

SēMA
BOLETÍN NÚMERO 46
Marzo 2009

sumario

Editorial	5
Obituario: Fuensanta Andrés	7
Artículos	9
<i>Efectos sorprendentes relacionados con la homogeneización</i> , por P. Pedregal	9
<i>Repartos y funciones convexas aditivamente separables</i> , por F.R. Fernández	29
<i>Reduced Basis Method for Parametrized Differential Algebraic Equations</i> , por M. D'Elia, L. Dede', A. Quarteroni	45
<i>Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for Advection Reaction Diffusion Equations</i> , por D.S. Daoud, M.J. Gander	75
Resúmenes de tesis doctorales	91
Resúmenes de libros	93
Noticias de SēMA	97
Anuncios	105

Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

Grupo Editor

P. Pedregal Tercero (U. Cast.-La Mancha) E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
E. Aranda Ortega (U. Cast.-La Mancha) A. Donoso Bellón (U. Cast.-La Mancha)
J.C. Bellido Guerrero (U. Cast.-La Mancha)

Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla) A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)
C. Conca Resende (U. de Chile) A. Delshams Valdés (U. Pol. de Cataluña)
Martin J. Gander (U. de Ginebra) Vivette Girault (U. de París VI)
Arieh Iserles (U. de Cambridge) J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia)
P. Pedregal Tercero (U. Cast.-La Mancha) I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid)
Benoît Perthame (U. de París VI) O. Pironneau (U. de París VI)
Alfio Quarteroni (EPF Lausanne) J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)
L. Vega González (U. del País Vasco) C. Wang Shu (Brown U.)
E. Zuazua (Basque Center App. Math.)

Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)
Historia Matemática: J.M. Vegas Montaner (U. Comp. de Madrid)
Resúmenes: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)
Noticias de SĒMA: C.M. Castro Barbero (Secretario de SĒMA)
Anuncios: Ó. López Pouso (U. de Santiago de Compostela)

Página web de SĒMA

<http://www.sema.org.es/>

e-mail

info@sema.org.es

Dirección Editorial: Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla - La Mancha. Avda. de Camilo José Cela s/n. 13071. Ciudad Real. boletin.sema@uclm.es

ISSN 1575-9822.

Depósito Legal: AS-1442-2002.

Imprime: Gráficas Lope. C/ Laguna Grande, parc. 79, Políg. El Montalvo II 37008. Salamanca.

Diseño de portada: Ernesto Aranda

Ilustración de portada: Polítopos construidos con el paquete `pst-coxcoor`

Consejo Ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada
SĕMA

Presidente

Carlos Vázquez Cendón

Vicepresidente

Rosa María Donat Beneito

Secretario

Carlos Manuel Castro Barbero

Vocales

Sergio Amat Plata

Rafael Bru García

Jose Antonio Carrillo de la Plata

Inmaculada Higuera Sanz

Carlos Parés Madroñal

Pablo Pedregal Tercero

Luis Vega González

Estimados socios,

Os presentamos con estas líneas un nuevo número del Boletín cuyo contenido esperamos que sea de vuestro agrado. Entre otras cosas, hemos incluido en este número cuatro artículos de Pablo Pedregal; Francisco R. Fernández; Marta D'Elia, Luca Dede' y Alfio Quarteroni; y Daoud S. Daoud y Martin J. Gander que esperamos os resulten de interés.

En la sección de noticias podréis encontrar un resumen de lo que ha sido la celebración del 50 aniversario de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Santiago de Compostela y también incluimos en este volumen un emotivo recuerdo a la que fue nuestra compañera Fuensanta Andréu, elaborado por algunos de sus compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Universitat de València.

Recibid un cordial saludo,

Grupo Editor
boletin.sema@uclm.es

Recordando a Fuensanta Andreu

Estimados compañeros de la SEMA, como sin duda sabéis, el día 26 de diciembre del pasado 2008 falleció Fuensanta Andreu. Su ausencia, anticipada –contaba sólo 53 años– e imprevista –su entrega profesional hasta el último momento disuadía de anticipar el final– nos ha sumido a todos en un profundo dolor y tristeza. Fuensanta era una compañera insustituible, una gran amiga (también de muchos de vosotros) y nuestra maestra. Esto último es especialmente cierto: todos los firmantes de este escrito nos consideramos sus discípulos. No sólo se trata de que hemos trabajado estrechamente con ella, sino de mucho más. En ese mucho más incluimos que hemos percibido su sincero y profundo interés por nuestro desarrollo profesional; que hemos sentido su ánimo y comprensión en momentos difíciles; que hemos constatado complacidos su entusiasmo y alegría por nuestros pequeños logros. Que, en fin, hemos disfrutado de su generosidad, cercanía y cálida sonrisa. Con este escrito queremos recordarla; en ningún caso despedirnos de ella, eso no es posible.

Fuensanta nació en Almoradí (Alicante), si bien la mayor parte de su vida ha transcurrido en Valencia. En su Universidad se licenció y en Valencia se ha desarrollado toda su vida profesional, siempre junto a su marido, J. M. Mazón.

Su interés inicial en los espacios de sucesiones, plasmada en su tesis doctoral dirigida por M. Valdivia, pronto se desplazó a la diferenciación compacta y, posteriormente, al estudio de los operadores positivos. Tras una estancia en la Universidad de Tübingen con R. Nagel, comenzó a estudiar semigrupos de operadores positivos y, a través de ellos, mantuvo un primer contacto con las EDP.

La profundización en la investigación de las EDP no lineales se produjo a partir de 1991 tras una estancia –esta vez en la Universidad de Besançon con Ph. Bénilan– que le inició en el estudio de los semigrupos de operadores no lineales. A partir de ese momento, Fuensanta y Mazón fueron quienes introdujeron la investigación de esta materia en nuestro departamento. Con gran esfuerzo, que no por compartido fue menor, lograron que pudiésemos asomarnos a este mundo tan complicado y apasionante a la vez.

Fuensanta sobresalió en este campo de las EDP, investigando una gran variedad de problemas estacionarios y de evolución que modelizan procesos de difusión no lineales, abordando su existencia, unicidad, comportamiento asintótico, la existencia de atractores o la explosión. Desde esta perspectiva se adentró en el estudio de ecuaciones del tipo del p -laplaciano; medios porosos; doblemente no lineales; procedentes de funcionales con crecimiento lineal (como el flujo variación total); de difusión con velocidad de propagación finita (como la relativista del calor), o de difusión no local que aproxima la difusión local del p -laplaciano.

De los primeros trabajos sobre el flujo variación total y su aplicación al tratamiento de imágenes escribió, junto a V. Caselles y J. M. Mazón, una monografía que fue galardonada con el Premio Internacional “Ferran Sunyer i Balaguer 2003”:

ANDREU-VAILLO, FUENSANTA; CASELLES, VICENT; MAZÓN, JOSÉ M.
Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals.
Progress in Mathematics, 223. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

Fuensanta también ha dejado escrita una segunda monografía sobre problemas de difusión no local, *Evolution problems with nonlocal diffusion*, junto a J. M. Mazón, J. D. Rossi y J. J. Toledo, aún sin publicar.

Siempre se implicó en las actividades académicas del departamento, de la facultad y de la universidad (durante los últimos años fue miembro de la Junta de Facultad de Matemáticas, y del Claustro y de la Comisión de Estatutos de la Universidad de Valencia). Asimismo participó activamente en las sociedades matemáticas de nuestro país. Fue miembro de la SEMA y de la RSME; en el caso de esta última, formaba parte de su Comité Científico.

Nunca permitió que la lucha contra su enfermedad mermara su actividad profesional. Mantuvo su entusiasmo por la investigación hasta el final. En 2006, obtuvo una cátedra de Matemática Aplicada. Tampoco sus problemas de salud pudieron nunca con su trato afectuoso y cálido. Queremos recordarla así, con esa sonrisa suya tan especial. Tuvimos la suerte de disfrutarla cotidianamente y la conservaremos en nuestra memoria.

Hasta siempre Fuensanta,

Josep Martínez, Salvador Moll, Sergio Segura de León, J. Julián Toledo
Dpto. de Análisis Matemático de la Universitat de València.

EFFECTOS SORPRENDENTES RELACIONADOS CON LA HOMOGENEIZACIÓN

PABLO PEDREGAL

ETSI Industriales, Departamento de Matemáticas,
UCLM, 13071 Ciudad Real, Spain

pablo.pedregal uclm.es

Resumen

En este trabajo, se pretenden poner de manifiesto dos hechos que pueden resultar un tanto inesperados para quien conoce el problema básico en Homogeneización, que consiste en determinar la ecuación o ley límite de una sucesión de problemas lineales inhomogeneos con inhomogeneidades altamente oscilantes. Brevemente, diremos que el problema límite puede determinarse en ocasiones en una forma **no lineal**, aunque la sucesión de problemas que lo determina son todos lineales con una estructura muy sencilla y transparente; otras veces, el límite de las soluciones de la sucesión de problemas carece de cualquier lazo intrínseco que lo ligue a la sucesión de problemas. Esta última afirmación se explica de manera más precisa en el desarrollo que sigue.

Palabras clave: *Envolturas convexas, restricciones diferenciales, convergencia débil, laminados*

Clasificación por materias AMS: *74Q05 74Q10 49J45*

1 Introducción

Los investigadores que trabajan con cierta frecuencia con técnicas de homogeneización conocen muy bien el siguiente hecho básico que precisamente justifica la tremenda importancia de la homogeneización ([6]). Si partimos de una sucesión de problemas lineales

$$A_j u_j = 0$$

en determinado espacio funcional, entonces $u_j \rightharpoonup u$ donde u es la solución de un problema **lineal** concreto del mismo tipo

$$Au = 0.$$

Fecha de recepción: 15/01/2009. Aceptado (en forma revisada): 18/01/2009.

El operador límite A se denomina el homogeneizado de la sucesión dada y a través de él se pueden entender los límites débiles de sucesiones de problemas. De aquí la importancia de poder entender el paso de A_j a A . Esta es la cuestión básica fundamental de la homogeneización en diversos contextos.

En este trabajo queremos insistir en dos hechos sorprendentes en relación con este principio general. Se trata de:

1. La ecuación límite **NO** es lineal, a pesar de que los A_j sí lo son.
2. El límite débil carece de ninguna propiedad intrínseca en relación con la sucesión de problemas que lo genera.

Por supuesto, es importante entender en qué sentido se buscan estos problemas límites y en qué sentido hay que entender la afirmación segunda. Evidentemente, dada cualquier función u (con algunas propiedades básicas de suavidad), podemos inventarnos infinitas ecuaciones de las que la propia u es solución. Pero se trata de realizar y comprender este proceso de una manera coherente y con sentido. Esto significa que podamos realizar este proceso con familias enteras de operadores y soluciones, y quizás lo que es más importante, podamos escribir la ecuación límite sin conocer su solución u , de modo que podamos extraer información de dicho límite (analizarlo, aproximarlo) precisamente a través de las propiedades de la ecuación de la que debe ser solución.

Una situación de las más simples consiste en concretar una determinada familia de operadores y condiciones de contorno, y especificar la regla en la que se construye el operador límite de suerte que esta regla sirva para todos los operadores de esa clase y para todas las condiciones de contorno consideradas. Por concretar de la manera más sencilla posible, supongamos que tomamos dos constantes positivas

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1$$

y la clase Υ de funciones características $\chi(x)$ en un dominio regular $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ con la propiedad

$$\int_{\Omega} \chi(x) dx = r|\Omega|$$

para un $r \in (0, 1)$ dado. Tomemos además una función arbitraria v en $H^1(\Omega)$, y definamos con estos ingredientes el problema

$$\operatorname{div}[(\alpha_1\chi(x) + \alpha_0(1 - \chi(x)))\nabla u(x)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u - v \in H_0^1(\Omega).$$

Es bien conocido que el operador (dependiendo de α_0 , α_1 y r)

$$\mathbf{T} : \Upsilon \times H^1(\Omega) \mapsto H^1(\Omega), \quad \mathbf{T}(\chi, v) = u,$$

está perfectamente definido. Tomemos una sucesión $\{\chi_j\} \subset \Upsilon$ convergiendo débil a $t(x) \in [0, 1]$ con

$$\int_{\Omega} t(x) dx = r|\Omega|.$$

Es sencillo comprobar (quizás para una subsucesión que no nos preocupamos en renombrar) que para cada $v \in H^1(\Omega)$, la sucesión

$$u_j = \mathbf{T}(\chi_j, v)$$

converge débil a una $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u - v \in H_0^1(\Omega)$. Queremos encontrar una regla \mathcal{T} que nos permita anticipar una ecuación para el límite débil u sin conocerlo, y que sirva para todas las sucesiones $\{\chi_j\}$ como la de antes y cualquier $v \in H^1(\Omega)$.

Una tal regla puede especificarse, analizarse y manipularse en el contexto de la Homogeneización ([6]). Dicha regla es **LINEAL** en el sentido de que el problema para u es un problema lineal del mismo tipo de los problemas con los que estamos trabajando, aunque de una estructura un tanto más complicada. En concreto, el tipo de resultado central en Teoría de la Homogeneización es que existe un campo $A(x)$ que toma valores en el espacio de las matrices simétricas y definidas positivas (y que viene determinado por la sucesión $\{\chi_j\}$ y el propio operador \mathbf{T}) de modo que la solución del problema

$$\operatorname{div}[A(x)\nabla u(x)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u - v \in H_0^1(\Omega),$$

es precisamente el límite débil u de las soluciones $\{u_j\}$. El proceso que permite determinar el campo $A(x)$ está especialmente estudiado y entendido en el caso periódico pero no se sabe mucho en situaciones más generales ([6]).

En este contexto se sitúa nuestra contribución en estas páginas.

1. Por un lado, queremos explicitar que se puede dar una regla \mathcal{T} , totalmente explícita pero **NO LINEAL**, de manera que el límite débil de una sucesión de soluciones, es precisamente la solución de este problema límite no lineal.
2. Por otro lado, queremos enfatizar que si nos salimos de un contexto de ecuaciones elípticas entonces, **cualquier función puede ser el límite débil de una sucesión de soluciones**.

Más en concreto, nos centraremos en proporcionar los suficientes detalles para convencer a nuestros lectores de los siguientes dos resultados.

Teorema 1 Sean $\{\chi_j\}$ una sucesión arbitraria de funciones características en Ω respetando la condición

$$\int_{\Omega} \chi_j(x) dx = r|\Omega|,$$

y $\{u_j\}$, la correspondiente sucesión de soluciones de los problemas

$$\operatorname{div}[(\alpha_1\chi_j(x) + \alpha_0(1 - \chi_j(x)))\nabla u_j(x)] = 0 \text{ in } \Omega, \quad u_j - v \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces existen $t \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ y $s \in L^\infty(\Omega; B^N)$ ($|s(x)| \leq 1$), de modo que el problema

$$\operatorname{div}[a(x)\nabla u(x) + b(x)|\nabla u(x)|s(x)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u - v \in H_0^1(\Omega),$$

donde

$$b = \frac{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{2(\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t)}, \quad a = b + \frac{2\alpha_1\alpha_0}{2(\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t)},$$

admite una única solución que es precisamente el límite débil de la sucesión $\{u_j\}$. Al revés, para cada t y s dados de esta manera, se puede encontrar una sucesión de funciones características $\{\chi_j\}$ con las propiedades especificadas, de suerte que la correspondiente sucesión de soluciones $\{u_j\}$ converge débil a la solución del problema no lineal determinado por el par (t, s) .

Los parámetros α_0 , α_1 y r siguen siendo como hasta ahora.

Teorema 2 Consideremos $\Omega = (0, 1)$ el intervalo unitario en \mathbf{R} , y $T > 0$. Dada cualquier función $u(t, x)$ con $u(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$ para cada $t \in (0, T)$, siempre se puede encontrar una sucesión de funciones características $\{\chi_j\}$ en Ω bajo la restricción

$$\int_{\Omega} \chi_j(x) dx = r|\Omega|,$$

de suerte que la sucesión de soluciones de los problemas

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(j)} - [(\alpha_1\chi_j(x) + \alpha_0(1 - \chi_j(x)))u_x^{(j)}]_x &= 0 \text{ in } (0, T) \times (0, 1), \\ u^{(j)}(t, \cdot) &\in H_0^1(\Omega) \text{ para todo } t \in (0, T), \\ u^{(j)}(0, x) &= u(0, x), u_t^{(j)}(0, x) = u_t(0, x), \text{ para } x \in \Omega, \end{aligned}$$

converge débil (en $H^1((0, T) \times \Omega)$) a u .

Este último resultado enfatiza que no hay nada especial sobre el límite u que lo ligue con las soluciones $u^{(j)}$. Nótese que esto es muy distinto a afirmar que no hay modo de definir un problema límite, pues de hecho es una situación bien establecida en la Teoría de la Homogeneización ([6]).

La bibliografía sobre Homogeneización es realmente desbordante. Nos hemos restringido aquí a dar como referencia básica [6] pues creemos que es un texto introductorio, básico y actual, apto para cualquiera que pretenda entender mejor los aspectos más fundamentales de la Homogeneización. Algunas referencias más especializadas en las que se explican algunos de los desarrollos más clásicos e importantes son [13], [14], [15].

Una de las principales motivaciones para el estudio serio de la Homogeneización es su aplicación a problemas de diseño óptimo. En este sentido, el desarrollo ha sido espectacular. Citaremos tan solo las referencias [1], [5], [8] y [22] como fuentes importantes para entender la trascendencia de la Homogeneización en este tipo de problemas, y [2] como un ejemplo de su tremenda importancia práctica en las aplicaciones en Ingeniería.

2 Una cuestión básica en convergencia débil y un contexto más amplio

Para situar nuestra discusión en un contexto más amplio que permita vislumbrar el tipo de cuestión al que nos enfrentamos, consideremos el siguiente problema.

Problema 1 *Supongamos dado un conjunto acotado (por simplicidad) $S \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ en el que toman valores sucesiones de pares de campos (u_j, f_j)*

$$(u_j(x), f_j(x)) \in S \text{ para casi todo } x \in \Omega \subset \mathbf{R}^N,$$

donde Ω es un dominio regular dado de \mathbf{R}^N . Para una determinada subsucesión, que no renombramos, podemos suponer que $u_j \rightharpoonup u$, $f_j \rightharpoonup f$. La pregunta que nos gustaría entender es: ¿dónde pueden tomar valores los pares (u, f) de límites débiles? Evidentemente $(u(x), f(x)) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. Lo que queremos saber es cuál es el conjunto CS , más pequeño posible, en que los pares de límites débiles toman sus valores, de suerte que

$$(u_j, f_j) \in S, (u_j, f_j) \rightharpoonup (u, f) \text{ implica } (u, f) \in CS;$$

además, dado $(u, f) \in CS$, siempre se puede encontrar una sucesión $(u_j, f_j) \in S$ con $(u_j, f_j) \rightharpoonup (u, f)$.

Resulta que el conjunto CS así definido es independiente del dominio Ω , de suerte que la propiedad anterior determina de una manera abstracta CS . Por supuesto $S \subset CS$. En esta generalidad, determinar CS no es difícil, aunque tampoco demasiado útil en muchas situaciones. Se conoce bien, y es de hecho un ejercicio relativamente sencillo el comprobarlo, que CS es la envoltura convexa de S ([20]). Esta discusión previa nos ayuda a entender que estamos explorando cuestiones relativas a envolturas convexas de conjuntos con distintas propiedades.

Situaciones mucho más interesantes (y complicadas) se concretan si imponemos restricciones adicionales a los pares de campos para los que nos gustaría determinar la envoltura correspondiente. La situación concreta en la que nos vamos a centrar para el resto de este trabajo es la siguiente.

Problema 2 *Dado $S \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ (esta vez no necesariamente acotado pero sí cerrado), determinar la envoltura QS de modo que los límites débiles $(\nabla u, F)$ en $H^1(\Omega) \times L^2_{div}(\Omega)$ de pares de campos $(\nabla u_j, F_j)$ con*

$$(\nabla u_j, F_j) \in S, \text{div } F_j = 0 \text{ en } \Omega,$$

tomen sus valores en QS .

Se trata del mismo problema de antes donde hemos añadido importantes restricciones diferenciales a los pares que admitimos: el primer par debe ser un gradiente de una función de $H^1(\Omega)$ y el segundo debe ser un campo con divergencia nula.

El objeto de este trabajo lo podemos concretar en este contexto afirmando que queremos intentar determinar esta envoltura QS cuando el conjunto S tiene una estructura especial. Este ingrediente esencial sobre el conjunto S es el que liga el Problema 2 con las cuestiones sobre Homogeneización prometidas en la Introducción. Para entenderlo, volvamos a la situación descrita allí e intentemos

establecer su relación con el Problema 2. En efecto, dada una característica χ , si ponemos

$$F(x) = [\alpha_1\chi(x) + \alpha_0(1 - \chi(x))]\nabla u(x),$$

donde u es la única solución del problema

$$\operatorname{div} [(\alpha_1\chi(x) + \alpha_0(1 - \chi(x)))\nabla u(x)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u - v \in H_0^1(\Omega), \quad (1)$$

tendremos evidentemente que $\operatorname{div} F = 0$, de suerte que a cada tal χ le asociamos el par $(\nabla u, F)$ de esta manera. Al revés, si a un par $(\nabla u, F)$ con $\operatorname{div} F = 0$ en Ω , le exigimos

$$(\nabla u(x), F(x)) \in S = \Lambda_1 \cup \Lambda_0,$$

donde

$$\Lambda_i = \{(\lambda, \rho) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N : \rho = \alpha_i\lambda\}, \quad i = 1, 0,$$

entonces podemos garantizar que existe una característica χ de suerte que se verifica (1). El único ingrediente que nos falta es poder asegurar que la integral de tal característica sobre Ω sea un valor dado de antemano. Puesto que este valor nos da la frecuencia relativa con la que los pares $(\nabla u, F)$ están en la primera variedad Λ_1 , debemos añadir este dato a nuestro problema básico.

Problema 3 *Dado $t \in (0, 1)$ y $S = \Lambda_1 \cup \Lambda_0$, determinar la envoltura $Q_t S$ (el menor conjunto con tal propiedad para cada t) de modo que los límites débiles $(\nabla u, F)$ de sucesiones de pares $(\nabla u_j, F_j)$ con*

$$(\nabla u_j, F_j) \in S, |\{x \in \Omega : (\nabla u_j, F_j) \in \Lambda_1\}| \rightarrow t|\Omega|, \quad \operatorname{div} F_j = 0,$$

tomen sus valores en $Q_t S$.

Si somos capaces de especificar $Q_t S$, entonces cualquier descripción de este conjunto en que podamos expresar F en términos de $(t, \nabla u)$ y, posiblemente, nuevos parámetros s

$$F = \psi(t, \nabla u, s),$$

nos conducirá a una ley del tipo

$$\operatorname{div} [\psi(t, \nabla u, s)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u - v \in H_0^1(\Omega).$$

Este es el objetivo que nos proponemos. En realidad, en este momento no cuesta mucho generalizar la situación para considerar un conjunto más general S de la forma

$$S = \Lambda_1 \cup \Lambda_0, \quad \Lambda_i = \{(\lambda, \rho) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N : \lambda = L_i \rho\},$$

donde L_i son dos aplicaciones lineales dadas. La ecuación subyacente es

$$\operatorname{div} [(\chi(x)L_1 + (1 - \chi(x))L_0)\nabla u(x)] = 0 \text{ en } \Omega,$$

junto con las condiciones de frontera que nos interesen. Incluso podríamos vislumbrar la posibilidad de que las matrices L_i no sean definidas positivas, de modo que el problema anterior podría muy bien ser una ecuación de ondas

$$u_{tt} - \operatorname{div} [(\alpha_1\chi(x) + \alpha_0(1 - \chi(x)))\nabla u(x)] = 0 \text{ en } (0, T) \times \Omega$$

junto con condiciones iniciales y de frontera. En este caso

$$L_i = e_1 \otimes e_1 - \alpha_i \text{ identidad} \otimes \text{identidad},$$

donde la identidad tiene tamaño $N \times N$ y e_1 es el primer vector básico en el eje temporal.

3 Estrategia

El tipo de cuestiones que queremos abordar siempre se tratan de la misma manera. El procedimiento consta de tres etapas fundamentales:

1. Concretar una cota significativa externa del conjunto que buscamos $Q_t S$, es decir, encontrar un nuevo conjunto $P_t S$ de modo que $Q_t S \subset P_t S$. Insistimos en lo de significativa pues, por los comentarios indicados más arriba, siempre sabemos que

$$Q_t S \subset CS = \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N.$$

Esta parte está basada en un hecho bien conocido y de gran importancia en la teoría de compacidad compensada: el lema div-curl ([12], [20], [22]).

2. La segunda parte consiste en estudiar una cota interna $R_t S \subset Q_t S$. Esto supone poder manipular explícitamente clases, lo más amplias posibles, de sucesiones de pares admisibles con las propiedades que determinan el conjunto $Q_t S$. Esto se lleva a cabo usualmente con los pares que se denominan genéricamente “laminados”. Tras introducir esta clase de pares, enfatizaremos su estructura recurrente.
3. Una vez que hayamos cubierto ambas etapas, llegaremos a la conclusión, en las situaciones que hemos detallado, de que $R_t S = P_t S$ con lo que tendremos completamente determinado el conjunto $Q_t S$. Nos valdremos para ello de un resultado bastante elemental pero de gran alcance en este tipo de situaciones, que nos permitirá manipular de un modo muy directo y sistemático la cota interna $R_t S$.

Tras un poco de manipulación algebraica llegaremos rápidamente a los resultados anunciados.

4 La cota externa

Supongamos que, en efecto, tenemos una sucesión de pares $(\nabla u_j, F_j)$ con las siguientes propiedades:

1. $(\nabla u_j(x), F_j(x)) \in S$;
2. $\text{div } F_j = 0$ en Ω para todo j ;
3. $(\nabla u_j, F_j) \rightharpoonup (\nabla u, F)$.

Aunque se podrían tratar situaciones un poco más generales (y así lo haremos para el caso de la ecuación de ondas que hemos apuntado antes), vamos a centrarnos en el caso

$$S = \Lambda_1 \cup \Lambda_0, \quad \Lambda_i = \{(\lambda, \rho) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N : \rho = \alpha_i \lambda\}, i = 1, 0,$$

en que los cálculos pueden hacerse completamente explícitos. Es además la situación cubierta en nuestro Teorema 1.

Puesto que la convergencia débil es un fenómeno esencialmente local, centrémonos en un punto genérico x de Ω . La estructura del conjunto S como unión de dos variedades debe jugar un papel central en nuestra discusión. Uno de los modos más directos de tener esta estructura en cuenta consiste en descomponer cualquier conjunto medible E , entorno de x , en la forma

$$E = E_j^{(1)} \cup E_j^{(0)}, \quad E_j^{(i)} = \{y \in E : (\nabla u_j(y), F_j(y)) \in \Lambda_i\}.$$

De este modo

$$\begin{aligned} \frac{1}{|E|} \int_E \nabla u_j(y) \cdot F_j(y) dy &= \frac{|E_j^{(1)}|}{|E|} \frac{1}{|E_j^{(1)}|} \int_{E_j^{(1)}} \nabla u_j(y) \cdot F_j(y) dy \\ &\quad + \frac{|E_j^{(0)}|}{|E|} \frac{1}{|E_j^{(0)}|} \int_{E_j^{(0)}} \nabla u_j(y) \cdot F_j(y) dy. \end{aligned}$$

Pero teniendo en cuenta que $F_j(y) = \alpha_i \nabla u_j(y)$ sobre la variedad Λ_i , tendremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|E|} \int_E \nabla u_j(y) \cdot F_j(y) dy &= \frac{|E_j^{(1)}|}{|E|} \frac{1}{|E_j^{(1)}|} \int_{E_j^{(1)}} \alpha_1 |\nabla u_j(y)|^2 dy \\ &\quad + \frac{|E_j^{(0)}|}{|E|} \frac{1}{|E_j^{(0)}|} \int_{E_j^{(0)}} \alpha_0 |\nabla u_j(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\frac{1}{|E_j^{(i)}|} \chi_{E_j^{(i)}}(y) dy$$

son medidas de probabilidad, de modo que por la desigualdad de Jensen (los factores son positivos)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|E|} \int_E \nabla u_j(y) \cdot F_j(y) dy &\geq \alpha_1 \frac{|E_j^{(1)}|}{|E|} \left| \frac{1}{|E_j^{(1)}|} \int_{E_j^{(1)}} \nabla u_j(y) dy \right|^2 \\ &\quad + \alpha_0 \frac{|E_j^{(0)}|}{|E|} \left| \frac{1}{|E_j^{(0)}|} \int_{E_j^{(0)}} \nabla u_j(y) dy \right|^2. \end{aligned}$$

Esta desigualdad es válida para cualquier j y cualquier entorno E . Si tomamos límites en j y después en $E \searrow \{x\}$ (en este orden), no es difícil convencerse de que los límites

$$\lambda_i(x) = \lim_{E \searrow \{x\}} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|E_j^{(i)}|} \int_{E_j^{(i)}} \nabla u_j(y) dy, \quad t_i(x) = \lim_{E \searrow \{x\}} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|E_j^{(i)}(x)|}{|E|}$$

existen. Esto requiere desde luego más trabajo técnico que vamos a omitir. La manipulación de límites débiles en estos términos se puede realizar de un modo riguroso y elegante a través de las medidas de Young ([10], [16]). En realidad, este tipo de manipulaciones es una de las razones más importantes del interés de estos objetos.

