example, if  $N \geq 2$  we cannot obtain uniform bounds of  $\|v(t)\|_{W^{1,2}}$ . Moreover, the bounds for  $v$  depend strongly on the dimension  $N$ . We should use, if it is possible, the intrinsic properties of the system and deal with the full system simultaneously. The idea is to capture properly the taxis term of the  $u$ -equation from the  $v$ -equation. In a formal way, we proceed as follows.

First, if we multiply the  $u$ -equation by  $\log u$  and we integrate respect to the space variable, we get:

$$\int_{\Omega} u_t \log u = - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

and, by (4), we deduce that

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \log u = - \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v. \quad (6)$$

On the other hand, multiplying the  $v$ -equation by  $-\Delta v$  and integrating with respect to space, we obtain:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = -D \int_{\Omega} |\Delta v|^2 - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v. \quad (7)$$

Finally, by adding (6) and (7), we have that

$$\frac{d}{dt} F(u(t), v(t)) = -D(u(t), v(t)) \leq 0, \quad (8)$$

where

$$F(u, v) := \int_{\Omega} u \log u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2,$$



$$D(u, v) := \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u} + D \int_{\Omega} |\Delta v|^2 + \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Observe that it is possible to control the negative part of  $s \log s$ , thanks to the boundedness of the domain  $\Omega$ . Therefore, there exists a constant  $C > 0$  such that

$$-C \leq F(u(t), v(t)), \quad t \in [0, T_{max}]. \tag{9}$$

This, together with (8), has various important consequences for the associated system (2). Frequently, when the systems under consideration stem from phenomena in physics, the functional  $F$  is called the *entropy* and the functional  $D$  is called the *entropy production*. In mathematical terminology,  $F$  a Lyapunov functional.

The first consequence that we get uniform bounds for  $u$  and  $v$  independently of the dimension. By a simple integration of (8) in the time variable, taking into account the regularity of the initial data we get that

$$-C \leq F(u(t), v(t)) \leq F(u_0, v_0) < +\infty, \quad t \in [0, T_{max}]. \tag{10}$$

We also have

$$\int_0^t D(u(s), v(s)) ds \leq F(u_0, v_0) + C, \quad t \in [0, T_{max}]. \tag{11}$$

The second consequence is that the information provided by the Lyapunov functional  $F$  can be used to determine the long time behaviour of (2).

Let us summarize. Our goal is to show that the solution of (2) is global in time and we are trying to find bounds uniform in time in the  $L^\infty$ -norm for  $u$  and  $v$ . To this aim, we have introduced the Lyapunov functional associated to (2).

At this point, since the results depend on the dimension, we distinguish between  $N \leq 2$  and the higher dimensional case.

### 2.1 The Case $N \leq 2$

Here, it is possible to derive uniform  $L^p$ -bounds for every  $p$ . This is done by multiplying the  $u$ -equation by  $(p + 1)u^p$ , integrating in the space variable and using the uniform bound

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\Delta v|^2 < +\infty, \quad t \in [0, T_{max}),$$

as well as the Gagliardo-Nirenberg inequality. After that, we can adapt the Moser iteration method (see for instance [1]) or the De Giorgi method (see for instance [6, 8]) to get uniform  $L^\infty$  estimates for  $u$ .

We skip the details of the estimates, since we consider more interesting to show how to use the functional  $F$  in order to infer the long time behaviour of (2). In particular, we will show that  $u$  tends to the mean value

$$\bar{u} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0,$$

where  $|\Omega|$  stands for the  $N$ -dimensional Lebesgue measure of  $\Omega$ . Moreover, we will also derive the rate of convergence to the mean value of  $u$ .

To be more precise, we have the following:

**Théorème 3** *Assume that  $N \leq 2$ . If  $(u_0, v_0)$  satisfies the hypotheses of Theorem 1, then*

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}\|_1^2 \leq Ce^{-\alpha t},$$

where the constants  $C, \alpha > 0$  can be computed explicitly.

*Démonstration.* It is convenient to use a slight modification of the Lyapunov functional  $F$ . The functional

$$G(u, v) := \int_{\Omega} u \log(u/\bar{u}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

also satisfies

$$\frac{d}{dt}G(u(t), v(t)) = -D(u(t), v(t)). \quad (12)$$

From the Jensen inequality with the probability measure  $d\mu = dx/|\Omega|$  we readily see that  $G(u, v) \geq 0$ . Assume for the moment that there exists a constant  $\alpha > 0$  such that

$$\alpha G(u, v) \leq D(u, v). \quad (13)$$

Then, from (12) we deduce that

$$0 \leq G(u(t), v(t)) \leq G(u_0, v_0)e^{-\alpha t}.$$

Therefore, we get that the Lyapunov functional  $G$  decays exponentially to zero. In particular, we have

$$\int_{\Omega} u \log(u/\bar{u}) \leq G(u_0, v_0)e^{-\alpha t}.$$

Finally, using the Csiszar-Kullback inequality (see [4])

$$\frac{1}{2\bar{u}} \|u - \bar{u}\|_1^2 \leq \int_{\Omega} u \log(u/\bar{u}),$$

we conclude the proof.

It only remains to prove (13). We know that, for any  $r \geq 0$ ,

$$r \log r + r - 1 \leq (r - 1)^2.$$

Let us set  $r = u/\bar{u}$ . By the Poincare-Wirtinger inequality and (5), we have:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u \log(u/\bar{u}) &= \bar{u} \int_{\Omega} r \log r + \bar{u} \int_{\Omega} (r - 1) \\
 &\leq \bar{u} \int_{\Omega} (r - 1)^2 \\
 &= \frac{1}{\bar{u}} \int_{\Omega} (u - \bar{u})^2 \\
 &\leq \frac{C}{\bar{u}} \left( \int_{\Omega} |\nabla u| \right)^2 \\
 &= \frac{4C}{\bar{u}} \left( \int_{\Omega} |u^{1/2} \nabla u^{1/2}| \right)^2 \\
 &\leq \frac{4C}{\bar{u}} \left( \int_{\Omega} u \right) \left( \int_{\Omega} |\nabla u^{1/2}|^2 \right) \\
 &= |\Omega| C \int_{\Omega} u^{-1} |\nabla u|^2.
 \end{aligned}$$

Therefore,  $\alpha G(u, v) \leq D(u, v)$  with

$$\alpha = \min \left\{ 2\beta, \frac{1}{|\Omega| C_{pw}} \right\}.$$

□

Before ending this case, let us give an additional explanation of the fact that  $u$  converges asymptotically in time towards its mean value. Observe that, for any  $k$ , the couple  $(k, k/\beta)$  is a solution to

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla \cdot (u \nabla v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ -D\Delta v + \beta v = u & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

The conservation of the  $L^1$ -norm of the solution along time can be used to select the constant  $k$ :

$$k|\Omega| = \|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1$$

for all  $t$ . Therefore,  $\bar{u}$  is a solution to the setady state problem associated to (2).

## 2.2 The higher dimensional case

Unfortunately, for  $N \geq 3$  it is not known whether the estimates provided by the Lyapunov  $F$  are enough to show the existence of global regular solutions, independently of the size of  $(u_0, v_0)$ . However, the bounds given by the functional  $F$  suggest the existence of global  $L^1$ -solutions.

In this case we use the compactness method. The idea is to introduce a regularization  $(2)_\epsilon$  of (2) and to pass to the limit as  $\epsilon \rightarrow 0^+$  to get a

solution of (2). For this purpose, we need proper bounds of the solution of  $(2)_\epsilon$  independently of  $\epsilon > 0$ . The perturbation we will introduce is based on the *volume filling effect*, a property that was identified in [19, 20] and can be used to prevent the overcrowding of cells.

For each  $\epsilon > 0$  we consider the following perturbation of (2):

$$\begin{cases} u_t^\epsilon = \Delta u^\epsilon + \nabla \cdot (u^\epsilon(1 - \epsilon u^\epsilon)\nabla v^\epsilon) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t^\epsilon = D\Delta v^\epsilon - \beta v^\epsilon + u^\epsilon & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u^\epsilon}{\partial n} = \frac{\partial v^\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ (u^\epsilon, v^\epsilon)(x, 0) = (u_0, v_0)(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (15)$$

Observe that (2) is obtained by taking  $\epsilon = 0$  in (15). Moreover, since the function  $f(s) = s(1 - \epsilon s)$  vanishes at 0 and at  $1/\epsilon$  then, if  $0 \leq u_0^\epsilon, v_0^\epsilon \leq 1/\epsilon$  we have

$$0 \leq u^\epsilon, v^\epsilon \leq 1/\epsilon.$$

The last assertion is a consequence of [2, Theorem 15.1] when we rewrite the  $u^\epsilon$ -equation in terms of the new variable  $z^\epsilon = 1/\epsilon - u^\epsilon$ . Using the results of [2], we can also deduce, if  $(u_0^\epsilon, v_0^\epsilon) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$  and  $p > N$ , the existence and uniqueness of a unique regular solution to (15) for sufficiently small  $\epsilon > 0$ .

Next we turn to present an estimate of the solutions  $(u^\epsilon, v^\epsilon)$  that is uniform with respect to  $\epsilon$ :

**Lemme 4** *For any sufficiently small  $\epsilon > 0$  and any  $t \geq 0$ , the solution  $(u^\epsilon, v^\epsilon)$  to (15) satisfies*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( u^\epsilon |\log u^\epsilon| + \frac{|\nabla v^\epsilon|^2}{2} \right) (t) + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{|\nabla u^\epsilon|^2}{u^\epsilon} + D|\Delta v^\epsilon|^2 + \beta|\nabla v^\epsilon|^2 \right) \leq C_0, \end{aligned}$$

where  $C_0$  depends only on  $\Omega$  and  $F(u_0, v_0)$ .

We skip the proof of this lemma and we present without proof the results for  $N = 3$  and  $N = 4$  that can be inferred:

**Théorème 5** *Let  $N = 3$ . If  $u_0$  and  $v_0$  are non-negative functions in  $W^{1,p_0}(\Omega)$  for some  $p_0 > 3$ , then there exists a global weak solution  $(u, v)$  to (2) which also satisfies*

$$(u, v) \in L^{5/4}(0, T; W^{1,5/4}(\Omega; \mathbb{R}^2))$$

for any  $T > 0$ . Moreover, we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u(x, t) - \bar{u}) \phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in L^\infty(\Omega) \quad (16)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(\cdot, t) - \bar{v}\|_2 = 0, \quad (17)$$

where  $\bar{v}$  denotes the mean value of  $v$ .

**Théorème 6** *Let  $N = 4$ . If  $u_0$  and  $v_0$  are non-negative functions in  $W^{1,p_0}(\Omega)$  for some  $p_0 > 4$ , then there exists a global weak solution  $(u, v)$  to (2). Moreover we also have (16) and (17).*

Let us point out that the previous existence results do not seem to extend to space dimensions  $N \geq 5$  since, for these  $N$ , we cannot ensure that  $u\nabla v \in L^1(\Omega \times (0, T); \mathbb{R}^N)$  for all  $T > 0$ . In fact, if  $N = 4$  we have  $u\nabla v \in L^1(\Omega \times (0, T); \mathbb{R}^N)$  and no more than this and we have to apply the Dunford-Pettis Theorem (see [3]) as well as the Vitali convergence Theorem (see [14]) in the compactness method.

The proofs that have been omitted here can be found in [7].

### 3 Invasion

In the previous Section, the signal or stimulus diffuses in the environment. However there are cases in which the stimulus is strictly localized; for example, this explains the behavior of the ants, which follow trails left by predecessors, myxobacteria (see [36]); this is also the situation in cell invasion phenomena. The cell invasion into the surrounded extracellular matrix is a process that is present in various biological phenomena like wound healing, tumor invasion or morphogenesis.

Along this Section, we will deal with a model related to tumor invasion that covers the models proposed in [5, 37]. It is assumed that the tumoral cells produce proteolytic enzymes which degrade the extracellular matrix. Then, the tumoral cells move towards the gradient of the matrix. Such a movement is called *haptotaxis*. The model has three main variables,  $u$  (the concentration of cancer cells),  $v$  (the extracellular matrix distribution) and  $m$  (the concentration of proteolytic enzymes) and is the following:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underbrace{u_t = \rho \Delta u}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v)}_{\text{Haptotaxis}} + \underbrace{\mu u(1-u-v)}_{\text{Proliferation}} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = - \underbrace{\gamma mv}_{\text{Degradation}} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ m_t = \underbrace{\Delta m}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\beta m}_{\text{Decay}} + \underbrace{\alpha ug(v)}_{\text{Production}} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \rho \frac{\partial u}{\partial n} - u\chi(v) \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial m}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ (u, v, m)(x, 0) = (u_0, v_0, m_0)(x) & \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (18)$$

Here,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  is again a bounded regular domain,  $g, \chi \in \mathcal{C}^2([0, +\infty))$  with  $g(s), \chi(s) \geq 0$  for all  $s \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  and  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  are positive constants.

In order to elucidate the behaviour of (18), let us simplify the equations. Later on, we will deal with the full system. Dividing the  $m$ -equation by  $\beta$  we get:

$$\beta^{-1}m_t = \beta^{-1}\Delta m - m + \frac{\alpha}{\beta}ug(v).$$

Next, we observe that if the production and decay rates of the proteolytic enzymes, denoted by  $\alpha$  and  $\beta$  respectively, are much greater than the motility, that is  $\alpha \gg 1, \beta \gg 1$ , then, heuristically, we can claim that

$$m \simeq \frac{\alpha}{\beta} ug(v).$$

Now, let us replace  $m$  by this function in the  $v$ -equation. Assuming that the proliferation term in (18) is of the form  $\mu u(1 - u)$ , we get:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\rho \nabla u - u \chi(v) \nabla v) + \mu u(1 - u) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = -\frac{\gamma \alpha}{\beta} v u g(v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} - u \chi(v) \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, T), \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (19)$$

Let us now suppose that  $\rho = \frac{\gamma \alpha}{\beta} = 1$  (because the values of the constants play no role in the proofs). Moreover, for simplicity, let us also assume that  $\chi(v) = 1$  and  $g(v) = v^{\beta-1}$  for some  $\beta \geq 1$ . Then we have from (19):

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla v) + \mu u(1 - u) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = -u v^{\beta} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, T), \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (20)$$

The lack of an operator acting in the space variables has two important consequences in the  $v$ -equation. The first one is that there is not space regularization for  $v$  and this makes appear in some sense a hyperbolic structure. This can be seen by solving the  $v$ -equation. For instance, if  $\beta = 1$ ,

$$v(x, t) = v_0(x) e^{-\int_0^t u(x, s) ds}$$

and, if  $v_0(\cdot) \in L^1(\Omega)$ , we have  $v(\cdot, t) \in L^1(\Omega)$  and not more than this for all  $t > 0$ . The second consequence is that the speed of propagation in the  $v$ -equation is zero. This means that, if  $v_0(x_0) = 0$  for some  $x_0 \in \Omega$ , then  $v(x_0, t) = 0$  for all  $t > 0$ .

Next, we follow the same steps in the previous Section in order to analyze (20). The next result provides global existence and uniqueness for (20) in 2-dimensional domains:

**Théorème 7** *Assume that  $0 < l < 1$  and  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  is a bounded domain with  $C^{2+l}$  boundary  $\partial \Omega$ . If  $(u_0, w_0) \in C^{2+l}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ ,  $u_0 \geq 0$ ,  $v_0 > 0$ ,  $u_0 \not\equiv 0$  and the compatibility condition*

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = u_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \quad \text{on } \partial \Omega$$

*is satisfied, then (20) has a unique global positive solution defined on  $[0, +\infty)$  and  $(u, v) \in C^{2+l, 1+l/2}(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^2)$ , for all  $T > 0$ .*

The proof can be carried out as follows. First, we establish local existence of a solution; this is done in a similar way as in [38, 39]. The main difficulty to overcome with respect to these papers is that we use different boundary conditions. Then, in order to obtain global existence, suitable estimates of the solutions are obtained. However, in contrast with the previous Section, the lack of spatial regularization effect for  $v$  demands tedious estimates. As in the previous Section, a Lyapunov function

$$F(u, w) = \int_{\Omega} u(\log u - 1) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^{-\beta} |\nabla v|^2$$

associated to (20) plays an important role. For  $\mu = 0$ , that is, without proliferation, such a Lyapunov function was first introduced in [9], although some ideas had already been given in [39].

Now, we will focus on the long time behavior of the solutions to (20). As we have seen in the previous Section, the solutions to the stationary problem associated to (20) are candidate to be the limit of the solutions as time goes to infinity.

**Théorème 8** *The positive solutions  $(u, v)$  to the stationary problem associated to (20) with  $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$  are given by*

$$\begin{aligned} (u^*, v^*) &= (0, \tilde{v}), & \tilde{v} &\in \mathcal{P}_2, \\ (u^*, v^*) &= (1, 0), & \text{if } \mu &> 0, \\ (u^*, v^*) &= (k, 0), & \text{if } \mu &= 0, \end{aligned}$$

where  $k > 0$  and  $\mathcal{P}_2 = \{z \in W^{1,\infty}(\Omega) : z \geq 0, z \not\equiv 0\}$ .

Let us stress that  $uv = 0$  does not imply that either  $u \equiv 0$  or  $v \equiv 0$ . Notice that functions with disjoint supports satisfy  $uv = 0$ .

The basic idea in the proof of this result is to rewrite the system for the new variable  $z = ue^{-v}$  and then to apply the strong maximum principle and the Hopf Lemma (see for instance [17, Lemma 3.4, Theorem 3.5]) to deduce that either  $z \equiv 0$  or  $z(x) > 0$  for all  $x \in \bar{\Omega}$ .