Si realizamos los mismos cálculos anteriores con los integrandos ∇u_j y F_j en vez de $\nabla u_j \cdot F_j$, llegaríamos a que

$$\begin{aligned} \lim_{E \searrow \{x\}} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|E|} \int_E \nabla u_j(y) dy &= t_1(x)\lambda_1(x) + t_0(x)\lambda_0(x), \\ \lim_{E \searrow \{x\}} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|E|} \int_E F_j(y) dy &= \alpha_1 t_1(x)\lambda_1(x) + \alpha_0 t_0(x)\lambda_0(x), \end{aligned}$$

teniendo de nuevo muy presente que sobre la variedad Λ_i , $F_j = \alpha_i \nabla u_j$. Nótese cómo

$$t_i(x) = \lim_{E \searrow \{x\}} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|E_j^{(i)}|}{|E|}, \quad (1 = t_1(x) + t_0(x)),$$

es la fracción de volumen local (en x) de la variedad correspondiente. Por lo tanto, debemos tener

$$\nabla u(x) = t_1(x)\lambda_1(x) + t_0(x)\lambda_0(x), \quad F(x) = \alpha_1 t_1(x)\lambda_1(x) + \alpha_0 t_0(x)\lambda_0(x), \quad (2)$$

for a.e. $x \in \Omega$, puesto que $(\nabla u, F)$ es el límite débil de $(\nabla u_j, F_j)$.

Volvamos a nuestro cálculo anterior con el integrando $\nabla u_j \cdot F_j$. Hemos llegado a la conclusión, tomando límites como se ha indicado, de que

$$\lim_{E \searrow \{x\}} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|E|} \int_E \nabla u_j(y) \cdot F_j(y) dy \geq \alpha_1 t_1(x)|\lambda_1(x)|^2 + \alpha_0 t_0(x)|\lambda_0(x)|^2.$$

Ahora bien, para el límite débil de la izquierda, contamos con el div-curl lemma ([12], [20], [22]).

Lema 3 *Sea $\{F_j\}$ una sucesión acotada de campos en $L^2(\Omega; \mathbf{R}^N)$ convergiendo débil a F , y tal que $\{\operatorname{div} F_j\}$ es acotado en $L^2(\Omega)$, y sea $\{\nabla u_j\}$ una sucesión acotada de gradientes de funciones en $H^1(\Omega)$ convergiendo débil a ∇u . Entonces*

$$F_j \cdot \nabla u_j \rightharpoonup F \cdot \nabla u$$

en sentido distribucional.

En nuestra situación particular, y directamente de este resultado fundamental aplicado a la última desigualdad, concluimos que

$$\nabla u(x) \cdot F(x) \geq \alpha_1 t_1(x) |\lambda_1(x)|^2 + \alpha_0 t_0(x) |\lambda_0(x)|^2$$

para casi todo $x \in \Omega$. Si usamos las expresiones en (2) para escribir $\nabla u(x)$ y $F(x)$ en términos de $\lambda_i(x)$, después de unos cuantos cálculos elementales, llegamos a la conclusión sorprendente de que el límite débil $(\nabla u(x), F(x))$ debe obligatoriamente verificar

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 t_0(x) + \alpha_0 t_1(x)] |F(x)|^2 + \alpha_1 \alpha_0 [\alpha_1 t_1(x) + \alpha_0 t_0(x)] |\nabla u(x)|^2 \\ & - [2\alpha_1 \alpha_0 + t_0(x) t_1(x) (\alpha_1 - \alpha_0)^2] \nabla u(x) \cdot F(x) \leq 0, \end{aligned}$$

para casi todo $x \in \Omega$. Esto significa exactamente que el conjunto $Q_t S$ debe ser un subconjunto de

$$\begin{aligned} P_t S \equiv \{(\lambda, \rho) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N : & [\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t] |\rho|^2 + \alpha_1 \alpha_0 [\alpha_1 t + \alpha_0(1-t)] |\lambda|^2 \\ & - [2\alpha_1 \alpha_0 + (1-t)t(\alpha_1 - \alpha_0)^2] \lambda \cdot \rho \leq 0\}. \end{aligned}$$

Esta es nuestra cota externa.

5 La cota interna

Para estudiar la cota interna $R_t S$, tenemos que construir explícitamente sucesiones de pares $\{(\nabla u_j, F_j)\}$ de los que estamos analizando, respetando todas las restricciones que queremos imponer.

5.1 La construcción básica

Supongamos que tenemos dos pares (λ_1, ρ_1) , (λ_0, ρ_0) tales que

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot (\rho_1 - \rho_0) = 0.$$

Sea n un vector unitario en la dirección determinada por $\lambda_1 - \lambda_0$ (suponiendo que este vector es no nulo). Consideremos la función

$$u(x) = \lambda_0 x + |\lambda_1 - \lambda_0| \int_0^{n \cdot x} \chi_t(s) ds$$

donde $\chi_t(s)$ es la función característica del subintervalo $(0, t)$ en $(0, 1)$, extendida por periodicidad a todo \mathbf{R} . Es inmediato comprobar que

$$\nabla u(x) = \lambda_0 + \chi_t(x \cdot n)(\lambda_1 - \lambda_0),$$

y por lo tanto este gradiente sólo toma los valores λ_1 y λ_0 según si $\chi(x \cdot n)$ es 1 ó 0, es decir, en bandas paralelas con normal n y anchura relativa t .

Pongamos

$$F(x) = \rho_0 + \chi_t(x \cdot n)(\rho_1 - \rho_0).$$

Es inmediato comprobar que $\operatorname{div} F = 0$ en \mathbf{R}^N pues el campo F toma los valores ρ_1 y ρ_0 alternativamente en las mismas bandas que ∇u , y además tenemos que $(\rho_1 - \rho_0) \cdot n = 0$.

Puesto que queremos tratar con sucesiones que convergen débil, podemos introducir en esta construcción la idea básica del Lemma de Riemann-Lebesgue ([16]). De esta manera ponemos

$$u_j(x) = \frac{1}{j}u(jx), \quad \nabla u_j(x) = \nabla u(jx), \quad F_j(x) = F(jx),$$

de suerte que la alternancia entre los valores λ_1 y λ_0 para ∇u_j , y entre ρ_1 y ρ_0 para F_j , tiene ahora lugar en escalas espaciales cada vez menores a medida que j crece, pero guardando siempre la proporción t y $1 - t$. Podemos por tanto concluir que:

1. $(\nabla u_j, F_j) \in \{(\lambda_1, \rho_1), (\lambda_0, \rho_0)\}$ en casi todo punto de \mathbf{R}^N (o de cualquier Ω);
2. $(\nabla u_j(x), F_j(x)) \rightharpoonup t(\lambda_1, \rho_1) + (1 - t)(\lambda_0, \rho_0)$ (Lemma de Riemann-Lebesgue).

Si conseguimos que el par (λ_i, ρ_i) esté en la variedad Λ_i , tendremos además garantizada la propiedad $(\nabla u_j, F_j) \in S = \Lambda_1 \cup \Lambda_0$. Esto equivale, como bien sabemos, a que $\rho_i = \alpha_i \lambda_i$, de modo que deberíamos encontrar $\lambda_i \in \mathbf{R}^N$ para que

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot (\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_0 \lambda_0) = 0. \quad (3)$$

Si expresamos esta desigualdad en términos del par

$$(\lambda, \rho) = t(\lambda_1, \rho_1) + (1 - t)(\lambda_0, \rho_0) \in Q_t S, \quad \rho_i = \alpha_i \lambda_i, i = 1, 0,$$

se descubre rápidamente la relación entre esta construcción básica y la cota externa. Efectivamente en el sistema

$$\lambda = t\lambda_1 + (1 - t)\lambda_0, \quad \rho = t\alpha_1 \lambda_1 + (1 - t)\alpha_0 \lambda_0,$$

es muy sencillo expresar λ_1 y λ_0 en función de λ y ρ (y de t). Si así lo hacemos, (3) se convierte de manera un tanto inesperada en la expresión

$$[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t] |\rho|^2 + \alpha_1 \alpha_0 [\alpha_1 t + \alpha_0(1-t)] |\lambda|^2 - [2\alpha_1 \alpha_0 + (1-t)t(\alpha_1 - \alpha_0)^2] \lambda \cdot \rho = 0, \quad (4)$$

la misma que define la cota externa pero con signo de igualdad en vez de desigualdad. Ahora podemos reformular nuestras conclusiones del siguiente modo.

Proposición 4 *Si para $t \in [0, 1]$ dado, el par $(\lambda, \rho) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ verifica (4), entonces $(\lambda, \rho) \in Q_t S$. Además se pueden encontrar $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{R}^N$ para los que la construcción básica anterior se puede llevar a cabo.*

Cuando para una terna (t, λ, ρ) se puede llevar a cabo la construcción básica descrita en este subsección, nos referiremos a ella como un laminado de primer orden con fracción de volumen t en Λ_1 , baricentro (λ, ρ) y soporte en $\{(\lambda_1, \alpha_1 \lambda_1), (\lambda_0, \alpha_0 \lambda_0)\}$. La razón geométrica de esta terminología creemos que está clara.

5.2 Iteración

Otro aspecto importante de la construcción anterior es que se puede iterar tantas veces como lo permitan las restricciones que deben respetarse. En realidad, esta propiedad de iteración tiene que ver con la siguiente propiedad de la envoltura $Q_t S$.

Proposición 5 *Sea $S \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ como antes. Para cualquier $t \in [0, 1]$, se tiene $Q(Q_t S) \subset Q_t S$.*

Recordamos que para cualquier conjunto $\bar{S} (= Q_t S)$, la envoltura $Q\bar{S}$ se concretó en el Problema 2.

La idea de la prueba de esta proposición es también muy clara, aunque, como de costumbre, requiere algún trabajo técnico adicional que vamos a omitir de nuevo en esta presentación. Supongamos, por tanto, que tenemos una sucesión de pares $(\nabla u_j, F_j)$ respetando que $\operatorname{div} F_j = 0$ en Ω para todo j , y $(\nabla u_j(x), F_j(x)) \in Q_t S$ para casi todo $x \in \Omega$. Supongamos que $(\nabla u_j, F_j) \rightharpoonup (\nabla u, F)$. Nos gustaría concluir que se debe tener obligatoriamente $(\nabla u(x), F(x)) \in Q_t S$ para casi todo $x \in \Omega$. En efecto, si $(\nabla u_j(x), F_j(x)) \in Q_t S$ es porque se pueden encontrar sucesiones

$$(\nabla u_k^{(j)}(x), F_k^{(j)}(x)) \in S, \quad (\nabla u_k^{(j)}, F_k^{(j)}) \rightharpoonup (\nabla u_j, F_j),$$

con fracción de volumen t en la primera variedad para toda sucesión (independiente de j) e independiente de $x \in \Omega$. Todo consiste en considerar una sucesión diagonal apropiada tomando $k = k(j)$ suficientemente avanzada para que

$$(\nabla u_{k(j)}^{(j)}, F_{k(j)}^{(j)}) \rightharpoonup (\nabla u, F).$$

Este hecho garantiza, por definición, que $(\nabla u(x), F(x)) \in Q_t S$ para casi todo $x \in \Omega$ como se pretendía.

Si usamos esta proposición junto con nuestra construcción básica de la subsección anterior, nos encontramos con el siguiente proceso iterativo. Consiste en partir de dos pares

$$(\lambda_1, \rho_1), (\lambda_0, \rho_0) \in Q_t S,$$

que podrían haberse obtenido del proceso anterior. Se pretende construir con ellos, un nuevo par en $Q_t S$. Si resulta que

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot (\rho_1 - \rho_0) = 0,$$

evidentemente podemos repetir con ellos la construcción básica de la subsección anterior con cualquier proporción $s \in (0, 1)$, de modo que concluiríamos, por la Proposición 5, que

$$[(\lambda_1, \rho_1), (\lambda_0, \rho_0)] \subset Q(Q_t S) \subset Q_t S.$$

De esta manera podríamos empezar con dos parejas de pares

$$(\lambda_i^{(k)}, \rho_i^{(k)}), \quad i = 1, 0, k = 1, 2,$$

verificando las condiciones de la proposición en la subsección anterior, de suerte que

$$t(\lambda_1^{(k)}, \rho_1^{(k)}) + (1-t)(\lambda_0^{(k)}, \rho_0^{(k)}) = (t\lambda_1^{(k)} + (1-t)\lambda_0^{(k)}, t\rho_1^{(k)} + (1-t)\rho_0^{(k)}) \in Q_t S,$$

para cada $k = 1, 2$. Si se tiene que

$$((t\lambda_1^{(1)} + (1-t)\lambda_0^{(1)}) - (t\lambda_1^{(2)} + (1-t)\lambda_0^{(2)})) \cdot ((t\rho_1^{(1)} + (1-t)\rho_0^{(1)}) - (t\rho_1^{(2)} + (1-t)\rho_0^{(2)})) = 0,$$

entonces todo el segmento

$$[(t\lambda_1^{(1)} + (1-t)\lambda_0^{(1)}, t\rho_1^{(1)} + (1-t)\rho_0^{(1)}), (t\lambda_1^{(2)} + (1-t)\lambda_0^{(2)}, t\rho_1^{(2)} + (1-t)\rho_0^{(2)})]$$

está contenido en $Q_t S$. Vale la pena resaltar esta conclusión en un enunciado independiente.

Proposición 6 *Si tenemos que*

$$(\lambda_1, \rho_1), (\lambda_0, \rho_0) \in Q_t S, \quad (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot (\rho_1 - \rho_0) = 0,$$

entonces

$$[(\lambda_1, \rho_1), (\lambda_0, \rho_0)] \subset Q_t S.$$

Podríamos seguir iterando de esta manera indefinidamente, pero no parece sencillo llevar un inventario de lo que puede ir saliendo en cada iteración. De lo que sí podemos estar seguros es de que los pares (λ, ρ) de estos segmentos sucesivos deben obligatoriamente verificar la condición de pertenencia a $P_t S$, puesto que $Q_t S \subset P_t S$. La pregunta fundamental es si podemos llegar a todos los pares de $P_t S$ mediante el proceso iterativo-constructivo que hemos descrito. Afortunadamente, hay un modo mucho más elegante de tratar este proceso iterativo, al menos en el contexto de este trabajo.

6 Un lema elemental y su aplicación a la igualdad de las cotas

Aunque existen versiones más generales del resultado que sigue ([3]), hemos transcrito aquí la versión que usaremos directamente. La prueba de las versiones más generales es exactamente la misma. Esta generalidad consiste en comprobar hasta dónde se puede “estirar” la misma demostración.

Lema 7 *Sea \wedge un cono dado de direcciones en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, y $p(X)$ un polinomio homogéneo de grado 2 en $X \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. Supongamos que podemos encontrar una dirección $E \in \wedge$ de manera que $p(E) > 0$ y $p(-E) > 0$. Si $F \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ es tal que $p(F) \leq 0$, entonces siempre se pueden encontrar B y C en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, y $s \in [0, 1]$ tales que*

1. $B - C \in \wedge$;
2. $F = sB + (1-s)C$;

$$3. p(B) = p(C) = 0.$$

La prueba es realmente simple, hasta el punto de que resulta sorprendente que una idea tan sencilla pueda resolver la aparente dificultad que teníamos planteada en el proceso recursivo de la subsección anterior.

En efecto, si $p(F) = 0$ y $p(E) > 0$, $p(-E) > 0$, ponemos

$$B(t) = F + tE \text{ para } t \geq 0, \quad C(t, s) = F - \frac{s}{1-s}tE \text{ para } t \geq 0, 0 \leq s < 1.$$

Tenemos que

$$F = sB(t) + (1-s)C(t, s), \quad B(t) - C(t, s) \in \wedge$$

para todo t y s bajo las restricciones indicadas. Se trata de elegir primero t y después s (en función de t), de modo que garanticemos que

$$p(B(t)) = p(C(t, s)) = 0$$

para esos valores de t y s . Para ello basta considerar la función de t , $p(B(t))$, y comprobar que es una parábola convexa, no degenerada, con valor en el origen no positivo. Por tanto existe un valor $t \geq 0$ donde se anula. Una vez seleccionado este valor de t , se repite el proceso con la función de s (para ése valor de t fijo), $p(C(t, s))$, para encontrar un cierto valor de s en donde esta función se anula de nuevo.

Veamos ahora cómo se aplica este lema. Consideremos el polinomio

$$p_t(\lambda, \rho) = [\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t]|\rho|^2 + \alpha_1 \alpha_0 [\alpha_1 t + \alpha_0(1-t)]|\lambda|^2 \\ - [2\alpha_1 \alpha_0 + (1-t)t(\alpha_1 - \alpha_0)^2]\lambda \cdot \rho,$$

para $t \in [0, 1]$ fijo. Es precisamente el polinomio que nos determinaba la cota externa

$$P_t S = \{p_t \leq 0\}.$$

El cono al que le vamos a aplicar el lema es el que podríamos llamar cono div-rot por razones obvias

$$\wedge = \{(\lambda, \rho) : \lambda \cdot \rho = 0\}.$$

Nótese cómo nuestra construcción básica en la subsección anterior se apoyaba de manera esencial en pares de vectores cuyas diferencias pertenecen a este cono. Es evidente que el polinomio $p_t(\lambda, \rho)$ es estrictamente positivo sobre este cono, de manera que podemos aplicar nuestro lema sin más preámbulos, para concluir que si un cierto par (λ, ρ) es tal que $p_t(\lambda, \rho) \leq 0$ (es decir está en la cota externa $P_t S$), entonces siempre podremos encontrar dos pares de vectores $(\lambda^{(k)}, \rho^{(k)})$, $k = 1, 2$ y un cierto valor $s \in [0, 1]$ de suerte que

1. $p_t(\lambda^{(k)}, \rho^{(k)}) = 0$ para $k = 1, 2$;
2. $(\lambda, \rho) = s(\lambda^{(1)}, \rho^{(1)}) + (1-s)(\lambda^{(2)}, \rho^{(2)})$;

$$3. (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \cdot (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) = 0.$$

Pero si esto es así resulta que:

1. Podemos construir un laminado con fracción de volumen s , baricentro (λ, ρ) y soporte $(\lambda^{(k)}, \rho^{(k)})$, $k = 1, 2$, según la terminología introducida al final de la Subsección 5.1.
2. A su vez, por la Proposición 4, cada $(\lambda^{(k)}, \rho^{(k)})$ es el baricentro de un laminado de primer orden con fracción de volumen t y soporte en la unión de las variedades.

Concluimos entonces por la Proposición 6 que el par (λ, ρ) pertenece a $Q_t S$. Al ser arbitrario en $P_t S$, nuestro análisis de estas tres secciones culmina en el siguiente enunciado.

Teorema 8 *Un par (λ, ρ) pertenece a $Q_t S$ si y solo si*

$$[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t] |\rho|^2 + \alpha_1 \alpha_0 [\alpha_1 t + \alpha_0(1-t)] |\lambda|^2 - [2\alpha_1 \alpha_0 + (1-t)t(\alpha_1 - \alpha_0)^2] \lambda \cdot \rho \leq 0.$$

Además, un tal par siempre es el baricentro de un laminado de segundo orden con soporte en $S = \Lambda_1 \cup \Lambda_0$ y fracción de volumen t en Λ_1 .

7 Una transformación final

Por último y para realizar la conexión con nuestro resultado central en la Introducción (Teorema 1), observamos que la desigualdad del enunciado anterior

$$[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t] |\rho|^2 + \alpha_1 \alpha_0 [\alpha_1 t + \alpha_0(1-t)] |\lambda|^2 - [2\alpha_1 \alpha_0 + (1-t)t(\alpha_1 - \alpha_0)^2] \lambda \cdot \rho \leq 0$$

se puede reescribir de la siguiente manera equivalente

$$\left| \rho - \frac{2\alpha_1 \alpha_0 + t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{2[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t]} \lambda \right|^2 \leq \frac{[t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2]^2}{[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t]^2} |\lambda|^2.$$

De este modo tenemos que para t y λ dados, el vector ρ debe pertenecer al círculo con centro y radio dados en la expresión anterior. Tras un proceso elemental de normalización, si llamamos

$$s = \frac{2[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t]}{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2 |\lambda|} \rho - \frac{2\alpha_1 \alpha_0 + t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2} \frac{\lambda}{|\lambda|},$$

entonces

$$\rho = \frac{2\alpha_1 \alpha_0 + t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2} \lambda + \frac{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{2[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t]} |\lambda| s$$

siendo $|s| \leq 1$, pero de otro modo libre. En consecuencia, podemos reformular el Teorema 8 de la siguiente manera.

Teorema 9 *Un par (λ, ρ) pertenece a $Q_t S$ ($t \in (0, 1)$) si y sólo si existe un vector s , con $|s| \leq 1$, de modo que*

$$\rho = \frac{2\alpha_1\alpha_0 + t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2} \lambda + \frac{t(1-t)(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{2[\alpha_1(1-t) + \alpha_0 t]} |\lambda| s.$$

La prueba del Teorema 1 consiste ahora simplemente en reinterpretar lo que significa la envoltura $Q_t S$ junto con la condición de pertenencia a dicho conjunto en términos del campo s , según el enunciado de este último resultado. En particular, el vector ρ corresponde al límite débil de una sucesión de campos con divergencia nula, y por lo tanto, tendrá divergencia nula. Este hecho proporciona la ecuación límite.

8 Cuando la cota interna lo llena todo

Existe una segunda parte de nuestro Lemma 7 que es igualmente sorprendente ([3]).

Lema 10 *Sea \wedge un cono dado de direcciones en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, y $p(X)$ un polinomio homogéneo de grado 2 en $X \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. Supongamos que podemos encontrar dos direcciones $E_i \in \wedge$ de manera que $(-1)^i p(E_i) > 0$ y $(-1)^i p(-E_i) > 0$ para $i = 0, 1$. Entonces, para cualquier $F \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ (sin ninguna restricción adicional) siempre se pueden encontrar B y C en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ y $s \in [0, 1]$ tales que*

1. $B - C \in \wedge$;
2. $F = sB + (1 - s)C$;
3. $p(B) = p(C) = 0$.

La prueba consiste simplemente en aplicar el Lemma 7 a los polinomios p y $-p$ con las direcciones E_0 y E_1 , respectivamente. Se concluye inmediatamente.

Siguiendo la lógica de nuestras ideas anteriores, lo que afirma este resultado es que si el polinomio p cambia de signo en el cono \wedge , y $\{p = 0\} \subset Q_t S$, entonces la envoltura $Q_t S$ llena todo el espacio

$$Q_t S = \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N.$$

Esto es precisamente lo que sucede en la homogeneización de un problema hiperbólico como el descrito en la Introducción en el Teorema 2.

Para verlo con claridad, introducimos las matrices

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_i \end{pmatrix}.$$

Es inmediato convencerse de que la sucesión de problemas en el Teorema 2 se puede reescribir como

$$\operatorname{div}[(\chi_j(x)A_1 + (1 - \chi_j(x))A_0)\nabla u] = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, 1),$$

junto con las condiciones de frontera e iniciales adecuadas. Nótese que ahora

$$\operatorname{div} = (\partial_t, \partial_x), \quad \nabla u = (u_t, u_x).$$

Podemos proceder sin ninguna diferencia como en la construcción básica de la Sección 5.1, hasta que llegamos a la condición (3) en la que intervienen de modo esencial la forma de las variedades Λ_i , o de la ecuación subyacente. Esa condición se convierte ahora en

$$(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot (A_1 \lambda_1 - A_0 \lambda_0) = 0.$$

De nuevo si expresamos esta condición en términos del par

$$(\lambda, \rho) = t(\lambda_1, A_1 \lambda_1) + (1 - t)(\lambda_0, A_0 \lambda_0),$$

llegamos a que el conjunto de nivel cero de un cierto polinomio p de grado 2 en (λ, ρ) debe estar contenido en $Q_t S$. Pero ahora, dicho polinomio, como consecuencia de que los autovalores de las matrices A_i son de distinto signo, cambia de signo sobre el cono div-rot. La aplicación directa del Lema 10 garantiza, según se ha indicado, que $Q_t S = \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ para todo $t \in (0, 1)$. Este hecho, a su vez, proporciona la prueba del Teorema 2. No describimos los detalles pues no hay nada esencialmente nuevo, y creemos que las ideas se entienden bien después del estudio anterior.

Sólo vale la pena indicar que en la situación hiperbólica surge una cuestión técnica relacionada con el fenómeno de concentración de energía en frecuencias altas. El modo más simple y directo de evitar esta dificultad consiste en suponer mayor regularidad en los datos iniciales. Ver [11].

9 Conclusión y nuevos retos

El mayor alcance del planteamiento desarrollado en estas páginas, más allá de lo descrito aquí, consiste en la capacidad de poder tratar desde este punto de vista problemas de diseño óptimo con funcionales coste que no poseen, en general, la propiedad de continuidad débil. Esto sucede típicamente cuando tal coste depende del gradiente del estado de un modo no lineal. Una tal situación que ha sido desarrollada con éxito en los últimos años ([4], [7], [17], [21]) se centra en el siguiente problema de optimización

$$\text{Minimizar en } \chi : \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 dx$$

sujeto a

$$\chi(x) \in \{0, 1\}, \quad \int_{\Omega} \chi(x) dx = r|\Omega|,$$

$$\operatorname{div} [(\chi(x)\alpha_1 + (1 - \chi(x))\alpha_0)\nabla u(x)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = u_0 \text{ en } \partial\Omega.$$

El análisis desarrollado en estas páginas no es sino un primer paso en el estudio de este problema. Ver [18] y [19]. En realidad, fue el poder tratar este tipo

de problemas de diseño óptimo lo que motivó la perspectiva desarrollada aquí. Por esta razón, cualquier problema de diseño óptimo que pretenda tratarse, supone, de un modo u otro, entender en profundidad como paso previo el tipo de cuestiones tratadas aquí. En este sentido, nos gustaría finalizar mencionando tres campos importantes donde el adaptar el análisis desarrollado aquí está lejos de ser una mera generalización. Nuevas ideas son necesarias. Las herramientas y conceptos descritos en este trabajo pueden generalizarse a situaciones lineales de diversos tipos, pero existen al menos estos tres frentes importantes cuyo tratamiento no puede ser simplemente una generalización de lo estudiado aquí, y de ninguno de ellos se tiene una comprensión tan completa como la analizada en estas páginas.

1. Problemas de diseño óptimo con más de dos materiales. Supongamos que tenemos constantes $\alpha_i > 0$ y fracciones de volumen $r_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ con $\sum_i r_i = 1$. Para un vector de funciones características

$$\chi = (\chi_1(x), \dots, \chi_n(x)), \quad \chi_i \in \{0, 1\}, \quad \int_{\Omega} \chi_i(x) dx = r_i |\Omega|, \quad \sum_i \chi_i(x) = 1,$$

consideramos la ecuación de la conductividad

$$\operatorname{div} \left[\sum_i \chi_i(x) \alpha_i \nabla u(x) \right] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = u_0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Si ponemos

$$F(x) = \sum_i \chi_i(x) \alpha_i \nabla u(x), \quad \operatorname{div} F = 0 \text{ en } \Omega,$$

y consideramos sucesiones de vectores χ_j , ¿qué se puede decir de los correspondientes límites débiles? ¿Hasta qué punto se puede dar una caracterización tan completa como la presentada aquí en el caso $n = 2$?

2. Conductividad no lineal. En esta situación, consideramos leyes de conductividad no lineales del tipo

$$\operatorname{div} [\chi(x) A_1(\nabla u) + (1 - \chi(x)) A_0(\nabla u)] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = u_0 \text{ en } \partial\Omega,$$

donde los operadores $A_i : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ son no-lineales y elípticos en un sentido apropiado. Las variedades consideradas en este trabajo Λ_i son ahora no lineales, en realidad, los grafos de las aplicaciones A_i . No obstante, el análisis desarrollado aquí no puede ser extendido, al menos no de un modo explícito. Salvo situaciones muy específicas, ligadas muy directamente con el caso lineal, no se conoce mucho más ([3], [9]).

3. Elasticidad lineal. Este es un campo de interés práctico tremendo en el que no se ha avanzado mucho en los últimos treinta años. Como paso previo para tratar problemas en el contexto de la elasticidad lineal, se

pueden analizar situaciones de problemas con multi-cargas. En el caso de dos cargas, la situación se concretaría del siguiente modo

$$\operatorname{div}[(\chi(x)\alpha_1 + (1 - \chi(x))\alpha_0)\nabla u^{(k)}] = 0 \text{ en } \Omega, \quad u^{(k)} = u_0^{(k)} \text{ en } \partial\Omega,$$

para $k = 1, 2$. Aunque aparentemente parece que esta situación podría ser una generalización directa del caso presentado aquí, en realidad es mucho más complicado. La generalización directa consistiría en desacoplar las dos ecuaciones considerando dos funciones características $\chi^{(k)}$ independientes. El hecho de que ambas ecuaciones están acopladas por la misma función característica hace el problema mucho más difícil, hasta el punto de que un análisis mucho más profundo y fino es obligatorio.

Reconocimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de los proyectos MTM2007-62945 del Ministerio de Educación y Ciencia, y PCI08-0084-0424 de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha. También se reconoce la financiación de la ayuda PR2008-0148 del MICINN para un año sabático en el Mathematics Department de Princeton University.

Referencias

- [1] Allaire, G. 2002 *Shape optimization by the homogenization method*, Springer.
- [2] Bendsoe, M. P., 1995 *Optimization of structural topology, shape and material*, Springer.
- [3] Boussaid, O., Pedregal, P. Quasiconvexity of sets in optimal design, *Calc. Var. PDE*, **34** (2009) n 2, 139-152.
- [4] Casado-Díaz, Juan, Couce-Calvo, J., Martín-Gómez, J. D. Relaxation of a control problem in the coefficients with a functional of quadratic growth in the gradient, *SIAM J. Control Optim.* 47 (2008), no. 3, 1428-1459.
- [5] Cherkhaev, A., 2000 *Variational Methods for Structural Optimization*, Springer-Verlag, New York.
- [6] Cioranescu, D., Donato, P., *An Introduction to Homogenization*, Oxford Univ. Press., 1999.
- [7] Grabovsky, Y., 2001 Optimal design problems for two-phase conducting composites with weakly discontinuous objective functionals, *Advan. Appl. Math.*, 27, 683-704.
- [8] Milton, Graeme W. *The theory of composites*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 6. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [9] Milton, Graeme W., Serkov, Sergey K. Bounding the current in nonlinear conducting composites. The J. R. Willis 60th anniversary volume. *J. Mech. Phys. Solids* **48** (2000), no. 6-7, 1295-1324.
- [10] Müller, S. 1999 Variational models for microstructure and phase transitions, Springer Lecture Notes in Math., 1713, 85-210.
- [11] Münch, A., Pedregal, P., Periago, F. Relaxation of an optimal design problem for the heat equation, *J. Math. Pure Appl.*, Vol. 89, No. 3 (2008), 225-247.
- [12] Murat, F. 1987 A survey on compensated compactness, in *Contributions to the modern calculus of variations*, L. Cesari, ed., Pitman, 145-183.
- [13] Murat, F. and Tartar, L. 1997 On the control of coefficients in partial differential equations, in *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Cherkaev, A., Kohn, R. V., eds., Birkhäuser, Boston, 1-8.
- [14] Murat, F. and Tartar, L. 1985 Calcul des variations et homogénéisation, in *Les méthodes de l'homogénéisation: théorie et applications en physique*. Dir. des études et recherches de l'EDF, Eyrolles, Paris, 319-370.
- [15] Murat, F. and Tartar, L. 1985 Optimality conditions and homogenization, *Proceedings of Nonlinear Variational Problems, Isola d'Elba 1983*, Res. Notes in Math., 127, Pitman, London, 1-8.
- [16] Pedregal, P. 1997 *Parametrized Measures and Variational Principles*, Birkhäuser, Basel.
- [17] Pedregal, P. Constrained quasiconvexification of the square of the gradient of the state in optimal design, *Quart. Appl. Math.* 62 (2004), No 3, 459-470.
- [18] Pedregal, P. Vector variational problems and applications to optimal design, *ESAIM-COCV*, **11** no. 3 (2005), 357-381.
- [19] Pedregal, P. Div-Curl Young measures and optimal design in any dimension, *Rev. Univ. Complutense*, **20** (2007) n°1, 239-255.
- [20] Tartar, L. 1979 Compensated compactness and applications to partial differential equations, *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium*, vol. IV, Knops, R. (ed.), Pitman Res. Notes Math., 39, 136-212.
- [21] Tartar, L. 1994 Remarks on optimal design problems, in *Calculus of Variations, Homogenization and Continuum Mechanics*, G. Buttazzo, G. Bouchitte and P. Suquet, eds., World Scientific, Singapore, 279-296.
- [22] Tartar, L. 2000 An introduction to the homogenization method in optimal design, Springer Lecture Notes in Math., 1740, 47-156.

REPARTOS Y FUNCIONES CONVEXAS ADITIVAMENTE SEPARABLES

FRANCISCO R. FERNÁNDEZ

Dpto. Estadística Matemática e Investigación Operativa, Universidad de Sevilla
Apto. 1160, 41080 Sevilla

fernande@us.es

Resumen

Se presentan herramientas matemáticas que permiten describir y resolver problemas de reparto. De manera natural, aparecen funciones estrictamente convexas y aditivamente separables. Su estructura permite poner en práctica algoritmos de reparto rápidos y eficientes.

Palabras clave: *Decisiones sociales, bancarrota, sistemas electorales, funciones convexas*

Clasificación por materias AMS: *9006 91A80*

1 Repartos de tipo general

El reparto de bienes de cualquier naturaleza entre personas ha sido, es y será de gran interés para todos los sistemas sociales.

Algunos ejemplos significativos de reparto son los siguientes:

- **Bancarrota:** Esta situación aparece cuando una entidad no puede continuar su actividad al no poder satisfacer los pagos que tiene pendientes, ni siquiera usando el patrimonio disponible. En este caso el problema es repartir el capital total disponible de la entidad entre los deudores.

- **Recaudación de impuestos:** Esta situación surge cuando se desea cubrir una cierta cantidad económica en una comunidad por parte de los beneficiarios, o contribuyentes, por el uso de los servicios de la misma. El reparto de estos impuestos para conseguir el monto final deberá tener presente la capacidad económica de cada uno de ellos.

- **Reparto de beneficios:** Es una situación en cierto modo contraria a la anterior. Un grupo de accionistas de una empresa desea repartir los beneficios obtenidos en función de lo que cada uno ha aportado para su constitución, esto es, de su número de acciones.

Fecha de recepción: 17/12/2008. Aceptado (en forma revisada): 16/01/2009 .

- **Asignación de escaños:** Puede verse como un caso particular del anterior, en el que lo que se va a repartir son los escaños de un parlamento entre los partidos políticos, en función de los votos que han obtenido en las elecciones celebradas para dicho fin. Ahora, debemos proceder a un reparto de bienes indivisibles, los escaños, lo que añade una nueva dificultad al problema.

- **Herencias:** Esta situación está relacionada con los repartos que los testamentos establecen entre los herederos, especialmente cuando las cantidades asignadas a los beneficiarios superan el total heredado y, no obstante, se desea mantener la intencionalidad del testamento.

En todos estos problemas la Matemática a lo largo de la historia ha desarrollado herramientas para realizar el deseo de justicia que cada sociedad asume, aunque a veces no quede clara la idea de equidad subyacente.

Alejándonos en el tiempo, el *Talmud* babilónico nos ofrece repartos que parecen en principio difíciles de entender, como el siguiente:

Dos hombres disputan la propiedad de una túnica. El primer hombre reclama la mitad de la prenda, mientras que el segundo reclama la totalidad de la misma. La ley otorga al primero la cuarta parte de la túnica y al segundo el resto.

En general, todas estas situaciones son descritas matemáticamente con una formulación muy sencilla, que llamaremos *modelo de reparto*:

Tenemos una cantidad T que deseamos repartir entre n individuos en base a unos derechos que cada uno posee (d_1, \dots, d_n); al individuo i -ésimo otorgaremos una cantidad x_i , de modo que esta cantidad esté en relación con los derechos que posee y que se respete el llamado *principio de eficiencia*, esto es, que el total a repartir sea igual a la suma de todas las cantidades asignadas:

$$T = \sum_i x_i.$$

Si deseamos aplicar el principio aristotélico

Igual tratamiento de iguales y desigual a los desiguales, en proporción a sus principales semejanzas y diferencias,

cuando todos los individuos tienen los mismos derechos, la solución del problema es muy simple: basta dividir por n , con lo que todos tendrían la misma cantidad asignada $x_i = T/n$.

Pero en general esta operación no refleja nuestros deseos sobre el reparto, dado que los derechos no suelen ser iguales. Como el reparto a desiguales no está definido explícitamente en el principio aristotélico, está justificado exista una literatura científica en continua ebullición sobre el tema.

Lógicamente, en un reparto entre individuos, cada uno de ellos quiere lo más posible de la cantidad a repartir, por lo que se ven enfrentados los diferentes

criterios de los individuos en el reparto. Cuando hay conflicto entre los criterios que presentan los diferentes individuos, generalmente se intenta buscar un juez que pueda satisfacer las metas que tienen o, al menos, conducir un proceso de negociación para que, renunciando a parte de lo deseado, se obtenga un reparto aceptable para todos.

No obstante, lo más frecuente en el mundo actual es introducir las reglas de reparto de forma rigurosa en las leyes que deben aplicarse:

- Las constituciones, como leyes fundamentales, nos indican el modo de reparto de los escaños por región y/o provincia. Y también nos dicen en qué modo los votos emitidos por los ciudadanos se deben traducir en escaños.
- Las leyes civiles dilucidan muchos otros aspectos ciudadanos, como los siguientes:
 1. Leyes sobre abonos de tributos a las arcas del Estado,
 2. Leyes sobre reparto de cargas en una comunidad de vecinos, etc.,

De modo que, en aquellos casos en los que no existen estas regulaciones, suelen darse conflictos entre los individuos para realizar un reparto. Cualquiera puede recordar episodios de división de bienes en los divorcios, o del reparto de bienes de una empresa entre sus acreedores cuando se ha dado una bancarrota.

2 Matemática y repartos

Las reglas de reparto se suelen definir rigurosamente de forma muy sencilla partiendo del modelo anteriormente establecido:

Una regla de reparto R no es más que una función que asocia a cada situación definida por una cantidad a repartir y unos derechos, $(T; d_1, \dots, d_n)$, un reparto a cada individuo, (x_1, \dots, x_n) ; lo que suele escribirse en la forma $R(T; d_1, \dots, d_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

Por ejemplo, las reglas de asignación de tasas se definen utilizando funciones de utilidad crecientes y continuas, del tipo:

- $x_i = \max(0, d_i - d_i^{1-\alpha})$ (Edgeworth),
- $x_i = \frac{d_i^2}{d_i + \frac{1}{\alpha}}$ (Cassell), etc.

donde $0 \leq \alpha \leq +\infty$, estando determinada por T

Consideremos algunas de las reglas más usuales:

- La *Regla Proporcional*, RP , establece que la cantidad a repartir a un individuo debe ser proporcional a la cantidad que reclama. En el caso del reparto de la túnica, con esta regla le corresponde al primer hombre un tercio de la misma y al segundo el resto. Es decir, $RP(1; 1/2, 1) = (1/3, 2/3)$.

Esta regla es la más usada en las leyes civiles, pues los legisladores suelen escoger como norma de reparto la proporcionalidad a un cierto concepto. Así, la ley de propiedad horizontal establece que los gastos de una comunidad deben ser repartidos proporcionalmente entre los vecinos de la misma, de acuerdo con unos coeficientes de participación que se encuentran en las escrituras de propiedad de las viviendas del inmueble; a su vez, estos coeficientes están determinados proporcionalmente a la superficie que cada vivienda tiene en relación al total del inmueble.

Para esta regla y para todas las que siguen, es deseable que se verifique el *principio de simetría*, en virtud del cual el tratamiento debe ser el mismo para todos los individuos. Como consecuencia y aceptando de nuevo el principio aristotélico, dos individuos con igual demanda obtendrán el mismo reparto. No obstante, podríamos renunciar a este principio y hacer que las reglas, o los criterios que las originan, sean diferentes para cada individuo (en la Regla Proporcional bastaría suponer que la constante de proporcionalidad fuera diferente para cada individuo, con lo que tendríamos reglas de reparto multicriterio).¹

La Regla Proporcional da más al que más tiene y por ello puede generar ciertos inconvenientes en los casos en que se repartan cantidades vitales mínimas para los individuos (medicamentos, primeros auxilios, etc.), en los que las excesivas demandas de unos pocos individuos pueden llevar al desastre a la mayoría. Por lo que debemos analizar algunas reglas alternativas.

- La *Regla de Igual Recompensa*, *RIR*, establece que cada individuo recibe la misma cantidad en el reparto, siempre que ésta no exceda a su demanda, en cuyo caso a dicho individuo se la asocia su demanda, y el resto se sigue repartiendo por igual a los restantes individuos. Con esta regla, la túnica se reparte a partes iguales: $RIR(1; 1/2, 1) = (1/2, 1/2)$.

- La *Regla de Igual Pérdida*, *RIP*, establece que a cada individuo se le descuenta de su demanda la misma cantidad, sin que su reparto sea nunca negativo, en cuyo caso no le damos nada al individuo y seguimos descontando el resto a los restantes. En el caso que estamos considerando, le corresponde al primer hombre un cuarto de la túnica y el resto al segundo, es decir, a cada uno le hemos descontado la misma cantidad: $RIP(1; 1/2, 1) = (1/4, 3/4)$.

Por el resultado obtenido, podríamos pensar que esta regla corresponde a la ley talmúdica del reparto. Pero la ley talmúdica es más compleja, pues

¹Éste podría ser el caso a tener presente en la anterior ley de división horizontal. En efecto, el coeficiente de participación está calculado exclusivamente en base a la superficie de las viviendas y, por tanto, el principio de simetría sería cierto si los gastos que se reparten sólo repercutieran sobre la vivienda. Pero, frecuentemente, este coeficiente se tiene que emplear para otro tipo de repartos como por ejemplo los gastos de agua, recogida de basuras, portería, etc., lo que ya no es simétrico en relación a la superficie de la vivienda. Esto parece indicar que se deberían introducir más criterios, como por ejemplo el número de habitantes fijos por vivienda, para buscar una mayor equidad en el reparto.

está condicionada a dos criterios. La filosofía de la misma es garantizar a todos los demandantes por lo menos la mitad de su demanda. Si el total a repartir es mayor que la mitad de la demanda total se aplica una Regla de Igual Pérdida mientras que, en el caso contrario, se aplica una Regla de Igual Recompensa, considerando como derechos sólo las mitades de lo demandado. Por ello, en el caso que consideramos la túnica se reparte como con la Regla de Igual Pérdida.

Hay otras reglas con especial importancia por sus consecuencias prácticas:

- La *Regla Voraz*, RV , ordena a los individuos en una cierta secuencia y permite que, usando este orden, cada uno satisfaga sus demandas mientras ello sea posible. Así, en el caso de la túnica, si el orden es (primero, segundo) el reparto sería el igualitario, mientras si el orden es el contrario, el reparto daría la túnica al segundo individuo: $RV(1; 1/2, 1) = (1/2, 1/2)$, $RV(1; 1, 1/2) = (1, 0)$.

Esta regla no verifica el principio de simetría, pues el reparto depende del orden en que se coloquen los individuos.

- La *Regla Voraz Media*, RVM , es de gran interés práctico y asocia a los individuos el valor medio de lo concedido en todos los repartos voraces que pueden originarse. En el caso de la túnica, con esta regla le corresponde la cuarta parte de la túnica al primer individuo: $RVM(1; 1/2, 1) = (1/4, 3/4)$.²

Consideremos a continuación una aplicación real significativa.

Un aeropuerto recibe aviones que poseen características diferentes, siendo una de las más importantes la longitud de pista que necesitan para su aterrizaje. Dado que el aeropuerto tiene una pista de longitud fija y que cada avión necesita una cierta proporción de la misma en sus operaciones de vuelo, se desea saber cómo deben asignarse los costes a los tipos de avión (coste de pista más coste de mantenimiento de la misma) en función de la cantidad de pista usada.

En 1971, Thompson propuso una regla para la asignación de estos costes:

1. Dividir la pista en tramos o partes en función del uso que los aviones hacen de ella.
2. Asociar a cada tramo un coste total, dividiéndolo entre todos los aviones que usan éste; esta operación permite asignar a cada tipo de avión el coste de cada tramo.

El coste asociado a cada avión será la suma de los costes de los tramos de las pistas usadas por el mismo.

²Esta regla coincide con uno de los repartos más importantes que se estudian en la *Teoría de Juegos*, con importancia en aplicaciones económicas, el *valor de Shapley*. Se puede afirmar de hecho que el valor de Shapley es la mayor contribución individual de la Teoría de Juegos a la justicia distributiva.

Puede probarse que este reparto de costes, en parte proporcional, coincide con la solución proporcionada por la Regla Voraz Media.³

Parece claro que son justamente los repartos de este tipo los que deberían aplicarse para sufragar los gastos de un ascensor en un edificio por parte de los usuarios, ya que estos costes no dependen de la superficie de los inmuebles, sino de la altura a la que está localizada cada vivienda (ciertamente que si el inmueble tiene una terraza compartida por todos los individuos, vuelve a ser lógico que se aplique la ley o tal vez una división igualitaria).

Vemos que existen muchas reglas de reparto y no todas ellas dan el mismo resultado, al tener presente distintos principios de equidad. Para poder elegir entre ellas debemos dar razones tangibles. Esto se consigue estableciendo *propiedades deseables* (definidas sin ambigüedad); algunas de ellas, como la propiedad de eficiencia (toda la cantidad en litigio debe repartirse) o la propiedad de simetría (el reparto debe dar igual trato a los diferentes agentes) han sido ya mencionadas.

Salvo la Regla Voraz, las reglas de reparto que preceden son todas eficientes y simétricas. Otra propiedad deseable es la *consistencia*. Significa lo siguiente: si usamos la regla en un conjunto de individuos y producimos un reparto, la misma regla aplicada a un subgrupo con los mismos derechos iniciales y repartiendo el total que estos individuos han recibido en el reparto conduce al mismo resultado.

Esta propiedad es deseable para que los individuos no estén más interesados en agruparse previamente. Esto nos llevaría al problema complejo de buscar el grupo óptimo de reparto para cada individuo.

Todas las reglas anteriores también son consistentes, salvo la Regla Voraz. Resulta por tanto natural caracterizar la familia de reglas de reparto que verifican estas propiedades.

En 1987, Young caracterizó el conjunto de todas las reglas que son simétricas y consistentes, y estableció además que todas estas reglas provienen de la optimización de un funcional estrictamente convexo y separable aditivamente, véase [9].

Así, las reglas anteriores provienen de resolver problemas de extremos:

1. Regla proporcional: $\min_X \sum_i \frac{x_i^2}{2d_i}$,
2. Regla de igual recompensa: $\min_X \sum_i \frac{x_i^2}{2}$,
3. Regla de igual pérdida: $\max_X \sum_i \log(c_i - x_i)$.

Aquí, X es el conjunto de repartos que verifican las condiciones siguientes:

³Coincide, por ello, con el valor de Shapley para una situación cooperativa en la que una coalición de aviones debe abonar el coste de la pista de máxima longitud que se necesita, véase [4].

- Propiedad de eficiencia: $\sum_i x_i = T$.
- Acotación del reparto: $0 \leq x_i \leq d_i$.

Dado que existen muchas funciones que verifican el teorema de Young, el estudio matemático de las reglas de reparto consiste en buscar las propiedades que caracterizan o identifican cada regla. Veamos otras propiedades que permiten discriminar entre reglas y llegar a su caracterización.

Se dice que una regla *respeto el derecho mínimo*, o bien que *verifica la racionalidad individual*, si cualquier individuo recibe con ella mayor cantidad que la que le proporciona el método voraz cuando el individuo está colocado el último del orden. En el caso del reparto de la túnica, el derecho mínimo del primer individuo es cero y el del segundo es la mitad de la túnica. Nótese que una regla que no respeta este principio no debería ser aceptada por ningún individuo, ya que por su propia iniciativa obtendría más en el reparto. Todas las anteriores reglas de reparto verifican este principio.

Una regla es *monótona* si un individuo con mayor demanda no recibe menos que otro con menor demanda. Una regla monótona no obliga a repartir más a los que más tienen, sino que implica no conceder menos, esto es, no penaliza a un individuo por poseer mayor derecho.

Una regla es *homogénea* si es independiente en la transformación homogénea en las escalas en que estén efectuadas las medidas. Esto nos indicaría que el reparto es independiente de la unidad de medida o de moneda en que estén expresados nuestros derechos. Por ejemplo, el reparto de la túnica puede hacerse sobre la prenda directamente o bien sobre su valoración monetaria.

Una regla es *autodual* si el reparto que produce coincide con el reparto que produciría al disminuir las demandas en el exceso de demanda. La idea de esta propiedad es que daría igual partir de cero e ir concediendo las distintas cantidades hasta completar el reparto o, contrariamente, ir disminuyendo progresivamente desde la demanda inicial.

Dado que los repartos pueden ser realizados en varias fases, también pueden ser interesantes propiedades del tipo siguiente:

- La regla verifica el *principio de composición hacia arriba* si el reparto de una cantidad T es igual a la suma de los repartos de una cantidad T_1 con igual demanda más el reparto de una cantidad $T - T_1$ con demandas descontadas por las cantidades ya repartidas. Esto permite realizar un primer reparto de una cierta cantidad disponible y otro reparto posterior del resto sin alterar la regla de reparto, por lo que no hay que demorar la aplicación de la regla hasta disponer de toda la cantidad a repartir.

- A veces es deseable que las reglas asignen ciertos valores mínimos a los individuos que verifican ciertas condiciones. Una regla verifica el *principio de exención* cuando se asigna a cada individuo lo demandado siempre que ello esté por debajo del cociente igualitario.

- Una regla verifica la *propiedad de exclusión* si a todo individuo cuya demanda sea inferior al valor medio del exceso de demanda sobre el total se le asigna un reparto nulo.

Existen otras muchas propiedades que el lector puede encontrar en la literatura. No obstante, las anteriores son ya suficientes para establecer algunos teoremas de caracterización. Así, Young [9] probó que la Regla Proporcional es la única que verifica composición hacia arriba y autodualidad. Herrero y Villar [3] probaron que la Regla de Igual Pérdida es la única que satisface composición hacia arriba, consistencia y exclusión.

3 Particiones de herencias en el mundo árabe

En el libro “La aritmética en Roma, en India y en Arabia”, de J.A. Sánchez Pérez [7], podemos encontrar una aproximación a los repartos relacionados con las herencias (*faraid*) en el mundo islámico.

La interpretación de las disposiciones del Corán para los repartos de las herencias no proporciona una práctica uniforme, admitiéndose reglas deducidas de la *zuna*. La institución de herederos está indicada en el Corán, azora IV, versículos 8, 12, 13, 14, 15 y 175, en los que se determina además la legítima que a cada heredero corresponde. Los citados versículos son, en general, interpretados del modo siguiente:

- *Versículo 8*: Tanto hombres como mujeres tienen derecho a una parte de los bienes dejados por sus padres y parientes cercanos, cualquiera que sea la cuantía del capital.
- *Versículo 12*: En la partición de herencias corresponde, por mandato divino, a los hijos varones, una parte doble que a las hembras. En el caso de que no haya más que hijas, les corresponde los dos tercios de la herencia, y si es una hija única, tiene derecho a la mitad. El padre y la madre tienen derecho a un sexto, si el difunto deja algún hijo; pero si el causante ha muerto sin sucesión y le heredan ascendientes, la madre heredará un tercio; y si existen hermanos del muerto, la madre sólo heredará el sexto, después de que se hayan satisfecho los legados y las deudas.
- *Versículo 13*: El marido tiene derecho a la mitad de la herencia de las mujeres cuando éstas mueren sin sucesión; pero si dejan algún hijo, el marido heredará únicamente el cuarto, después de pagar deudas y legados.
- *Versículo 14*: Las mujeres, solidariamente, heredarán el cuarto o el octavo de la herencia producida por la muerte del marido, según que éste muera sin sucesión o deje algún hijo.

- *Versículo 15*: El hermano o hermana uterinos de una persona que muere sin dejar herederos por línea ascendiente o descendiente, hereda un sexto. Existiendo varios hermanos o hermanas uterinos, sin distinción de sexo, heredan el tercio.
- *Versículo 175*: Cuando un hombre que muere sin hijos deja una hermana (de doble vínculo o consanguínea), ésta hereda la mitad; si son dos o más hermanas, heredan los dos tercios; y si existen a la vez hermanos y hermanas (de doble vínculo o consanguíneos), los varones tienen derecho a una parte doble que las hembras.

Según el Corán y la legislación complementaria dentro del rito malequí, que es el que se siguió en la España musulmana, los herederos con legítima son:

Marido	1/2 ó 1/4
Hermanos uterinos	1/6 ó 1/3
Padre	1/6
Abuelo	1/6
Hijos	1/2 ó 2/3
Nietas	1/2, 2/3 ó 1/6
Madre	1/3 ó 1/6
Viuda o viudas	1/4 ó 1/8
Abuela	1/6
Hermanas de doble vínculo	1/2 ó 2/3
Hermanas consanguíneas	1/2, 2/3 ó 1/6
Hermanas uterinas	1/3 ó 1/6

Para realizar la partición de la herencia se debe hallar la base del reparto, que se corresponde con el *mínimo común múltiplo* de los denominadores de las legítimas. Por lo que las bases pueden ser 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, y 36. Llamemos M a dicha base, y sea $d_i = n_i/M$. Pueden entonces darse tres casos:

1. Que la suma de las legítimas sea inferior a la unidad. En este caso se realiza un reparto proporcional, siendo el resto para otros herederos consanguíneos, o para el Tesoro Público, en su defecto.
2. Que la suma de las legítimas sea igual a la unidad: Regla Proporcional.
3. Que la suma de las legítimas sea mayor que la unidad. En este caso, se sustituye el denominador común de las legítimas por la suma de los numeradores y se procede de nuevo aun reparto proporcional.

Generamos de este modo un proporcional truncado, que corresponde a la regla definida por

$$x_i = \min_i \left(\frac{n_i}{M}, \frac{n_i}{\sum_j n_j} \right).$$

El procedimiento es consistente, simétrico y *eficiente*.

4 Matemática discreta y asignación de escaños

Existen situaciones en que los repartos se hacen sobre bienes indivisibles. Esto lleva de forma natural a considerar la Matemática de los números enteros, frecuentemente conocida como Matemática Discreta.

Éste es el caso en el que deseamos repartir los escaños de un parlamento entre las diferentes unidades administrativas del país, en base a las poblaciones que poseen. También se presenta la misma situación cuando deseamos repartir los escaños de una corporación entre los partidos políticos presentes, en base a los votos obtenidos.

El modelo de reparto para este tipo de problemas es similar al anterior, salvo que el total a repartir T y la asignación a cada individuo deben ser números enteros. Nótese que los derechos pueden ser o no números enteros. Para estos casos sólo debemos considerar un conjunto de posibles decisiones X con menor número de elementos (ahora necesariamente los $x_i = 0, 1, \dots, d_i$).

En general, las reglas de reparto anteriormente consideradas no producen necesariamente repartos en números enteros. Por tanto, si deseamos aplicar alguna de ellas, deberíamos ser capaces de buscar posteriormente la solución en números enteros “más próxima” en algún sentido. Problema que nos recuerda la relación de la optimización en números enteros con sus relajaciones continuas.

Puede encontrarse en la literatura una generalización de las reglas clásicas que recurre a la *aleatorización*. El procedimiento es equivalente en cierto modo a llevar a cabo elecciones aleatorias de las ordenaciones previas a la aplicación de la Regla Voraz.

En general el proceso puede ponerse en práctica del siguiente modo:

Se reparte con la regla deseada la máxima cantidad posible, respetando las condiciones de integridad; el resto se reparte de forma aleatoria entre los individuos.

La ley aleatoria usada dependerá de la regla escogida. En la mayoría de los casos es una ley que nos permite distribuir las k unidades no repartidas entre los n individuos, asignando a lo sumo una unidad a cada uno de ellos, contado el i -ésimo individuo con una probabilidad p_i conocida, que suele ser función de su demanda. Para el caso de la regla proporcional la probabilidad asociada a cada individuo es igual al resto de su asignación entera, mientras que para las reglas de igual pérdida e igual ganancia es una distribución uniforme entre aquellos agentes que después del reparto de las unidades enteras tienen aún derecho a reparto. La teoría de muestras finitas nos proporciona procedimientos para llevar a cabo estos repartos aleatorios.

Dado que nos referiremos a los sistemas de votación y a su reparto de escaños, estos caminos aleatorios no son fácilmente aceptados, pues sólo se aplican en muy pocos casos en la realidad, como en el juego de la ruleta rusa, o en los comienzos de actividades deportivas.

A continuación indicaremos cómo se evita el problema de la aleatorización cuando se recurre a la Regla Proporcional, ya que es universalmente aceptado

que los escaños de un parlamento deben ser proporcionales a los votos emitidos por los ciudadanos a los diferentes partidos políticos, en base al principio aristotélico.⁴

Supongamos que tenemos un número T de escaños que deseamos repartir entre n partidos que han obtenido v_1, \dots, v_n votos respectivamente, con un total de votos que llamaremos V . Nótese que en este caso los derechos de los partidos son votos, y no están dados en las mismas unidades que la cantidad a repartir. Representaremos la asignación en la forma $r = F(v, T)$, conservando las notaciones $v = (v_1, \dots, v_n)$ y $r = (r_1, \dots, r_n)$.