By the results of the previous Section we can expect that the solutions  $(1, 0)$  or  $(k, 0)$  are globally asymptotically stable and the solutions  $(0, \tilde{v})$  are unstable. In fact, it is just this what happens. However, the rate of convergence is known to be exponential only when  $\beta = 1$ . Thus, we distinguish the cases  $\beta = 1$  and  $\beta > 1$ .

**The case  $\beta = 1$**  - We prove the following:

**Théorème 9** *Under the hypotheses of Theorem 7 we have:*

$$\|u(\cdot, t) - u_{\mu}\|_2 \leq Ce^{-\theta t}, \quad \|v(\cdot, t)\|_{\infty} \leq Ce^{-\theta' t}, \quad (21)$$

where  $\theta, \theta'$  are positive constants and

$$u_{\mu} := \begin{cases} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0 & \text{if } \mu = 0, \\ 1 & \text{if } \mu > 0. \end{cases} \quad (22)$$

*Démonstration.* Again, the proof relies on the properties of a Lyapunov function  $F$ . In this case, we have

$$\frac{d}{dt}F(u, v) = -D(u, v),$$

where

$$F(u, v) = \int_{\Omega} u(\log u - 1) + 1 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^{-1} |\nabla v|^2,$$

$$D(u, v) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (uv^{-1} |\nabla v|^2 + \mu u(u-1) \log u).$$

The first step is to prove the exponential decay of  $F$ . For this purpose, it is enough to prove that  $D(u, v) \geq \alpha F(u, v)$  for some  $\alpha > 0$  and, to get this inequality, it is convenient to establish that  $u$  is separated from zero:

**Lemma 10** *Under the hypotheses of Theorem 7, if  $\min_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x) \geq \rho_0 > 0$  for some  $\rho_0 > 0$  then  $\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x, t) \geq \rho$  for some  $\rho > 0$ .*

We skip the proof. Let us point out that, if  $\min_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x) = 0$  but  $u_0 \not\equiv 0$  then, by the strong maximum principle, for  $\tau > 0$  we have  $\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x, \tau) > 0$ . Consequently, in this case we can repeat our arguments taking as new initial time  $\tau > 0$ .

By the previous lemma and the inequality  $\log s \leq s - 1$ , we obtain

$$D(u, v) \geq \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} v^{-1} |\nabla v|^2 + \mu \rho (u - 1) \log u$$

$$\geq \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} v^{-1} |\nabla v|^2 + \mu \rho (u(\log u - 1) + 1) \geq \gamma F(u(t), v(t)),$$

where  $\gamma = \min\{\rho, \mu\rho\}$ . Therefore,  $F(u(t), v(t)) \leq F(u_0, v_0)e^{-\gamma t}$  and, in particular, we have

$$\int_{\Omega} C_v^{-1} |\nabla v|^2 \leq \int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^2}{v} \leq F(u_0, v_0)e^{-\gamma t} \quad (23)$$

where  $C_v > 0$  is any positive constant such that  $v \leq v_0 \leq C_v$ . Next, we multiply the  $u$ -equation by  $u - u_\mu$  and we integrate in the space variable. From the uniform bounds in time of  $u(\cdot, t)$  in the  $L^\infty$ -norm, (23) and the Poincaré-Wirtinger inequality, we get:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - u_\mu)^2 = -2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla v - 2\mu \int_{\Omega} u(u - u_\mu)^2$$

$$\leq (\epsilon C - 2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - 2\mu \rho \int_{\Omega} (u - u_\mu)^2 \quad (24)$$

$$\leq C(\epsilon) C_v F(u_0, v_0) e^{-\gamma t} - C(\mu) \int_{\Omega} (u - u_\mu)^2,$$



where

$$C(\mu) = \begin{cases} 2\mu\rho & \text{if } \mu > 0, \\ \frac{2-C\epsilon}{C_{pw}} & \text{if } \mu = 0. \end{cases}$$

From (24), we easily get the result.  $\square$

**The case  $\beta > 1$  -** We now have:

**Théorème 11** *Under the hypotheses of Theorem 7, if  $t$  is sufficiently large, then*

$$\|u(\cdot, t) - u_\mu\|_2 \leq C(\|v_0\|_\infty^{1-\beta} \rho(\beta - 1)t)^{\frac{1}{2(1-\beta)}} \quad (25)$$

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq (\|v_0\|_\infty^{1-\beta} + \rho(\beta - 1)t)^{\frac{1}{1-\beta}}. \quad (26)$$

*Démonstration.* On one hand, we know that

$$\int_0^t \int_\Omega uv^{-1} |\nabla v|^2 \leq C. \quad (27)$$

On the other hand, solving the  $v$ -equation we have that

$$v(x, t) = \left( v_0(x)^{1-\beta} + (\beta - 1) \int_0^t u(x, s) ds \right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

This equality, together with Lemma 10, implies (26). As a consequence

$$u(x, t)v(x, t)^{-1} \geq \rho(\|v_0\|_\infty^{1-\beta} + \rho(\beta - 1)t)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Now, putting the above estimate in (27), we obtain

$$\int_0^t \rho(\|v_0\|_\infty^{1-\beta} + \rho(\beta - 1)s)^{\frac{1}{\beta-1}} \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq C. \quad (28)$$

Taking into account this decay property of the gradient, we can use an argument similar to the one used in the case  $\beta = 1$  to conclude the proof.  $\square$

Now, we study the full system (18). This has an advantage with respect to (20) because the  $m$ -equation induces regularity in the component  $v$ . Accordingly, in this case we can also deal with 3-dimensional domains. We will assume in fact that  $N = 3$  in the rest of the Section.

Let us introduce some spaces. Let  $p \in (1, \infty)$  and let us define the operator

$$A_p u := -\Delta u + \beta u$$

with domain

$$D(A_p) := \left\{ u \in W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}.$$

Since  $\operatorname{Re} \sigma(A_p) \geq \beta > 0$ , where  $\sigma(A_p)$  stands for the spectrum of  $A_p$ , we can also introduce the fractional powers  $A_p^\nu$  for all  $\nu > 0$  (see [18, Chapter 1, Section 4]). Let us set

$$X_p^\nu := D(A_p^\nu).$$

In the next result, the local existence and the continuous dependence of the solution respect to the initial data are analyzed:

**Théorème 12** *Let  $\nu \in \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2p}, 1\right)$  and  $p \in (3, 6)$ . Suppose that the initial data satisfies*

$$\mathbf{x}_0 := (u_0, v_0, m_0) \in H^1(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) \times X_p^\nu := \mathbf{Y}.$$

*Then there exists  $\tau(\|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Y}})$  such that the problem (18) has a unique solution*

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}([0, \tau]; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, \tau); W^{1,\infty}(\Omega)), \\ v &\in \mathcal{C}([0, \tau]; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((0, \tau); W^{1,\infty}(\Omega)), \\ m &\in \mathcal{C}([0, \tau]; X_p^\nu) \cap \mathcal{C}^1((0, \tau); X_p^\nu) \cap \mathcal{C}((0, \tau); W^{2,p}(\Omega)). \end{aligned} \quad (29)$$

*Moreover, the solution depends continuously on the initial data. Finally, if  $u_0(x), v_0(x), m_0(x) \geq 0$  then  $u(x, t), v(x, t), m(x, t) \geq 0$  for all  $(x, t) \in \Omega \times (0, \tau]$ .*

In order to show that  $T_{max} = +\infty$ , where  $T_{max}$  denotes the maximal interval of existence, we have just to check that, for all  $T > 0$  such that the solution exists in  $[0, T]$ , one has  $(u, v, m) \in X_T \times Y_T \times Z_T$  and

$$\|(u, v, m)\|_{X_T \times Y_T \times Z_T} \leq C(T) < +\infty, \quad (30)$$

where

$$\begin{aligned} X_T &:= L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ Y_T &:= L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)), \\ Z_T &:= L^\infty(0, T; X_p^\nu). \end{aligned}$$

At this time, let us explain why the estimate (30) is enough to obtain global existence and also uniqueness. The argument is as follows.

First, we apply Theorem 12. This gives us a solution up to a time  $t_1 > 0$ ; then, we can apply again the Theorem 12 with initial data

$$(u_0, v_0, m_0) = (u(\cdot, t_1), v(\cdot, t_1), m(\cdot, t_1)).$$

Therefore, recursively we have an increasing sequence of times  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  and, thanks to (30) it can be assumed that  $t_k \rightarrow +\infty$ . This argument leads to the existence of solution in  $[0, T]$  for all  $T > 0$ .

It should be stressed that, a priori, we do not have uniqueness of solution on  $[0, T]$  for any given  $T > 0$  because Theorem 12 assures uniqueness just for  $T$  small. However, this difficulty can be solved as follows.

Let  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  two solutions of (18). We define the set  $\mathcal{A}$  by

$$\mathcal{A} := \{t \in [0, T] : \mathbf{u}_1(\cdot, t) \neq \mathbf{u}_2(\cdot, t) \text{ in } \mathbf{Y}\}.$$

Assume that  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ; then there exists  $t^* = \inf A$  and  $t^* > 0$ , by Theorem 12. Hence,  $t^* - \epsilon \notin A$ , for all  $\epsilon > 0$ . Now, applying Theorem 12 at time  $t^* - \epsilon$  and taking into account that the maximal existence and uniqueness time is bounded from below, we obtain that  $\mathbf{u}_1(\cdot, t) = \mathbf{u}_2(\cdot, t)$  for all  $t \in [0, t^* + k]$  for some  $k > 0$ , contradicting the Definition of  $t^*$ . Therefore,  $A = \emptyset$  and the uniqueness result follows.

We skip the proof of (30), that it is based on the Gagliardo-Nirenberg inequality (see for instance [18, Chapter 1, Section 6]) and a parabolic regularity result (Lemma 2).

Our next step is to study the long time behavior of the solutions. In this part of the Section, we will focus on the cases  $g(s) = 1$  and  $g(s) = s$ , that correspond to the models proposed in [5] and [37] respectively. Clearly, the simplified system suggests the result. Unfortunately, we cannot argue as previously for the long time behaviour due to the lack of a Lyapunov function for (18). However, if we examine carefully the proof of Theorem 9 we notice that two estimates were crucial in the proof. The first one is the separation from zero of  $u$  and the second one is the exponential decay of the gradient of  $v$  to zero.

**Lemma 13** *Under the hypotheses of Theorem 12, if  $\min_{x \in \overline{\Omega}} u_0(x) \geq \rho_0 > 0$  for some  $\rho_0 > 0$ ,  $\|v_0\|_\infty < 1$  and  $\mu > 0$ , then  $\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x, t) \geq \rho$  for some  $\rho > 0$ .*

**Lemma 14** *Let  $\tau > 0$ ,  $v_0 > 0$ . Assume that*

$$m(x, t) \geq \delta > 0, \quad \forall t \geq \tau. \tag{31}$$

*Then, for all  $t \geq \tau$ , we have*

$$\int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 \leq Ce^{-kt}, \tag{32}$$

*for all  $0 < k < \delta$ .*

Observe that, when  $g(v) = 1$ , Lemma 13 implies (31). Therefore, for  $g(v) = 1$  we can repeat the arguments in the proof of Theorem 9 and obtain the following:

**Théorème 15** *Assume that  $g(v) = 1$ . Under the hypotheses of Theorem 12, if  $\|v_0\|_\infty < 1$  and  $\mu > 0$ , we have:*

$$\|u(\cdot, t) - u_\mu\|_2^2 \leq Ce^{-\theta t}, \quad \|v(\cdot, t)\|_\infty \leq Ce^{-\delta t}, \quad \left\| m(\cdot, t) - \frac{\alpha u_\mu}{\beta} \right\|_2^2 \leq Ce^{-\varrho t} \tag{33}$$

*where  $\theta, \delta, \varrho > 0$  and  $u_\mu$  is as in Theorem 9.*

In the case  $g(v) = v$  we cannot ensure (32). In fact, we will see that it does not hold in general. It is also unclear how to get a decay of the gradient of  $v$  in the spirit of (28). In this case, we use a different argument that is similar to the one used in [15].

Thus, let us introduce

$$y(t) = \|u(\cdot, t) - u_\mu\|_2.$$

We try to prove that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . Notice that the inequality

$$\int_0^\infty y(s) ds < C \quad (34)$$

is not sufficient to claim that  $y(t)$  goes to zero as time goes to infinity. We need an additional condition to control the oscillatory behavior of  $y(t)$ . For example, the condition

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} |y_t(s)| ds = 0. \quad (35)$$

The last theorem of this Section is the following:

**Théorème 16** *Let  $g(v) = v$ . Under the hypotheses of Theorem 12, we have:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - u_\mu\|_2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(\cdot, t)\|_\infty = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|m(\cdot, t)\|_2 = 0. \quad (36)$$

For the proof, we first check that (34) and (35) holds. We omit the details, that can be found in [29].

Before the end of the Section, let us point out that the results of this Section can be found in the papers [28, 29]. See also [43, 44], where the authors prove the existence of a global in time solution for other models of invasion.

## 4 Angiogenesis

Angiogenesis is a physiological process involving the new vessels sprout from a pre-existing vasculature in response to chemical stimuli. Angiogenesis is a normal process in growth, development and wound healing. However, angiogenesis is also induced by tumoral cells. As a response to oxygen deprivation, tumoral cells secrete tumor angiogenic factors (TAF). These factors diffuse until they reach the endothelial cells that form the blood vessel wall. Then the factors attach to the endothelial cells and provoke, after a signalling cascade, the chemotactic migration of the endothelial cells towards the tumor. After that, the cells join together to form new capillaries. The interested reader can find more details about tumor-induced angiogenesis in [32] and the references therein.

The model that we will consider in this Section has two variables, namely  $u$  (the concentration of endothelial cells) and  $v$  (the concentration of TAF). Both populations live in a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , with regular boundary. Moreover,

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

where  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_1$  are open and closed sets in the relative topology of  $\partial\Omega$ . We assume that  $\Gamma_0$  is the tumor boundary and  $\Gamma_1$  the blood vessel boundary, see Figure 1 for an example.

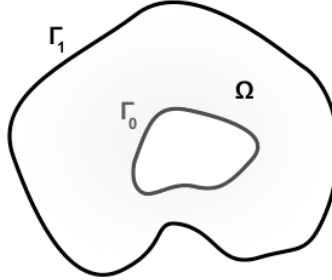


Figure 1 – Example of domain  $\Omega$ .

We impose a homogeneous Neumann boundary condition for  $u$  on  $\partial\Omega$  as well as for  $v$  on  $\Gamma_1$ . We also assume that there is a flux of TAF entering in the domain  $\Omega$  through  $\Gamma_0$  in a nonlinear way. This is the main difference here with respect to [12], where this term is linear. To fix ideas, we will assume that

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \mu \frac{v}{1+v} \text{ on } \Gamma_0 \times (0, T),$$

where  $\mu \geq 0$  is a constant that measures the amount of TAF produced on the boundary of the tumor. Therefore, we consider the following parabolic problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -\operatorname{div}(V(u)\nabla v) + \lambda u - u^2 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t - \Delta v = -v - cuv & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \mu \frac{v}{1+v} & \text{on } \Gamma_0 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (37)$$

where  $0 < T \leq +\infty$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$ ,  $c > 0$  and the function

$$V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad V > 0 \text{ in } (0, \infty) \text{ with } V(0) = 0; \quad (38)$$

and  $u_0$  and  $v_0$  are non-negative and non-trivial given functions.

Let us give a short explanation of the model. Endothelial cells diffuses, moves towards the gradient of TAF and reproduces following a logistic law. Here,  $V$  is the chemotactic response of the endothelial cells to the chemoattractant  $v$ . In this case the response depends on a nonlinear way on the density  $u$ . The TAF diffuses and either attach to the endothelial cells  $-cuv$  or it is consumed  $-v$ .

As in the previous Sections, we will first present a local existence theorem whose proof relies on the abstract theory of semilinear parabolic problems.

**Théorème 17** *Let us assume that  $p > N$ , (38) is satisfied and  $(u_0, v_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^2$ , with  $u_0 \geq 0$ ,  $v_0 \geq 0$  a.e. in  $\Omega$ . Then, (37) has a unique non-negative local in time classical solution*

$$(u, v) \in (\mathcal{C}([0, T_{max}); W^{1,p}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max})))^2,$$

where  $T_{max}$  denotes the maximal existence time. Moreover, if there exists a function  $w : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$  such that, for each  $T > 0$ ,

$$\|(u(t), v(t))\|_{\infty} \leq w(T), \quad 0 < t < \min\{T, T_{max}\}, \quad (39)$$

then  $T_{max} = +\infty$ .

For the global existence of a solution, we have to impose an additional assumption on  $V$ , for instance that  $V$  is bounded. In that case, we can prove the estimate (39) by a recursive procedure. The most technical part needs a regularity lemma like the one in the first Section (Lemma 2) for the  $v$ -equation:

**Lemme 18** *Assume that  $0 < t_0 < T_{max}$  and  $\gamma \in (1, \infty)$ . Let us set  $\gamma^* = N\gamma/(N-1)$ . If  $\|u(t)\|_{\gamma} \leq C_1$  for all  $t \in [t_0, T_{max})$  then for each  $p \in [1, \gamma^*)$  there exists a constant  $C_2$ , depending on  $N$ ,  $C_1$  and  $p$ , such that*

$$\|v(t)\|_{W^{1,p}} \leq C_2, \quad t \in [t_0, T_{max}).$$

Next, we deal with the steady-state problem associated to (37). In previous Sections all the steady-states with positive components we have found were homogeneous in the space variable. Here, the nonlinearity on the boundary induces the presence of steady-states where none of the components satisfies this property.

The steady states of (37) can be classified as follows:

- The trivial solution.
- Semi-trivial solutions i.e. couples  $(u, v)$  such that  $u \equiv 0$  or  $v \equiv 0$  but  $(u, v) \not\equiv (0, 0)$ .
- Solutions  $(u, v)$  such that  $u \not\equiv 0$  and  $v \not\equiv 0$ , which are called *coexistence states*.