Si la regla de reparto fuese la proporcional, cada partido recibiría una cantidad de escaños r_i proporcional a v_i : $r_i = v_i T / V$. Pero dado que esta asignación no es en general entera para todos los partidos, no puede ser aceptada. El problema se reduce por tanto a escoger procedimientos que indiquen cómo “discretizar” estos valores (i.e. cómo aproximarlos por enteros cuya suma sea T) que tengan buenas propiedades.

En una primera aproximación al tema, hablaremos de las dos familias de métodos que permiten realizar estas aproximaciones:

Métodos de cociente o cuota.

Fijamos en primer lugar una *cuota* Q ; este valor se define en función de T y V y proporciona una medida de los votos que corresponden a cada escaño. Sabemos que, si $q_i = v_i / Q$, a cada partido i le corresponden al menos y_i escaños y como mucho w_i escaños, siendo y_i el mayor entero que no excede a q_i y w_i el menor entero que excede a q_i , respectivamente. Si se asigna a cada partido y_i votos, aparecen los restos decimales $r_i = q_i - y_i$, aun no asignados, lo que produce un total de escaños por asignar que denotaremos R .

Los diferentes métodos de cociente se caracterizan por:

- *La cuota elegida.* La *cuota natural* es V/T , número de votos dividido por número de escaños, pero otras han sido también usadas, como $V/(T + 1)$ llamada *cuota de Droop* (empleada en Grecia) o $V/(T + 2)$ llamada *cuota imperial* (empleada en Italia).
- *Las diferentes asignaciones del resto de escaños.* La asignación más frecuente es la de los *restos mayores*, que asigna el resto de los escaños entre los R partidos que tengan los mayores restos.

En general cualquier método que siga esta filosofía recibe el nombre de método de cociente, quedando reservada la denominación *método de los restos mayores* al caso en que se emplea la cuota natural y dicho procedimiento de reparto del resto de los escaños.

⁴ Pero debemos recordar que también evitamos que se verifiquen ciertos principios deseables, por lo que van a aparecer nuevas dificultades en el camino. Si la idea de justicia se estableciera a través de cualquier otra regla, un camino similar de ajuste podría llevarse a cabo.

Métodos de divisores.

Estos métodos se basan en que cada escaño se asigna con una cuota diferente, llamada divisor, $d(n)$, con $n = 1, 2, \dots$, siendo esta sucesión estrictamente creciente.

El procedimiento es el siguiente. Se calculan para cada partido los cocientes $v_i/d(n)$ con $n = 1, 2, \dots$; todos estos cocientes se ordenan de mayor a menor; a continuación, se van asignando uno a uno los escaños hasta completar el reparto.

Los métodos de divisores se diferencian entre sí por la sucesión de divisores empleada. Así, encontramos entre otros:

- Método belga: $d(n) = (n + 1)/2$, secuencia: 1, 1.5, 2, 2.5, 3, ...
- Método d'Hondt: $d(n) = n$, secuencia: 1, 2, 3, 4, 5, ...
- Método de la media aritmética: $d(n) = 2n - 1$, secuencia: 1, 3, 5, 7, ...
- Método de las proporciones iguales: $d(n) = \sqrt{n(n - 1)}$, secuencia: 0, 1.41, 2.45, 3.46, 4.47, ...
- Método danés: $d(n) = 3n - 2$, secuencia: 1, 4, 7, 10, 13, ...

Los distintos países democráticos emplean diferentes métodos de divisores, conservando la misma filosofía.

En España, el método d'Hondt es empleado en las elecciones generales para asignar los escaños a las listas de los partidos políticos en las circunscripciones provinciales, una vez efectuado los recuentos de los votos de los ciudadanos. El método de los restos mayores (ligeramente modificado) se emplea para la asignación de los escaños a las distintas provincias en función de su población.

Dados los diferentes métodos existentes, éstos no pueden escogerse en virtud de un resultado particular, sino que deben ser adoptados en base a las propiedades que verifiquen. Indiquemos algunas propiedades deseables, similares a la consideradas anteriormente, que debe verificar un método de asignación y veamos si existe algún método que las verifica.

Se dice que un método es *simétrico* o *anónimo* si el número de escaños que un partido recibe depende sólo del número de votos que tiene y no del orden en que se han considerado los partidos en el momento de la asignación.

Se dice que un método cumple la *monotonía en el reparto de escaños* si, al incrementar el número de escaños de T a $T' = T + 1$, ningún partido recibe menos escaños en el segundo reparto que en el primero. Con ello se intenta evitar situaciones no deseadas como la conocida como *paradoja de Alabama*: en 1881, el número de escaños del Congreso de EEUU pasó de 299 a 300, pero Alabama pasó de tener ocho escaños a siete, usando la misma regla de reparto.

Se dice que un método es *acotado por la cuota natural*, o bien que cumple la *propiedad de Hare*, si el número de escaños r_i asignados a cada partido verifica

$$q_i(v; T) - 1 \leq r_i \leq q_i(v; T) + 1,$$

donde

$$q_i(v; T) = v_i \frac{T}{\sum_j v_j}.$$

Se dice que un método es *monótono respecto a la población* si, al recibir un partido más votos, no disminuye el número de escaños asignados en favor de un partido que ha perdido votos.

Se dice que un método es *consistente* si cualquier asignación parcial también es proporcional. Supongamos dado un sistema $(v; T)$ que, al pasar al sistema $(v; T + 1)$, otorga el escaño adicional al partido i frente al partido h . Y supongamos dado otro sistema $(v'; T')$ en el que i y h tienen los mismos votos que en el sistema anterior, v_i y v_h , aunque los votos de los restantes partidos puedan variar; si pasamos al sistema $(v'; T' + 1)$, el método consistente debe de dar el escaño al partido i frente al partido h .

Se dice que un método es *estable* cuando, al unirse dos partidos i y j a los que se les asignaban r_i y r_j escaños respectivamente, se les asigna r escaños a los votos conjuntos, con

$$r_i + r_j - 1 \leq r \leq r_i + r_j + 1.$$

Uno de los resultados más significativos en teoría de asignaciones de tipo entero es que ninguno de los métodos tradicionales verifica a la vez la monotonía en el reparto de escaños y la acotación por la cuota natural. Esto puede apreciarse en la tabla adjunta:

	Métodos de cocientes	Métodos de divisores
Simetría	SÍ	SÍ
Monotonía/reparto	NO	SÍ
Cota (cuota natural)	SÍ	NO
Monotonía/población	NO	SÍ
Consistencia	PARCIAL	SÍ
Estabilidad	SÍ	PARCIAL

Esto nos lleva a pensar que no existe un procedimiento universal, fácilmente definible y utilizable.

5 Elección matemática de los sistemas de votación.

Vamos a considerar el problema desde un punto de vista matemático formal.

Partimos de un conjunto de n listas, cada una de las cuales ha recibido un número de votos. Los votos emitidos están dados por el vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y el total de votos es $V = \sum_i v_i$. De nuevo se supone que estos votos deben “transformarse” en T escaños.

El problema de representación proporcional consiste en determinar el vector $r = (r_1, \dots, r_n)$ tal que:

1. r_i es un entero ≥ 0 ,
2. $T = \sum_i r_i$,
3. r_i es “proporcional” a v_i .

La solución puede ser escogida buscando aquel reparto que resuelve el problema de optimización siguiente:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } F(r, v) \\ \text{Sujeto a } T = \sum_i r_i, \quad r_i \text{ entero no negativo.} \end{cases}$$

donde la función de costo $F(r, v)$ debe ser una medida de la falta de equidad (un índice de la falta de proporcionalidad).

La función $F(r, v)$ está determinada por el método elegido. Debe tomar valores no negativos y verificar la propiedad siguiente:

$$F(r, v) = 0 \text{ si } r_i = v_i T / V \quad \forall i.$$

Los métodos de cocientes y de divisores presentados en la Sección precedente corresponden a este esquema con las funciones $F(r, v)$ que se indican a continuación:

- Restos mayores: $F(r, v) = \sum_i v_i \left| \frac{r_i}{v_i} - \frac{T}{V} \right|$.
- Media aritmética: $F(r, v) = \sum_i r_i \left(\frac{r_i}{v_i} - \frac{T}{V} \right)$.
- Regla d'Hondt: $F(r, v) = \sum_i \left(\frac{r_i}{v_i} - \frac{T}{V} \right)^+$, donde $z^+ = \max(z, 0)$ es la parte positiva de z .
- Proporciones iguales: $F(r, v) = \sum_i v_i \left(\frac{v_i}{r_i} - \frac{V}{T} \right)$.

Vemos que aparecen funciones análogas a las del teorema de Young: estrictamente convexas y aditivamente separables, por lo que los métodos tendrán las propiedades que el teorema promete. Gracias a esta estructura, existen algoritmos rápidos para encontrar la solución en números enteros del problema, por lo que el reparto de los votos hacia los escaños puede realizarse en un corto espacio de tiempo.

Supongamos que $F(r, v)$ es aditivamente separable, $F(r, v) = \sum_i f_i(r_i)$. La búsqueda de la solución óptima de este problema no es sencilla, a menos que las derivadas discretas de $F(r, v)$, las $\rho_i(r_i) = f_i(r_i + 1) - f_i(r_i)$, sean no decrecientes. Pero esto ocurre si la función es convexa. En estos casos, un algoritmo rápido y eficiente que emplea asignaciones marginales y usa los movimientos que proporciona la función derivada, es como sigue:

- Partimos de $r = (0, \dots, 0)$.
- En cada paso con (r_1, \dots, r_n) dado, asignamos un escaño al partido i que en la actual asignación verifique:

$$\rho_i(r_i) = \min\{\rho_j(r_j) : j = 1, 2, \dots, n\}.$$

- El algoritmo se detiene tras T iteraciones.

El algoritmo es óptimo bajo ciertas condiciones, en especial las verificadas por las funciones del teorema de Young.

En la práctica, el algoritmo puede describirse del siguiente modo: ordenar de forma no decreciente los $\rho_i(s)$, con $i = 1, \dots, n$ y $s = 0, 1, \dots, T - 1$, asignando los escaños a los partidos asociados a los T primeros valores.

No es de extrañar que sea de esta forma como se indiquen los procedimientos de asignación de escaños en la legislación emanada de nuestro sistema constitucional.

Referencias

- [1] F.R. FERNÁNDEZ, R. CABALLERO, C. ROMERO, *La aventura de decidir: una aproximación científica mediante casos reales*, Publicaciones de la Universidad de Málaga, 2004.
- [2] P. GRILLO DI CORTONA, C. MANZI, A. PENNISI, F. RICCA, B. SIMEONE, *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [3] C. HERRERO, A. VILLAR, *The Tree Musketeers: tour Classical Solutions to Bankruptcy Problems*, Mathematical Social Science, 42 (2001), 307–328.
- [4] S.C. LITTLECHILD, G. OWEN, *A simple expression for the Shapley value in a special case*, Management Science, 20, 3 (1973), 370–372.
- [5] G. OWEN, *Game theory*, Academic Press, 1982.
- [6] G.F. THOMPSON, *Airport cost and pricing*, Ph. D. Thesis, University of Birmingham, 1971.
- [7] J.A. SÁNCHEZ, *La aritmética en Roma, en India y en Arabia.*, CSIC, 1949.
- [8] A. VILLAR, *Decisiones sociales*, McGraw Hill, 2006.
- [9] H.P. YOUNG, *On Dividing an Amount According to Individual Claims or Liabilities*, Mathematics of Operations Research, vol. 12, 3 (1987), 398–414.

REDUCED BASIS METHOD FOR PARAMETRIZED DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

MARTA D'ELIA¹, LUCA DEDE², ALFIO QUARTERONI^{2,3}

¹MathCS – Mathematics & Computer Science Center
Emory University, 400 Dowman Dr., Atlanta, GA 30322, USA

²MOX – Modeling & Scientific Computing
Dipartimento di Matematica “F. Brioschi”, Politecnico di Milano,
Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133, Milano, Italy

³Chair of Modeling and Scientific Computing (CMCS)
Institute of Analysis and Scientific Computing (IACS)

École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
CH-1015 Lausanne, Switzerland

mdelia2@emory.edu luca.dede@polimi.it alfio.quarteroni@epfl.ch

Abstract

Parametrized systems of Differential Algebraic Equations (DAEs) stand at the base of several mathematical models in Microelectronics, Computational Fluid Dynamics and other Engineering fields. Since the dimension of these systems can be huge, high computational costs could occur, so efficient numerical methods are needed in order to contain the computational cost of the simulations. In this field, Model Order Reduction (MOR) methods represent a valid and efficient approach. In particular, in this work we propose to use Reduced Basis (RB) methods for the solution of parametrized systems of DAEs. Our starting point is the formulation of the RB method for parametrized Partial Differential Equations (PDEs) and the one for non-parametrized DAEs. We describe how to obtain a projection of the solution of the original problem onto a parameter dependent reduced subspace and we provide an a priori estimate for the approximation error. Numerical tests on problems of interest for electronic circuit design highlight the effectiveness of the proposed method. Comparison is made with the parametrized Proper Orthogonal Decomposition (POD) method, which is a typical MOR method.

Key words: *Parametrized systems of Differential Algebraic Equations, Reduced Basis method, a priori error estimation, circuits modeling*

Introduction

In this work we deal with the solution of parametrized systems of nonlinear Differential Algebraic Equations (DAEs). DAEs typically arise from Engineering problems which are described by parametrized dynamical systems. However, DAEs are also obtained after spatial discretization (e.g. by means of the Finite Element, Finite Volume, Finite Difference methods) of parametrized, either parabolic or hyperbolic, Partial Differential Equations (PDEs).

More specifically, we consider microelectronics applications for which the system of DAEs describes circuits of resistors, conductors, diodes and transistors. Due to new technologies in the field of microelectronics, the design of modern Integrated Circuits (ICs) has become more complex and there is an increasing demand for new, effective and efficient optimization tools, in order to avoid costly and repeated re-designs [22]. In particular, the following requirements ought to be fulfilled while approximating the original mathematical models: (i) feasible and accurate reproduction of the complete models; (ii) reproduction of the dynamics of the system according to specific choices of the design parameters (e.g. resistances, capacities and diodes' characteristic currents and voltages); (iii) saving of the computational costs. These challenges have prompted to the development of the so called reduced order models, by means of a projection of the continuous solution onto a parameter dependent reduced subspace.

Among reduced order models, Model Order Reduction (MOR) methods have proved to be efficient for the solution of linear non-parametrized systems of DAEs [8, 9, 10, 11, 26]. They have been extended to the nonlinear case in the late '80s in view of applications to several fields of Microelectronics and Computational Fluid Dynamics [1, 2, 3, 22, 24, 25], Chemical, Biological and Mechanical Engineering [22]. Some of these methods were lately extended to a parametrized version [4, 5], as in the case of the parametrized Proper Orthogonal Decomposition (POD_μ) method [5]. Nevertheless, as pointed out in [4], developing effective and efficient methods for parametrized DAEs remains an open issue and constitutes an area of intense investigation, mainly because the computational gain obtained by using such reduction methods for parametrized problems not yet satisfactory.

In this work we propose a Reduced Basis (RB) approach, which, for the sake of simplicity, we indicate as RB_μ -DAEs method, for the reduction of the dimension of nonlinear parametrized systems of DAEs in analogy with the RB method for parametrized PDEs (RB_μ -PDEs) [16, 23] and with the RB method for non-parametrized DAEs (RB-DAEs) [14, 15, 17, 18]. A relevant feature that legitimates the use of the RB_μ -DAEs method is that the solution of a parametrized problem lies in a lower-dimensional subspace induced by the parametric dependence; precisely, we consider the reduced solution as a combination of some "truth" approximated solutions corresponding to certain values of the parameter (the RB_μ -PDEs contribute) which form a basis of the reduced subspace as time evolves (the RB-DAEs contribute). Moving from these assumptions, we propose the RB_μ -DAEs method for the solution of both linear and nonlinear parametrized systems of DAEs; in its terms, the dependence of the parameters

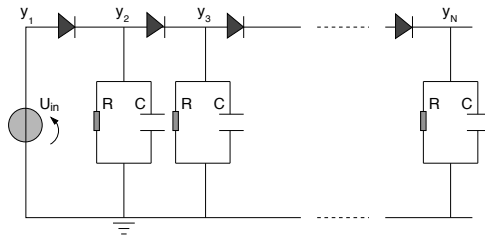


Figure 1: A simple diode chain.

can be either linear or nonlinear.

The paper is organized as follows. In Sec.1 we introduce the mathematical problem and the application under consideration: an analogic circuit. In Sec.2 we present the state of the art of the MOR methods for the solution of parametrized systems of DAEs and we report the formulation of the POD_μ method which will be used in comparison with our RB_μ -DAEs method. In Sec.3 we provide the mathematical formulation of the RB_μ -DAEs method. Firstly, we briefly describe both the RB_μ -PDEs and the RB -DAEs methods; then, we present the mathematical formulation of the RB_μ -DAEs method and we propose a procedure for the choice of the basis. Moreover, we propose an a priori error estimate for the RB_μ -DAEs approximation error. In Sec.4 we report some numerical results showing the effectiveness of the proposed method in comparison with the POD_μ one.

1 The problem at hand

We consider the following N dimensional system of parametrized DAEs:

$$\begin{cases} C \frac{d\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu})}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) & t \in (0, T], \\ \mathbf{y}(0, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (1)$$

where $\boldsymbol{\mu} \in D^\mu \subset \mathbb{R}^P$ is the parameter vector, with D^μ the parameter set and $P \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is a parameter independent matrix, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) : (0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ is a sufficiently regular function w.r.t. $t \in (0, T]$ and a Lipschitz-continuous function w.r.t. \mathbf{y} , with a parameter independent Lipschitz constant L , and $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^N$ is the (parameter independent) initial state condition. These assumptions ensure that Eq.(1) is well posed on the time interval $[0, T]$. As application, we consider the diode chain reported in Fig.1 (introduced in [26]), which is composed by resistors, capacitors and diodes set in parallel. This device, depending on the input signal, $U_{in}(t)$, could highlight a strongly non linear dynamical response due to the presence of the diodes.

By using the standard Kirkhhoff's laws, the behavior of the diode chain can be modeled by using Eq.(1) [26]. In particular, we assume the following expressions for the source term $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$ of Eq.(1): $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = -R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{y}$

in the case of a *linear problem* and $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = -R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$ for a *nonlinear problem*, being $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) : (0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ a nonlinear function of \mathbf{y} , $\forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}^\mu$; if $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ then, the dependence on the parameter is *linear*, otherwise, it is *nonlinear*. More precisely, we choose the parameter vector as $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_R, \boldsymbol{\mu}_V] \in \mathcal{D}^{\mu_R} \times \mathcal{D}^{\mu_V} \equiv \mathcal{D}^\mu$, where $\boldsymbol{\mu}_R \in \mathcal{D}^{\mu_R} \subset \mathbb{R}^k$ represents the values of the resistances, while $\boldsymbol{\mu}_V \in \mathcal{D}^{\mu_V} \subset \mathbb{R}^s$ those of the reference voltages of the diodes, being $k, s \in \mathbb{N}$ s.t. $k + s = P$. Also, $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$ and $R(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ are the diagonal singular matrices chosen as:

$$C = c \operatorname{diag}(0, 1, 1, \dots, 1),$$

$$R(\boldsymbol{\mu}_R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(\boldsymbol{\mu}_R)_1} I_{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(\boldsymbol{\mu}_R)_2} I_{z_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{(\boldsymbol{\mu}_R)_k} I_{z_k} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

where $c \in \mathbb{R}$ ($[F]$) represents the capacity of the conductors and $I_{z_i} \in \mathbb{R}^{z_i \times z_i}$, for $i = 1, \dots, k$, is the identity matrix; clearly, $\sum_{i=1}^k z_i = N - 1$. The function $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$ is defined, for some $p, q, r \in \mathbb{N}$ s.t. $1 \leq p \leq q \leq r \leq s$, as:

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} -U_{in}(t) \\ d(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1, (\boldsymbol{\mu}_V)_1) - d(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2, (\boldsymbol{\mu}_V)_p) \\ \dots \\ d(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1}, (\boldsymbol{\mu}_V)_q) - d(\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{y}_j, (\boldsymbol{\mu}_V)_r) \\ \dots \\ d(\mathbf{y}_N - \mathbf{y}_{N-1}, (\boldsymbol{\mu}_V)_s) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

where, the scalar function $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ represents the constitutive equation of the diode and it is defined as follows:

$$d(v, \mu_V) = \begin{cases} 0 & v < 0.5 V \\ I_s(e^{v/\mu_V} - 1) & v \geq 0.5 V, \end{cases} \quad (4)$$

being I_s the diode current ($[A]$) and μ_V the characteristic voltage ($[V]$); moreover, we choose $U_{in}(t)$ as:

$$U_{in}(t) = \begin{cases} 20 & t \in [0, 10] \text{ ns}, \\ 170 - 15(10^9 t) & t \in (10, 11] \text{ ns}, \\ 5 & t \in (11 \text{ ns}, +\infty). \end{cases} \quad (5)$$

In Eq.(1) each solution component \mathbf{y}_i , $i = 1, \dots, N$, represents the electrical voltage in each node of the circuit.

N	200	500	1000
CPU [sec]	10.84	58.17	245.6

Table 1: Computational costs (CPU times) required for solving the system of DAEs induced by the electronic device described by Eq.s (2) and (3) with $T=30$ ns.

Since the number N of the components in modern ICs might be huge (e.g. $N \cong 10^6$), high computational costs could occur while solving numerically the problem. In Tab.1 we report the computational costs required for the numerical solution of system (1) by the implicit Backward-Euler (BE) method for time discretization¹. We choose a single parameter dependence for which $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_R = \mu \in \mathcal{D}^{\mu_R} \subset \mathbb{R}$ represents the resistance of all the resistors of the circuit. In particular, for the example considered, we choose $\mu = 10^4 \Omega$ and a discretization time-step $\Delta t = 0.1$ ns. When addressing more relevant circuits, alternative approaches, such as those based on model or dimensional reduction, become therefore mandatory.

2 MOR methods for systems of parametrized DAEs: state of the art

In this Section we give a brief account on the existing MOR techniques applied to systems of parametrized DAEs; in particular, we focus on the so-called POD_μ method.

MOR methods are the most widespread techniques used for the solution of (linear or nonlinear) systems of DAEs [2, 22, 26]. These methods are based on a suitable projection of the solution of the original system onto a lower dimensional state space in order to obtain a new model of reduced dimension. Different projection strategies yield different MOR methods.

The use of MOR techniques in the field of parametrized problems is less common. In this respect, a typical approach consists in combining a non-parametrized MOR technique with a supplementary procedure for parametrized problems (e.g. interpolation or moment matching). In particular, in this paper we consider the POD_μ method (introduced in [5]), which is described in details in Sec.2.1 in view of the comparison with the RB_μ -DAE method that we are going to introduce in Sec.3.3. Among MOR methods for parametrized nonlinear systems we mention the Trajectory Piece-Wise Linear method [4], in which the original system is linearized around suitably selected states, then it is approximated by a weighted combination of such linearized models, each one reduced by means of the Krylov-subspace technique [8, 9, 10]. The dependence on the parameter is taken into account with a moment matching technique [4].

¹The simulations are carried out on an Intel 2.20 GHz processor with 4 MB of cache memory and 2 GB of RAM.

2.1 The parametrized Proper Orthogonal Decomposition method

In this Section we describe the POD_μ method, firstly proposed for Aerodynamics applications [5], highlighting the decomposition of the procedure in an *offline* step (actually the standard POD procedure) and in an *online* one (where the solution is evaluated for a given value of the parameter $\bar{\boldsymbol{\mu}} \in D^\mu$). More precisely, this method consists in performing at the *offline* step the non-parametrized POD procedure on a set of problems corresponding to selected values of the parameter. In this way a set of projectors (matrices) onto a reduced subspace, one for each of the selected parameters, is obtained. Once this set of projectors is given, the POD_μ procedure combines the projection matrices by means of an interpolation technique in order to obtain a parameter dependent projector which is used at the *online* step to build the reduced model. Moreover, in order to furtherly reduce the computational costs, we propose in this work to combine the POD_μ method with the Missing Point Estimation (MPE) technique. We notice that this approach (POD-MPE) has been already introduced in [2, 24] even if in the non-parametrized case.

We summarize firstly the *offline* step of the POD_μ method.

Given a set of selected parameters $\bar{D}^\mu \subset D^\mu$ defined as $\bar{D}^\mu := \{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_D\}$, with $D \in \mathbb{N}$:

A perform the following steps of the non-parametrized POD procedure: for $i = 1, \dots, D$

- (a) collect $J \in \mathbb{N}$ evaluations at different times of the unknowns of the system (e.g. by measurements of the voltages of the system at some selected time-steps), $\mathbf{y}(t_j, \boldsymbol{\mu}_i)$, $j = 1, \dots, J$, and assemble the snapshots matrix, say $Y(\boldsymbol{\mu}_i) \in \mathbb{R}^{N \times J}$, s.t.

$$Y(\boldsymbol{\mu}_i) = [\mathbf{y}(t_1, \boldsymbol{\mu}_i) \dots \mathbf{y}(t_J, \boldsymbol{\mu}_i)]; \quad (6)$$

- (b) solve the following eigenvalue problems:

$$H(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{u}_j(\boldsymbol{\mu}_i) = \lambda_j(\boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{u}_j(\boldsymbol{\mu}_i) \quad \forall j = 1, \dots, J, \quad (7)$$

where $\mathbf{u}_j(\boldsymbol{\mu}_i) \in \mathbb{R}^N$ and $\lambda_j(\boldsymbol{\mu}_i) \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, J$, are respectively the eigenvectors (which are assumed to be sufficiently regular w.r.t. each $\boldsymbol{\mu}_i$) and the eigenvalues of the correlation matrix $H(\boldsymbol{\mu}_i) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ defined as $H(\boldsymbol{\mu}_i) := \frac{1}{J} Y(\boldsymbol{\mu}_i) Y(\boldsymbol{\mu}_i)^T$;

- (c) apply the total energy criterion (see [2]) taking into account for the 99% of the total energy, for which compute $E_j(\boldsymbol{\mu}_i) =$

$$\sum_{s=1}^j \lambda_s(\boldsymbol{\mu}_i) / \sum_{s=1}^J \lambda_s(\boldsymbol{\mu}_i), \quad j = 1, \dots, J, \quad \text{and set:}$$

$$K(\boldsymbol{\mu}_i) := \operatorname{argmin}_{j=1, \dots, J} |E_j(\boldsymbol{\mu}_i) - 0.99|, \quad K(\boldsymbol{\mu}_i) \in \mathbb{N}; \quad (8)$$

B set $K := \min_{i=1, \dots, D} K(\boldsymbol{\mu}_i)$;

C for $i = 1, \dots, D$, set $\tilde{U}(\boldsymbol{\mu}_i) := [\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\mu}_i) \dots \mathbf{u}_K(\boldsymbol{\mu}_i)]$ and perform the cubic spline interpolation for each column vector obtaining, as described in [6], the interpolant $\Pi_k(\boldsymbol{\mu}) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^N$, $k = 1, \dots, K$ s.t. $\Pi_k(\boldsymbol{\mu}_i) = \mathbf{u}_k(\boldsymbol{\mu}_i)$, $\forall k = 1, \dots, K$, $\forall i = 1, \dots, D$.

These *offline* steps are performed just once and, hence, they are allowed to be computationally expensive.

At the *online* step we aim at rapidly computing the reduced solution for a given value of the parameter $\bar{\boldsymbol{\mu}} \in D^\mu$. In particular, we assemble the matrix $V(\bar{\boldsymbol{\mu}}) := [\Pi_1(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \dots \Pi_K(\bar{\boldsymbol{\mu}})]$ and we perform the projection returning the reduced system. In practise, we project the solution of the original system (1) onto the reduced subspace and we replace $\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu})$ in Eq.(1) by the reduced solution $\mathbf{y}_R(t, \bar{\boldsymbol{\mu}}) := V(\bar{\boldsymbol{\mu}})\mathbf{z}(t, \bar{\boldsymbol{\mu}})$, being $\mathbf{z}(t, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \in \mathbb{R}^K$. Finally, we solve the reduced system obtained by multiplying both the r.h.s. and the l.h.s. of Eq.(1) by $V(\bar{\boldsymbol{\mu}})^T$:

$$\begin{cases} C_R(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \frac{d\mathbf{z}(t, \bar{\boldsymbol{\mu}})}{dt} = \mathbf{f}_R(t, \mathbf{z}(t, \bar{\boldsymbol{\mu}}); \bar{\boldsymbol{\mu}}) & t \in (0, T], \\ \mathbf{z}(0, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{z}_0; \end{cases} \quad (9)$$

where $C_R(\bar{\boldsymbol{\mu}}) := V(\bar{\boldsymbol{\mu}})^T C V(\bar{\boldsymbol{\mu}})$, $\mathbf{f}_R(t, \mathbf{z}(t, \bar{\boldsymbol{\mu}}); \bar{\boldsymbol{\mu}}) := V(\bar{\boldsymbol{\mu}})^T \mathbf{f}(t, V(\bar{\boldsymbol{\mu}})\mathbf{z}(t, \bar{\boldsymbol{\mu}}); \bar{\boldsymbol{\mu}})$ and $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^K$ is chosen such that $V(\bar{\boldsymbol{\mu}})\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0$.

3 The Reduced Basis method for systems of parametrized DAEs

In this Section we describe the mathematical formulation of the RB_μ -DAEs method, which we propose for solving parametrized nonlinear systems of DAEs. In particular, we specify the choices of approximation schemes and linear solvers and we propose a procedure for the generation of the basis; finally, we present an *a priori* error estimate for the approximation error associated with the method. In order to make straightforward the presentation of the method, we briefly recall the RB-DAEs and the RB_μ -PDEs methods from which the basic idea of the RB_μ -DAEs method stems out.

3.1 The RB-DAEs method

We report the mathematical formulation of the RB-DAEs method introduced by Porsching and Lee [13, 17, 18]; for further details see also [14, 15].

The RB-DAEs method has been firstly introduced in the context of parameterized nonlinear systems of Algebraic (i.e. stationary) Equations, say RB_μ -AEs method, where a projection of the solution of the original system onto a parameter dependent manifold is performed. In [18] Porsching and Lee proposed an approach adapting the RB_μ -AEs method to non-parametrized nonlinear systems of DAEs, say the RB-DAEs method, where the time variable of the dynamical system is chosen as the parameter used to perform the projection. The basic idea of the method consists in partitioning the time interval and then performing a projection of the solution of the original system onto a lower-dimensional subspace in each subinterval. The complete reduced

solution is obtained by assembling the reduced solutions computed into every subinterval.

In particular, we divide the time interval $[0, T]$ in $J \in \mathbb{N}$ subintervals $I_j = (t_{j-1}, t_j]$ s.t. $0 = t_0 < \dots < t_J = T$ and $\bigcup_{j=1}^J I_j = (0, T]$. Then, the RB-DAEs method consists in finding a reduced solution, let say $\mathbf{y}_{R,j}(t)$, in each subinterval I_j , $j = 1, \dots, J$; the complete reduced solution is given by $\mathbf{y}_R(t) = \mathbf{y}_{R,j}(t)$, $t_j < t \leq t_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, J-1$, provided that $\mathbf{y}_R(t_0) = \mathbf{y}_0$.

In the following steps we describe the procedure for the computation of $\mathbf{y}_{R,j}$, for $j = 1, \dots, J$:

1. choose the reduced subspace $\mathcal{S}_j \subset \mathbb{R}^N$, $\forall j = 1, \dots, J$, which the reduced solution belongs to, which is defined as

$$\mathcal{S}_j = \text{span}\{\mathbf{u}_j^1, \mathbf{u}_j^2, \dots, \mathbf{u}_j^{M_j}\}, \quad M_j \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

for some $\{\mathbf{u}_j^1, \dots, \mathbf{u}_j^{M_j}\} \subset \mathbb{R}^N$ which can be chosen in different ways (see [18] for more details) and depend on the exact solution or on the r.h.s. of Eq.(1);

2. assemble the projection matrix $Y_j \in \mathbb{R}^{N \times M_j}$ defined as $Y_j = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_j^1 & \mathbf{u}_j^2 & \dots & \mathbf{u}_j^{M_j} \end{bmatrix}$;

3. write the reduced solution as:

$$\mathbf{y}_{R,j}(t) = Y_j \mathbf{z}_j(t) + \mathbf{y}_{R,j-1}(t_j), \quad (11)$$

for some $\mathbf{z}_j(t) \in \mathbb{R}^{M_j}$ to be determined;

4. rewrite system (1) over the time subinterval I_j by replacing the exact solution $\mathbf{y}(t)$ with the reduced one $\mathbf{y}_{R,j}(t)$ as follows:

$$\begin{cases} Y_j^T \frac{d\mathbf{y}_{R,j}(t)}{dt} = Y_j^T \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_{R,j}(t)) & t \in I_j, \\ \mathbf{y}_{R,j}(t_j) = \mathbf{y}_{R,j-1}(t_j); \end{cases} \quad (12)$$

or equivalently:

$$\begin{cases} Y_j^T Y_j \frac{d\mathbf{z}_j(t)}{dt} = Y_j^T \mathbf{f}(t, Y_j \mathbf{z}_j(t) + \mathbf{y}_{R,j-1}(t_j)) & t \in I_j, \\ \mathbf{z}_j(t_j) = 0; \end{cases} \quad (13)$$

5. solve the M_j dimensional system (13) and get $\mathbf{y}_{R,j}(t)$, for $j = 1, \dots, J$.

Finally, by assembling the J reduced solutions $\mathbf{y}_{R,j}(t)$, we obtain the complete reduced solution $\mathbf{y}_R(t)$, $t \in [0, T]$.

3.2 The RB_μ -PDEs method

We briefly report the mathematical formulation of the RB_μ -PDEs. For an in-depth insight, we refer the reader to, e.g, [16].

The basic idea of the RB_μ -PDEs method consists in “assembling” a reduced parametrized problem, starting from the original parametrized PDEs, which allows to reproduce accurately the original solution while containing the computational costs. The solution of such reduced problem lies in a lower-dimensional space, whose basis is composed by M solutions of the original problem corresponding to selected values of the parameters. The main feature of the method consists in splitting the whole procedure in an *offline* step (computationally expensive) and an *online* step (rapid) in which the reduced parametrized problem is solved for a given value of the parameter. The RB_μ -PDEs method has been proved to be convenient, accurate and reliable for the solution of parametrized PDEs and systems of PDEs on a broad range of Engineering applications [16, 23].

Let \mathcal{Y} be a Hilbert space, \mathcal{Y}' its dual space and $\mathcal{Y}'\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Y}} \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ the associated duality pair. Then, we define, for any $\boldsymbol{\mu} \in D^\mu \subset \mathbb{R}^P$, where, once again, D^μ is the parameter set and $P \in \mathbb{N}$ is the corresponding dimension, a parametrized linear operator $A(\boldsymbol{\mu}) : Y \rightarrow Y'$. We assume that $A(\boldsymbol{\mu})$ could be affinely decomposed as a combination of $Q \in \mathbb{N}$ linear parameter independent operators, $A_q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$, weighed by parameter dependent functions $\Theta_q(\boldsymbol{\mu}) : \mathcal{D}^\mu \rightarrow \mathbb{R}$, $q = 1, \dots, Q$, s.t.:

$$A(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{q=1}^Q \Theta_q(\boldsymbol{\mu}) A_q. \quad (14)$$

We aim at finding the parameter dependent solution $y(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{Y}$ of the following problem:

$$\text{find } y(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{Y} \quad \text{s.t.} \quad \langle A(\boldsymbol{\mu})y(\boldsymbol{\mu}), v \rangle = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{Y}, \forall \boldsymbol{\mu} \in D^\mu, \quad (15)$$

where $F \in \mathcal{Y}'$. As the exact solution of Eq.(15) is not always available, we require a finite-dimensional “truth” approximation of the infinite-dimensional space \mathcal{Y} , let say \mathcal{Y}_h , an N dimensional subspace of \mathcal{Y} (in general we expect N to be very large). The approximated “truth” solution $y_h(\boldsymbol{\mu})$ lies in the space \mathcal{Y}_h which is typically defined as a Finite Element (FE) subspace of \mathcal{Y} [16]. Hence, the approximated Galerkin-FE problem reads:

$$\text{find } y_h(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{Y}_h \quad \text{s.t.} \quad \langle A(\boldsymbol{\mu})y_h(\boldsymbol{\mu}), v_h \rangle = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in \mathcal{Y}_h, \forall \boldsymbol{\mu} \in D^\mu. \quad (16)$$

It is convenient to express the solution of Eq.(16) in terms of the basis of the space \mathcal{Y}_h ; we let $\phi_i \in Y_h$ be the generic characteristic Lagrangian basis function, such that $\phi_i(x_i) = \delta_{ij}$, with $i, j = 1, \dots, N$, being x_j the coordinate of the j -th node of the triangulation, and δ_{ij} the Kronecher delta. Hence, Eq.(16) reads as:

$$\text{find } \mathbf{y}_h(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^N \quad \text{s.t.} \quad A_h(\boldsymbol{\mu})\mathbf{y}_h(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{F}_h, \quad (17)$$

where $\mathbf{y}_h(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_h)_i(\boldsymbol{\mu}) \phi_i$, the matrix $A_h(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is $[A_h(\boldsymbol{\mu})]_{ij} := \langle A(\boldsymbol{\mu}) \phi_j, \phi_i \rangle$, with $i, j = 1, \dots, N$ and $\mathbf{F}_h \in \mathbb{R}^N$ is $[\mathbf{F}_h]_i = \langle F, \phi_i \rangle$, $i = 1, \dots, N$. We observe that the affine decomposition hypothesis (14) allows us to write:

$$A_h(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{q=1}^Q \Theta_q(\boldsymbol{\mu}) A_{h,q}, \quad (18)$$

being $[A_{h,q}(\boldsymbol{\mu})]_{ij} := \langle A_q(\boldsymbol{\mu}) \phi_j, \phi_i \rangle$, $i, j = 1, \dots, N$.

The FE approach could lead to high computational costs, if N is huge, especially in the many-query contest. Even if we can decompose the computation of the solution in an *offline* step and an *online* one, “too” high computational costs are still required at the *online* step, hence the RB_μ -PDEs method can conveniently be considered.

In the RB_μ -PDEs method the solution of the parametrized problem lies on a low-dimensional subspace \mathcal{Y}_M of \mathcal{Y}_h . The elements of the basis of the reduced space \mathcal{Y}_M are the Galerkin-FE solutions, say $\zeta_m = y_h(\boldsymbol{\mu}_m)$, corresponding to some values of the parameter $\boldsymbol{\mu}_m \in D^\mu$. More precisely:

$$\mathcal{Y}_M := \text{span}\{\zeta_m : m = 1, \dots, M\} \quad M \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

where $M \ll N$. Hence, the reduced solution solves the following problem:

$$\text{find } y_M(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{Y}_M \quad \text{s.t.} \quad \langle A(\boldsymbol{\mu}) y_M(\boldsymbol{\mu}), v \rangle = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{Y}_M, \forall \boldsymbol{\mu} \in D^\mu. \quad (20)$$

Once again, it is possible to rewrite Eq.(20) in terms of the basis functions $\{\zeta_m\}_{m=1}^M$, which, in a matricial notation, reads:

$$\text{find } \mathbf{y}_M(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^M \quad \text{s.t.} \quad A_M(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{y}_M(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{F}_M, \quad (21)$$

where $y_M(\boldsymbol{\mu}) := \sum_{m=1}^M (\mathbf{y}_M)_m(\boldsymbol{\mu}) \zeta_m$, the matrix $A_M(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ is $[A_M(\boldsymbol{\mu})]_{ij} := \langle A(\boldsymbol{\mu}) \zeta_j, \zeta_i \rangle$, with $i, j = 1, \dots, M$ and $\mathbf{F}_M \in \mathbb{R}^M$ is $[\mathbf{F}_M]_i = \langle F, \zeta_i \rangle$, $i = 1, \dots, M$. We observe that $A_M(\boldsymbol{\mu})$ can be affinely decomposed similarly to Eq.(14), as:

$$A_M(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{q=1}^Q \Theta_q(\boldsymbol{\mu}) A_{M,q}, \quad (22)$$

being $[A_{M,q}(\boldsymbol{\mu})]_{ij} := \langle A_q(\boldsymbol{\mu}) \zeta_j, \zeta_i \rangle$, $i, j = 1, \dots, M$.

Due to the affine decomposition assumption the RB_μ -PDEs method can be divided in two steps:

- at the *offline* step the reduced space \mathcal{Y}_M is built, the parameter independent matrices $A_{M,q}$ are assembled (this step typically requires high computational costs, even if is performed just once);

- at the *online* step given $\boldsymbol{\mu} \in D^\mu$, the matrix $A_M(\boldsymbol{\mu})$ is assembled and the linear system (21) solved (the solution is typically very rapid, being $M \ll N$).

Remark 3.1 *At the online step we are actually looking for the combination of some “truth” FE solutions. From an algebraic point of view the unknowns of our problem are the weights of the linear combination, i.e. $(\mathbf{y}_M(\boldsymbol{\mu}))_m$, for $m = 1, \dots, M$.*

3.3 The RB_μ -DAEs method

In this Section we mathematically formulate our RB_μ -DAEs method for the solution of parametrized systems of DAEs.

At the basis of the RB_μ -DAEs method there is the assumption that the solution of a parametrized problem is not an arbitrary member of an infinite-dimensional solution space, but it resides (evolves) on a lower-dimensional subspace induced by the parameter dependence. In particular, we are interested in solving the system of parametrized DAEs defined in Eq.(1). The idea, which arises from the considerations reported in Remark 3.1, consists in looking for the reduced solution as the projection of the true solution onto a lower-dimension subspace, let say \mathcal{S}_R , whose basis is defined by some FE solutions (called “truth” solutions) corresponding to some values of the parameters. We write the reduced solution in a form similar to the one used for the PDEs case, i.e. as a combination of M non-reduced solutions:

$$\mathbf{y}_R(t, \boldsymbol{\mu}) = Y(t) \mathbf{a}(t, \boldsymbol{\mu}), \quad (23)$$

where the components of $\mathbf{a}(t, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^M$ represent the weights $((y_M(\boldsymbol{\mu}))_m, m = 1, \dots, M$, in the PDEs case) associated with the basis (the “truth” solutions ζ_m in the PDEs case), which are the vectors contained in the time-independent matrix $Y(t) \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\forall t \in [0, T]$. We point out that, as in the RB -DAEs method, the reduced subspace is a function of the time, hence we write $\mathcal{S}_R = \mathcal{S}_R(t)$.

Two approaches, associated with two different choices of the reduced subspace $\mathcal{S}_R(t)$, can be implemented: the Reduce-and-Discretize (RD) approach and the Discretize-and-Reduce (DR) one.

The RD approach is similar to the one proposed by Porsching in [18]: i.e. given a set of parameters $\{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_M\} \subset D^\mu$, we define the reduced subspace $\mathcal{S}_R(t)$ as:

$$\mathcal{S}_R(t) := \text{span}\{\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu}_1), \mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu}_2), \dots, \mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu}_M)\} \quad \forall t \in [0, T], \quad (24)$$

where $\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu}_m)$ is the exact solution of Eq.(1) corresponding to $\boldsymbol{\mu}_m$, with $m = 1, 2, \dots, M$. By substituting $\mathbf{y}_R(t, \boldsymbol{\mu})$ (see Eq.(23)) in place of $\mathbf{y}(t, \boldsymbol{\mu})$ in Eq.(1), we obtain a reduced continuous model of dimension M . Then, by means of a time discretization scheme we discretize the reduced model and we get the approximated non-reduced solution.

In the DR approach, for a given partition of the whole time interval $[0, T]$ (t^0, t^1, \dots, t^F , with $F \in \mathbb{N}$, s.t. $t^F = T$), we apply, first of all, a time discretization

scheme to Eq.(1), yielding a nonlinear system of algebraic equations at each time-step t^n , $n = 0, \dots, F$. We define the reduced subspace at each time-step as:

$$\mathcal{S}_R(t^n) := \text{span}\{\mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_1), \mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_2), \dots, \mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_M)\} \quad \forall n = 1, \dots, F, \quad (25)$$

where $\mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_m)$, for $m = 1, \dots, M$ and $n = 1, \dots, F$, is the non-reduced approximate solution obtained in correspondence of $\boldsymbol{\mu}_m$. By means of Eq.(23) we perform the projection onto the reduced subspace at each time-step and we get the reduced solution $\mathbf{y}_R(t^n, \boldsymbol{\mu})$ by solving the M -dimensional algebraic system for $n = 1, \dots, F$.

Remark 3.2 *Numerical tests carried out by means of the $RB_{\boldsymbol{\mu}}$ -DAEs method have revealed that the DR approach is more efficient w.r.t. the RD one in terms of computational costs for a prescribed accuracy [7]. For this reason, in this work we detail the $RB_{\boldsymbol{\mu}}$ -DAEs method according to the DR approach.*

3.3.1 The DR approach

The first step of the DR approach consists in choosing the time discretization scheme. The corresponding approximate solution will be regarded as the “truth” solution. For the sake of comparison, it is advisable to use the same discretization scheme when solving both the non-reduced and reduced problems, in order to better appreciate the effectiveness of the reduction. In this work we will use the Backward-Euler (BE) method, an implicit one-step method [21], in order to skip stability troubles both for the reduced and the non-reduced problems. We present here the formulation of the method in the case of a linear parametric dependence of the nonlinear function \mathbf{g} (i.e. we define $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = -R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$, see Sec.1). In the case of a nonlinear parametric dependence we move from the same formulation. Then, let $\mathbf{y}_h^n(\boldsymbol{\mu})$ denote the non-reduced BE approximation of the exact solution $\mathbf{y}(t^n, \boldsymbol{\mu})$ at time step t^n , for $n = 0, \dots, F$, which is the solution of the following problem:

$$C(\mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^n) = -\Delta t R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{y}_h^{n+1} + \Delta t \mathbf{g}(t^{n+1}, \mathbf{y}_h^{n+1}) \quad \forall n = 0, \dots, F - 1, \quad (26)$$

being $\mathbf{y}_h^0 = \mathbf{y}_0$. In order to perform a projection, at each time-step of the discretization scheme, we have to compute the vectors of the basis of the reduced subspace; given a suitable set of M parameters $\{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_M\} \subset D^{\boldsymbol{\mu}}$, $\mathcal{S}_R(t^n)$ assumes the following form $\mathcal{S}_R(t^n) := \text{span}\{\mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_1), \dots, \mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_M)\}$, for $n = 1, \dots, F$. Then, we write the reduced solution as a combination of the basis vectors, s.t. $\mathbf{y}_R(t^n, \boldsymbol{\mu}) = Y(t^n)\mathbf{a}(t^n, \boldsymbol{\mu})$, where the matrix $Y^n = Y(t^n)$ is formed by the basis vectors of the reduced subspace and we substitute this expression in Eq.(26). We obtain a $N \times M$ dimensional system at each time-step:

$$\begin{aligned} C(Y^{n+1}\mathbf{a}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) - Y^n\mathbf{a}^n(\boldsymbol{\mu})) &= -\Delta t R(\boldsymbol{\mu})Y^{n+1}\mathbf{a}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) \\ &+ \Delta t \mathbf{g}(Y^{n+1}\mathbf{a}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}), t^{n+1}) \quad \forall n = 0, \dots, F - 1, \quad (27) \end{aligned}$$

where $\mathbf{a}^n(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^M$ is defined as $\mathbf{a}^n(\boldsymbol{\mu}) := \mathbf{a}(t^n, \boldsymbol{\mu}) \forall n = 0, \dots, F$. We can rewrite Eq.(26) as:

$$A^{n+1}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{a}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) - \Delta t \mathbf{g}(t^{n+1}, Y^{n+1}\mathbf{a}^{n+1}(\boldsymbol{\mu})) = \mathbf{f}^n(\boldsymbol{\mu}) \quad \forall n = 0, \dots, F-1, \quad (28)$$

where $A^n(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ is $A^n(\boldsymbol{\mu}) := [CY^n + \Delta t R(\boldsymbol{\mu})Y^n]$, while $\mathbf{f}^n(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^N$ reads $\mathbf{f}^n(\boldsymbol{\mu}) := CY^n \mathbf{a}^n(\boldsymbol{\mu})$, $n = 1, \dots, F$.

Firstly, we consider the linear case, i.e. $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{0}$, and we discuss a suitable technique for the solution of the rectangular system (28).

We multiply both sides by $(A^{n+1}(\boldsymbol{\mu}))^T$, thus getting the squared linear system:

$$D^{n+1}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{a}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{F}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}), \quad (29)$$

where $D^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) = (A^n(\boldsymbol{\mu}))^T A^{n+1}(\boldsymbol{\mu})$ and $\mathbf{F}^{n+1} = (A^n(\boldsymbol{\mu}))^T \mathbf{f}^n(\boldsymbol{\mu})$. We notice that for any given n the vectors of the basis could be linearly dependent and, as a consequence, $\text{rank}(D^n(\boldsymbol{\mu})) \leq M$. In particular, we observe that, $\forall \boldsymbol{\mu} \in D^\mu$, $\text{rank}(D^n(\boldsymbol{\mu})) = \min\{P, M\}$, $\forall n = 1, \dots, F-1$, where P and M are the dimensions of the space of parameters and the reduced subspace, respectively. In order to solve the system (29) according with the values of P and M we use two different techniques depending on the value assumed by the rank of the matrix $D^n(\boldsymbol{\mu})$. When $D^n(\boldsymbol{\mu})$ has full rank ($= M$) we perform an LU factorization of $D^n(\boldsymbol{\mu})$ at each time-step. Otherwise (i.e. $\text{rank}(D^n(\boldsymbol{\mu})) < M$), we use the generalized inverse $\tilde{D}^n(\boldsymbol{\mu})$ of $D^n(\boldsymbol{\mu})$ obtained by means of the Singular Value Decomposition [21]. In practise, we find two orthogonal matrices $U(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ and $V(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ s.t.: $U(\boldsymbol{\mu})^T D^n(\boldsymbol{\mu}) V(\boldsymbol{\mu}) = \Sigma(\boldsymbol{\mu})$, $n = 1, \dots, F$, where $\Sigma(\boldsymbol{\mu}) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{N \times M}$, with $k = \text{rank}(D^n(\boldsymbol{\mu}))$ and σ_i , for $i = 1, \dots, k$, are the singular values of $D^n(\boldsymbol{\mu})$. By defining $\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}) = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_k^{-1}, 0, 0, \dots)$, $\tilde{D}^n(\boldsymbol{\mu})$ reads $\tilde{D}^n(\boldsymbol{\mu}) = V(\boldsymbol{\mu}) \tilde{\Sigma}(\boldsymbol{\mu}) (U(\boldsymbol{\mu}))^T$. Finally, the solution weights $\mathbf{a}^n(\boldsymbol{\mu})$ are given by $\mathbf{a}^n(\boldsymbol{\mu}) = \tilde{D}^n(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{F}^n(\boldsymbol{\mu})$. It is important to point out that the matrix $D^n(\boldsymbol{\mu})$ can be affinely decomposed, $\forall n = 0, \dots, F$, similarly to the PDEs case, as a combination of parameter independent matrices, say D_q^n , with parameter dependent weights, say $\Theta_q(\boldsymbol{\mu})$:

$$D^n(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{q=1}^Q \Theta_q(\boldsymbol{\mu}) D_q^n, \quad Q \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

This allows to extend to the RB_μ -DAEs method the *offline-online* decomposition, with a very rapid *online* step, being $M \ll N$. Hence, the computation of all the matrices A_q^n can be done *offline* and just once and, in correspondence of any new parameter, the *online* step consists only in the assembling of the whole matrix $D^n(\boldsymbol{\mu})$ and solving the reduced problem.

In the nonlinear case, i.e. for $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$, similar considerations could be done. For the solution of the nonlinear system (28), we use the Newton method [21], an iterative solver requiring at each iteration r the solution of the following linear system (which is rectangular in our case):

$$J_r(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{a}_{r+1}^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{b}_r(\boldsymbol{\mu}); \quad (31)$$

where $J_r(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ is defined as $J_r(\boldsymbol{\mu}) = A^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) - \Delta t \nabla \mathbf{g}(t^{n+1}, Y^{n+1} \mathbf{a}_r^{n+1}(\boldsymbol{\mu}))$ and $\mathbf{b}_r(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^N$ is defined as $\mathbf{b}_r(\boldsymbol{\mu}) = -A^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{a}_r^{n+1}(\boldsymbol{\mu}) + \Delta t \mathbf{g}(t^{n+1}, Y^{n+1} \mathbf{a}_r^{n+1}(\boldsymbol{\mu})) - \mathbf{f}^{n+1}(\boldsymbol{\mu})$, with $A^n(\boldsymbol{\mu})$ and $\mathbf{f}^n(\boldsymbol{\mu})$ defined as in the linear case $\forall n = 1, \dots, F$. Once again, with a technique similar to the one adopted in the linear case, we multiply both sides of Eq.(31) by $(J_r^{n+1})^T(\boldsymbol{\mu})$ in order to get an $M \times M$ dimensional problem whose matrix can have rank less than M . Unfortunately, unlike the linear case where the rank was known a priori, it is not possible to find a relation for the rank of the matrix. Hence, we should check at each iteration of the Newton method the value of the rank and perform an LU factorization or compute the generalized inverse matrix. This implies that computational cost of the nonlinear case is greater than in the linear one. Also, only the linear part of the system can be affinely decomposed and, as a consequence, we should evaluate *online* the nonlinear term.

Remark 3.3 *An important issue of the RB_μ -DAEs method consists in the choice of the vectors of the basis, since the projection onto the reduced space could lead to an ill-conditioned and, even worse, to an ill-posed systems. Thus, the choice of the parameters $\{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_M\}$, and hence of the basis, is crucial and will be discussed in Sec.3.3.2.*

3.3.2 The generation of the basis

We propose an adaptive procedure for the choice of the basis vectors in analogy with the RB_μ -PDEs method (see [16]). Actually, different approaches can be implemented (e.g. random generation from a Gaussian or uniform distribution [7]), but in spite of their easy implementation and rapid computation, experimental tests have revealed that they work only in the linear case. Hence, in the nonlinear case a generation approach similar to the one used for the RB_μ -PDEs method is proposed and described in the following steps.

The basis parameters are chosen among a finite set of parameters, let say $\mathcal{D} \subset D^\mu$. Let $\mathbf{y}_{h,j}^n = \mathbf{y}_h(t^n, \boldsymbol{\mu}_j)$ be the non-reduced solution associated with the j -th parameter in \mathcal{D} at the time-step t^n and $\mathbf{y}_{R,j}^n$ be the reduced one in correspondence of the same parameter and time-step. Our procedure reads as follows:

1. we choose randomly $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{D}$; then we compute $\mathbf{y}_{h,1}$ and set $Y = [\mathbf{y}_{h,1}]$;
2. for $m = 1, \dots, M_{max}$, with $M_{max} \ll N$ to be fixed a priori:
 - (a) $\forall \boldsymbol{\mu}_j \in \mathcal{D}$ such that $\boldsymbol{\mu}_j \neq \boldsymbol{\mu}_k$, $k = 1, \dots, i - 1$, compute: $e_j = \max_{n=0, \dots, F} \frac{\|\mathbf{y}_{h,j}^n - \mathbf{y}_{R,j}^n\|}{\|\mathbf{y}_{h,j}^n\|}$, where $\mathbf{y}_{R,j}$ is the reduced solution computed with the actual matrix Y ;
 - (b) if $e_j < \varepsilon \forall j$, with ε fixed a priori, stop the procedure, else go to 2c;
 - (c) set $\boldsymbol{\mu}_i = \operatorname{argmax}_{\mathcal{D} \setminus \{\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_{m-1}\}} e_j$;
 - (d) set $Y = [\mathbf{y}_{h,1} \dots \mathbf{y}_{h,m}]$.

This procedure is computationally expensive, since for each parameter in \mathcal{D} , a non-reduced solution is required. However, this procedure is performed only once *offline*. Also, this procedure can be improved in terms of accuracy adding a control on the rank of the matrix Y each time a new basis vector is introduced. Once provided the reduced subspace S_R and the matrix Y , the CPU times associated with the computation of the reduced solution at the *online* step are significantly smaller than the ones required while computing the corresponding non-reduced solution. Nevertheless, it is important to point out that the real gain in the RB_μ -DAEs method cannot be appreciated in the computation of a single solution, but rather in a many-query context: if the time required to perform the adaptive procedure and to compute the reduced solutions is smaller than the one required to compute the non-reduced solutions, then, the RB_μ -DAEs method is convenient (see also Sec.4).

3.4 A priori error estimate

In this Section we derive an *a priori* error estimate for the RB_μ -DAEs method.