It is clear that the trivial solution exists for all  $\lambda, \mu \geq 0$ .

If the  $v$ -component of the steady-state is zero, then a semi-trivial positive solution exists if, and only if,  $\lambda > 0$ . In that case, it must be of the form  $(\lambda, 0)$ .

If the  $u$ -component is zero, then we must solve the nonlinear problem

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \mu \frac{v}{1+v} & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \quad (40)$$

This equation was analyzed in [42] when  $\Gamma_1 = \emptyset$ .

**Lemme 19** *There exists a positive solution of (40) if, and only if,*

$$\mu > \mu_1 > 0,$$

where  $\mu_1$  is the principal eigenvalue of the linearization at zero of (40) i.e. the principal eigenvalue of

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mu\psi & \text{on } \Gamma_0. \end{cases}$$

Moreover, in such case, the positive solution is unique and will be denoted by  $\theta_\mu$ .

Hence, the couples  $(0, \theta_\mu)$  for  $\mu > \mu_1$  are the unique semi-trivial solutions for which the  $u$ -component is zero.

In the analysis of the existence of coexistence states of (37), we find two curves  $\mu = F(\lambda)$  and  $\lambda = \Lambda(\mu)$  that are crucial. Here,  $F(\lambda)$  is the principal eigenvalue of the linearization of the stationary  $v$ -equation at  $(\lambda, 0)$  i.e. the principal eigenvalue of

$$\begin{cases} -\Delta\psi + (1 + c\lambda)\psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = \mu\psi & \text{on } \Gamma_0. \end{cases}$$

For each  $\mu > \mu_1$ ,  $\Lambda(\mu)$  is the principal eigenvalue of the linearization of the stationary  $u$ -equation at  $(0, \theta_\mu)$  i.e. the principal eigenvalue of

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \operatorname{div}(V'(0)\theta_\mu\varphi) = \lambda\varphi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \end{cases}$$

and  $\Lambda(\mu) = 0$  for  $\mu \in [0, \mu_1)$ .

The next theorem entails the existence of coexistence states for some range of the parameters  $\lambda, \mu$ .

**Théorème 20**

1. *Assume that  $V'(0) = 0$ . Then, if*

$$\lambda > 0 \quad \text{and} \quad \mu > F(\lambda), \tag{41}$$

*there exists at least one coexistence state.*

2. *Assume that  $V'(0) > 0$ . Then, if*

$$(\lambda - \Lambda(\mu))(\mu - F(\lambda)) > 0. \tag{42}$$

*the same holds.*

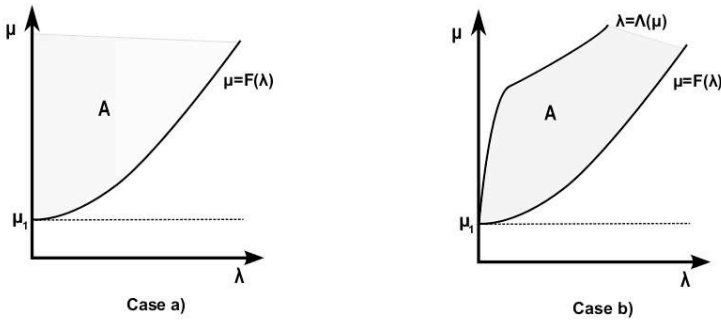


Figure 2 – Coexistence regions. Case a)  $V'(0) = 0$  and Case b)  $V'(0) > 0$ .

In Figure 2 we have drawn the coexistence regions, denoted by A in both cases,  $V'(0) = 0$  and  $V'(0) > 0$ .

The proof the previous theorem is based on well-known techniques in bifurcation theory. The main idea is to apply the Crandall-Rabinowitz Theorem [10] with  $\lambda$  as varying parameter to deduce that  $(\lambda, u, v) = (\Lambda(\mu), 0, \theta_\mu)$  is a bifurcation point for the semi-trivial solution  $(0, \theta_\mu)$ . Then, we apply Theorem 4.1 of [31] and we get a continuum  $\mathcal{C}^+$  of positive solutions emanating from the point  $(\lambda, u, v) = (\Lambda(\mu), 0, \theta_\mu)$ , such that  $(\lambda_\infty, 0, 0) \in cl(\mathcal{C}^+)$ , where  $\lambda_\infty$  satisfies  $\mu = F(\lambda_\infty)$ .

See Figure 3, where we have drawn the bifurcation diagrams in the cases  $V'(0) = 0$  and  $V'(0) > 0$ .

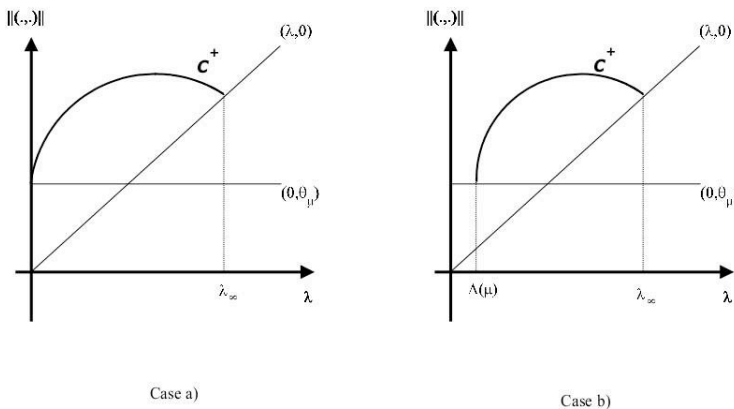


Figure 3 – Bifurcation diagrams. Case a)  $V'(0) = 0$  and Case b)  $V'(0) > 0$ .

To end this Section, we will recall some results concerning the long time behavior of (37). We will assume that  $V$  is bounded and, therefore, the solutions are global in time. The first of these results asserts the exponential convergence



of the  $v$ -component to zero whenever  $\mu$  is sufficiently small:

**Théorème 21** *There exists a decreasing function  $\alpha : [0, \mu_1) \mapsto (0, 1]$  with the following property: if  $\gamma \in (1, +\infty)$ ,  $\beta \in (1, 1 + 1/\gamma)$ ,  $\mu \in [0, \mu_1)$  and  $0 < \delta < \rho < \alpha(\mu)$ , there exists  $C > 0$  such that the  $v$ -solution to (37) satisfies*

$$\|v(\cdot, t)\|_\gamma \leq C e^{-\rho t} \|v_0\|_\gamma \quad \forall t > 0$$

and

$$\|v(\cdot, t)\|_{W^{\beta, \gamma}} \leq C(1 + t^{-\theta}) e^{-\delta t} \|v_0\|_\gamma \quad \forall t > 0,$$

where  $\theta = \theta(\beta) \in (0, 1)$ .

Our next result shows the convergence of the  $u$ -component to zero for small  $\mu$  and  $\lambda = 0$ .

**Théorème 22** *Assume that  $\mu \in [0, \mu_1)$  and  $\lambda = 0$ . Then*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{W^{m, p}} = 0,$$

for any  $m < 1$  and any  $p \geq 2$ .

Finally, the last theorem of this Section shows that, if we impose appropriate conditions on  $V$  at zero,  $\mu$  is sufficiently small and  $\lambda > 0$ , the  $u$ -component converges to the constant function  $u \equiv \lambda$ :

**Théorème 23** *Let  $\mu \in [0, \mu_1)$  and assume that there exist  $C, \delta_0 > 0$  and  $k > 1 + N/2$  such that*

$$0 < V(s) < C s^k, \quad |V'(s)| \leq C s^{k-1}$$

for all  $s \in (0, \delta_0)$ . Then, there exists  $\theta > 0$  such that

$$\|u(\cdot, t) - \lambda\|_{W^{m, p}} \leq C e^{-\theta t},$$

for all  $t \geq t_0 > 0$  and any  $m < 1$ ,  $p \geq 2$ .

The results of this Section have been extracted from [11].

## 5 The Keller-Segel model

In this last Section we will say something about the Keller-Segel system, trying to cover situations that have not been considered yet. This system has been studied extensively in the literature, specially in the last years, see the review papers [21, 23, 24]. As we said in Section 2, the Keller-Segel system has been proposed to describe the aggregative stage of cellular slime molds. The model considers two variables  $u$  (concentration of cellular slime molds) and  $v$  (concentration of chemoattractant).

Under some assumptions, the following semi-stationary system is a good approximation:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ 0 = \Delta v - \gamma v + \alpha u & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (43)$$

where  $\chi, \alpha, \gamma$  are positive parameters. We will be concerned with blow-up phenomena for (43). The main ideas and arguments that we recall here have been taken from [33].

In [34] it is conjectured that blow-up may occur in finite time for  $u$  in a form of a Dirac delta function; such as phenomenon is known as chemotactic collapse. In [26] the authors showed in a 2-dimensional ball that it is certainly possible to choose radially symmetric initial data such that the blow-up of  $u$  occurs in finite time. In what follows, we assume that

- $\Omega = B_L \in \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , where  $B_L$  is an open ball of radius  $L$  with center at the origin.
- $u_0$  is radially symmetric.

Let us introduce

$$\theta = \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} u_0,$$

where  $\omega_N$  is the area of the unit sphere  $S^{N-1}$  in  $\mathbb{R}^N$ . We define the following quantity

$$M_N(t) := \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} u(x, t) |x|^N,$$

which is a measure of the concentration of the solution around the origin. If  $M_N(t)$  is small, then the solution is concentrated at the origin and the smaller the quantity  $M_N(t)$  is more concentrated is the solution around the origin. For  $s \geq 0$ , let us set

$$E_{\theta}(s) := 2N(N-1)\theta^{2/N} s^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\alpha\chi\theta^2 + \alpha\chi N L^{-N}\theta s + \alpha\chi\gamma R_{\theta}(s)$$

where

$$R_{\theta}(s) = \begin{cases} \frac{1}{e}\theta^{3/2} s^{1/2} & \text{if } N = 2, \\ \frac{N}{2(N-2)}\theta^{(2N-2)/N} s^{2/N} & \text{if } N \geq 3. \end{cases}$$

The idea for the blow-up analysis is to show that  $M_N(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow T_0^-$  for some  $T_0 < +\infty$ . For this purpose, it is enough to prove a differential inequality of the form

$$\frac{d}{dt} M_N(t) \leq E_{\theta}(M_N(t))$$

and pick the initial data  $M_N(0)$  such that  $E_{\theta}(M_N(0)) < 0$ .

**Théorème 24** *Let  $N \geq 2$  and assume that  $\alpha\chi\theta > 4$  when  $N = 2$ . Then there exists a positive constant  $c(\theta)$  such that, if  $0 < M_N(0) < c(\theta)$ , then  $T_{max} < +\infty$  and*

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = +\infty.$$

Moreover,

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}^-} \|u(\cdot, t) \log u(\cdot, t)\|_1 = +\infty.$$

Of course, the last condition implies that  $u$  blows up in the  $L^p$ -norm for every  $p > 1$ .

**Remarque 1** *If  $T_{max} = T_0$  then the solution  $u$  forms a Dirac delta function at the origin as  $t \rightarrow T_{max}^-$ .*

Finally, to conclude this Section we will say something about the convergence to non-homogeneous setady states. This will be done for the fully parabolic Keller-Segel system.

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a regular domain. We consider the system

$$\begin{cases} U_t = \Delta U - \chi \nabla \cdot (U \nabla V) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ V_t = \alpha \Delta V - \beta V + \delta U & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ (U, V)(x, 0) = (U_0, V_0)(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where the initial data are non-negative. The change of variables

$$u = \frac{U}{\bar{U}_0}, \quad v = \chi(V - \bar{V}_0)$$

leads to

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v_t = \alpha \Delta v - \beta v + \gamma(u - 1) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{44}$$

where  $\gamma = \chi \delta \bar{U}_0$ ,  $u_0 = \frac{U_0}{\bar{U}_0}$  and  $v_0 = \chi(V_0 - \bar{V}_0)$ . It is clear that  $u_0$  is positive; however,  $v_0$  may be a sign changing function. The main tool for the analysis of (44) is the functional

$$F(u, v) = \int_\Omega \left( u \log u + \frac{1}{2\gamma} (\alpha |\nabla v|^2 + \beta v^2) - (u - 1)v \right),$$

that satisfies

$$\frac{d}{dt} F(u, v) = -D(u, v),$$

where

$$D(u, v) = \frac{1}{\gamma} \int_\Omega (\partial_t v)^2 + \int_\Omega u |\nabla (\log u - v)|^2.$$

Observe that  $F$  can be unbounded from below, due to the term  $-\int_{\Omega}(u-1)v$ . In fact, it is possible to choose initial data  $u_0, v_0$  and parameters  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  such that  $F(u(t), v(t)) \rightarrow -\infty$  as  $t \rightarrow T_{max}^-$ , see [22].

In [16] it is proved by the compactness method that, when the solution does not blow up (in finite or infinite time), there are sequences  $\{t_n\}$  such that  $(u(t_n), v(t_n))$  converge to a solution of the steady-state problem. If there exists exactly one solution to the stationary problem, then this must happen for all sequences  $\{t_n\}$ .

However, the structure of the steady-state problem can be very complex and it is not excluded even the existence of a continuum of stationary solutions. Under the previous scenario, the convergence of the whole sequence to a solution of the stationary problem is a delicate question. Nowadays, it seems that the only tool available to handle this problem is the Łojasiewicz inequality. See [30] for a description in the finite dimensional framework and [41] for the infinite dimensional version. The Łojasiewicz inequality is used in [13] to prove convergence to a steady state. Unfortunately, the steady state can be the trivial one  $(1, 0)$ . To exclude this possibility it is enough to choose  $u_0$  and  $v_0$  such that the solution does not blow up and  $F(u_0, v_0) < F(1, 0) = 0$ ; in view of the arguments in [16, Section 5], this is possible.

## References

- [1] N. Alikakos.  $L^p$  bounds of solutions of reaction-diffusion equations, *Comm. Partial Differential Equations* 4, 827–868, (1979).
- [2] H. Amann. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in “Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis”, H. Triebel, H.J. Schmeisser (eds.), Teubner-Texte Math. 133, Teubner, Stuttgart, 1993, pp. 9–126.
- [3] H. Brezis. *Análisis funcional*. Alianza Universidad 1984.
- [4] J.A. Carrillo, A. Jüngel, P. Markowich, G. Toscani and A. Unterreiter. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities, *Monatsh. Math.* 133, 1–82, (2001).
- [5] M.A.J. Chaplain and A.R.A. Anderson. Mathematical modelling of tissue invasion, in *Cancer Modelling and Simulation*, ed., L. Preziosi (Chapman & Hall/CRT, 2003), pp. 269–297.
- [6] T. Cieślak. Quasilinear nonuniformly parabolic system modelling chemotaxis, *J. Math. Anal. Appl.* 326, 1410–1426, (2007).
- [7] T. Cieślak, Ph. Laurençot and C. Morales-Rodrigo. Global existence and convergence to the steady states in a chemorepulsion system, *Banach Center Publ.* 81, 105–117, (2008).

- [8] T. Cieřlak and C. Morales-Rodrigo. Quasilinear non-uniformly parabolic-elliptic system modelling chemotaxis with volume filling effect. Existence and uniqueness of global-in-time solutions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 29, 361–381, (2007).
- [9] L. Corrias, B. Perthame and H. Zaag. A chemotaxis model motivated by angiogenesis, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 336, 141–146, (2003).
- [10] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* 8, 321–340, (1971).
- [11] M. Delgado, I. Gayte, C. Morales-Rodrigo and A. Suárez. An angiogenesis model with nonlinear chemotactic response and flux at the tumor boundary, *Nonlinear Analysis (2009)*, doi:10.1016/j.na.2009.06.057.
- [12] M. Delgado and A. Suárez. Study of an elliptic system arising from angiogenesis with chemotaxis and flux at the boundary, *J. Differential Equations* 244, 3119–3150, (2008).
- [13] E. Feireisl, Ph. Laurençot and H. Petzeltová. On convergence to equilibria for the Keller-Segel chemotaxis model, *J. Differential Equations* 236, 551–569, (2007).
- [14] I. Fonseca and G. Leoni. *Modern methods in the calculus of variations:  $L^p$  spaces*. Springer Monographs in mathematics (2007).
- [15] A. Friedman and J.I. Tello. Stability of solutions of chemotaxis equations in reinforced random walks, *J. Math. Anal. Appl.* 272, 138–163, (2002).
- [16] H. Gajewski and K. Zacharias. Global behaviour of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis, *Math. Nachr.* 195, 77–114, (1998).
- [17] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Heidelberg 1983.
- [18] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture Notes Math. 840, Springer 1981.
- [19] T. Hillen and K. Painter. Global Existence for a Parabolic Chemotaxis Model with Prevention of Overcrowding, *Advances in Applied Mathematics* 26, 280–301, (2001).
- [20] T. Hillen and K. Painter. Volume Filling and Quorum Sensing in Models for Chemosensitive Movement, *Canadian Applied Mathematics Quarterly* 10, 501–543, (2002).
- [21] T. Hillen and K. Painter. A user’s guide to PDE models for chemotaxis, *J. Math. Biol.* 58, 183–217, (2009).
- [22] D. Horstmann and G. Wang. Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions, *Euro. J. Appl. Math.* 12, 159–177, (2001).