Typically, in the context of the time-discretization schemes an a priori estimate of the local error, i.e. the approximation error generated at each time-step, is derived in order to obtain the estimate of the global error, i.e. over the whole time interval; we apply the same approach also to the analysis of the RB_μ -DAEs method. In view of the error estimate, we recall that the proposed DR approach is structured in two consequent steps: a discretization step and a reduction one (see Sec.3.3.1). Since we consider the non-reduced approximate solution as a “truth” approximation of the exact one, we are mostly interested in estimating the error committed in the reduction step of our method performed after a discretization in time. For this reason, we will only consider the estimation of the *reduction error*, which is defined as:

$$e_R(t^n, \boldsymbol{\mu}) := \|\mathbf{y}_h^n(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{y}_R^n(\boldsymbol{\mu})\|, \quad n = 1, \dots, F, \quad (32)$$

where $\mathbf{y}_h^n(\boldsymbol{\mu})$ and $\mathbf{y}_R^n(\boldsymbol{\mu})$ are respectively the non-reduced and reduced solutions at time t^n . In this Section we provide a bound for the global reduction error:

$$E_R(\boldsymbol{\mu}) := \max_{n=1, \dots, F} e_R(t^n, \boldsymbol{\mu}). \quad (33)$$

For the sake of simplicity, we provide the estimate for the system (1) and we consider the parameter vector as a single parameter $\boldsymbol{\mu} = \mu \in \mathbb{R}$; also, the matrix $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is defined as $C = I_N$, the identity matrix.

The local error $e_R(t^n, \mu)$ (32) is estimated in the following Theorem.

Theorem 3.1 *If $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \mu)$ satisfies the assumptions of Sec.1 with Lipschitz constant L , $\forall \mu \in D^\mu$, then there exists a positive constant $k \in \mathbb{R}$ such that:*

$$e_R(t^{n+1}, \mu) \leq \overline{C}^n(\Delta t, \mu) \max_{i=1, \dots, n} \left(k \inf_{\mathbf{w} \in S_R(t^i)} \|\mathbf{y}_h^i(\mu) - \mathbf{w}\| \right) \quad n = 1, \dots, F, \quad (34)$$

where $\overline{C}^n(\Delta t, \mu) := [C_{LU}(\mu) C_Y(\mu)(1 + \Delta t L) + 1] \frac{(C_{LU}(\mu))^n - 1}{C_{LU}(\mu) - 1}$ for $n = 1, \dots, F$ with $C_{LU}(\mu) := C_L C_U(\mu)$; the constant C_L depends on the Lipschitz constant L , while $C_U(\mu)$ and $C_Y(\mu)$ are defined as follows:

$$C_U(\mu) := \max_{n=1, \dots, F} \|U^n(\mu)\|, \quad C_Y(\mu) := \max_{n=1, \dots, F} \|Y^n(\mu)\|, \quad (35)$$

being $U^n(\mu) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ chosen such that $(U^n(\mu))^T Y^n(\mu) = I_M \forall n = 1, \dots, F$, with I_M the identity matrix [12].

Proof. For the sake of clearness, we omit the explicit dependence on the parameter for \mathbf{y}_h^n , \mathbf{y}_R^n and the associated variables. If we apply to Eq.(1) the BE scheme we can rewrite system (1) at each time-step as follows:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) := \mathbf{y}_h^{n+1} - \Delta t \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) - \mathbf{y}_h^n = 0 \quad n = 0, \dots, F-1, \quad (36)$$

where $\mathbf{y}_h^n = \mathbf{y}_h^n(\mu)$. Also, if we apply the DR approach described in Sec.3.3 we can write the reduced system as:

$$\mathbf{y}_R^{n+1} - \Delta t \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}_R^{n+1}; \mu) - \mathbf{y}_R^n = 0 \quad n = 0, \dots, F-1; \quad (37)$$

where $\mathbf{y}_R^n = \mathbf{y}_R^n(\mu)$. Equivalently:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_R^{n+1}; \mu) + (\mathbf{y}_h^n - \mathbf{y}_R^n) = 0 \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (38)$$

We note that the Lipschitz-continuity of the function \mathbf{f} is inherited by the function \mathbf{F} , which is endowed with a Lipschitz constant $(1 + \Delta t L)$ [7]. Eq.s (36) and (38) allow to write:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_R^{n+1}; \mu) + \mathbf{y}_h^n - \mathbf{y}_R^n = \mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) = 0 \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (39)$$

By introducing the projector $P^n \in \mathbb{R}^{N \times N}$ of \mathbb{R}^N onto $S_R(t^n)$, defined as $P^n := Y^n(U^n)^T$ for $n = 1, \dots, F$ and by subtracting $\mathbf{F}(P^{n+1}\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu)$ from Eq.(39), we have:

$$-\mathbf{F}(P^{n+1}\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) + \mathbf{F}(\mathbf{y}_R^{n+1}; \mu) + \mathbf{y}_h^n - \mathbf{y}_R^n = -\mathbf{F}(P^{n+1}\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) + \mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (40)$$

Then, by multiplying both sides of Eq.(40) by $(U^{n+1})^T$ and by recalling the definition of the projector P^{n+1} , we can write:

$$(U^{n+1})^T [\mathbf{F}(Y^{n+1}(U^{n+1})^T \mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) - \mathbf{F}(\mathbf{y}_R^{n+1}; \mu) - \mathbf{y}_h^n + \mathbf{y}_R^n] = (U^{n+1})^T [\mathbf{F}(P^{n+1}\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) - \mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu)] \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (41)$$

We introduce $\forall \mu \in D^\mu$ the vector $\mathbf{w}_h(\mu) \in \mathbb{R}^M$ defined as:

$$\mathbf{w}_h^{n+1}(\mu) := (U^{n+1})^T \mathbf{y}_h^{n+1}; \quad (42)$$

then, by substituting this last expression in Eq.(41) and writing $\mathbf{y}_R^n = Y^n \mathbf{a}^n(\mu)$, we get:

$$(U^{n+1})^T [\mathbf{F}(Y^{n+1} \mathbf{w}_h^{n+1}(\mu); \mu) - \mathbf{F}(Y^{n+1} \mathbf{a}^{n+1}; \mu)] + (U^{n+1})^T (\mathbf{y}_R^n - \mathbf{y}_h^n) = (U^{n+1})^T [\mathbf{F}(P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) - \mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu)]. \quad (43)$$

We define the mapping $H : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ such that $\forall \mathbf{x} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^M$ and $\forall \mu \in D^\mu$ we have:

$$H(\mathbf{x}(t^{n+1}); \mu) := (U^{n+1})^T \mathbf{F}(Y^{n+1} \mathbf{x}(t^{n+1}); \mu) \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (44)$$

Since $\mathbf{F}(\mathbf{y}; \mu)$ is a Lipschitz-continuous function, H inherits the same property with a Lipschitz constant $C_U C_Y (1 + \Delta t L)$ [7]. By recalling the definition of \mathbf{w}_h^n given in Eq.(42), we define:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n(\mu) &:= \mathbf{u}(t^n, \mu) = H(\mathbf{w}_h^n(\mu); \mu) & n = 0, \dots, F-1, \\ \mathbf{v}^n(\mu) &:= \mathbf{v}(t^n, \mu) = H(\mathbf{a}^n(\mu); \mu) & n = 0, \dots, F-1. \end{aligned} \quad (45)$$

Then, we rewrite Eq.(43) as:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1}(\mu) - \mathbf{v}^{n+1}(\mu) &= (U^{n+1})^T e_R(t^n, \mu) \\ &\quad - (U^{n+1})^T [\mathbf{F}(P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) - \mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu)] \quad n = 0, \dots, F-1, \end{aligned} \quad (46)$$

and we find the following upper bound:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1}(\mu) - \mathbf{v}^{n+1}(\mu)\| &\leq \|U^{n+1}\| e_R(t^n, \mu) \\ &\quad + \|U^{n+1}\| \|\mathbf{F}(P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1}; \mu) - \mathbf{F}(\mathbf{y}_h^{n+1}; \mu)\| \quad n = 0, \dots, F-1. \end{aligned} \quad (47)$$

Introducing in the previous expression the Lipschitz constant of \mathbf{F} , $(1 + \Delta t L)$, we write:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{n+1}(\mu) - \mathbf{v}^{n+1}(\mu)\| &\leq \|U^{n+1}\| e_R(t^n, \mu) + (1 + \Delta t L) \|U^{n+1}\| \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^{n+1}\| \\ &\quad n = 0, \dots, F-1. \end{aligned} \quad (48)$$

Moreover, since H is continuously differentiable, we can write:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_h^{n+1}(\mu) - \mathbf{a}^{n+1}(\mu)\| &= \|H^{-1}(\mathbf{u}^{n+1}(\mu); \mu) - H^{-1}(\mathbf{v}^{n+1}(\mu); \mu)\| \leq \\ &\quad C_L \|\mathbf{u}^{n+1}(\mu) - \mathbf{v}^{n+1}(\mu)\| \quad n = 0, \dots, F-1, \end{aligned} \quad (49)$$

where C_L is the Lipschitz constant of H^{-1} ; by using Eq.s (35) and (48) we can write:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_h^{n+1}(\mu) - \mathbf{a}^{n+1}(\mu)\| &\leq C_{LU} (1 + \Delta t L) \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^{n+1}\| + C_{LU} e_R(t^n, \mu) \\ &\quad n = 0, \dots, F-1, \end{aligned} \quad (50)$$

where $C_{LU} := C_L C_U \in \mathbb{R}$. Now we can find a bound for the local error $e_R(t^{n+1}, \mu)$, which we write as:

$$e_R(t^{n+1}, \mu) = \|\mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_R^{n+1} \pm P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1}\| \quad n = 0, \dots, F-1, \quad (51)$$

by means of the triangular inequality:

$$e_R(t^{n+1}, \mu) \leq \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^{n+1}\| + \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_R^{n+1}\| \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (52)$$

For every $n = 0, \dots, F$, we have:

$$\begin{aligned} \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_R^{n+1}\| &= \|Y^{n+1}(\mathbf{w}_h^{n+1}(\mu) - \mathbf{a}^{n+1}(\mu))\| \leq \\ &\|Y^{n+1}\| \|\mathbf{w}_h^{n+1}(\mu) - \mathbf{a}^{n+1}(\mu)\| \quad n = 0, \dots, F-1; \end{aligned} \quad (53)$$

then, by means of Eq.s (35) and (50) we have:

$$\|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_R^{n+1}\| \leq C_Y C_{LU} (1 + \Delta t L) \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^{n+1}\| + C_{LU} e_R(t^n, \mu) \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (54)$$

By using Eq.(54), we can write:

$$e_R(t^{n+1}, \mu) \leq [C_{LU} C_Y (1 + \Delta t L) + 1] \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^{n+1}\| + C_{LU} e_R(t^n, \mu) \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (55)$$

If we define:

$$\epsilon^{n+1}(\mu) := [C_{LU} C_Y (1 + \Delta t L) + 1] \|P^{n+1} \mathbf{y}_h^{n+1} - \mathbf{y}_h^{n+1}\| \quad n = 0, \dots, F-1, \quad (56)$$

we can write the following recursive inequality:

$$e_R(t^{n+1}, \mu) \leq \epsilon^{n+1}(\mu) + C_{LU} e_R(t^n, \mu) \quad n = 0, \dots, F-1. \quad (57)$$

By using a recursive strategy over the time (similar to the one presented in [17]) and by recalling that $e_R(t^0, \mu) = \mathbf{y}_h^0 - Y^0 \mathbf{a}^0 = 0$, we can write:

$$\begin{aligned} e_R(t^n, \mu) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon^{n-i-1}(\mu) (C_{LU})^i \leq \max_{i=0, \dots, n-1} \epsilon^i(\mu) \sum_{i=0}^{n-1} (C_{LU})^i = \\ &\max_{i=1, \dots, n-1} \epsilon^i(\mu) \frac{(C_{LU})^n - 1}{C_{LU} - 1} \quad n = 1, \dots, F; \end{aligned} \quad (58)$$

then, by recalling Eq.(56), it follows:

$$e_R(t^n, \mu) \leq \overline{C}(\Delta t) \max_{i=1, \dots, n} \|P^i \mathbf{y}_h^i(\mu) - \mathbf{y}_h^i(\mu)\| \quad n = 1, \dots, F, \quad (59)$$

where $\overline{\mathcal{C}}^n(\Delta t) = \overline{\mathcal{C}}^n(\Delta t, \mu)$. In order to make effective the estimate (59), we need to bound the vector norm $\|P^i \mathbf{y}_h^i(\mu) - \mathbf{y}_h^i(\mu)\|$, for $i = 1, \dots, n$ and $n = 1, \dots, F$. With this aim, let us recall a standard result on projectors (see [17]) for which, given a subspace $S \subset \mathbb{R}^N$ and a projector B , there exists a positive constant c_B s.t. $\|B\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \leq c_B \inf_{\mathbf{w} \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. By applying this property to our problem and by introducing the positive constant $k \in \mathbb{R}$, the result (34) follows. \square

We need now a bound for the following term in Eq.(34):

$$\inf_{\mathbf{w} \in \mathcal{S}_R(t^i)} \|\mathbf{y}_h^i(\mu) - \mathbf{w}\| \quad \forall i = 1, \dots, F. \quad (60)$$

With this aim, we introduce the following Definitions and an associated Proposition which will be the basis of the main result of this Section.

Definition 3.1 *Let us suppose that for $j = 1, \dots, J$ the parameters λ_j are distinct and evenly distributed and that $\mathbf{x}(\lambda_j) \in \mathbb{R}^N$ is known for $j = 1, \dots, J$; the Lagrangian subspace is defined as:*

$$\mathcal{S}_L := \text{span} \{ \mathbf{u}^j \mid \mathbf{u}^j = \mathbf{x}(\lambda_j), j = 1, \dots, J \}, \quad (61)$$

which is the set of linear combinations of J points in \mathbb{R}^N .

Definition 3.2 *Given a scalar parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, the Lagrangian interpolating polynomial [21] is defined by:*

$$\mathbf{x}_L(\lambda) = U \mathbf{w}_L(\lambda), \quad (62)$$

where

$$[\mathbf{w}_L(\lambda)]_j := \prod_{k=1, k \neq j}^J \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}. \quad (63)$$

and $U := [\mathbf{u}^1 \ \mathbf{u}^2 \ \dots \ \mathbf{u}^M]$, being \mathbf{u}^j , for $j = 1, \dots, J$, members of the basis of \mathcal{S}_L .

Remark 3.4 *The Lagrangian subspace \mathcal{S}_L coincides with the reduced subspace $\mathcal{S}_R(t^n)$ at each time-step with $J = M$: in fact the basis vectors \mathbf{u}^j , $j = 1, \dots, M$, assume the form of $\mathbf{y}(t^n, \mu_j)$ and, hence, U plays the role of the matrix Y^n . The Lagrangian interpolating polynomial associated with a particular choice of the parameter $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$ is a representation of the reduced solution (it is in fact a combination of the basis vectors). This allows the following result (see [17] or [21] for the proof) on the Lagrangian polynomial which will be useful in the estimate of an upper bound for the expression (60).*

Proposition 3.1 *Let $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ be a continuous function and let \mathcal{S}_L be the Lagrangian subspace of dimension J , defined in Eq.(61). If $\mathbf{x}(\lambda) \in \mathcal{C}^{J+1}(\mathbb{R})$, the space of $(J + 1)$ times differentiable functions, for each parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ there*

exists another parameter $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ s.t. the approximation error of the Lagrangian interpolating polynomial could be estimated as:

$$\mathbf{x}_i(\lambda) - \mathbf{x}_{L,i}(\lambda) = \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^J (\lambda - \lambda_k)}{(J+1)!} \frac{d^{(J+1)} \mathbf{x}_i(\tilde{\lambda})}{d\lambda^{J+1}} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (64)$$

Hence, we have the following upper bound of the Lagrangian approximation error:

$$\|\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}_L(\lambda)\| \leq \frac{2^{J+1}}{(J+1)!} \left\| \frac{d^{(J+1)} \mathbf{x}}{d\lambda^{J+1}} \right\| \frac{|D|}{J}, \quad (65)$$

where $|D| = \max_{1 \leq i, j \leq J, i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$.

If we combine the results shown in Theorem 3.1 and Proposition 3.1 we can find the following upper bound for the reduction-error.

Theorem 3.2 *Let $e_R(t^n, \mu)$ be the reduction error defined in Eq.(32). Under the assumptions of Theorem 3.1 and by keeping the same notation, $e_R(t^n, \mu)$ satisfies the following inequality:*

$$e_R(t^{n+1}, \mu) \leq \overline{C}^n(\Delta t, \mu) k |D| \frac{2^{M+1}}{M(M+1)!} \left(\max_{i=1, \dots, n} d_{M+1}^i(\mu) \right) \quad n = 0, \dots, F-1, \quad (66)$$

where $d_{M+1}^i(\mu) := \frac{d^{(M+1)} \mathbf{y}_h^i}{d\mu^{M+1}}$ and $|D| = \max_{1 \leq i, j \leq J, i \neq j} |\mu_i - \mu_j|$ depends on the selected parameters for the generation of the basis.

Proof. For the sake of simplicity we omit the parameter dependence for all variable depending on \mathbf{y}_h and \mathbf{y}_R . By recalling Remark 3.4 we can apply the result given in Proposition 3.1 to Eq.(34), thus obtaining:

$$e_R(t^{n+1}, \mu) \leq \overline{C}^n(\Delta t, \mu) k \max_{i=1, \dots, n} \left\| \frac{d^{(M+1)} \mathbf{y}_h}{d\mu^{M+1}} \right\| \frac{2^{M+1}}{(M+1)!} \frac{|D|}{M}. \quad (67)$$

The definition of $d_{M+1}^i(\mu)$ leads to the thesis. \square

By using the results of Theorem 3.2 concerning the local reduction error, it is possible to estimate the global reduction error $E_R(\mu)$ as reported in the following Theorem.

Theorem 3.3 *If the assumptions in Theorem 3.2 hold for the global reduction error (Eq.(33)), the following a priori estimate holds:*

$$E_R(\mu) \leq \tilde{C}(\Delta t, \mu) d_{max}(\mu) \frac{2^{M+1}}{(M+1)!} \frac{|D|}{M}, \quad (68)$$

where $d_{max}(\mu) := \max_{n=1, \dots, F} d_{M+1}^n(\mu)$ and $\tilde{C}(\Delta t, \mu) := \max_{n=1, \dots, F} \overline{C}^n(\Delta t, \mu)$.

Proof. The thesis follows from the inequality $(C_{LU})^n \leq (C_{LU})^F$, $\forall n = 1, \dots, F$, and from the definition of d_{max} . \square

Theorem 3.3 ensures that $E_R(\mu) \rightarrow 0$ as $M \rightarrow \infty$, $\forall \mu \in D^\mu \subset \mathbb{R}$ because of the factorial term and the fact that $|D| \rightarrow 0$ as $M \rightarrow \infty$; when the number of basis vectors tends to infinity, S_R covers the whole \mathbb{R}^N , i.e the reduced solution $\mathbf{y}_R(t^n, \mu)$ is actually a member of the basis itself and $e_R(t^n, \mu) = 0$ at each time-step.

4 Numerical tests

In this Section we provide some numerical tests for problem (1) with both a linear and nonlinear parameter dependence. For the numerical solution we use the proposed RB_μ -DAEs and, for the sake of comparison, the POD_μ method presented in Sec.2.1. We analyze the performances of the RB_μ -DAEs method from two standpoints: the error behavior and the computational cost.

Numerical tests for the linear problem are reported in [7]; for the linear formulation of the problem the RB_μ -DAEs method gives optimal results: the matrix of the reduced system allows an affine decomposition similar to the one presented in Sec.3.2 for the PDEs case. In this way, most of the computational effort resides in the *offline* step; the *online* step only requires the assembling of the matrix and the solution of an M dimensional system, which is actually very fast. Such decomposition is not possible when dealing with parametric nonlinearity. Even larger savings in computational costs are allowed by the reduced method in the nonlinear case.

4.1 Test1: linear parameter dependence

In this Section we compare the numerical results obtained by using the RB_μ -DAEs and the POD_μ methods on problem (1); with the choice of $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = -R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$, this is a nonlinear problem with a nonlinear parameter dependence. Moreover, we choose a scalar parameter $\boldsymbol{\mu} = \mu \in D^\mu \subset \mathbb{R}$, which represents the resistance associated with each resistor of the chain.

4.1.1 Implementation

Let us report some details on the implementation of the methods.

Both methods require the computation of some non-reduced solutions for the assembling of the projection matrices. Those solutions are obtained by solving problem (1), with $N = 200$ and $T = 30$ ns, using the BE method for the time discretization with a time-step $\Delta t = 5 \cdot 10^{-10}$ s and the Newton method for the solution of the nonlinear system at each time-step with a tolerance of $5 \cdot 10^{-5}$ on the residual.

In the implementation of the adaptive procedure and for building the cubic spline we use $D = 40$ non-reduced solutions computed in correspondence of D parameters randomly chosen in the set $D^\mu = [10^4, 3 \cdot 10^4]$ Ω . Both reduced solutions are computed using the BE scheme with the same time-step used

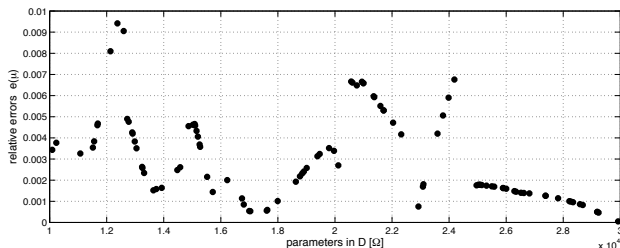


Figure 2: Test 1: relative errors $e(\mu)$ vs $\mu \in D$ in correspondence of $M = 8$.

for the non-reduced system and the Newton scheme for the nonlinear system, now with a tolerance of $5 \cdot 10^{-4}$ on the residual. These reduced solutions are computed in correspondence of a set \overline{D}^μ of 100 new parameters randomly chosen from the same set D^μ .

Remark 4.1 *In the implementation of the adaptive procedure for the RB_μ -DAEs method we add a control on the rank of the current Y : we allow a solution \mathbf{y}_h to concur to the new basis vectors only if at each time-step the matrix Y is not rank deficient.*

4.1.2 Error behavior

In this Section we discuss the error behavior associated with the RB_μ -DAEs method, in particular, we analyze the error over the set \overline{D}^μ with a fixed dimension of the basis and, then, the error behavior as the number of basis vectors changes.

For testing these properties we perform the adaptive procedure over a set of D parameters and we compute the reduced solutions over the set \overline{D}^μ . The relative error reads:

$$e(\mu) = \max_{n=1, \dots, F} \frac{e_R(t^n, \mu)}{\|\mathbf{y}_h(t^n, \mu)\|}, \quad (69)$$

where $e_R(t^n, \mu)$ is the local error defined in Eq. (32). Fig.2 displays the relative errors vs the set of parameters \overline{D}^μ . The reduced solutions are computed using a projection matrix formed by $M = 8$ basis vectors: this error behavior can be explained by the adaptive procedure, as the current parameter is close to a basis parameter the error goes to zero since a great part of the information concerning the exact solution is stored in the projection matrix. On the other hand, a larger error occurs when the current parameter is far from the ones in the basis. In Fig.3 we report the error behavior in correspondence of two different parameter values as M changes. As expected from Theorem 3.3, as M increases, the error decreases almost linearly: this is due to the low number of basis vectors M used; however we expect an improvement of the convergence rate as M tends to infinity.

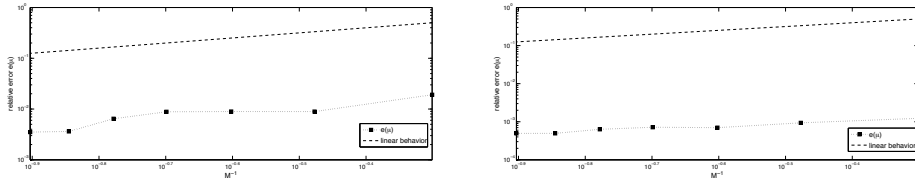


Figure 3: Test 1: relative errors vs M^{-1} in correspondence of $\mu = 19479 \Omega$ (left) and $\mu = 29196 \Omega$ (right) in a logarithmic scale; a linear reference behavior is also reported with a dotted line.

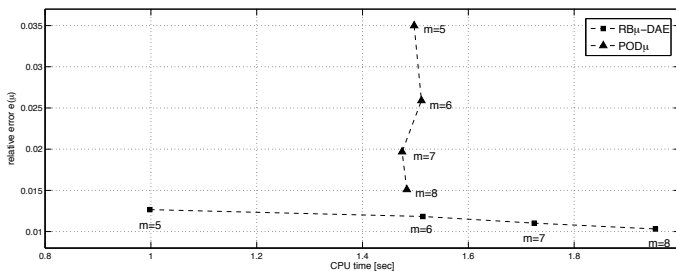


Figure 4: Test 1: relative errors $e(\mu)$ vs CPU time [sec] in correspondence of different numbers m of basis vectors.

Remark 4.2 *Simulations performed using a vector parameter with a linear parameter dependence highlight a similar error behavior and the same conclusions can be drawn; for more details on this issue see [7].*

4.1.3 Comparison with the POD_μ method

In this Section we compare the numerical results obtained on the same problem by the RB_μ -DAEs method and the POD_μ method. As already discussed in Sec.4.1.1 the same set of parameters is used for the generation of both the projection matrices; the results reported refer to the set \overline{D}^μ . In this Section and in the following ones we will use m to indicate the number of basis vectors both for the RB_μ -DAEs (M) and POD_μ (K) methods. Fig.4 displays for different values of m the relative errors versus the CPU time. In particular, each dot in the plot represents the mean value of both the displayed variables over \overline{D}^μ . These results show that the two methods have a completely different behavior. In the RB_μ -DAEs method the computational cost increases with m , while in the POD_μ method it is almost constant. This can be explained by the condition number of the reduced systems; in the first method as m increases the condition number of the linear system (at each Newton iteration) increases and more Newton iterations are required to reach the prescribed tolerance. This does not occur with the POD_μ method where the condition number is almost fixed.

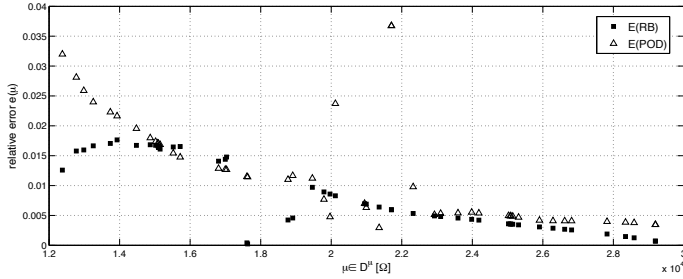


Figure 5: Test 1: comparison of the RB_μ -DAEs method and the POD_μ one; relative errors $e(\mu)$ vs $\mu \in D$ are reported in correspondence of $m = 5$.

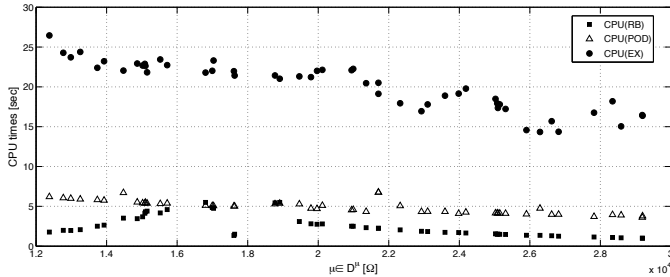


Figure 6: Test 1: comparison of the RB_μ -DAEs method and the POD_μ one; CPU times [sec] vs $\mu \in D$ are reported in correspondence of $m = 5$.

The RB_μ -DAEs method requires less computational time only for $m = M < 6$ basis vectors; besides that, also the relative error should be taken into account. Increasing the number of basis vectors, both methods show improvements in the accuracy: in the RB_μ -DAEs method we have a slower error decrease but the level of accuracy is always better than the POD_μ one. In Figs. 5 and 6 we report in correspondence of a fixed value of m the relative error and the computational times for both the methods. In these plots the different behavior is still evident: we can notice again the “jumping” behavior of the RB_μ -DAEs method (already explained in the previous paragraph) and the smooth behavior of the POD_μ one. This can be explained by the theory at the basis of the method itself: as the parameter becomes larger (i.e. larger resistance), then the transient of the circuit is dominated by a linear dynamics which requires few basis vectors (associated with the energy of the system) to be described.

4.2 Test 2: nonlinear parameter dependence

In this Section we consider the nonlinear parameter dependence; we show results obtained solving the problem (1) with $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}) = -R\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$. The scalar parameter $\boldsymbol{\mu} = \mu \in D^\mu \subset \mathbb{R}$ represents the thermal voltage of the diode

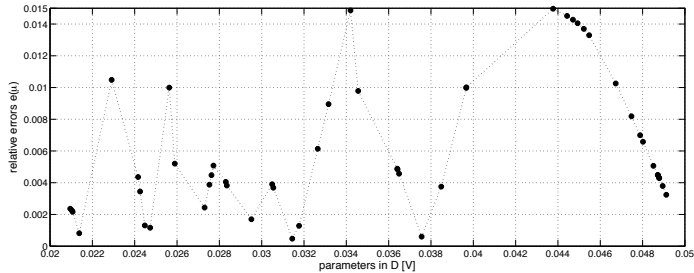


Figure 7: Test 2: relative errors $e(\mu)$ vs $\mu \in D$ in correspondence of $M = 8$.