- [23] D. Horstmann. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 105, 103–165, (2003).
- [24] D. Horstmann. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 106, 51–69, (2004).
- [25] D. Horstmann and M. Winkler. Boundedness vs blow-up in a chemotaxis system, *J. Differential Equations* 215, 52–107, (2005).
- [26] W. Jäger and S. Luckhaus. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis, *Trans. Amer. Math. Soc.* 329, 819–824, (1992).
- [27] E.F. Keller, L.A. Segel. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biology* 26, 399–415, (1970).
- [28] G. Litcanu and C. Morales-Rodrigo. Global solutions and asymptotic behavior for a parabolic degenerate coupled system arising from biology, *Nonlinear Analysis* (2009), doi:10.1016/j.na.2009.06.083.
- [29] G. Litcanu and C. Morales-Rodrigo. Asymptotic behaviour of global solutions to a model of cell invasion, *Preprint arXiv:0907.0885*.
- [30] S. Lojasiewicz. Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels, in: Colloq. CNRS, in: Les équations aux dérivées partielles, vol. 117, 1963, pp. 87–89.
- [31] J. López-Gómez. Nonlinear eigenvalues and global bifurcation: Application to the search of positive solutions for general Lotka-Volterra reaction-diffusion systems with two species, *Differential Integral Equations* 7, 1427–1452, (1994).
- [32] N.V. Mantzaris, S. Webb and H.G. Othmer. Mathematical modeling of tumor-induced angiogenesis, *J. Math. Biol.* 49, 111–187, (2004).
- [33] T. Nagai. Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, *Adv. Math. Sci. Appl.* 5, 581–601, (1995).
- [34] V. Nanjundiah. Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology, *J. Theor. Biol.* 42, 63–105, (1973).
- [35] H. Othmer, S. Dunbar and W. Alt. Models of dispersal biological systems, *J. Math. Biol.* 26, 263–298, (1988).
- [36] H. Othmer and A. Stevens. Aggregation, blowup, and collapse: The ABC'S of taxis in reinforced random walks, *SIAM J. Appl. Math.* 57, 1044–1081, (1997).

- [37] A.J. Perumpanani and H.M. Byrne. Extracellular matrix concentration exerts selection pressure on invasive cells, *Euro. J. Cancer* 35, 1274–1280, (1999).
- [38] M. Rascle. Sur un équation intégro-différentielle non linéaire issue de la biologie, *J. Differential Equations* 32, 420–453, (1979).
- [39] M. Rascle. On a system of non linear strongly coupled partial differential equations arising in Biology, *Lectures Notes in Math.* 846, Everitt and Sleeman eds., Springer-Verlag, New-York, 290–298, (1980).
- [40] J. Renclawowicz and T. Hillen. Analysis of an attraction-repulsion chemotaxis model, *Preprint*.
- [41] L. Simon. Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems, *Ann. Math.* 118, 525–571, (1983).
- [42] K. Umezū. Nonlinear elliptic boundary value problems suggested by fermentation, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 7, 143–155, (2000).
- [43] C. Walker and G.F. Webb. Global existence of classical solutions for a haptotaxis model, *SIAM J. Math. Anal.* 38, 1694–1713, (2007).
- [44] C. Walker. Global Well-Posedness of a Haptotaxis Model Including Age and Spatial Structure, *Differential Integral Equations* 20, 1053–1074, (2007).





## **JORNADAS DE EXPERIENCIA EN TRANSFERENCIA DE TECNOLOGÍA MATEMÁTICA**

M. LEZAUN, A. MADOZ Y M. MATEOS

Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e  
Investigación Operativa.  
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea  
`mikel.lezaun@ehu.es`

### **Resumen**

Este documento es un resumen de los temas tratados en las Jornadas de Experiencia en Transferencia de Tecnología Matemática, que se celebraron en la Universidad del País Vasco los días 15 y 16 de Junio de 2009, en el marco del Proyecto CONSOLIDER ingenio-mathematica (i-MATH). En las jornadas se presentaron once ponencias que abarcaron las principales cuestiones relativas a la transferencia de tecnología matemática y las relaciones universidad-empresa. Después de cada intervención hubo un turno de preguntas y un intercambio de opiniones sobre los temas presentados. Los ponentes fueron matemáticos con extensa experiencia en transferencia de tecnología, responsables de la administración y de empresas. Al final del artículo se incluyen las conclusiones acordadas, las cuales han sido ampliamente difundidas.

### **1 Introducción**

Existe un acuerdo general en la sociedad sobre que la innovación industrial está cada vez más basada en los resultados y las técnicas de la investigación científica. Es un hecho aceptado que la innovación viene de la ciencia. Pero que la investigación está en gran medida sustentada y guiada por las matemáticas, y que éstas son fundamentales para la industria es menos conocido. En España, la comunidad matemática no tiene ninguna duda de que excelentes matemáticas, incluso abstractas, dan lugar a aplicaciones prácticas muy importantes. Pero lo cierto es que no hay muchos grupos con actividad permanente de Transferencia de Tecnología Matemática. A medio plazo, sería muy importante que hubiera más grupos interesados en realizar transferencia, lo cual requiere aunar esfuerzos, definir actividades y buscar relaciones, buscar contenidos.

Para tratar de todos los temas relativos a la transferencia de tecnología matemática y de las relaciones universidad-empresa, los días 15 y 16 de Junio de 2009 tuvieron lugar en la Universidad del País Vasco en Leioa las Jornadas de Experiencia en Transferencia de Tecnología Matemática. La financiación

corrió a cargo del Proyecto CONSOLIDER ingenio-mathematica (i-MATH), en el marco del Nodo CESGA, y de la Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea.

El formato de las jornadas fue abierto, pero con los temas a tratar previamente definidos. Se contó con once ponentes que trataron temas muy variados. Fueron los siguientes: *Informe de la OCDE sobre Matemáticas en la Industria. Una mirada a Europa* por Luis Bonilla, *Una mirada a los Estados Unidos* por David Pardo, *Matemáticas en las finanzas desde el lado de la empresa* por José Luis Fernández, *Valoración académica de la transferencia de tecnología* por Francisco Marcellán, *Programas de Transferencia: participación y oportunidades para la tecnología matemática* por Alfredo Bermúdez de Castro, *Matemáticas en el sistema sanitario* por Javier Mar, *Experiencia de creación de una empresa* por Jaume Barceló, *Necesidades y aportaciones de matemáticos en empresas* por Miguel M. Romay, *El papel de las oficinas universitarias de transferencia de tecnología* por Iñaki Largo, *Consultoría. Mapa de Consulting de i-MATH* por Peregrina Quintela, *Workshops, Grupos de Estudio y Modelling Weeks. Experiencias y posibilidades* por Joan Solà-Morales.

La intervención de cada ponente duró diez minutos y a continuación hubo un turno de preguntas y un debate con intercambio de opiniones. El escenario fue una sala con todos los participantes sentados en mesas colocadas en círculo. Esta configuración facilita y fomenta la participación de todos los asistentes. Las sesiones fueron conducidas por Mikel Lezaun y contaron con Laureano Escudero y Carlos Vázquez Cendón como moderadores.

En este artículo presentamos un breve resumen de cada una de las intervenciones, más bien de cada uno de los temas tratados, haciendo hincapié en las ideas más relevantes presentadas. Después de estos resúmenes se incluyen las conclusiones acordadas en la última sesión, las cuales han sido ampliamente difundidas. Como comentario final, todos los participantes resaltaron la importancia de la innovación, de la transferencia de tecnología de la universidad a las empresas, ya que en el fondo, lo que está en juego, es el mantenimiento de los niveles de vida y bienestar de los que hoy disfruta la sociedad española.

El Comité de Organización de las jornadas ha estado formado por Laureano Escudero Bueno (Universidad Rey Juan Carlos), Mikel Lezaun Iturralde (Universidad del País Vasco), Carlos Vázquez Cendón (Universidad de A Coruña) y Juan Luis Vázquez Suárez (Universidad Autónoma de Madrid). El Comité Local, además de por Mikel Lezaun, está formado por los profesores de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, Araceli Garín, Gloria Pérez, Eduardo Sáinz de la Maza y Fernando Tusell. Al final del artículo está la lista de los participantes.

## **2 Informe de la OCDE sobre Matemáticas en la industria. Una mirada a Europa, por Luis Bonilla**

La primera de las ponencias corrió a cargo de Luis Bonilla, Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Carlos III de Madrid y ex presidente del European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI). En ella Bonilla presentó el Informe sobre Matemáticas en la Industria que la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos), a través de su Foro Global de la Ciencia, publicó en julio de 2008 y del que él fue uno de los ponentes. Este informe es fruto de un workshop organizado para analizar las relaciones entre matemáticas e industria y para formular recomendaciones prácticas orientadas a fortalecer esas relaciones, al que asistieron Luis Bonilla y José Manuel Vega, ambos participantes en estas jornadas. En el workshop participaron representantes académicos (universidades e institutos de investigación), de empresas (Airbus, Merck, Nokia, Philips, Springer, S & T Microelectronics, ...), de gobiernos y de la propia OCDE. El informe completo se puede encontrar en

<http://www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf>

En el citado informe se trata de la forma de incrementar el grado de penetración de las matemáticas en la industria. A este respecto, el informe concluye que sería muy interesante la dotación de puestos de matemática industrial dentro de la universidad y la creación de centros de investigación interdisciplinar que ligen las matemáticas a problemas científicos y tecnológicos importantes para la industria. Asimismo, la industria puede fortalecer su presencia en la universidad apoyando la formación de cátedras o puestos de profesorado que permitan incorporar a la universidad investigadores con experiencia en la industria.

Por otro lado, la relación matemáticas-industria debe tener un impacto en la educación. Una propuesta es implementar planes de estudios que preparen realmente a los estudiantes para una carrera dentro de la industria, con una buena formación en matemáticas y en las disciplinas que ayudan a la resolución de problemas relevantes del mundo real, así como promover que haya post-docs en las industrias, prácticas en empresa, actividades de modelado, etc. Además, todas estas actividades deberían tener un reflejo a nivel de enseñanzas medias haciendo posible, por ejemplo, que los profesores de instituto tuvieran acceso a unas ciertas actividades con la industria.

Uno de los problemas que impiden la transferencia de tecnología matemática es la falta de comunicación, la inexistencia de una interfase óptima entre la universidad y la industria. A menudo los miembros de la industria no reconocen los problemas en los que las matemáticas pueden aportar soluciones y los matemáticos en la universidad no son conscientes de las aplicaciones de las matemáticas a problemas de la industria. Esto hace necesaria la figura del traductor tecnológico, es decir, alguien que sea capaz de traducir el problema

industrial al problema matemático correspondiente y pueda encargarse de que los proyectos universidad - industria se lleven a cabo de manera satisfactoria para ambas partes.

En lo que respecta a la infraestructura académica también convendría hacer cambios. Hoy en día los departamentos suelen ser entidades bastante estancas, limitadas a su área de experiencia. Sin embargo, para que la colaboración universidad-industria sea fructífera hace falta propiciar en la universidad un ambiente que apoye la actividad interdisciplinar. Es muy importante también el reconocimiento a profesores universitarios que tengan actividad industrial y de transferencia de conocimiento matemático. Además, podrían crearse puestos académicos destinados a investigadores procedentes de la industria para que los estudiantes interesados en desarrollar su carrera dentro de una industria tengan un modelo en el que puedan reconocerse y que les estimule.

Por último, el informe indica que sería interesante actuar sobre la infraestructura industrial. Una manera de hacerlo sería ofrecer a los investigadores de la empresa oportunidades de formación continuada para ponerse al día sobre las nuevas técnicas, e incluso, que la propia empresa ayude a que se creen cátedras especiales en universidades para atender las necesidades de la industria.

En el debate posterior a la ponencia se propuso que un primer paso para que en España se cree un nuevo marco para las relaciones universidad-empresa sería explicitar las barreras que impiden asumir las recomendaciones dadas por el informe y buscar medidas concretas para romperlas. Uno de los obstáculos más importantes y que merece la pena resaltar es la falta de reconocimiento del trabajo de transferencia en las evaluaciones. También se insistió en que en Europa no hay un modelo único de transferencia entre matemáticas e industria por la gran variedad de tejidos industriales existentes, por lo que las actuaciones de unos países no se pueden trasladar automáticamente a otros con éxito garantizado. Parece más efectivo construir iniciativas específicas para adaptar la formación de los estudiantes y fomentar y apoyar la colaboración universidad - industria en los dos ámbitos con los mecanismos antes mencionados.

### **3 Una mirada a los Estados Unidos, por David Pardo**

Después de licenciarse en matemáticas por la Universidad del País Vasco, David Pardo realizó el doctorado en la Universidad de Austin (Tejas). En total pasó allí nueve años, uno de Erasmus, cuatro de doctorado y otros cuatro de postdoctorado. En estos años se especializó en simulación y modelización matemática y en las aplicaciones de éstas a problemas de ingeniería relacionados con la industria del petróleo. Una vez completada su formación, y tras adquirir una vasta experiencia, se le presentó la oportunidad de regresar al País Vasco como director de un grupo de investigación en simulaciones numéricas en el centro BCAM (Basque Center for Applied Mathematics), puesto que ostenta desde 2008.

## Transferencia de Tecnología Matemática

En esta ponencia Pardo se centró en las diferencias existentes entre las universidades americanas y la universidad española, exponiendo su visión personal basada en su experiencia. En concreto, comentó la situación actual de la universidad estadounidense en los campos de la matemática aplicada y la ingeniería, y la relación existente entre estas disciplinas y la industria, sobretudo la industria petrolífera.

En primer lugar hay que destacar la cantidad de dinero de que disponen las universidades americanas, que en su mayor parte no corresponde a dinero público, sino a aportaciones o donaciones de ex-alumnos que apuestan por la universidad como centro de investigación. Estas donaciones son posibles gracias a la buena imagen que proyecta la universidad americana, que fomenta y genera un fuerte sentimiento de identificación y orgullo a los que han tenido relación con ella.

La filosofía general de las universidades americanas es que se aprende haciendo, de manera que el número de clases puramente teóricas se ve reducido en favor del trabajo en grupo y las prácticas individuales. Por otro lado, se prepara al alumnado para que le sea más sencillo entrar en el mundo empresarial, fomentando aquellos valores que las empresas demandan, tales como trabajo en equipo, liderazgo y honestidad, así como responsabilidad. Todo esto, junto al incentivo de realizar prácticas remuneradas en empresas como parte de los programas de doctorado, facilita en gran medida las relaciones universidad-empresa y las salidas del alumnado al mundo laboral.

En cuanto al profesorado de las universidades americanas, además de su gran nivel ya que incluso suelen contar con galardonados con el Premio Nobel, parte de él, sobre todo en las ingenierías, proviene del mundo empresarial. En general los salarios se calculan en proporción a la producción investigadora, siendo esto un estímulo añadido para que profesores e investigadores se impliquen mucho en el desarrollo de su carrera. Además, dado que debido a los estrictos controles de excelencia y la excesiva demanda, la financiación pública, sin ser escasa, es difícil de conseguir, se espera que el profesorado obtenga la financiación necesaria para llevar a cabo sus investigaciones a través de contactos personales con las empresas.

Por último, la situación industrial, al menos en cuanto a sus relaciones con la universidad, también difiere bastante de la que nos podríamos encontrar en España. Como ya hemos comentado anteriormente, la imagen proyectada por la universidad juega un papel fundamental en las relaciones universidad-empresa. En Estados Unidos la industria percibe esa buena imagen de la universidad, lo que se ve reflejado en la demanda por parte de la industria de un alto número de doctores en matemática aplicada e ingeniería, en puestos de trabajo y con salario acordes con las cualificaciones del doctorado. Además, en muchos sectores industriales la mayoría de las empresas desarrollan sus propias tecnologías en lugar de subcontratarla, lo que hace que aumente la demanda de personas cualificadas dentro de la empresa.

En conclusión, muchos son los puntos en los que difieren las relaciones universidad-empresa en ambos países. Sin embargo, es posible mejorar la situación española empezando por establecer relaciones entre grupos y empresas

para resolver puede que problemas pequeños, pero que irán abriendo camino y generarán relaciones más estables y provechosas en un futuro próximo. En este sentido, en el tiempo que está en España, la apreciación de David Pardo del futuro es optimista.

#### **4 Matemáticas en las finanzas desde el lado de la empresa, por José Luis Fernández**

José Luis Fernández es Catedrático de Análisis Matemático por la Universidad Autónoma de Madrid y socio-director de área de Analistas Financieros Internacionales (AFI). Es, por tanto, una persona que conoce bien las relaciones existentes entre la universidad y la empresa, sobre todo en el sector financiero. Su puesto en el ámbito empresarial le permite saber qué tipo de formación requieren las entidades financieras de un matemático que, en cierta forma, será el interlocutor o traductor de la transferencia matemática con la empresa.

El correcto manejo de los conceptos abstractos matemáticos es fundamental para el trabajo del matemático en un entorno empresarial; sin ese bagaje no se pueden modelizar los problemas matemáticos a los que se enfrenta una empresa. Pero además hay que ser capaz de implementar esos modelos teóricos, para lo cual es básico disponer de una sólida base en técnicas de programación y análisis numérico, para en definitiva poder calcular una solución del modelo implementado. Tampoco hay que olvidar que se trata de integrar los resultados en los sistemas de ordenadores internos de las empresas, por lo que es necesario tener una buena base informática, además de la matemática. Dos ejemplos breves que resumen la demanda de ese perfil

- Hace unas semanas, un equipo cuantitativo del grupo Santander ha convocado dos becas dirigidas a alumnos de la Universidad Autónoma de Madrid; se solicitaban candidatos con un perfil de análisis numérico (matemáticas) y de programación (computación) alto. Se mencionaba explícitamente la doble licenciatura en Matemáticas e Informática de la UAM.
- Para el postgrado interno de finanzas cuantitativas del BBVA que imparte AFI se ha propuesto (desde el BBVA) un filtro de entrada en forma de examen de madurez matemática y un esquema de apoyo para superarlo. Se pretende que la formación en finanzas cuantitativas sea ampliamente accesible; la propia entidad se esfuerza para que sus empleados tengan el nivel de matemáticas necesario para ser receptores de I+D interno.

El sector financiero demanda de los matemáticos:

- Conocimientos matemáticos asimilados con madurez suficiente como para poder utilizarlos para modelizar, desde un punto de vista casi de una ingeniería.
- Conocimientos de informática.

## Transferencia de Tecnología Matemática

- Conocimientos de numérico y técnicas de simulación.

Por último, una breve visión de la empresa de la que José Luis Fernández es socio, AFI (Analistas Financieros Internacionales). AFI es una empresa en la que trabajan unas 120 personas; entre las cuales hay trece matemáticos (cuatro de ellos doctores) que dan servicios de dos tipos:

- Desarrollos: Implementación directa de modelos o procesos o tecnologías ya asumidos por la comunidad financiera o de desarrollo específico.
- Servicios: Servicios de medición de riesgo y de valoraciones de instrumentos financieros para entidades que precisan un contraste de sus mediciones y valoraciones o bien no disponen del equipo técnico para hacerlo. Debe considerarse como transferencia de tecnología; es frecuente que como parte del servicio se enseñe a un grupo de la entidad financiera que les ha contratado para continuar realizando el trabajo diseñado por ellos.

AFI desarrolla investigación dentro de la empresa destinada a mejorar y ampliar sus servicios. Para estas investigaciones AFI en ocasiones colabora con grupos de investigación universitarios conocidos y de confianza. AFI ofrece un máster profesional (Máster en Finanzas Cuantitativas) en el que sus profesores son casi exclusivamente profesionales no académicos.

### **5 Valoración académica de la transferencia de tecnología, por Francisco Marcellán**

Francisco Marcellán es Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Carlos III de Madrid y ex Secretario General de Política Científica y Tecnológica. Desde su visión como Presidente del Consejo Asesor de la ANECA (Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación), Marcellán puso sobre la mesa varios puntos importantes en lo que concierne a la valoración de la transferencia de tecnología.

La primera cuestión es conceptual, ¿qué se entiende por valoración académica? ¿Es una valoración que hace la comunidad académica o una valoración que hace la universidad como institución? En el segundo caso, habría que plantearse si la institución en cuestión tiene una definición estratégica y, en su caso, ver si la transferencia de tecnología es una componente importante dentro de ella. En otras palabras, hay que ver qué valor da la institución a transferir conocimientos.

Uno de los problemas más importantes hoy en día es que muchos de los profesores universitarios no creen que uno de los elementos estructurales de la universidad sea transferir lo que conoce y hacer de ello una seña de identidad. Además, la propia universidad como institución no favorece esa creencia.

Otro elemento central es cómo valorar la transferencia de tecnología para que constituya un ítem importante y sea un incentivo en lo que respecta a la acreditación del profesorado permanente. Concretamente, en la ANECA hay tres grandes apartados según los cuales se valora la transferencia de resultados:

1. Patentes y productos con registro de propiedad intelectual.
2. Transferencia de conocimientos al sector productivo.
3. Otros méritos relacionados con la calidad de transferencia de resultados.

Así, la transferencia aparece en un ítem, pero una cuestión diferente que habría que tratar es cómo aplican estos ítems las comisiones de valoración.

Por último, Marcellán considera que nos encontramos en la necesidad de cambiar radicalmente la filosofía de los proyectos de cara a estimular las actividades de transferencia. Una cosa es el mantenimiento mínimo de un grupo de investigación, y otra muy diferente un proyecto real que tiene una componente de riesgo, que prima valores como la transversalidad, la interdisciplinariedad y la transferencia. Por tanto, los dos tipos deberían de contar con mecanismos de valoración y evaluación diferentes.

En definitiva, hay dos temas importantes en los que se debería ir avanzando:

- Fomentar una comunidad científica que crea en la transferencia de conocimiento y tecnología, traducida en innovación de productos y procesos, y que haga presión para introducirla como un valor añadido. En definitiva, es importante que las universidades vean que la transferencia es una oportunidad y no una amenaza.
- Conseguir que los estudiantes, durante sus años de carrera, entren en contacto con los temas de transferencia y de conocimiento del mundo real mediante, por ejemplo, proyectos fin de carrera. Parece que hoy en día faltan profesionales matemáticos con vocación por resolver problemas y colaborar con gente de otras áreas. La razón de esto es debida, en parte, a que se trata de un perfil que no hemos formado desde la universidad.

## **6 Programas de Transferencia: participación y oportunidades para la tecnología matemática, por Alfredo Bermúdez de Castro**

El catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela Alfredo Bermúdez de Castro se encargó de la quinta de las ponencias de la primera jornada. Como coordinador del área de Transferencia de Tecnología de la ANEP (Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva) hizo un breve repaso de los programas que aúnan universidad o grupos de investigación y empresa, y que están enmarcados dentro del Plan Nacional. Este plan está estructurado en las seis líneas instrumentales de actuación siguientes:

- Recursos humanos (RRHH).
- Proyectos de I+D+i.
- Fortalecimiento institucional.
- Infraestructuras científicas y tecnológicas.



## Transferencia de Tecnología Matemática

- Utilización del conocimiento y transferencia de tecnología.
- Articulación e internacionalización del sistema.

El ponente se detuvo especialmente en presentar aquellos programas más interesantes desde el punto de vista de la transferencia de tecnología.

Dentro del área de recursos humanos existen programas destinados tanto a la formación y movilidad de profesores e investigadores, como a la contratación e incorporación de recursos humanos. Entre estos últimos hay programas de ayuda a la contratación de técnicos de apoyo, de los que hay diferentes tipologías. Dentro de un proyecto de I+D se puede solicitar, por ejemplo, un técnico que ayude en las tareas informáticas, pero también los denominados técnicos de transferencia, que ayudarán al grupo de investigación a hacer la labor de transferencia de los resultados. Otro programa importante en la línea de recursos humanos es el Torres Quevedo. No se trata de un programa para los grupos de investigación, sino para las empresas. Este programa constituye una vía de acceso a la empresa para doctores y tecnólogos que se encargarán de desarrollar proyectos concretos de investigación industrial, de desarrollo tecnológico, estudios de viabilidad técnica, etc.

En la línea de proyectos I+D+i existen multitud de programas entre los que destacaremos el TRACE. Está orientado a la transmisión de conocimiento de un grupo de investigación cuyo avance en un tema pueda suponer una ventaja competitiva a la empresa. Es el grupo de investigación quien hace la solicitud, pero la empresa debe cofinanciarlo. Por otro lado, se remarcaron los proyectos de investigación aplicada colaborativa que pretenden favorecer que los organismos de investigación lideren proyectos en cooperación con empresas. Son programas adecuados para que los grupos de matemáticos participen dentro de grupos interdisciplinarios más amplios.

Por último, en el área de articulación e internacionalización del sistema, el programa CENIT intenta involucrar a las grandes empresas en la investigación. Las subvenciones se dirigen a la financiación de grandes proyectos integrados en investigación industrial de carácter estratégico. Son pues de gran dimensión y largo alcance científico-técnico. En esta misma línea instrumental se enmarcan, entre otros, el programa Avanza I+D y los proyectos del Centro para el Desarrollo Tecnológico Industrial (CDTI).

Como se observa, el Plan Nacional es muy completo y resulta difícil pensar en instrumentos que no estén contemplados. Aunque la mayoría de los programas no están explícitamente orientados a matemáticos, existen muchas oportunidades para ellos que a menudo se desconocen.

Para terminar, Alfredo Bermúdez de Castro insistió en que hay que animar a la comunidad académica matemática a involucrarse más en la transferencia de tecnología, y a participar en convocatorias de proyectos dirigidos al desarrollo tecnológico como los mostrados en su presentación.

## 7 Matemáticas en el sistema sanitario, por Javier Mar

El doctor Javier Mar del Hospital Alto Deba es el coordinador de la Unidad de Investigación Clínico-Epidemiológica, cuyo objetivo es dar apoyo metodológico y logístico en la investigación de tipo clínico relacionada con la atención a los pacientes. En su trabajo utiliza modelos matemáticos para la representación de la historia natural de la enfermedad, ya que nos permiten proyectar el resultado de los tratamientos a lo largo de la vida de un paciente.

Para situarnos en el planteamiento adecuado, es necesario entender la medicina como una ciencia, como la base necesaria para estudiar científicamente las enfermedades. Es dentro de este planteamiento donde hay que analizar el papel que juegan las matemáticas en la medicina. Históricamente, existen principios médicos (biológicos, anatómicos, terapéuticos,...) en los cuales las matemáticas han aportado poco. Únicamente se puede considerar relevante la aportación de la estadística en los principios epidemiológicos, sobre todo en lo que se refiere a la medida de la enfermedad. Sin embargo, hoy día es necesario prestar atención a otras aportaciones que las matemáticas pueden hacer a la medicina.

Hace 40 o 50 años, la tecnología médica estaba muy poco desarrollada. Los médicos hacían todo lo que estuviese en sus manos para salvar al paciente, es lo que los sociólogos denominan teoría del rescate. En aquella época, además de que prácticamente no había tecnología, tampoco existía riesgo de crisis financiera. Hoy en día, sin embargo, la disponibilidad de tecnologías médicas es tal, que el sistema es incapaz de aplicar todas ellas, por lo que se requiere de un proceso de toma de decisiones en el que las matemáticas juegan un papel fundamental. En este sentido, en el marco de la teoría del bienestar social, es necesario maximizar la función de beneficio. Así, por un lado, en el sistema sanitario existen diferentes prestaciones, cada una de ellas con su correspondiente nivel de beneficios para la sociedad y costes, y por otro, los recursos para acceder a esas prestaciones son limitados. El reto es conseguir que la función de beneficio sea máxima, optimizando los recursos disponibles y su uso. Y eso en la práctica se traduce en tomar decisiones con ayuda de herramientas matemáticas.

Este planteamiento no está unánimemente aceptado por la medicina. Tradicionalmente el tipo de investigación matemática que se ha hecho en medicina es de medición, con parámetros de interés en individuos, centrado en la incertidumbre de los parámetros. Hoy en día existe otra vertiente derivada de la necesidad de la toma de decisiones basadas en el conocimiento. Son decisiones que hay que tomarlas, que son inevitables. Por ejemplo, decidir si se gastan cerca de 300 millones en vacunar a las adolescentes contra el virus del papiloma humano o si ese desembolso podría tener un destino mejor. En la práctica, en España, en el sistema sanitario estas decisiones se toman sin un marco explícito de toma de decisiones, no se hace un estudio previo, cosa que sí ocurre en otros países.

En las situaciones que se presentan es difícil decidir qué es investigación y qué es transferencia. Desde el punto de vista biomédico, el valor añadido que

## Transferencia de Tecnología Matemática

aporta la investigación se mide por tres aspectos:

1. relevancia del problema,
2. validez de la solución y
3. originalidad del método utilizado (pensamiento lateral).

Sin embargo, los matemáticos se fijan enseguida en el tercero, son lo que más valoran. Pero hay que insistir que en medicina no, por lo a veces es difícil compaginar los intereses de los dos colectivos.

Los paradigmas epidemiológicos han cambiado porque las enfermedades de hoy no son las mismas que las de hace 50 años. Sin embargo, las herramientas matemáticas que se manejan continúan siendo las mismas. Actualmente, las enfermedades que más interés despiertan son aquellas que producen una discapacidad, no las que causan mortalidad, y esto hay que medirlo por medio de la prevalencia, en función de la incidencia de las enfermedades causales. En este nuevo campo, los médicos se encuentran sin el conocimiento matemático necesario para enfrentarse a los problemas que se plantean, y los matemáticos todavía no son conscientes del cambio de enfoque que se ha producido, de las oportunidades y necesidades que esto conlleva.

Valga como ejemplo el hecho de que las enfermedades crónicas han pasado de ocupar el 47 % del total de enfermedades en el año 1990, al 68 % que se estima para el 2020. A pesar de ello, el número de proyectos de investigación financiados por la UE dedicados al estudio de las enfermedades crónicas no llega al 6 % del importe destinado al estudio de las enfermedades. Esto es debido en gran parte, a que la sociedad aún no valora en qué consiste realmente la dependencia, y eso a pesar de que exista la Ley de Dependencia.

Por último, habría que resolver otro problema para que los matemáticos se involucrasen más en las nuevas metodologías de estudio necesarias en este campo. Es el debido al hecho de que las herramientas utilizadas, a pesar de que resultan novedosas en el campo de la epidemiología, no lo son en el campo de las matemáticas. Esto hace que su reconocimiento en las facultades puramente matemáticas sea prácticamente nulo, lo cual implica que formar grupos de investigación en medicina en los que haya algún matemático sea aún más difícil, ya que su labor no se ve recompensada.

Como conclusión, habría que trabajar en estos cinco puntos para conseguir que la investigación en epidemiología diese sus frutos:

1. Necesidad de que coincidan los intereses de las dos partes, de la medicina y de las matemáticas.
2. Mayor base matemática de los médicos para poder identificar los métodos matemáticos requeridos.
3. Mayor implicación de los matemáticos en la definición del problema.
4. Crear masa crítica.
5. Utilización del pensamiento lateral.

## 8 Experiencia de creación de una empresa, por Jaume Barceló

Jaume Barceló es Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Politécnica de Cataluña y Director Científico del Centro de Innovación del Transporte (CENIT). En 1985 fundó en la Universidad Politécnica de Cataluña un grupo de investigación sobre modelos de simulación y optimización para problemas de transporte que durante cerca de trece años (1985-1998), gracias a diversos proyectos europeos, nacionales y ayudas de la administración, desarrolló bajo su dirección el prototipo del simulador microscópico de tráfico Aimsun. En 1998 fundó, junto con sus colaboradores como socios, la empresa TSS-Transport Simulation Systems, spin-off de la UPC cuyo objetivo era dar salida al mercado del producto Aimsun.

La creación de esta empresa fue posible gracias al capital inicial aportado por los socios y a avales personales, además de una subvención del CIDEM. A pesar de que inicialmente Aimsun fue ignorado por el mercado español, actualmente tiene en él una posición dominante y se estima que su cuota de mercado mundial es del 30%. Entre los usuarios del producto un 45% corresponde a empresas privadas, un 20% a la administración y un 35% a universidades y centros de investigación, lo que deja patente el grado de diversidad del usuario del producto.

Sin embargo, a pesar de la buena acogida actual de esta spin-off, Barceló resaltó el gran coste personal que supuso el proyecto, lo cual a su juicio hace que no sea sencilla ni atrayente en muchas ocasiones la creación por parte del profesorado universitario de empresas que den salida a productos obtenidos de su investigación.

A pesar de que en algunos aspectos (posibilidad de excedencias por cinco años, aumento del tope de la cuota de participación en un spin-off, ...) la situación ha mejorado desde 1998, hay otros aspectos en los que la labor del profesorado que impulsa este tipo de iniciativas sigue sin verse reconocida. En principio, no existe ningún tipo de reconocimiento oficial ni valoración académica a este respecto. El profesor que decida dedicar su tiempo y esfuerzo a crear una empresa no verá reconocida su labor de transferencia por el mundo académico, más aún, todavía perdura la idea de que el promotor pierde su pureza académica por un afán en hacerse rico. Por otro lado, este tipo de iniciativas tampoco cuentan con el respaldo del mundo empresarial cuando se trata de productos software, ya que el valor que se les asigna en el mercado de capitales español es prácticamente nulo y en consecuencia, el acceso a créditos oficiales sólo es posible si se dispone de avales personales. La inexistencia de empresas de capital-riesgo, en el sentido anglosajón incrementa la dificultad.

Es por todo esto por lo que la universidad debe plantearse seriamente hasta qué punto debe/quiere adaptarse a las necesidades de la empresa y a la posibilidad de desarrollar y gestionar la salida al mercado de los productos o prototipos nacidos de la investigación universitaria.

## **9 Necesidades y aportaciones de matemáticos en empresas, por Miguel M. Romay.**

Esta ponencia corrió a cargo de Miguel M. Romay, director del área de Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS) de la empresa GMV. Aunque en sus comienzos la empresa surgió de la Universidad Politécnica de Madrid, hoy se trata de una entidad totalmente privada con filiales no sólo en España sino también en países como Portugal o Estados Unidos. En su origen estaba vinculada al sector espacial, pero actualmente también trabaja en sectores como defensa, aeronáutica, seguridad, transporte, medicina, tecnología de la información, etc.

La actividad fundamental del área de Sistemas Globales de Navegación por Satélite se basa en el desarrollo de algoritmos y software orientados a herramientas de simulación y análisis de prestaciones, métodos de determinación precisa de las órbitas de los satélites, integridad, etc., en las que los matemáticos hacen una excelente labor. Por eso, cuenta con un buen número de ellos entre sus empleados. De hecho, en la unidad de negocio GNSS los matemáticos constituyen el segundo grupo más importante.

Las empresas se encuentran a menudo con limitaciones en cuanto al conocimiento de tecnologías diversas. Por lo general, la empresa conoce ciertas técnicas para resolver determinados problemas pero, posiblemente, estas técnicas no son las mejores y no están al nivel del estado del arte. A menudo la universidad utiliza métodos diferentes para resolver problemas similares en otros campos. Lo que busca GMV es comentar con la universidad los problemas a los que se enfrenta y cómo los resuelve, y ver si puede surgir algún interés por parte de la universidad para investigar sobre la resolución de estos problemas y potencialmente encontrar mejoras.

Un obstáculo común es la falta de interés o motivación por parte de la universidad para cooperar con las empresas. Se detecta cierta dificultad para asumir compromisos, cumplir plazos, etc., lo cual es importante para la empresa. Igualmente, una actividad de interés para la empresa puede que no suscite expectativas desde el punto de vista universitario.