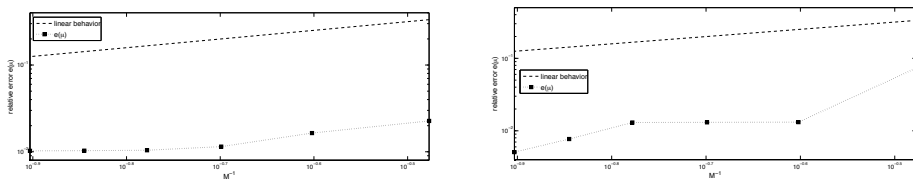


Figure 8: Test 2: relative errors vs M^{-1} in correspondence of $\mu = 0.046729$ V (left) and $\mu = 0.027724$ V (right) in a logarithmic scale; a linear reference behavior is also reported with a dotted line.

whose constitutive law has an exponential dependence on this parameter; this fact makes the basis generation more complex: the condition number of the problem can increase, thus requiring higher computational costs. Other data and the implementation techniques for the solution of this problem are the same described in Sec.4.1.1.

4.2.1 Error behavior and comparison with the POD method

Let us consider the error behavior of the RB_μ -DAEs method and we compare its performances w.r.t. the POD_μ ones for a nonlinear parameter dependence. We perform the adaptive procedure for the basis generation over a set of $D = 40$ parameters randomly chosen in the set $D^\mu = [0.02, 0.05]$ V. Fig.7 displays the relative errors, defined in Eq.(69), as the parameter μ changes; we can notice again the typical “jumping” behavior: the error tends to zero when the current parameter is close to a basis one. In Fig.8 we report the relative error as M changes for a fixed value of the parameter: again, we have a monotone decreasing of the error ad M increases.

Regarding the POD_μ method: for the basis generation we use the same set of parameters used in the adaptive procedure and we test both the methods on the same set \overline{D}^μ of 50 new parameters chosen randomly in D^μ . Fig.9 shows the relative errors vs the CPU time in correspondence of different numbers m of basis vectors. In the nonlinear case the CPU time required by the RB_μ -

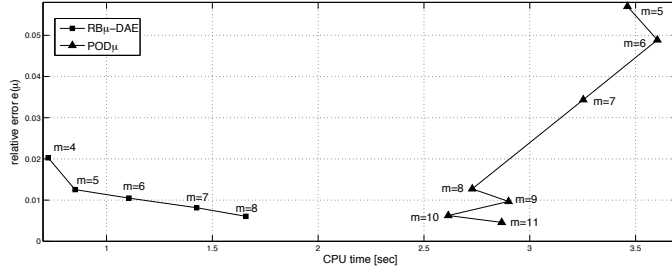


Figure 9: Test 2: relative errors $e(\mu)$ vs CPU time [sec] in correspondence of different numbers m of basis vectors.

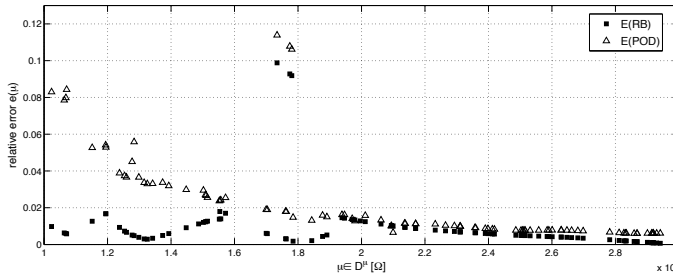


Figure 10: Test 2: comparison of the RB_μ -DAEs method and the POD_μ one; relative errors $e(\mu)$ vs $\mu \in D$ are reported in correspondence of $m = 5$.

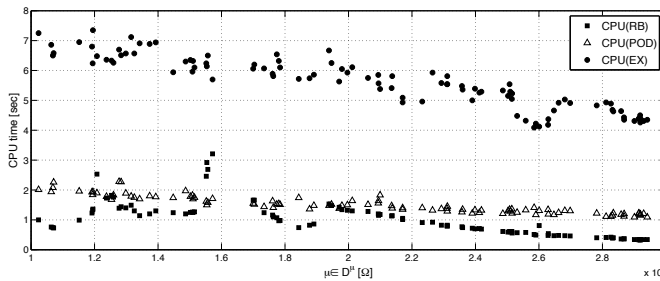


Figure 11: Test 2: comparison of the RB_μ -DAEs method and the POD_μ one; CPU times [sec] vs $\mu \in D$ are reported in correspondence of $m = 5$.

DAEs method for the solution of the reduced system is always lower than the POD_μ one. Again, the curve corresponding to the POD_μ method in the plot has a vertical displacement, also, the CPU time can decrease with m since the conditioning of the system can get better when adding some new basis vectors. We report results obtained for $m = M = 4, \dots, 8$ for the RB_μ -DAEs method:

an $m = M = 9$ vector basis is hard to be built due to instabilities caused by the bad conditioning of the reduced problem; for the POD_μ method we report results for $m = K = 5, \dots, 11$ since the value of the relative errors and the CPU times become almost stationary for $m = K > 11$. The relative error achieved with the POD_μ method becomes competitive with the RB_μ -DAEs one only in correspondence of about $m = K = 10$ basis vectors for the POD_μ method. Figs 10 and 11 show a comparison of the two methods in terms of relative errors and the computational times respectively: we can draw similar conclusions as those reported for the linear parameter dependence; also, in this case the computational saving of the RB_μ -DAEs method is definitely lower.

5 Conclusions

In this work we have proposed a Reduced Basis method (RB_μ -DAEs) for the solution of parametrized systems of DAEs. In particular, we have considered a Microelectronic application, even if the method is applicable to other Engineering problems as well. We have proposed an *a priori* estimate for the error associated with the solution of parametrized problems via the RB_μ -DAEs method, thus highlighting that the error rapidly decreases as the number of basis vectors used for the reduction increases. Numerical tests reveal that the proposed RB_μ -DAEs method, in comparison with a POD approach for parametrized DAEs (POD_μ), is efficient for the solution of such problems. This is more evident in the case of nonlinear problems with nonlinear parameter dependence; e.g. for the numerical test discussed in this work, the computational costs of the online step associated with the RB_μ -DAEs method are even more than three times lower than those of the POD_μ approach, for a prescribed error level.

Acknowledgements

The third Author (A.Q.) is indebted with E.J.W. ter Maten and W.H.A. Schilders (both from NXP Semiconductors Research and Technical University, Eindhoven) for many useful discussions at the early stage of this research project. The Authors acknowledge G. Rozza (École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland) for the suggestions and helpful discussions.

References

- [1] P. Astrid. Reduction of process simulation models: a proper orthogonal decomposition approach. PhD Thesis, Eindhoven University of Technology, 2004.
- [2] P. Astrid, A. Verhoeven. Application of Least Square MPE technique in the reduced proper modeling of electrical circuits. In *Proceedings of the International Symposium on MTNS*, Kyoto, Japan, July 24-28 (2006).
- [3] P. Astrid, S. Weiland, K. Willcox, A.C.P.M. Backx. Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Paradise Island, Bahamas (2004).

- [4] B.N. Bond, L. Daniel. Parameterized model order reduction of nonlinear dynamical systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on computer-aided design*, San Jose, California, November (2005).
- [5] T. Bui-Thanh, M. Damodaran, K. Willcox. Proper orthogonal decomposition extensions for parametric applications in compressible aerodynamics. In *Proceedings of 21st AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Orlando, Florida, June 23-26 (2003).
- [6] C. De Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [7] M. D'Elia. Reduced-basis method and Model Order Reduction for initial value problems of differential algebraic equations. Master Thesis, Politecnico di Milano, 2007. <http://mox.polimi.it>
- [8] R.W. Freund. Model reduction methods based on Krylov subspaces. *Acta Numerica* **12**, 267-319 (2003).
- [9] R.W. Freund. Reduced-order modeling techniques based on Krylov subspaces and their use in circuit simulation. *Applied and Computational Control, Signals and Circuits* **1**, 435-498, Birkhäuser, Boston (1999).
- [10] E.J. Grimme. Krylov projection methods for model reduction. PhD Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.
- [11] S. Lall, J. E. Marsden, S. Glavaski. A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear systems. *International Journal of robust and nonlinear control* **12**, 519-535 (2002).
- [12] P. Lancaster. *Theory of Matrices*. Academic Press, New York, 1984.
- [13] M. Lin Lee. Estimation of the error in the reduced basis method solution of DAE systems. *SIAM Journal of Numerical Analysis* **28**(2), 512-528 (1991).
- [14] D.A. Nagy. Model representation of geometrically nonlinear behavior by the finite element method. *Computers and Structures* **10**, 683-688 (1977).
- [15] A.K. Noor, J.M. Peters. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **18**, 455-462 (1980).
- [16] A.T. Patera, G. Rozza. *Reduced Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parametrized Partial Differential Equations*. Version 1.0, Copyright MIT 2006-2007. To appear in MIT Pappalardo Graduate Monographs in Mechanical Engineering. <http://augustine.mit.edu/>
- [17] T.A. Porshing. Estimation of the error in the reduced basis method solution of nonlinear Equations. *Mathematics of Computation* **45**(172), 487-496 (1985).
- [18] T.A. Porsching, M. Lin Lee. The reduced basis method for initial value problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis* **24**, 1277-1287 (1987).
- [19] C. Prud'homme, D. Rovas, K. Veroy, Y. Maday, A.T. Patera, G. Turinici. Reliable realtime solution of parametrized partial differential equations: reducedbasis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering* 2002; **124**(1), 70-80.
- [20] A. Quarteroni, G. Rozza, L. Dedè, A. Quaini. Numerical approximation of a control problem for advection-diffusion processes. In *System modeling and optimization, IFIP Int. Fed. Inf. Process.* **199**, 261-273, Springer, New York (2006).

- [21] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [22] M.J. Rewienski. A Trajectory piecewise-linear approach to model order reduction of nonlinear dynamical systems. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [23] G. Rozza. Reduced-basis methods for elliptic equations in sub-domains with a posteriori error bounds and adaptivity. *Journal of Applied and Numerical Mathematics* **55**(4), 403-424 (2005).
- [24] A. Verhoeven, M. Striebel, J. Rommes, J. ter Maten, T. Bechtold. Proper Orthogonal Decomposition Model Order Reduction of nonlinear IC models. *TUe CASA Report*, 2008.
<http://www.win.tue.nl>
- [25] A. Verhoeven, J. ter Maten, M. Striebel, R. Mattheij. Model Order Reduction for nonlinear IC models. *TUe CASA Report*, 2007.
<http://www.win.tue.nl>
- [26] T. Voss, A. Verhoeven, T. Bechtold, J. ter Maten. Model Order Reduction for Nonlinear DAE in Circuit Simulation. *TUe CASA Report*, 2006.
<http://www.win.tue.nl>

OVERLAPPING SCHWARZ WAVEFORM RELAXATION FOR ADVECTION REACTION DIFFUSION EQUATIONS

DAOUD S. DAOUD¹, MARTIN J. GANDER²

¹Dept. of Mathematics, Eastern Mediterranean University,
Famagusta, North Cyprus Via mersin 10, Turkey

² Section de Mathématiques, Université de Genève, Switzerland

Abstract

We analyze overlapping Schwarz waveform relaxation for linear advection reaction diffusion equations. We prove linear convergence of the algorithm on unbounded time intervals and superlinear convergence on bounded time intervals. In both cases the convergence rates are shown to depend on the size of the overlap. The linear convergence result also depends on the number of subdomains, because it is limited by the classical steady state result of overlapping Schwarz for elliptic problems. The superlinear convergence result however is independent of the number of subdomains. Thus overlapping Schwarz waveform relaxation does not need a coarse space for robust convergence independent of the number of subdomains, if the algorithm is in the superlinear convergence regime. Numerical experiments confirm our analysis.

1 Introduction

Overlapping Schwarz waveform relaxation is a long name for an algorithm which simply solves evolution problems in parallel. It got its name as follows: the distribution of the computation is achieved by partitioning the spatial domain into overlapping subdomains, like in the classical Schwarz method [Sch70]. However on subdomains, time dependent problems are solved in the iteration and thus the algorithm is also of waveform relaxation type [LRSV82]. Hence the name overlapping Schwarz waveform relaxation. These algorithms have been introduced in [GZ97, GS98a, GZ02] and independently in [GK02] for the solution of evolution problems in a parallel environment with slow communication links, since they permit to solve over several time steps before communicating information to the neighboring subdomains. They are ideal if

This paper appears after the sudden, tragic death of the first author, and is dedicated to his memory.

Fecha de recepción: 07/01/2009. Aceptado (en forma revisada): 16/02/2009.

one wants to use large existing networks of PC's as a super-computer. An earlier analysis of the same type of algorithm for hyperbolic problems can be found in [BjØ95b, BjØ95a]. For non-linear reaction diffusion equations in one dimension, see [Gan98].

These algorithms stand in contrast to the classical approach in domain decomposition for evolution problems, where time is first discretized uniformly using an implicit discretization and then at each time step a problem in space only is solved using domain decomposition, see for example [Meu91] and [Cai91, Cai94]. The main disadvantage of the classical approach is that one is forced to use the same time step in all subdomains and thus loses one of the main features of domain decomposition, namely to treat subdomains numerically differently. A second disadvantage is that one needs to exchange information at each time step. Overlapping Schwarz waveform relaxation is a remedy for both problems. An interesting variant using moving meshes can be found in [HR07], and the performance of the algorithm can be enhanced using more effective transmission conditions, see [GHN99, Mar05, GH07, BGH09].

In this paper we study classical overlapping Schwarz waveform relaxation for space decompositions in all generality for the linear advection reaction diffusion equation in d dimensions. We prove linear convergence of the algorithm on unbounded time intervals and superlinear convergence on bounded time intervals. Both results are obtained at the continuous level, which leads to algorithms that converge independently of the mesh size if the overlap is held constant.

2 The Schwarz Waveform Relaxation Algorithm

We consider as our guiding example the advection reaction diffusion equation for a scalar density $u(t, \mathbf{x})$ on a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ with boundary $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) := -\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u &= g && \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, \cdot) &= u_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

where $\nu > 0$ is the viscosity parameter, \mathbf{a} is the advection field and c represents a source term. Without loss of generality, we assume that $c \leq 0$; if not, a change of variables $v = ue^{-\sigma t}$ leads to an equation with negative reaction term for a suitable choice of σ . For initial data $u_0 \in C^0(\Omega)$, boundary data $g \in C^0(0, T; C^0(\Omega))$ and $f \in C^0(0, T; C^0(\Omega))$ this problem has a unique solution $u \in C^1(0, T; C^2(\Omega))$. This solution satisfies a maximum principle: if $f = 0$, then the solution $u(t, \mathbf{x})$ attains its maximum either on the initial line, at $t = 0$, or on the boundary, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, see [RR96].

To compute an approximate solution of (1) on a parallel computer, we partition the domain Ω into overlapping subdomains, and then use an algorithm which requires only subdomain solutions to construct an approximation of the solution on the entire domain. A partition into overlapping subdomains can be obtained as follows: we first partition Ω into N non-overlapping subdomains

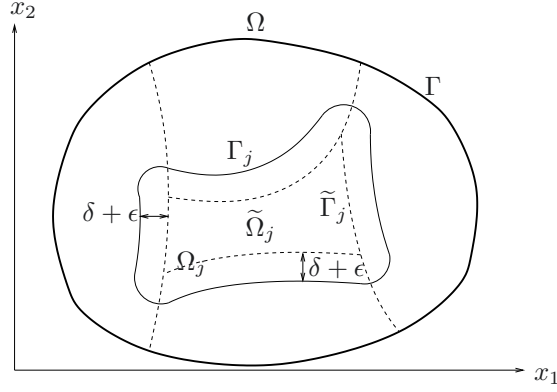


Figure 1: The construction of an overlapping decomposition in two dimensions.

$\tilde{\Omega}_j$ with boundaries $\partial\tilde{\Omega}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, as shown in Figure 1 for an example in two dimensions. We denote the boundaries of the subdomain $\tilde{\Omega}_j$ interior to the domain Ω by $\tilde{\Gamma}_j$ and the part of the boundary shared with $\partial\Omega$ by $\tilde{\Gamma}_j^0$. Then we construct an overlapping decomposition Ω_j with boundary $\partial\Omega_j$ by enlarging each $\tilde{\Omega}_j$ so that the boundaries $\tilde{\Gamma}_j$ of the new subdomains interior to Ω are at least a distance $\delta + \epsilon$ away from $\tilde{\Gamma}_j$. We denote again the part of the boundary $\partial\Omega_j$ shared with $\partial\Omega$ by Γ_j^0 .

We further introduce for technical reasons a partition of unity $\chi_j \in C^\infty$ associated with the non-overlapping subdomains $\tilde{\Omega}_j$ such that $\chi_j = 1$ in $\tilde{\Omega}_j$ and $\chi_j = 0$ outside, except for a small transition layer centered around the interior boundary $\tilde{\Gamma}_j$ of width $2\epsilon > 0$ where χ_j decays smoothly to zero.

To solve the parabolic problem (1), the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm starts with an initial guess $u^0(t, \mathbf{x}) \in C^1(0, T; C^2(\Omega))$ and constructs successive approximations $u^n(t, \mathbf{x}) \in C^1(0, T; C^2(\Omega))$ by solving subdomain problems in the subdomains Ω_j only, using as boundary conditions the traces of u^{n-1} . Once all the subdomain solutions u_j^n are obtained, the new global iterate u^n is defined using the partition of unity, $u^n := \sum_{j=1}^N \chi_j u_j^n$, and hence the new iterate satisfies again $u^n \in C^1(0, T; C^2(\Omega))$. The Schwarz waveform relaxation algorithm is thus given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_j^n) &= f && \text{in } \Omega_j \times (0, T), \\ u_j^n &= u^{n-1} && \text{on } \Gamma_j \times (0, T), \\ u_j^n &= g && \text{on } \Gamma_j^0 \times (0, T), \\ u_j^n(0, \cdot) &= u_0 && \text{in } \Omega_j, \end{aligned} \quad u^n = \sum_{j=1}^N \chi_j u_j^n. \quad (2)$$

Algorithm (2) corresponds to a parallel Schwarz iteration: each subdomain solution u_j^n can be computed independantly of the others, the only data needed is u^{n-1} . One can also consider an alternating Schwarz iteration, which would need a special coloring of subdomains to remain a parallel algorithm: if

subdomains with the same color do not touch each other, then subdomains of the same color can be solved in parallel using the boundary values coming from subdomains with different colors. We focus in the analysis on the parallel version only, analogous results for the alternating version can be obtained similarly.

3 Linear Convergence on Long Time Intervals

To obtain a result valid on long time intervals, we consider the case where $T = \infty$. We define the integer distance quantity m_j for each subdomain Ω_j to be the least number of subdomains one has to pass through to touch the boundary $\partial\Omega$, and also the maximum $m := \max_j m_j$. We further define the index sets $I_l := \{j : m_j = l\}$ so that the index set I_l contains the indices of all the subdomains which are within distance l of the boundary. We further define for bounded functions $g \in C^1(0, T; C^2(\Omega))$ the norm

$$\|g\|_\Omega := \sup_{t>0, \mathbf{x} \in \Omega} |g(t, \mathbf{x})|.$$

Theorem 1 (Linear Convergence) *The iterates u^n defined by the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm (2) converge on long time intervals $t \in [0, T)$, $T \leq \infty$, at least linearly to the solution u of (1),*

$$\|u^{n(m+2)} - u\|_\Omega \leq (\gamma(m, \delta))^n \|u^0 - u\|_\Omega, \quad (3)$$

where $\gamma(m, \delta)$ is a number strictly less than one and independent of n .

Proof. It suffices by linearity to consider the homogeneous problem, $f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}) = 0$ in (1) and to prove convergence of the iterates u^n to zero. The idea of the proof is to construct a sequence of elliptic upper bounds on the iterates u_j^n on each subdomain, and then to apply the maximum principle argument from [Lio89] for the elliptic upper bounds. For n fixed, we define $U^n := \|u^n\|_\Omega$ and using the maximum principle for parabolic problems, the steady state solution \tilde{u}_j^{n+1} of the elliptic problem

$$\begin{aligned} \nu \Delta \tilde{u}_j^{n+1} + \mathbf{a} \cdot \nabla \tilde{u}_j^{n+1} + c \tilde{u}_j^{n+1} &= 0 && \text{in } \Omega_j, \\ \tilde{u}_j^{n+1}(\cdot) &= U^n && \text{on } \Gamma_j, \\ \tilde{u}_j^{n+1}(\cdot) &= 0 && \text{on } \Gamma_j^0, \end{aligned} \quad (4)$$

is an upper bound on the modulus of u_j^{n+1} . Now \tilde{u}_j^{n+1} also satisfies a maximum principle and for $j \in I_0$ we have $\tilde{u}_j^{n+1} < U^n$ in the interior of $\tilde{\Omega}_j$, since \tilde{u}_j^{n+1} satisfies on the part Γ_j^0 of its boundary a homogeneous boundary condition. We now define

$$U^{n+1} := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_l, l \in I_0} \tilde{u}_l^{n+1}(\mathbf{x}),$$

and by the argument above there exists a constant $\gamma_1 < 1$, such that $U^{n+1} \leq \gamma_1 U^n$. Note that γ_1 depends on the size of the overlap, $\gamma_1 = \gamma_1(\delta)$, but not on n , because \tilde{u}_j^{n+1} is a linear function of the boundary condition. Note also that

for $j \notin I_0$ we have \tilde{u}_j^{n+1} not necessarily less than U^n , since \tilde{u}_j^{n+1} has the value U^n on all its boundaries and thus we could have $\tilde{u}_j^{n+1} \equiv U^n$.

Now for the next iteration by definition part of the boundary of the subdomains Ω_j with $j \in I_1$ lie strictly within $\tilde{\Omega}_l$ with $l \in I_0$ and therefore for $j \in I_1$ the solution \tilde{u}_j^{n+2} of the elliptic problem

$$\begin{aligned} \nu \Delta \tilde{u}_j^{n+2} + \mathbf{a} \cdot \nabla \tilde{u}_j^{n+2} + c \tilde{u}_j^{n+2} &= 0 && \text{in } \Omega_j, \\ \tilde{u}_j^{n+2}(\cdot) &= U^n && \text{on } \Gamma_j \cap \tilde{\Omega}_l, l \notin I_0, \\ \tilde{u}_j^{n+2}(\cdot) &= U^{n+1} && \text{on } \Gamma_j \cap \tilde{\Omega}_l, l \in I_0, \end{aligned} \quad (5)$$

is an upper bound on the modulus of u_j^{n+2} . Since $U^{n+1} \leq \gamma_1(\delta)U^n$ we have by the maximum principle $\tilde{u}_j^{n+2} < U^n$ in $\tilde{\Omega}_j$ for $j \in I_1$ and defining U^{n+2} similarly to U^{n+1} before, we find $U^{n+2} \leq \gamma_2(\delta)U^n$ for some constant $\gamma_1(\delta) \leq \gamma_2(\delta) < 1$ independent of n . By induction, we find at step $n+m+1$ for the iterates in the subdomains Ω_j with $j \in I_m$ the elliptic upper bound

$$\begin{aligned} \nu \Delta \tilde{u}_j^{n+m+1} + \mathbf{a} \cdot \nabla \tilde{u}_j^{n+m+1} + c \tilde{u}_j^{n+m+1} &= 0 && \text{in } \Omega_j, \\ \tilde{u}_j^{n+m+1}(\cdot) &= U^n && \text{on } \Gamma_j \cap \tilde{\Omega}_l, l \notin I_{m-1}, \\ \tilde{u}_j^{n+m+1}(\cdot) &= U^{n+m} && \text{on } \Gamma_j \cap \tilde{\Omega}_l, l \in I_{m-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

and $\tilde{u}_j^{n+m+1} < U^n$ in $\tilde{\Omega}_j$. Defining U^{n+m+1} as before we find $U^{n+m+1} \leq \gamma_{m+1}(\delta)U^n$ for some constant $\gamma_1(\delta) \leq \gamma_2(\delta) \leq \dots \leq \gamma_{m+1}(\delta) < 1$, independent of n . Now for the next iteration step $n+m+2$ all the \tilde{u}_j^{n+m+2} have boundary values less than or equal to $U^{n+m+1} \leq \gamma_{m+1}(\delta)U^n$, since they come from iteration step $k+m+1$ in the interior of neighboring subdomains. Defining $\gamma(m, \delta) := \gamma_{m+1}(\delta)$ the result follows. \square

Note that the above estimate for $\gamma(m, \delta)$ is conservative, since $\gamma(m, \delta)$ was derived assuming worst case behavior. $\gamma(m, \delta)$ will also depend on the shape of the subdomains, which does not appear in the above argument because of the generality of the domain decomposition we used.

The convergence result we derived on unbounded time domains depends on the number of subdomains, as one can see explicitly from the dependence of γ on m . The more subdomains one uses, the longer it takes for information to propagate from the outer boundary of Ω to the inner subdomains. This is because the steady state solution is limiting the convergence rate, and the steady state solution does not see the zero initial condition. This is different in the superlinear convergence analysis of the next section.

4 Superlinear Convergence for Bounded Time Domains

We now consider a bounded time interval, $T < \infty$. Like in the unbounded time domain case we are solving at each step n of the waveform relaxation iteration (2) subproblems using the boundary information from the neighboring subdomains at step $n-1$. We are interested in estimating the decay of u_j^n in (2)

as one moves away from the boundary of the subdomain Ω_j for short time t . We define the infinity norm of a function $g(\mathbf{x}, t)$ on the boundary Γ_j of subdomain Ω_j by

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_{\Gamma_j} := \sup_{\mathbf{x} \in \Gamma_j, 0 < t < T} |g(\mathbf{x}, t)|.$$

We first estimate the decay of the iterates on the boundary of the subdomains over one step of the iteration. To do this, we need an estimate of the solution in a ball with radius δ , $B(\delta) \subset \mathbb{R}^d$, of the problem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v) &= 0 & \mathbf{x} \in B(\delta), & \quad 0 < t < T, \\ v(\mathbf{x}, t) &= g(t) & \mathbf{x} \in \partial B(\delta), & \quad 0 < t < T, \\ v(\mathbf{x}, 0) &= 0 & \mathbf{x} \in B(\delta). & \end{aligned} \quad (7)$$

Lemma 2 *For $g(t) \geq 0$, non-decreasing, and $c \leq 0$ the solution v of (7) for $B(\delta) \subset \mathbb{R}^d$ is bounded from above at the center of the ball $\mathbf{x} = 0$ by*

$$v(\mathbf{0}, t) \leq \int_0^t K\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}}, t - \tau\right) g(\tau) d\tau,$$

where the kernel $K(x, t)$ is given by

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^d \cosh(xa_j/(2\nu)) \frac{x}{\sqrt{\pi\nu t^{3/2}}} e^{-\frac{a_j^2 - 4\nu c}{4\nu} t} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}.$$

Proof. We inscribe a hypercube $Q(\delta)$ in \mathbb{R}^d with side $\frac{2\delta}{\sqrt{d}}$ into the ball $B(\delta)$ and consider the decay of \tilde{v} in the hypercube $Q(\delta)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{v}) &= 0 & \mathbf{x} \in Q(\delta), & \quad 0 < t < T, \\ \tilde{v}(\mathbf{x}, t) &= g(t) & \mathbf{x} \in \partial Q(\delta), & \quad 0 < t < T, \\ \tilde{v}(\mathbf{x}, 0) &= 0 & \mathbf{x} \in Q(\delta). & \end{aligned} \quad (8)$$

Evaluating \tilde{v} at the center of the hypercube $Q(\delta)$ we obtain an upper bound on v by the maximum principle and the monotonicity of $g(t)$. Now an upper bound on \tilde{v} at the center of the hypercube $Q(\delta)$ can be obtained by summing the half space solutions \hat{v}_j of the advection reaction diffusion equation for each of the $2d$ faces of the hypercube,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{v}_j) &= 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, & \quad x_j > 0, \quad 0 < t < T, \\ \hat{v}_j(\mathbf{x}, t) &= g(t) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, & \quad x_j = 0, \quad 0 < t < T, \\ \hat{v}_j(\mathbf{x}, 0) &= 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, & \quad x_j \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

where x_j denotes the j -th component of $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. The solution of (9) does only depend on x_j in space and is independent of x_i , $i \neq j$, because $g(t)$ is independent of \mathbf{x} . It is therefore easily obtained via Laplace transform,

$$\hat{v}_j(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \hat{K}(x_j, t - \tau) g(t - \tau) d\tau$$

with the kernel \hat{K} given by

$$\hat{K}_j(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\nu t^{3/2}}} e^{-\frac{x^2 + (a_j^2 - 4\nu c)t^2 + 2xa_j t}{4\nu t}}.$$

Summing this solution for each side of the hypercube means summing the kernels and noting that opposite sides of the hypercube differ in the kernel only in the advection direction, we find the kernel given in the Lemma. \square

Lemma 3 *In d dimensions, for $c \leq 0$, the iterates u_j^{n+1} of the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm (2) satisfy on the boundary of all subdomains Ω_j the estimate*

$$\max_j \|u_j^{n+1}\|_{\Gamma_j} \leq 2d \cosh(\delta\bar{a}/(2\nu\sqrt{d})) \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{d\nu T}}\right) \max_j \|u_j^n\|_{\Gamma_j},$$

where $\bar{a} := \max_j |a_j|$.