Como posibles soluciones a las dificultades presentadas, se propone impulsar una voluntad de acercamiento por ambas partes, intentando respetar los intereses de cada una de ellas. Romay defiende que estaría bien una legislación que apoye y regule las colaboraciones entre universidad y empresa, pero cree que se puede empezar a hacer cosas sin esperar a que exista una nueva legislación. Sería conveniente comenzar teniendo contactos técnicos informales para intercambiar opiniones, establecer pequeñas colaboraciones, seminarios o tesis doctorales en común, etc. De este modo, la universidad podría tener una visión de los problemas matemáticos que encuentra la industria y podría intentar aportar soluciones.

## **10 El papel de las oficinas universitarias de transferencia de tecnología, por Iñaki Largo**

Iñaki Lago es el Director de Relaciones Universidad-Empresa de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU), organismo que depende del Vicerrectorado de Investigación y que actúa de interlocutor entre la investigación universitaria y la empresa. Ostenta este cargo desde hace cinco años, época en la que, como él mismo reconoce, no sabía que la universidad hiciese investigación, y mucho menos que hiciera transferencia tecnológica. Éste es uno de los mayores problemas que a día de hoy trata de resolver con su trabajo, lograr comunicar al mundo empresarial lo que se hace y se investiga en el ámbito universitario. Hay que resaltar que Iñaki Largo no viene del mundo académico, es un empresario.

A pesar de que el potencial de conocimiento de la Universidad del País Vasco es alto, hasta hace poco ese potencial no estaba lo suficientemente aprovechado. Mucho del conocimiento que generaba la universidad no se valoraba como es debido y, en muchas ocasiones, si le era posible, era la empresa la que se quedaba únicamente con los recursos generados por ese conocimiento. Hoy en día se intenta que parte de esos recursos generados retornen a la universidad. Si bien el objetivo que se persigue al hacer transferencia no es la pura obtención de beneficio, es cierto que la universidad debería recibir una recompensa por el trabajo realizado para la empresa, para poder así mantener el nivel de excelencia y reponer parte del equipo empleado (tanto en medios materiales como humanos). En este sentido, desde la dirección de Relaciones Universidad-Empresa se trabaja con los diferentes registros de la propiedad para la obtención de patentes, licencias etc. generadas desde la universidad, de forma que se reconozca el valor del trabajo realizado.

También se intenta traducir todo el conocimiento de los grupos de investigación de la UPV/EHU al lenguaje empresarial, y ponerlo a disposición de las empresas que no tienen contacto con la universidad. Por otro lado, para fomentar las relaciones universidad-empresa se organizan sesiones de interés para ambas partes. Lo primero es elegir un tema o una actividad que tenga cierta relevancia, luego se busca entre los grupos de investigación universitarios aquellos que trabajen en un área similar, y se les pide que realicen una presentación corta ante un grupo reducido de empresas previamente escogidas que desarrollen su labor en dicha área. Se procura, sobre todo, que los universitarios cuenten lo que hacen y lo que podrían hacer, y que las empresas presenten problemas a los que se enfrentan, para así buscar relaciones productivas entre la universidad y la empresa.

Otra de las áreas en las que se está trabajando es en las spin-off, en los viveros de empresa, en todo tipo de iniciativas provenientes del mundo universitario dirigidas a la creación y desarrollo de nuevas empresas.

En resumen, además de que el mundo empresarial conozca lo que se hace desde la universidad, es necesario que también reconozca la labor de la misma y que la valore en su justa medida. Sin embargo, en muchas ocasiones, es difícil alcanzar un acuerdo entre ambos estamentos sin que se produzca una erosión

de sus relaciones. Por ello, es conveniente que quien dirija la negociación de patentes, contratos de colaboración, etc., sea una persona externa al grupo de investigación que respalde la labor del mismo. Ésta es una labor que claramente corresponde a la Dirección de Relaciones Universidad-Empresa.

### **11 Consultoría. Mapa de Consulting de i-MATH, por Peregrina Quintela**

Peregrina Quintela es Catedrática de Matemática Aplicada por la Universidad de Santiago de Compostela y coordinadora del nodo CESGA del proyecto Consolider Ingenio Mathematica (i-MATH). En esta ponencia presenta dos iniciativas puestas en marcha desde el proyecto Consolider i-MATH orientadas al estudio de la situación actual de la transferencia matemática en España.

La primera iniciativa comenzó a andar a finales de 2006. Consiste en la elaboración de un mapa de la situación de la transferencia tecnológica que realizan los grupos de investigación matemáticos encuadrados en el proyecto i-MATH. Lo denominaremos mapa de consulting. Se han realizado diferentes ediciones de esta iniciativa, tanto en papel (3ª edición en proceso) como en formato electrónico a través de la página web

[http://www.i-math.org/files/File/html/mapa\\_consulting/index.htm](http://www.i-math.org/files/File/html/mapa_consulting/index.htm).

Una vez conocida la situación de los grupos de investigación, el siguiente paso (actualmente en desarrollo) es conocer la situación empresarial, más concretamente, la demanda de transferencia tecnológica de la empresa española. Se prevé disponer de los resultados definitivos para el 23 de julio de 2009.

#### **Mapa de Consulting**

El objetivo de este estudio es detectar aquellos grupos pertenecientes a i-MATH con experiencia en transferencia matemática, cuál ha sido o es esa experiencia y en qué sectores se ha llevado a cabo. También se pretende conocer qué nuevos grupos estarían interesados en hacer transferencia.

La información extraíble del mapa de consulting elaborado es, entre otras cosas, los grupos que ya tienen experiencia en transferencia, los que tienen interés en realizarla, la distribución de esos grupos por comunidades autónomas, la distribución interna de la carga investigadora, las técnicas matemáticas que ofertan, su experiencia en desarrollo y/o manejo de software, el tipo de contratos realizados, los cursos que se han impartido, etc.

Una de las conclusiones más relevantes de este estudio es que existen muchos grupos de investigación interesados en hacer transferencia o que ya la han realizado. La mayoría son grupos relacionados con la investigación operativa y la programación matemática, aunque los hay de casi todas las áreas matemáticas, ciencias de la computación, teoría cuántica... Del mismo modo, se concluye que la mayor parte de los grupos que realizan transferencia no lo hacen en un único sector, sino que abarcan varios dominios como consecuencia de atender la demanda de empresas con actividades de tipo diferente. Por último, habría

que recalcar el hecho de que los grupos de investigación manifiestan tener más capacidad para hacer transferencia que la que actualmente están realizando.

### **Proyecto TransMath**

En la actualidad está en marcha el proyecto TransMath, en el que se intenta confeccionar el mapa de la demanda de técnicas matemáticas por las empresas. Se trata de conocer no sólo los problemas que el sector empresarial manifiesta tener en transferencia matemática, sino también la demanda que tienen de formación, lo cual es desconocido por la universidad debido a que no tiene experiencia organizando cursos formativos dirigidos a la empresa. Una vez conocida la situación, el siguiente paso será definir estrategias, nuevas líneas de investigación u organizar foros que den respuesta a esas demandas.

En este proyecto, lo primero fue nombrar un panel de expertos para guiar el trabajo y la metodología a aplicar. Luego se decidió elaborar una encuesta telefónica dirigida a las empresas sobre el grado de conocimiento, utilización, satisfacción y necesidad de formación de los sistemas de diseño asistido por ordenador (CAD), de los de simulación numérica (habitualmente denominado CAE), de herramientas estadísticas, de investigación operativa, y de otras técnicas matemáticas aplicables a la industria. También se incluyeron cuestiones sobre las preferencias en cuanto a la formalización de colaboraciones empresa-universidad y empresa-centro de investigación.

A día de hoy la encuesta está prácticamente finalizada y se ha realizado un estudio preliminar de los resultados con una muestra de 3731 empresas. A pesar de que los resultados son preliminares y de que no están representadas de igual manera todas las comunidades autónomas, se puede extraer como conclusión que el número de pymes que han colaborado con la universidad y el número de pymes interesadas en hacerlo es prácticamente el mismo, lo cual denota su alto grado de satisfacción en cuanto a las relaciones empresa-universidad ya establecidas. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las empresas grandes. Así, se podría concluir que existe cierto nivel de descontento entre las empresas de gran tamaño que han colaborado con la universidad. También existe un porcentaje alto, cercano al 30%, de empresas que no están interesadas en absoluto en colaborar con la universidad.

## **12 Study Groups, Modelling Weeks y Workshops: Experiencias y posibilidades, por Joan Solà-Morales**

La última de las ponencias fue de la mano de Joan Solà-Morales, Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Cataluña y componente del comité organizador de los Grupos de Estudio en Matemáticas y Tecnología que cada año tienen lugar en Barcelona. En ella se habló de los study groups, las modelling weeks y los workshops como actividades pensadas para que empresas y matemáticos se conozcan y entren en contacto.

Tanto los study groups como las modelling weeks son iniciativas en las que



## Transferencia de Tecnología Matemática

los asistentes trabajan sobre un problema que las empresas han llevado a la universidad. La principal característica que los diferencia es que los study groups suelen estar formados por investigadores más o menos consolidados, mientras que en las modelling weeks los grupos están constituidos por estudiantes e instructores. En los workshops, sin embargo, simplemente se presenta un problema y se consulta sobre él, pero no se trabaja exhaustivamente.

La tradición de los study groups nació en Oxford y básicamente consisten en que durante una semana un grupo de investigadores se junta para tratar los problemas que les trae alguna empresa. Poco a poco se fueron extendiendo por Europa hasta crear una organización llamada European Study Groups with Industry. Este sistema reúne a un grupo de investigadores a los que se les propone problemas procedentes de empresas importantes, en los que trabajan durante una semana. El objetivo no es resolver los problemas durante esa semana, sino crear ciertas relaciones con el problema y con la empresa que se prolonguen más allá del study group. Básicamente, se pretende obtener relaciones que permitan financiar un post-doc o un doctorado. En España se han empezado a hacer actividades de este tipo en ciudades como Santiago de Compostela o Barcelona.

Por otro lado, las modelling weeks tienen un formato más didáctico. Los problemas son algo menos exigentes, ya que han de ser tratados por estudiantes menos expertos, aunque ayudados por un instructor. Es el ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) quien ha popularizado las modelling weeks en Europa. En España también se han llevado a cabo varias, y entre las próximas podemos citar la de la Universidad Complutense de Madrid y la organizada por el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS).

En cuanto a los workshops, Joan Solà-Morales habló del caso del Instituto de Matemáticas de Oxford, donde se imparte una serie de seminarios muy importantes bajo el título “Industrial and Interdisciplinary Workshop”. Cada semana, alguien de la industria o de fuera de las matemáticas presenta un problema en un seminario en el que se comenta y se consulta sobre él, pero no se llega a trabajar en él.

En la discusión posterior a la presentación se analizó la situación en España. Poco a poco están empezando a aparecer actividades de este tipo pero estamos lejos de alcanzar el nivel de otros países. Todavía hoy hay diferencias muy importantes y difíciles de salvar, como es el hecho de que las empresas que llevan un problema a los study groups del Reino Unido pagan por ello, o que los asistentes cuentan con ayudas económicas para alojamiento, manutención, etc.

No obstante, sí pueden tomarse medidas que quizá ayuden a avanzar en esta dirección. Sería interesante, por ejemplo, que fuera obligatorio realizar un proyecto fin de carrera en las titulaciones de matemáticas que no fuera necesariamente teórico, sino algo más abierto. Por otro lado, es importante que las empresas tengan confianza en la universidad, que tengan unas expectativas sobre lo que se puede hacer y que realmente vean que se les pueden resolver ciertos problemas.

### 13 Conclusiones

La última sesión de las jornadas se dedicó a redactar las conclusiones para luego difundirlas en medios de comunicación, sociedades científicas de matemáticas, responsables de política científica y universitaria de las comunidades autónomas y de la administración del estado, directores de agencias de evaluación de las comunidades autónomas y de la ANECA, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Conferencia de Rectores de las Universidades Españolas, Confederación de Sociedades Científicas de España y en la comunidad matemática en general.

El documento de conclusiones y propuestas es el siguiente:

Es un hecho que la innovación industrial está cada vez más basada en los resultados y las técnicas de la investigación científica, y que esta investigación, a su vez, se sustenta fuertemente en las matemáticas. También, es indudable que un reforzamiento de los vínculos entre las matemáticas y la industria será beneficioso para ambas, así como para la economía de nuestro país. Con el fin de incrementar y mejorar las expectativas que se derivan de dicha relación, expertos reunidos en la Universidad del País Vasco han reconocido la necesidad de poner en práctica las siguientes recomendaciones dirigidas a los principales interesados: la comunidad de matemáticos, las empresas y los responsables universitarios y gubernamentales.

1. Dotar plazas universitarias específicas de investigación y transferencia de tecnología matemática.
2. Crear puestos de “traductores” de matemáticas-industria para mejorar el proceso de comunicación entre las empresas y el mundo de las matemáticas.
3. Flexibilizar las estructuras universitarias para un mejor encaje de las actividades de creación y transferencia de tecnología en la dedicación de los profesores e investigadores.
4. Animar a la comunidad académica matemática a involucrarse más en la transferencia de tecnología y a participar en convocatorias de proyectos dirigidos al desarrollo tecnológico.
5. Fomentar el reconocimiento de la importancia creciente de las matemáticas tanto en la investigación fundamental como en el desarrollo tecnológico, acercándolas al mundo empresarial a través de la incorporación de matemáticos a los equipos de investigación interdisciplinares.
6. Incrementar la valoración por parte del mundo académico y de las administraciones públicas de la transferencia de tecnología, en particular en aspectos tales como la acreditación del profesorado y el reconocimiento de méritos.

7. Propiciar un mayor reconocimiento profesional del doctorado por parte de las empresas.
8. Aprovechar las posibilidades que ofrecen los nuevos planes de estudio, en particular los proyectos fin de carrera, para abordar problemas reales de las empresas y de otras disciplinas.

#### 14 Participantes en las jornadas

**Participaron en las jornadas:** Aureli Alabert (Universidad Autónoma de Barcelona), Maite Alonso Alonso (Nodo CESGA), Antonio Alonso Ayuso (Universidad Rey Juan Carlos), Inmaculada Arostegui (Universidad del País Vasco), Jaime Barceló (Universidad Politécnica de Cataluña), Alfredo Bermúdez de Castro (Universidad de Santiago de Compostela), Luis López Bonilla (Universidad Carlos III de Madrid), Manuel Calvo (Universidad de Zaragoza), Antonio Campillo (Universidad de Valladolid), Javier Cárcamo (Universidad Autónoma de Madrid), Emilio Carrizosa (Universidad de Sevilla), José Durany (Universidad de Vigo), Laureano Escudero (Universidad Rey Juan Carlos), José Luis Fernández (Analistas Financieros Internacionales y UAM), Araceli Garín (Universidad del País Vasco), Santos González (Universidad de Oviedo), Wenceslao González Manteiga (Universidad de Santiago de Compostela), Carlos Gorria (Universidad del País Vasco), Iñaki Largo (Universidad del País Vasco), Mikel Lezaun (Universidad del País Vasco), Marco Antonio López Cerdá (Universidad de Alicante), Agueda Madoz (Universidad del País Vasco), Javier Mar (Hospital Alto Deba, Osakidetza), Francisco Marcellán (Universidad Carlos III de Madrid), Mainer Mateos (Universidad del País Vasco), José Ignacio Montijano (Universidad de Zaragoza), David Pardo (Basque Center for Applied Mathematics), Gloria Pérez (Universidad del País Vasco), Justo Puerto (Universidad de Sevilla), Peregrina Quintela (Universidad de Santiago de Compostela), Miguel M. Romay (GMV Aerospace and Defence S.A.), Eduardo Sáinz de la Maza (Universidad del País Vasco), Joan Solà-Morales (Universidad Politécnica de Cataluña), Fernando Tusell (Universidad del País Vasco), Arantza Urkaregi (Universidad del País Vasco), Carlos Vázquez Cendón (Universidad de A Coruña), José Manuel Vega (Universidad Politécnica de Madrid), Luis Vega González (Universidad del País Vasco), Giuseppe Viglialoro (Nodo CESGA), Begoña Vitoriano (Universidad Complutense de Madrid), Ion Zaballa (Universidad del País Vasco).



## INFORME DE LA OCDE SOBRE MATEMÁTICAS EN LA INDUSTRIA

MIKEL LEZAUN

Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa  
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

mikel.lezaun@ehu.es

### Resumen

Presentamos aquí un resumen del Informe sobre Matemáticas en la Industria que la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos), a través de su Foro Global de la Ciencia, publicó en julio de 2008, fruto de un workshop organizado para analizar las relaciones entre matemáticas e industria y para formular recomendaciones prácticas orientadas a fortalecer esas relaciones. El informe completo puede consultarse en [www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf](http://www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf)

### 1 Introducción

Los gobiernos de los países miembros de la OCDE reconocen que la innovación industrial está cada vez más basada en los resultados y técnicas de la investigación científica, en particular que hay una cada vez más íntima conexión entre innovación, ciencia y matemáticas. Con el fin de estudiar si la interfase entre estas tres actividades está funcionando de forma óptima, la OCDE organizó un workshop en Heidelberg, Alemania, el 22-24 de marzo de 2007 en el que participaron representantes de empresas como Airbus, BASF, Bayer, Merck, Nipon Steel Corporation, Nokia o Statoil, y de numerosas universidades y agencias de países miembros de la OCDE. El Apéndice C del informe contiene la lista completa de todos los participantes.

### 2 Objetivos del workshop

Los objetivos del workshop fueron

- (1) analizar las relaciones entre matemáticas e industria en los países participantes;
- (2) identificar tendencias significativas tanto en la investigación en matemáticas en el mundo académico como en los desafíos matemáticos a los que se enfrenta la industria en un entorno económico global, y analizar las repercusiones de esas tendencias para las relaciones entre los matemáticos del mundo académico y de la industria;

(3) identificar y analizar los principales retos y oportunidades para una asociación mutuamente beneficiosa entre la industria y el mundo académico;

(4) formular recomendaciones prácticas para actuar dirigidas a los principales interesados: la comunidad de científicos matemáticos, las industrias participantes y los gobiernos.

En todo el informe el término industria se utiliza en sentido amplio y comprende cualquier actividad de valor económico o social, incluida la industria de servicios, ya sea del sector público o del privado. Por su parte el término matemáticas comprende cualquier actividad en matemáticas, incluida la estadística.

### 3 Perspectiva desde cada lado

Para la industria la matemática es una tecnología instrumental. Proporciona un marco coherente lógicamente y un lenguaje universal para el análisis, optimización y control de los procesos industriales. Debido a que es una tecnología instrumental, una herramienta, las contribuciones de las matemáticas rara vez son visibles en el producto final que suministra la industria. Sin embargo, su impacto económico es real, y muchas empresas innovadoras que explotan adecuadamente las matemáticas pueden conseguir rápidamente una ventaja comercial sobre sus competidoras.

Los problemas a los que se enfrentan las empresas en un exigente mercado global comparten características comunes: son complejos y no lineales, contienen fenómenos en múltiples escalas de tiempo y longitud, tienen un alto grado de incertidumbre, tratan gran cantidad de datos, realizan simulaciones a gran escala, requieren equipos de investigación interdisciplinarios y transferencia de conocimiento matemático. Ante estos nuevos retos, la industria necesita matemáticos cualificados que aprecien y comprendan sus necesidades, que hayan sido formados para captar la esencia de un problema industrial en términos matemáticos, que puedan aplicar los métodos de las matemáticas contemporáneas, y que estén familiarizados con los últimos avances en computación científica y algoritmos numéricos.

En el lado académico, la matemática es una disciplina independiente, con un recorrido propio, que desarrolla nuevas ideas ya sea independientemente desde su propia disciplina o bajo el estímulo de las aplicaciones. Aunque la mayoría de los avances en todos los dominios de las matemáticas han tenido lugar en el mundo académico, en el informe se comentan problemas derivados de la ingeniería química, exploración petrolífera, imágenes médicas, microelectrónica y nanoelectrónica, logística y transporte, finanzas, seguridad de la información, comunicaciones y entretenimiento que han tenido un impacto significativo en nuevos desarrollos matemáticos. Sin lugar a dudas, los problemas matemáticos que surgen en la industria merecen la atención de la comunidad académica, y su resolución no sólo contribuye a la salud económica de la industria, sino que también puede proporcionar aire fresco para nuevos y atractivos desarrollos en las ciencias matemáticas.

Las aplicaciones de las matemáticas a problemas industriales no han sufrido una explosión similar a la experimentada por la disciplina académica de las matemáticas. La estructura organizativa de la academia, con departamentos más o menos autónomos, va en contra de la idea de inter-disciplinariedad y las colaboraciones trans-disciplinares son más la excepción que la regla. Otros impedimentos para la interacción son los sistemas de reconocimiento académico, que no siempre tienen en cuenta las contribuciones que hacen los matemáticos en disciplinas alejadas de las de su departamento, y los planes de estudios, que no ofrecen muchas oportunidades para que los estudiantes se familiaricen con las aplicaciones industriales.

### 4 Cooperación matemáticas e industria

El éxito de una cooperación requiere un buen ajuste entre las expectativas, las escalas de tiempo y las competencias de los socios. Un proyecto que se aborda conjuntamente debe estar debidamente estructurado, y los socios deben compartir una expectativa razonable de que se tienen las técnicas matemáticas necesarias, o al menos de que se pueden desarrollar.

La participación de las matemáticas en la industria en general se reduce a las grandes corporaciones, su impacto en las pequeñas y medianas empresas es más bien escaso. La cuestión es cómo crear mecanismos adecuados para estimular la interacción de las matemáticas y la industria y maximizar el impacto de la cooperación. Varios países han puesto en práctica distintos mecanismos que pueden mejorar esa cooperación en función de su estado de desarrollo y estructura económica. En el informe se describen los siguientes mecanismos: centros de investigación interdisciplinares, puestos universitarios para matemáticas industriales, prácticas de investigación, grupos de interés especial, colaboraciones en investigación directa, grupos de estudio, actividades para estudiantes, traslación de tecnología, consultoría, empresas de software, cooperación transnacional.

Las ideas y métodos matemáticos pueden ser entidades de alto valor económico y la propiedad intelectual es un capítulo importante en las relaciones industria - academia. Las cuestiones que rodean la “propiedad intelectual de matemáticas” son específicas debido a que las matemáticas no son un producto tangible, sino más bien una combinación de las ecuaciones matemáticas subyacentes, junto con su expresión en forma de algoritmo. Así, en los casos en que se implementan algoritmos matemáticos en programas informáticos pueden surgir cuestiones de propiedad intelectual difíciles de abordar. Dada la gran variedad de usos y reconocimientos de la propiedad intelectual de unos países a otros, los participantes en el workshop se limitaron a apuntar la necesidad de compartir las mejores prácticas en la gestión de la propiedad intelectual matemática y de aprender de los éxitos y fracasos de los científicos y organizaciones que trabajan en la interfase de la matemática y la industria.

## 5 Conclusiones y recomendaciones

La industria se enfrenta a problemas que tienen un componente matemático significativo y cuya resolución en muchos casos cae dentro de áreas de interés de la investigación actual en matemáticas. Así, el reforzamiento de los vínculos entre las matemáticas y la industria será beneficioso para las dos partes, estimulará nuevas matemáticas y mejorará la ventaja competitiva de las empresas y las economías nacionales.

Los participantes en el workshop propusieron distintas recomendaciones dirigidas a la comunidad académica, a organismos gubernamentales y otras agencias de financiación y a la industria, para facilitar una relación constructiva entre matemáticas e industria. Atendiendo al apartado que se quiere mejorar, estas recomendaciones se pueden clasificar en siete grupos. A continuación enunciamos las recomendaciones formuladas.

### 5.1 Matemáticas para la innovación industrial

Impulsar centros de investigación interdisciplinarios, crear plazas universitarias especiales en matemáticas industriales, organizar workshops para identificar problemas matemáticos en industrias específicas y para poner de relieve nuevas técnicas matemáticas para la industria.

### 5.2 Educación y capacitación

Diseñar planes de estudios optativos para los estudiantes de matemáticas que estén interesados en y motivados por los problemas industriales, los cuales deben proporcionar una sólida formación en matemáticas, haciendo hincapié en las aplicaciones innovadoras de las matemáticas y en problemas impulsados por la industria. Crear oportunidades para la participación en la investigación a nivel de grado y postgrado, establecer programas de doctorado con la industria, crear oportunidades para que profesores de enseñanza secundaria participen en interacciones academia - industria, y patrocinar equipos de jóvenes investigadores para investigación orientada a la industria.

### 5.3 Interfase entre las matemáticas y la industria

Constituir equipos conjuntos para desarrollar nuevas tecnologías matemáticas para industrias seleccionadas, crear puestos de “trasladores” para mejorar el proceso de comunicación entre la industria y el mundo de las matemáticas, facilitar el acceso web a la información acerca de los problemas, métodos, soluciones, centros de excelencia y capacidades disponibles, crear redes de expertos, y establecer modelos de acuerdos sobre la propiedad intelectual.

### 5.4 Infraestructura académica

Favorecer un entorno de apoyo a actividades interdisciplinarias, estimular a los profesores universitarios para que exploren oportunidades fuera de su estricta



especialización, apreciar y recompensar adecuadamente la participación del profesorado en actividades de difusión a la industria, crear puestos universitarios para investigadores de la industria, todo ello sin que disminuyan los estándares de calidad y rigor propios de la investigación en matemáticas.

### **5.5 Infraestructura industrial**

Hacer más atractivo el entorno industrial a investigadores cualificados, alcanzando compromisos aceptables entre el largo período de tiempo típico de la investigación matemática y la escala de tiempo normalmente mucho más corta a la que se enfrenta la industria, y dando a los investigadores en la industria la oportunidad de continuar su formación asistiendo a conferencias y workshops. Aumentar la presencia de la industria en el mundo académico mediante su apoyo activo a actividades que potencialmente incrementen el impacto de las matemáticas en la industria, y su participación activa en los institutos de investigación, en grupos de estudio, en escuelas de verano y en actividades de formación para estudiantes en matemáticas industriales.

### **5.6 Coordinación nacional e internacional**

Coordinar las investigaciones con el exterior, lo cual evita el riesgo no deseado de duplicar esfuerzos por parte de la comunidad académica. Difundir los resultados en revistas o presentarlos en congresos como una actividad científica más, con los mismos estándares de exigencia científica. Desarrollar la cooperación internacional entre las agencias de financiación y gobiernos, y el intercambio de prácticas eficaces en reuniones nacionales e internacionales. Crear redes internacionales para la investigación y la educación, posiblemente soportadas por recursos editoriales adecuados y bases de datos compartidas. En este orden de cosas, nunca hay que dejar de tener en mente que las matemáticas son una empresa global.

### **5.7 Acciones, tareas**

Crear un grupo de trabajo internacional para promover las iniciativas descritas en este informe, para evaluar y priorizar las recomendaciones en relación con sus implicaciones económicas, y para identificar los recursos necesarios para la implementación de las distintas recomendaciones. El grupo de trabajo debería incluir a representantes del mundo académico, la industria y el gobierno, con llamadas adicionales a expertos en caso necesario.



<b>Título:</b>	ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON CONDICIONES DE CONTORNO NO LINEALES. APLICACIONES A LA DINÁMICA DE TUMORES.
<b>Doctorando:</b>	Cristian Morales Rodrigo.
<b>Director/es:</b>	Antonio Suárez Fenández.
<b>Defensa:</b>	30 de Marzo 2009, Sevilla.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente cum laude por unanimidad.

**Resumen:**

En esta tesis nos dedicamos al estudio teórico y aplicaciones a la biología y medicina de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con no linealidades en la frontera. La tesis se divide en tres partes.

En la primera parte hacemos un estudio teórico general de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico con condiciones de contorno no lineales. En concreto nos centramos en la unicidad de solución, generalmente positiva, y en la existencia de soluciones mediante el método de bifurcación.

Posteriormente, en la segunda parte combinamos los resultados de la sección anterior con otros métodos, por ejemplo el de las sub-supersoluciones o el lema del paso de montaña, para hacer un estudio exhaustivo de dos ecuaciones elípticas que presentan no linealidades tanto en la ecuación como en la frontera.

Finalmente, la tercera parte se dedica al estudio de dos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico y de sus estados estacionarios asociados. El primero de ellos modela, en una manera bastante simplificada, el proceso de angiogénesis tumoral, que es un proceso crucial en el desarrollo tumoral. El segundo modelo fue propuesto por otros autores como un modelo relacionado con la formación de patrones, como puede ser la pigmentación que en la piel presentan diversos tipos de animales como el tigre o la cebra.

<b>Título:</b>	NURBS-ENHANCED FINITE ELEMENT METHOD (NEFEM).
<b>Doctorando:</b>	Rubén Sevilla.
<b>Director/es:</b>	Antonio Huerta, Sonia Fernández-Méndez.
<b>Defensa:</b>	24 de Julio de 2009, Barcelona.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente cum laude por unanimidad.

**Resumen:**

En esta tesis se propone una mejora del clásico método de los elementos finitos (*finite element method*, FEM) para un tratamiento eficiente de dominios con contornos curvos: el denominado *NURBS-enhanced finite element method* (NEFEM). Esta mejora permite describir de manera exacta la geometría mediante su representación del contorno CAD con *non-uniform rational B-splines* (NURBS), mientras que la solución se aproxima mediante una interpolación polinómica estándar. Por tanto, en la mayor parte del dominio la interpolación y la integración numérica son estándar, manteniendo la eficiencia y las propiedades de convergencia clásicas del FEM, y facilitando el acoplamiento con los elementos interiores. Sólo se requieren estrategias específicas para realizar la interpolación y la integración numérica en los elementos afectados por la descripción del contorno mediante NURBS.

La implementación y la aplicación de NEFEM a problemas que requieren una descripción precisa del contorno son también objetivos prioritarios de esta tesis. Por ejemplo, la solución numérica de las ecuaciones de Maxwell es muy sensible a la descripción geométrica. Se presenta la aplicación de NEFEM a problemas de *scattering* de ondas electromagnéticas con una formulación de Galerkin discontinuo. Se investiga la habilidad de NEFEM para obtener soluciones precisas en mallas groseras utilizando aproximaciones de alto orden y se exploran las posibilidades de las denominadas mallas NEFEM, con elementos que contienen singularidades geométricas dentro de una cara o una arista de un elemento. Utilizando NEFEM, el tamaño de elemento no está controlado por la complejidad de la geometría. Esto implica una drástica diferencia en el tamaño de elemento y, por tanto, supone un gran ahorro tanto desde un punto de vista de requerimientos de memoria como de coste computacional. Por tanto, NEFEM es una herramienta poderosa para la simulación de problemas tridimensionales a gran escala con geometrías complejas. Por otro lado, la simulación de problemas de *scattering* de ondas electromagnéticas requiere la utilización de mecanismos para conseguir una absorción eficiente de las ondas *scattered*. En esta tesis se discuten, optimizan y comparan dos técnicas en el contexto de métodos de Galerkin discontinuo y aproximaciones de alto orden.

La solución numérica de las ecuaciones de Euler de la dinámica de gases es también muy sensible a la representación geométrica. Cuando se considera una formulación de Galerkin discontinuo y elementos isoparamétricos lineales, una producción espuria de entropía puede evitar la convergencia

hacia la solución correcta. Con NEFEM la imposición de la condición de contorno en contornos impermeables utilizando la descripción geométrica exacta proporciona resultados precisos, incluso con una aproximación lineal de la solución. Además, la representación exacta del contorno permite una imposición adecuada de las condiciones de contorno en mallas groseras utilizando altos grados de aproximación.

Una propiedad atractiva de la implementación propuesta es que muchas de las rutinas usuales en un código de elementos finitos pueden ser aprovechadas: por ejemplo, rutinas para realizar el cálculo de matrices elementales, ensamblado, etc. Sólo es necesario implementar nuevas rutinas para calcular cuadraturas en elementos curvos y almacenar el valor de las funciones de forma en los puntos de integración.

En los últimos años se han propuesto varias técnicas de elementos finitos que utilizan una descripción precisa o exacta de la geometría. En esta tesis se compara NEFEM con otras técnicas populares de elementos finitos curvos: elementos isoparamétricos, elementos cartesianos y el denominado  $p$ -FEM. La comparación se realiza desde tres puntos de vista: aspectos teóricos, implementación y eficiencia numérica. En los ejemplos NEFEM es, como mínimo, un orden de magnitud más preciso para un número fijado de grados de libertad. Además, para una precisión deseada NEFEM es también más eficiente: necesita un 50% de los grados de libertad utilizados con elementos isoparamétricos o con  $p$ -FEM para conseguir la misma precisión. Por tanto, el uso de NEFEM es altamente recomendable en presencia de contornos curvos y/o cuando el contorno tiene detalles geométricos complejos.



<b>Tipo de evento:</b>	Post-Graduate Intensive School
<b>Nombre:</b>	CONSTRUCTIVE APPROXIMATION, OPTIMIZATION AND MATHEMATICAL MODELING
<b>Lugar:</b>	Sevilla
<b>Fecha:</b>	1 Febrero – 20 Mayo, 2010
<b>Organiza:</b>	IMUS (Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla), patrocinado por el programa INGENIO-CONSOLIDER
<b>Información:</b>	
<b>E-mail:</b>	Secretaría del IMUS: <a href="mailto:admin-imus@us.es">admin-imus@us.es</a>
<b>WWW:</b>	<a href="http://institucional.us.es/doc-course-imus/">http://institucional.us.es/doc-course-imus/</a>

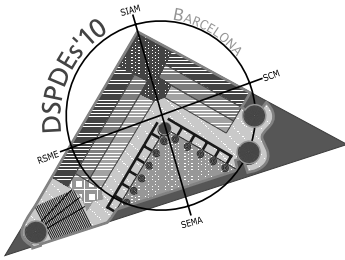
# DSPDEs'10

## Emerging Topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations

SIAM, RSME, SCM, SEMA

BARCELONA

May 31-June 4, 2010



### ORGANIZING COMMITTEE

Coloma Ballester,  
*Universitat Pompeu Fabra*  
Carme Calderer, SIAG/APDE,  
*University of Minnesota*

José A. Cañizo,  
*Universitat Autònoma de Barcelona*  
José A. Carrillo (Chair),  
*ICREA & Universitat Autònoma  
de Barcelona*

Irene M. Gamba, SIAG/APDE,  
*University of Texas at Austin*

Álex Haro, *Universitat de Barcelona*

Mary Lou Zeeman, SIAG/DS,  
*Bowdoin College*

Tere Martínez-Seara,  
*Universitat Politècnica de Catalunya*

Joan Solà-Morales,  
*Universitat Politècnica de Catalunya*

### SCIENTIFIC COMMITTEE

Tomás Caraballo, *Universidad de Sevilla*

José A. Carrillo (Moderator & Organizational  
Link), *ICREA & Universitat Autònoma  
de Barcelona*

Miguel Escobedo, *Universidad del País Vasco*  
Carlos García-Cervera, *University of California  
at Santa Barbara*

Miguel Ángel Herrero,  
*Universidad Complutense de Madrid*

Peter Kloeden, *Goethe-Universität Frankfurt*

Jaume Llibre, *Universitat Autònoma  
de Barcelona*

Rafael Ortega, *Universidad de Granada*

Hinke Osinga, *University of Bristol*

Alison Ramage, *University of Strathclyde*

Evelyn Sander, *George Mason University*

Björn Sandstede, *Brown University*

Fadil Santosa, *IMA – University of Minnesota*

Sylvia Serfaty, *Courant Institute –  
New York University*

Carles Simó (Chair of the Scientific Committee),  
*Universitat de Barcelona*

Juan Luis Vázquez,  
*Universidad Autónoma de Madrid*

[www.siam.org/meetings/dspdes/](http://www.siam.org/meetings/dspdes/)





**Anguiano Moreno, María**

Becaria. *Líneas de investigación*: Análisis estocástico de sistemas diferenciales – UNIV. DE SEVILLA – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico – Tarfia, s/n. 41012 Sevilla.

*Tlf.*: 954.556.807. *Fax*: 954.552.898.

*e-mail*: [anguiano@us.es](mailto:anguiano@us.es).

**Arjona Almodóvar, Alicia**

Investigadora. *Líneas de investigación*: Modelización, EDP's, geodesia – UNIV. COMPLUTENSE DE MADRID – Fac. de Matemáticas – Instituto de Astronomía y Geodesia – Plaza de las Ciencias, 3. 28040 Madrid.

*Tlf.*: 913.944.632. *Fax*: 913.944.615.

*e-mail*: [alicia.arjona@mat.ucm.es](mailto:alicia.arjona@mat.ucm.es).

[www.mat.ucm.es/momat](http://www.mat.ucm.es/momat)

**Blanes Zamora, Sergio**

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación*: Integración geométrica, métodos numéricos para ecuaciones diferenciales – UNIV. POLITÉCNICA DE VALENCIA – E. T. S. de Ingeniería del Diseño – Depto. de Matemáticas – Camino de Vera, s/n. 46022 Valencia.

*Tlf.*: 963.877.000, Ext. 86691. *Fax*: 963.879.887.

*e-mail*: [serblaza@imm.upv.es](mailto:serblaza@imm.upv.es).

<http://personales.upv.es/~serblaza>

**Cabrales, Roberto Carlos**

Profesor. *Líneas de investigación*: Ecuaciones en derivadas parciales; simulación numérica de problemas de ingeniería – UNIV. DE BÍO-BÍO – Fac. de Ciencias – Depto. de Ciencias Básicas – Avda. Andrés Bello, s/n. 447 - Chillán (Chile).

*Tlf.*: +5642253160. *Fax*: +564225406.

*e-mail*: [roberto.cabrales@gmail.com](mailto:roberto.cabrales@gmail.com).

**Castedo Ruiz, Ricardo**

Estudiante (Becario). *Líneas de investigación*: Matemática aplicada al medio natural; modelización y simulación numérica de procesos geológicos – UNIV. POLITÉCNICA DE MADRID – E. T. S. I. de Minas – Dpto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos – Alenza, 4. 28003 Madrid.

*Tlf.*: 913.367.047.

*e-mail*: [ricardo.castedo@upm.es](mailto:ricardo.castedo@upm.es).

**Faraco Hurtado, Daniel**

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Funciones cuasiconformes y ecuaciones elípticas; cálculo de variaciones vectorial y problemas inversos – UNIV. AUTÓNOMA DE MADRID – Fac. de Ciencias – Depto. de Matemáticas – C.U. de Cantoblanco, Crta. de Colmenar, Km 14. 28049 Madrid.

*Fax:* 914.972.889.

*e-mail:* daniel.faraco@uam.es.

[http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/dfaraco](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/dfaraco)

**Fernández Jambrina, Leonardo**

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Diseño geométrico asistido por ordenador, relatividad general – UNIV. POLITÉCNICA DE MADRID – E. T. S. I. Navales – Depto. de Enseñanzas Básicas de la Ingeniería Naval – Avda. Arco de la Victoria, s/n. 28040 Madrid.

*Tlf.:* 913.367.172. *Fax:* 915.442.149.

*e-mail:* leonardo.fernandez@upm.es.

<http://debin.etsin.upm.es/lfj.htm>

**Ivorra, Benjamín**

Prof. Ayudante Doctor. *Líneas de investigación:* Optimización, simulación, modelización – UNIV. COMPLUTENSE DE MADRID – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Matemática Aplicada – Plaza de las Ciencias, 3. 28040 Madrid.

*Tlf.:* 913.944.415. *Fax:* 913.944.613.

*e-mail:* ivorra@mat.ucm.es.

<http://www.mat.ucm.es/~ivorra>

**Lebtahi, Leila**

Prof. Asociada. *Líneas de investigación:* Análisis matricial y aplicaciones – UNIV. POLITÉCNICA DE VALENCIA – E. T. S. I. de Telecomunicación – Dpto. de Matemática Aplicada – Camino de Vera, s/n. 46022 Valencia.

*Tlf.:* 963.877.987. *Fax:* 963.877.199.

*e-mail:* leilebep@mat.upv.es.

**Martínez Gavara, Anna**

Investigadora. *Líneas de investigación:* Métodos de alta resolución para sistemas hiperbólicos – UNIV. DE SEVILLA – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico – Tarfia, s/n. 41012 Sevilla.

*Tlf.:* 954.556.289. *Fax:* 954.552.898.

*e-mail:* gavara@us.es.

**Tierra Chica, Giordano**

Estudiante (Becario). *Líneas de investigación:* Análisis teórico y numérico de ecuaciones en derivadas parciales – UNIV. DE SEVILLA – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico – Tarfia, s/n. 41012 Sevilla.

*Tlf.:* 954.556.807. *Fax:* 954.552.898.

*e-mail:* gtierra@us.es.



## Direcciones útiles

### Consejo Ejecutivo de SĒMA

**Presidente:**

**Carlos Vázquez Cendón.** ([carlosv@udc.es](mailto:carlosv@udc.es)).  
Dpto. de Matemáticas. Facultad de Informática. Univ. de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña. *Tel:* 981 16 7000-1335.

**Vicepresidente:**

**Rosa María Donat Beneito.** ([Rosa.M.Donat@uv.es](mailto:Rosa.M.Donat@uv.es))  
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemàtiques. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 544 727.

**Secretario:**

**Carlos Castro Barbero.** ([ccastro@caminos.upm.es](mailto:ccastro@caminos.upm.es)).  
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

**Vocales:**

**Sergio Amat Plata.** ([sergio.amat@upct.es](mailto:sergio.amat@upct.es))  
Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística. Univ. Politécnica de Cartagena. Paseo de Alfonso XIII, 52. 30203 Cartagena (Murcia). *Tel:* 968 325 694.

**Rafael Bru García.** ([rbru@mat.upv.es](mailto:rbru@mat.upv.es))  
Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Agrónomos. Univ. Politécnica de Valencia. Camí de Vera, s/n. 46022 Valencia. *Tel:* 963 879 669.

**José Antonio Carrillo de la Plata.** ([carrillo@mat.uab.es](mailto:carrillo@mat.uab.es))  
Dpto. de Matemáticas. Univ. Autònoma de Barcelona. Edifici C. 08193 Bellaterra (Barcelona). *Tel:* 935 812 413.

**Inmaculada Higuera Sanz.** ([higuera@unavarra.es](mailto:higuera@unavarra.es)).  
Dpto de Matemática e Informática Univ. Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. *Tel:* 948 169 526. 31006 Pamplona.

**Carlos Parés Madroñal.** ([carlos\\_pares@uma.es](mailto:carlos_pares@uma.es)).  
Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Ciencias. Univ. de Málaga. Campus de Teatinos, s/n. 29080 Málaga. *Tel:* 952 132 017.

**Pablo Pedregal Tercero.** ([Pablo.Pedregal@uclm.es](mailto:Pablo.Pedregal@uclm.es)).  
Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. de Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 436

**Luis Vega González.** ([luis.vega@ehu.es](mailto:luis.vega@ehu.es)).  
Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

**Tesorero:**

**Íñigo Arregui Álvarez.** ([arregui@udc.es](mailto:arregui@udc.es)).  
Dpto. de Matemáticas. Fac. de Informática. Univ. de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña. *Tel:* 981 16 7000-1327.

## Comité Científico del Boletín de SēMA

**Enrique Fernández Cara.** ([caracus.es](mailto:caracus.es)).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

**Alfredo Bermúdez de Castro.** ([mabermud@usc.es](mailto:mabermud@usc.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus Univ.. 15706 Santiago (A Coruña) *Tel:* 981 563 100.

**Carlos Conca Rosende.** ([cconca@dim.uchile.cl](mailto:cconca@dim.uchile.cl)).

Dpto. de Ingeniería Matemática. Univ. de Chile. Blanco Encalada 2120. Santiago (Chile) *Tel:* (+56) 0 978 4459.

**Amadeus Delshams Valdés.** ([Amadeu.Delshams@upc.es](mailto:Amadeu.Delshams@upc.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada I. Univ. Politécnica de Cataluña. Diagonal 647. 08028 Barcelona. *Tel:* 934 016 052.

**Martin J. Gander** ([Martin.Gander@math.unige.ch](mailto:Martin.Gander@math.unige.ch)).

Section de Mathématiques. Université de Genève. 2-4 rue du Lièvre, CP 64. CH-1211 Genève (Suiza). *Fax:* (+41) 22 379 11 76.

**Vivette Girault** ([girault@ann.jussieu.fr](mailto:girault@ann.jussieu.fr)). Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Paris VI. Boite Courrier 187, 4 Place Jussieu 75252 Paris Cedex 05 (Francia).

**Arieh Iserles** ([A.Iserles@damp.cam.ac.uk](mailto:A.Iserles@damp.cam.ac.uk)).

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics. University of Cambridge. Wilberforce Rd Cambridge (Reino Unido). *Tel:* (+44) 1223 337891.

**José Manuel Mazón Ruiz.** ([Jose.M.Mazon@uv.es](mailto:Jose.M.Mazon@uv.es)).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

**Pablo Pedregal Tercero.** ([Pablo.Pedregal@uclm.es](mailto:Pablo.Pedregal@uclm.es)).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 436 .

**Ireneo Peral Alonso.** ([ireneo.peral@uam.es](mailto:ireneo.peral@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

**Benoît Perthame.** ([benoit.perthame@ens.fr](mailto:benoit.perthame@ens.fr)).

Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Paris VI. 175, rue du Chevaleret. 75013 Paris, (Francia). *Tel:* (+33) 1 44 32 20 36.

**Olivier Pironneau** ([pironneau@ann.jussieu.fr](mailto:pironneau@ann.jussieu.fr)).

Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Paris VI. 35 rue de Bellefond. 75009 Paris (Francia). *Tel:* (+33) 1 42 80 12 97.

**Alfio Quarteroni.** ([alfio.quarteroni@epfl.ch](mailto:alfio.quarteroni@epfl.ch)).

Institute of Analysis and Scientific Computing. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Piccard Station 8. CH-1015 Lausanne (Suiza) *Tel:* (+41) 21 69 35546.

**Juan Luis Vázquez Suárez.** ([juanluis.vazquez@uam.es](mailto:juanluis.vazquez@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Crta. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 935.

**Luis Vega González.** ([mtpvegol@lg.ehu.es](mailto:mtpvegol@lg.ehu.es)).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

**Chi-Wang Shu.** ([shu@dam.brown.edu](mailto:shu@dam.brown.edu)).

Division of Applied Mathematics Box F. 182 George Street Brown University Providence RI 02912 *Tel:* (401) 863-2549

**Enrique Zuazua Iriondo.** ([zuazua@bcamath.org](mailto:zuazua@bcamath.org)).

Basque Center for Applied Mathematics Bizkaia Technology Park Building 208B 48170 - Zamudio (Vizcaya) *Tel:* 944 014 690

## Grupo Editor del Boletín de SĒMA

**Pablo Pedregal Tercero.** ([Pablo.Pedregal@uclm.es](mailto:Pablo.Pedregal@uclm.es)).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3809

**Enrique Fernández Cara.** ([cara@us.es](mailto:cara@us.es)).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

**Ernesto Aranda Ortega.** ([Ernesto.Aranda@uclm.es](mailto:Ernesto.Aranda@uclm.es)).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3813

**José Carlos Bellido Guerrero.** ([JoseCarlos.Bellido@uclm.es](mailto:JoseCarlos.Bellido@uclm.es)).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3859

**Alberto Donoso Bellón.** ([Alberto.Donoso@uclm.es](mailto:Alberto.Donoso@uclm.es)).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3859

## Responsables de secciones del Boletín de SĒMA

### Artículos:

**Enrique Fernández Cara.** ([cara@us.es](mailto:cara@us.es)).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

### Matemáticas e Industria:

**Mikel Lezaun Iturralde.** ([mpleitm@lg.ehu.es](mailto:mpleitm@lg.ehu.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e I. O. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

### Educación Matemática:

**Roberto Rodríguez del Río.** ([rr\\_delrio@mat.ucm.es](mailto:rr_delrio@mat.ucm.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Químicas. Univ. Compl. de Madrid. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid. *Tel:* 913 944 102.

### Resúmenes de libros:

**Fco. Javier Sayas González.** ([jsayas@posta.unizar.es](mailto:jsayas@posta.unizar.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior . Universidad de Zaragoza. C/María de Luna, 3. 50015 Zaragoza. *Tel:* 976 762 148.

**Noticias de SēMA:**

**Carlos Castro Barbero.** ([ccastro@caminos.upm.es](mailto:ccastro@caminos.upm.es)).  
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos.  
Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:*  
91 336 6664.

**Anuncios:**

**Óscar López Pouso.** ([oscar.lopez@usc.es](mailto:oscar.lopez@usc.es)).  
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de  
Compostela. Campus sur, s/n. 15782 Santiago de Compostela *Tel:*  
981 563 100, ext. 13228.

## Responsables de otras secciones de SēMA

**Gestión de Socios:**

**Íñigo Arregui Álvarez.** ([arregui@udc.es](mailto:arregui@udc.es)).  
Dpto. de Matemáticas. Fac. de Informática. Univ. de A Coruña. Campus de  
Elviña, s/n. 15071 A Coruña. *Tel:* 981 16 7000-1327.

**Página web:** [www.sema.org.es/](http://www.sema.org.es/):

**Carlos Castro Barbero.** ([ccastro@caminos.upm.es](mailto:ccastro@caminos.upm.es)).  
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos.  
Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:*  
91 336 6664.



1. Los artículos publicados en este Boletín podrán ser escritos en español o inglés y deberán ser enviados por correo certificado a

Prof. E. FERNÁNDEZ CARA  
Presidente del Comité Científico, Boletín SĕMA  
Dpto. E.D.A.N., Facultad de Matemáticas  
Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA

También podrán ser enviados por correo electrónico a la dirección

`boletin.sema@uclm.es`

En ambos casos, el/los autor/es deberán enviar por correo certificado una carta a la dirección precedente mencionando explícitamente que el artículo es sometido a publicación e indicando el nombre y dirección del autor corresponsal. En esta carta, podrán sugerirse nombres de miembros del Comité Científico que, a juicio de los autores, sean especialmente adecuados para juzgar el trabajo.

La decisión final sobre aceptación del trabajo será precedida de un procedimiento de revisión anónima.

2. Las contribuciones serán preferiblemente de una longitud inferior a 24 páginas y se deberán ajustar al formato indicado en los ficheros a tal efecto disponibles en la página web de la Sociedad (<http://www.sema.org.es/>).
3. El contenido de los artículos publicados corresponderá a un área de trabajo preferiblemente conectada a los objetivos propios de la Matemática Aplicada. En los trabajos podrá incluirse información sobre resultados conocidos y/o previamente publicados. Se anima especialmente a los autores a presentar sus propios resultados (y en su caso los de otros investigadores) con estilo y objetivos divulgativos.

## Ficha de Inscripción Individual

### Sociedad Española de Matemática Aplicada SēMA

Remitir a: Iñigo Arregui, Dpto de Matemáticas, Fac. de Informática,  
Universidad de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña.  
CIF: G-80581911

#### Datos Personales

- Apellidos: .....
- Nombre: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....
- Teléfono: ..... DNI/CIF: .....
- Fecha de inscripción: .....

#### Datos Profesionales

- Departamento: .....
- Facultad o Escuela: .....
- Universidad o Institución: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....
- Teléfono: ..... Fax: .....
- Correo electrónico: .....
- Página web: <http://> .....
- Categoría Profesional: .....
- Líneas de Investigación: .....
- .....

**Dirección para la correspondencia:**  Profesional  Personal

---

Cuota anual para el año 2009

- Socio ordinario: 30€     Socio de reciprocidad con la RSME: 12€
- Socio estudiante: 15€

**Datos bancarios**

...de ..... de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SēMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) sean pasados al cobro en la cuenta cuyos datos figuran a continuación

Entidad (4 dígitos)	Oficina (4 dígitos)	D.C. (2 dígitos)	Número de cuenta (10 dígitos)

- Entidad bancaria: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....

Con esta fecha, doy instrucciones a dicha entidad bancaria para que obren en consecuencia.

Atentamente,

Fdo. ....

**Para remitir a la entidad bancaria**

...de ..... de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SēMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) sean cargados a mi cuenta corriente/libreta ..... en esa Agencia Urbana y transferidas a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244  
Bankinter  
C/ Hernán Cortés, 63  
39003 Santander

Atentamente,

Fdo. ....

## Ficha de Inscripción Institucional

### Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA

Remitir a: Iñigo Arregui, Dpto de Matemáticas, Fac. de Informática,  
Universidad de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña.  
CIF: G-80581911

#### Datos de la Institución

- Departamento: .....
- Facultad o Escuela: .....
- Universidad o Institución: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....
- Teléfono: ..... DNI/CIF: .....
- Correo electrónico: .....
- Página web: <http://> .....
- Fecha de inscripción: .....

#### Forma de pago

La cuota anual para el año 2009 como Socio Institucional es de 150€.  
El pago se realiza mediante transferencia bancaria a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244  
Bankinter  
C/ Hernán Cortés, 63  
39003 Santander