Proof. We define $U_n(T) := \max_j (\|u_j^n\|_{\Gamma_j})$. Because of the overlapping property we are interested in the magnitude of $u_j^n(\mathbf{x}, t)$ at distance δ from the boundary Γ_j for short time. An upper bound is given by Lemma 2,

$$U_{n+1}(T) = \max_j (\|u_j^{n+1}\|_{\Gamma_j}) \leq \int_0^T K\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}}, T - \tau\right) U_n(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Now taking the supremum of $U_n(\tau)$ (which is attained at T) out of the integral, and estimating one part of the exponential in the kernel K by

$$e^{-\frac{a_j^2 - 4\nu c}{4\nu} t} \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

where we used $c \leq 0$, we obtain

$$U_{n+1}(T) \leq 2d \cosh(\delta\bar{a}/(2\nu\sqrt{d})) \int_0^T K_h\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}}, T - \tau\right) d\tau U_n(T),$$

where the heat kernel K_h is given by

$$K_h(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\nu t^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}.$$

Applying the variable transform

$$y := \frac{\delta}{2\sqrt{d\nu(T - \tau)}}$$

to the integral leads to

$$U_{n+1}(T) \leq 2d \cosh(\delta\bar{a}/(2\nu\sqrt{d})) \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{d\nu T}}\right) U_n(T).$$

□

Note that a slightly sharper convergence estimate could be obtained by using the additional exponential decay in (11).

Lemma 3 can be used to derive an arbitrary fast linear upper bound on the convergence rate by shortening the time interval $(0, T)$, since

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(x) = 0.$$

This can be achieved in the algorithm by introducing time windows: the global time interval $(0, T)$ is split into equal time windows and the computation is performed in each time window separately, where it converges much faster. This technique is often used for waveform relaxation algorithms, see for example [Nev89].

But this indicates that the fundamental convergence rate of the algorithm is faster than linear, and we derive now an upper bound on the decay of the error over n steps of the iteration which leads to a superlinear convergence result.

Lemma 4 *In d dimensions, the maximum of the iterates u_j^n of the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm (2) decays on the boundary of all subdomains Ω_j in the infinity norm at least at the rate*

$$\max_j \|u_j^n\|_{\Gamma_j} \leq \left(2d \cosh(\delta \bar{a}/(2\nu\sqrt{d}))\right)^n \operatorname{erfc}\left(\frac{n\delta}{2\sqrt{d\nu T}}\right) \max_j \|u_j^0\|_{\Gamma_j}.$$

Proof. By iteration of inequality (10) in Lemma 3 we get a bound in form of a convolution, namely

$$U_n(T) \leq \left(2d \cosh(\delta \bar{a}/(2\nu\sqrt{d}))\right)^n \int_0^T K_h\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}}, T - s_1\right) \cdots \int_0^{s_{n-1}} K_h\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}}, s_{n-1} - s_n\right) ds_n \cdots ds_1 U_0(T).$$

To unfold the convolutions, note that the Laplace transform of a convolution is the product of the Laplace transformed kernels. In our case the Laplace transform of the kernel, see [AS64], is

$$\int_0^\infty e^{-st} K_h\left(\frac{\delta}{\sqrt{d}}, t\right) dt = e^{-\frac{\delta}{2\sqrt{d}}\sqrt{s}},$$

and thus the n -fold convolution is the product of identical exponentials in the Laplace transformed domain,

$$e^{-\frac{n\delta}{2\sqrt{d}}\sqrt{s}}.$$

Back-transforming this expression, we find

$$U_n(T) \leq \left(2d \cosh(\delta \bar{a}/(2\nu\sqrt{d}))\right)^n \int_0^T K_h\left(\frac{n\delta}{\sqrt{d}}, T - \tau\right) d\tau U_0(T).$$

Using a similar variable transform as in Lemma 3 the result follows. \square

Defining for bounded functions $g(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ the norm

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_T := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega, 0 < t < T} |g(\mathbf{x}, t)|,$$

we have the following convergence result.

Theorem 5 (Superlinear Convergence) *For $c \leq 0$ the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm (2) in \mathbb{R}^d converges superlinearly on bounded time intervals $t \in [0, T < \infty)$ in the infinity norm,*

$$\max_j \|u_j^n(\cdot, \cdot)\|_T \leq \left(2d \cosh(\delta \bar{a} / (2\nu\sqrt{d}))\right)^n \operatorname{erfc}\left(\frac{n\delta}{2\sqrt{dT}}\right) \max_j \|u_j^0(\cdot, \cdot)\|_T. \quad (12)$$

Proof. The proof follows from Lemma 4 and the maximum principle. \square

There are two interesting facts to note about Theorem 5: first the convergence rate is independent of the number of subdomains, there is no dependence on a parameter m related to the number of subdomains as in Theorem 1. Second the superlinear convergence rate is faster than the superlinear convergence rate found for classical waveform relaxation algorithms. The classical result gives a contraction governed by a factorial, see [MN87], with asymptotic expansion

$$\frac{(CT)^n}{n!} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + O(n^{-1})\right) e^{-n \ln n + (1 + \ln(CT))n - \frac{1}{2} \ln n} \sim e^{-n \ln n},$$

whereas the new result in Theorem 5 gives a contraction with asymptotic expansion

$$C_1^n \operatorname{erfc}\left(\frac{C_2 n}{\sqrt{T}}\right) = \left(\frac{\sqrt{T}}{C_2 \sqrt{\pi}} + O(n^{-2})\right) e^{-\frac{C_2^2}{T} n^2 + \ln(C_1) n - \ln n} \sim e^{-n^2},$$

an improvement due to the diffusion.

5 Numerical Experiments

We present now numerical experiments for the advection reaction diffusion equation (1) on the unit square in two dimensions,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u + \mathbf{a} \nabla u + cu, \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), t \in (0, T]. \quad (13)$$

We simulate directly the error equations and thus employ homogeneous initial and boundary conditions and look for the zero solution. The advection is chosen to be diagonal, $\mathbf{a} := (1, 1)$ and the other parameters are $c = -1$ and $\nu = \frac{1}{2}$. We decompose the domain into several overlapping subdomains (small squares) with equal size and overlap in both spatial directions. We discretize in space using centered finite differences, and the problem is solved using backward Euler

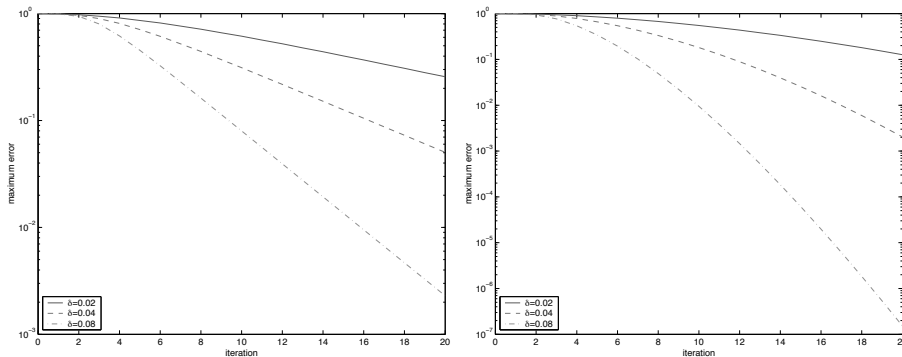


Figure 2: Error in the maximum norm in space and time as a function of the iteration index n for different overlap sizes, on the left when integrating over a relatively long time interval, where the algorithm converges linearly, and on the right over a shorter time interval, where the algorithm converges superlinearly.

in time. To see linear convergence, the problem is integrated over a relatively long time interval $t \in (0, 1]$, and to see superlinear convergence the problem is integrated over a shorter time interval $t \in (0, 0.1]$. We chose for the spatial discretization step $h = \frac{1}{50}$, and for the time step $\Delta t = \frac{1}{500}$. Figure 2 shows the algorithm in the linear and superlinear convergence regime when the problem is solved using four subdomains, for different values of the overlap parameter $\delta \in \{0.02, 0.04, 0.08\}$. This illustrates the two different convergence behaviors of the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm shown in Theorem 1 and 5, and also that increasing the overlap leads to faster convergence, as expected.

We next investigate the dependence of the convergence on the number of subdomains. Theorem 1 for the linear convergence regime shows that the decay of the error depends on the number of subdomains, the parameter m appears in equation (3), which is similar to the results found for the heat equation in [GS98b]. Thus for a long time interval, the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm does not scale with respect to the number of subdomains. This is illustrated in Figure 3 on the left, for the case of the decomposition of the unit square into 2×2 , 3×3 , 4×4 and 6×6 subdomains, using each time the same overlap parameter $\delta = 0.04$, and we integrate the equation on the time interval $t \in (0, 2]$. In the superlinear convergence regime however the convergence rate is independent of the number of subdomains, as we showed in Theorem 5. This is confirmed in the numerical experiment shown in Figure 3 on the right, and corresponds to the result found for the heat equation in [GZ97].

Both results can be understood intuitively, by looking at the sequence of errors at the end of the time window given in Figure 4 for the case of 6×6 subdomains, when the algorithm is used over the long time window. In this long time window case, the initial condition, where the error is zero, has very little influence on the error at the end of the time window, and thus only the zero

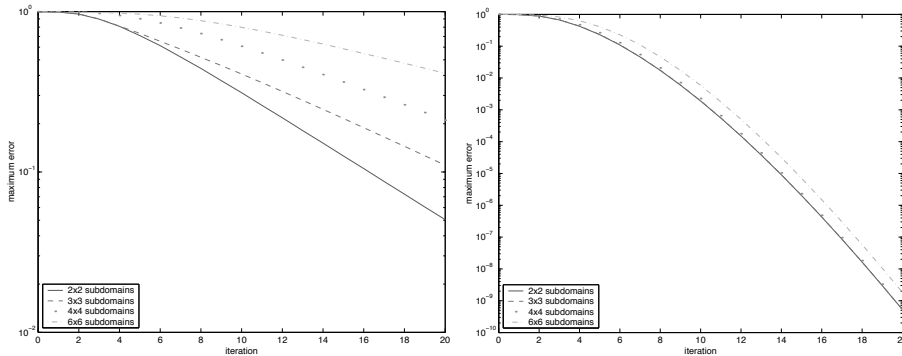


Figure 3: Influence of the number of subdomains on the algorithm: on the left for a long time interval where the linear convergence rate depends on the number of subdomains, and on the right for a short time interval where the superlinear convergence rate is independent of the number of subdomains.

error on the boundary of the domain contributes to reduce the error at the end of the time interval. This leads therefore to a convergence behavior comparable to the classical Schwarz algorithm for steady, elliptic problems, whose convergence depends on the number of subdomains.

The situation is very different if the same algorithm is used over a short time window. The corresponding errors at the end of the short time window are shown in Figure 5. Here, the error decay is dominated by the initial condition, which is correct (i.e. the error is zero initially) for all subdomains. Since one integrates only over a short time, the error is small in all subdomains, independent of their distance to the boundary of the original domain, and thus convergence is independent of the number of subdomains.

We finally show the influence of the advection on the convergence of the algorithm in Figure 6. We chose the same parameters as in Figure 3, except that we fixed now the overlap parameter to $\delta = 0.02$, and varied the advection strength, $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{a} = (5, 5)$, and $\mathbf{a} = (10, 10)$. One can see that the algorithm converges faster when the advection increases.

6 Conclusions

We have shown that the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm for general linear advection reaction diffusion equations in arbitrary dimension with very general domain decomposition exhibits two different types of convergence regimes: on unbounded time intervals the algorithm converges linearly at a rate depending on the overlap, the problem parameters and the number of subdomains. On bounded time intervals, the convergence is superlinear, also depending on the overlap and the problem parameters, but it is independent of the number of subdomains. The main property used in the convergence analysis is a maximum principle, and hence similar results can be derived for other

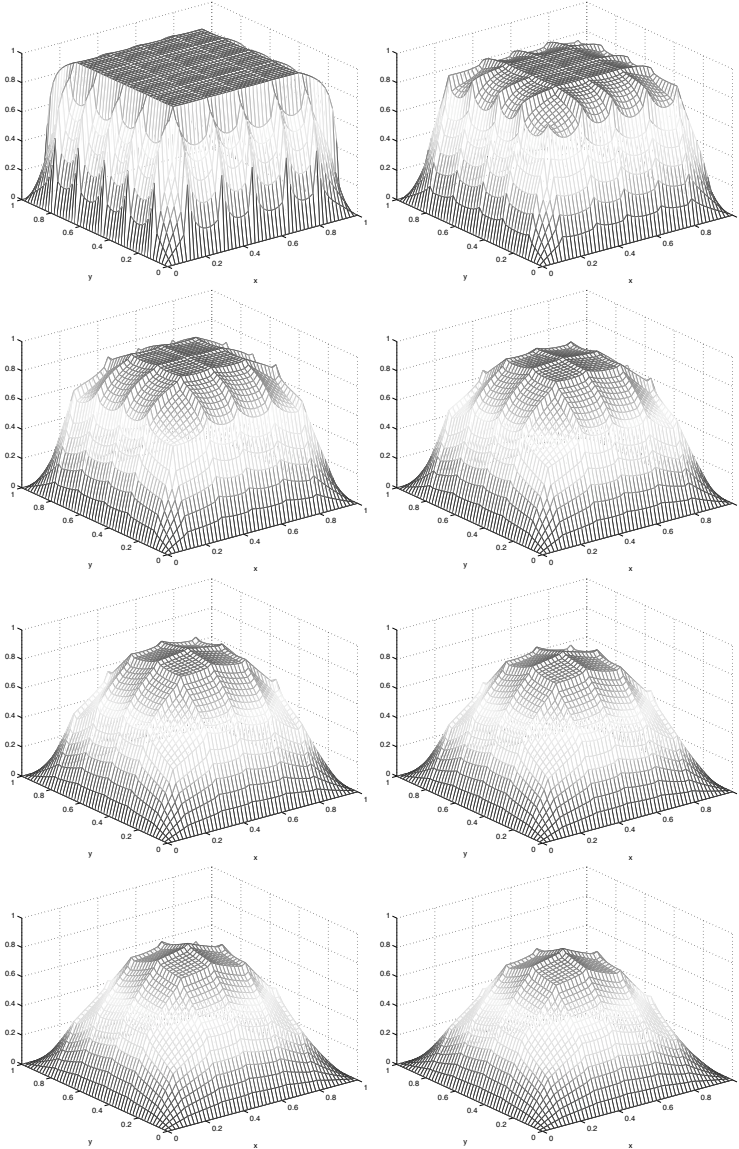


Figure 4: When used over long time windows, the error decay must be propagated by the algorithm from the boundary inward across subdomains, and thus the convergence depends on the number of subdomains.

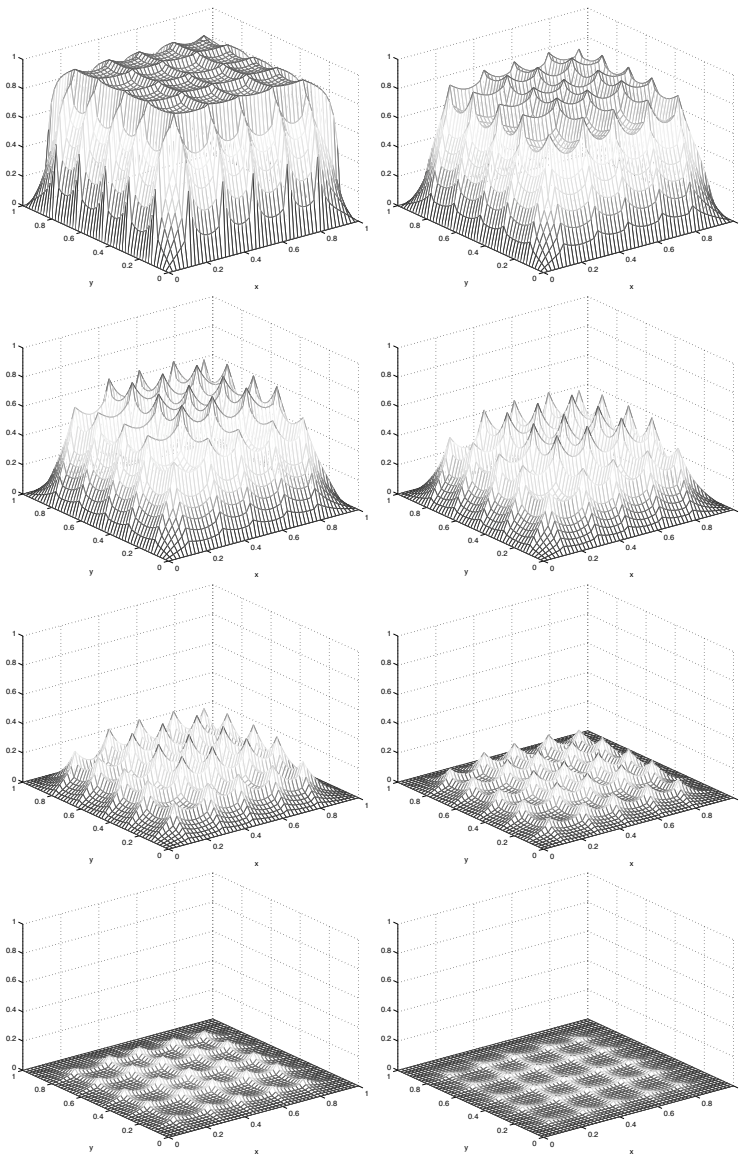


Figure 5: When used over short time windows, the error decay is mostly influenced by the initial condition, where the error equals zero, and hence the error is reduced uniformly over all subdomains, and thus the convergence does not depend on the number of subdomains.

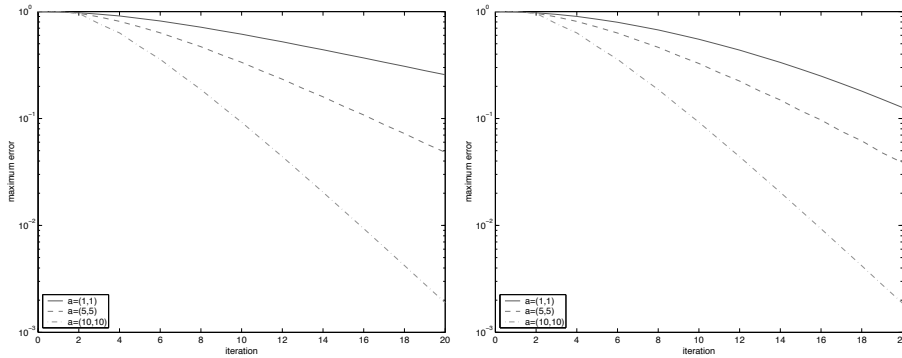


Figure 6: Influence of advection strength on the convergence behavior of the Schwarz waveform relaxation algorithm, on the left over a long time interval, and on the right over a short time interval.

equations satisfying a maximum principle. For the superlinear convergence rate, in addition the decay of the Green's function needs to be estimated. We believe that the algorithm will converge superlinearly for many other time dependent partial differential equations when applied over short time intervals, because the initial condition is then most important for the solution. Waveform relaxation algorithms in general for systems of ordinary differential equations have a zero spectral radius on bounded time intervals, see [Nev89]. It would be interesting for example to analyze the Stokes problem.

The algorithm presented in this paper can be improved by using other transmission conditions. In particular the use of Robin transmission conditions leads to substantially faster algorithms, see [GH07], which also converge without overlap between the subdomains, see also [BGH09] for higher order transmission conditions. Such algorithms, called optimized Schwarz waveform relaxation algorithms, have also been studied for the wave equation, see [GHN03] for the one dimensional case, which includes also a detailed analysis of the discretized case, and [GH04] for the case of higher dimensional wave equations. To prove convergence with overlap is however much more difficult for optimized Schwarz waveform relaxation algorithms in the case of general decompositions like the ones used in this paper, this is the subject of futur research.

Acknowledgment: The second author acknowledges the support of the Swiss National Science Foundation grants 200020-117577/1 and 200021-107988.

References

- [AS64] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington, U.S. Govt. Print. Off., 1964.

- [BGH09] Daniel Bennequin, Martin J. Gander, and Laurence Halpern. A homographic best approximation problem with application to optimized Schwarz waveform relaxation. *Math. of Comp.*, 78:185–223, 2009.
- [Bjø95a] Morten Bjørhus. A note on the convergence of discretized dynamic iteration. *BIT*, 35:291–296, 1995.
- [Bjø95b] Morten Bjørhus. *On Domain Decomposition, Subdomain Iteration and Waveform Relaxation*. PhD thesis, University of Trondheim, Norway, 1995.
- [Cai91] Xiao-Chuan Cai. Additive Schwarz algorithms for parabolic convection-diffusion equations. *Numer. Math.*, 60(1):41–61, 1991.
- [Cai94] Xiao-Chuan Cai. Multiplicative Schwarz methods for parabolic problems. *SIAM J. Sci Comput.*, 15(3):587–603, 1994.
- [Gan98] Martin J. Gander. A waveform relaxation algorithm with overlapping splitting for reaction diffusion equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 6:125–145, 1998.
- [GH04] Martin J. Gander and Laurence Halpern. Absorbing boundary conditions for the wave equation and parallel computing. *Math. of Comp.*, 74(249):153–176, 2004.
- [GH07] Martin J. Gander and Laurence Halpern. Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(2):666–697, 2007.
- [GHN99] Martin J. Gander, Laurence Halpern, and Frédéric Nataf. Optimal convergence for overlapping and non-overlapping Schwarz waveform relaxation. In C-H. Lai, P. Bjørstad, M. Cross, and O. Widlund, editors, *Eleventh international Conference of Domain Decomposition Methods*. ddm.org, 1999.
- [GHN03] Martin J. Gander, Laurence Halpern, and Frédéric Nataf. Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 41(5):1643–1681, 2003.
- [GK02] Eldar Giladi and Herbert B. Keller. Space time domain decomposition for parabolic problems. *Numerische Mathematik*, 93(2):279–313, 2002.
- [GS98a] Martin J. Gander and Andrew M. Stuart. Space time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation. *SIAM J.*, 19:2014–2031, 1998.
- [GS98b] Martin J. Gander and Andrew M. Stuart. Space-time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6):2014–2031, 1998.

- [GZ97] Martin J. Gander and Hongkai Zhao. Overlapping Schwarz waveform relaxation for parabolic problems in higher dimension. In A. Handlovičová, Magda Komorníková, and Karol Mikula, editors, *Proceedings of Algoritmy 14*, pages 42–51. Slovak Technical University, September 1997.
- [GZ02] Martin J. Gander and Hongkai Zhao. Overlapping Schwarz waveform relaxation for the heat equation in n-dimensions. *BIT*, 42(4):779–795, 2002.
- [HR07] Ronald D. Haynes and Robert D. Russell. A Schwarz waveform moving mesh method. *SIAM J. Sci. Comp.*, 29(2):656–673, 2007.
- [Lio89] Pierre-Louis Lions. On the Schwarz alternating method. II. In Tony Chan, Roland Glowinski, Jacques Périaux, and Olof Widlund, editors, *Domain Decomposition Methods*, pages 47–70, Philadelphia, PA, 1989. SIAM.
- [LRSV82] Ekachai Lelarasmeem, Albert E. Ruehli, and Alberto L. Sangiovanni-Vincentelli. The waveform relaxation method for time-domain analysis of large scale integrated circuits. *IEEE Trans. on CAD of IC and Syst.*, 1:131–145, 1982.
- [Mar05] Veronique Martin. An optimized Schwarz waveform relaxation method for unsteady convection diffusion equation. *Applied Numerical Mathematics*, 52(4):401–428, 2005.
- [Meu91] Gérard A. Meurant. Numerical experiments with a domain decomposition method for parabolic problems on parallel computers. In Roland Glowinski, Yuri A. Kuznetsov, Gérard A. Meurant, Jacques Périaux, and Olof Widlund, editors, *Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, PA, 1991. SIAM.
- [MN87] Ulla Miekkala and Olavi Nevanlinna. Convergence of dynamic iteration methods for initial value problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 8:459–482, 1987.
- [Nev89] O. Nevanlinna. Remarks on Picard-Lindelöf iterations part i. *BIT*, 29:328–346, 1989.
- [RR96] Michael Renardy and Robert C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 1996.
- [Sch70] H. A. Schwarz. Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286, May 1870.

Título:	ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO LINEALES CON NO LINEALIDAD ESPACIALMENTE INHOMOGÉNEA.
Doctorando:	Juan Belmonte Beitia.
Director/es:	Víctor Manuel Pérez García.
Defensa:	21 de Mayo de 2008.
Calificación:	Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

Resumen:

La tesis está dedicada al estudio de la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes dependientes del espacio o también llamados coeficientes inhomogéneos. Por esta razón, a esta variante de la ecuación de Schrödinger no lineal se la denomina ecuación de Schrödinger no lineal inhomogénea (INLSE). Esta ecuación es una de las más importantes de la física matemática, y tiene un gran interés tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista físico, en este último caso por sus múltiples aplicaciones a la óptica no lineal, condensación de Bose-Einstein y física del plasma, por citar solo algunos ejemplos.

El estudio sobre esta ecuación se trata en tres grandes bloques. En el primer bloque se hace frente al problema de la existencia de soluciones para diferentes ecuaciones de tipo Schrödinger con coeficientes inhomogéneos, incluidos sistemas acoplados. También se hace un breve estudio de la estabilidad de las soluciones para la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica. Este bloque se compone de cuatro capítulos.

En el capítulo 2 se desarrolla un análisis de la estabilidad de las soluciones de la INLSE, donde $g(x)$, que describe la modulación espacial de la no linealidad, es una función positiva y localizada. Además, se dan las condiciones precisas de estabilidad para soluciones positivas que estén bajo los efectos de no linealidades espacialmente localizadas.

El capítulo 3 trata sobre la existencia de solitones oscuros para la INLSE. En la prueba de existencia se usan diferentes técnicas, tales como teoría clásica de EDO's, topología y teoría cualitativa de sistemas dinámicos.

En el capítulo 4 se prueba la existencia de solitones brillantes, utilizando la aproximación variacional junto con la teoría de puntos críticos, y un método minimax: El teorema de Mountain-Pass.

En el capítulo 5, utilizando un método de punto fijo en espacios de Banach, se prueba la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones de Schrödinger no lineales acoplados linealmente y con coeficientes inhomogéneos. Además, se estudian las ramas de soluciones en sistemas controlados por parámetros y se estudian las bifurcaciones existentes.

En el segundo bloque, se tratan diferentes técnicas matemáticas para poder construir soluciones analíticas de la INLSE. Este estudio se desarrolla en tres capítulos.

El capítulo 6 trata el problema de encontrar soluciones analíticas de la INLSE. Para ello, se utilizará el método de las simetrías de Lie. Esta es una técnica muy usada en la resolución de ecuaciones diferenciales y en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Además de calcular estas soluciones, usamos la teoría cualitativa de sistemas dinámicos para proporcionar un análisis mas completo del método.

En el capítulo 7 nos centramos en la búsqueda de soluciones exactas de la INLSE con coeficientes periódicos, caracterizando estas soluciones. Se realiza un análisis de estabilidad numérico y se estudian las aplicaciones físicas del método.

En el capítulo 8, usando transformaciones de similaridad, vamos mas alla de lo realizado en los dos capitulos anteriores y construimos soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger no lineal dependiente del tiempo, y con coeficientes que dependen del espacio y del tiempo.

Finalmente, en el ultimo bloque, se muestra una de las múltiples aplicaciones que tiene la INLSE a los condensados de Bose-Einstein. Este bloque se compone de un único capítulo, el capítulo 9. En este capítulo, se describe un método para extraer solitones de un condensado de Bose-Einstein: las pinzas láser. Mostramos como poder extraer y transportar un número controlable de átomos de un condensado. Además, se estudian las implicaciones físicas de este método, junto con algunas ideas de como aplicarlo a problemas físicos reales.

Differential–Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications

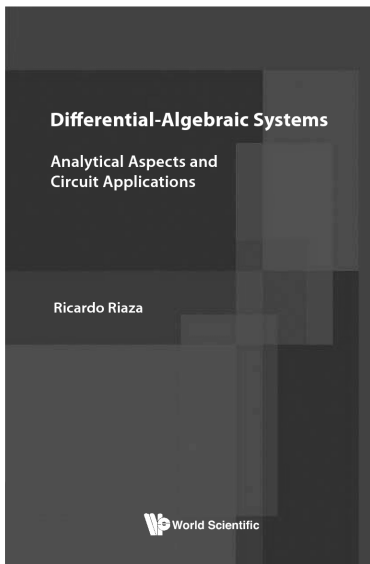
Ricardo Riaza

World Scientific

ISBN: 13-978-981-279-180-1 (xiv + 300 páginas) – 2008

Por Inmaculada Higuera

Este interesante libro está dedicado al estudio de sistemas algebraico–diferenciales (Differential-Algebraic Equations, DAEs), recogiendo los resultados más relevantes obtenidos en los últimos diez años. El enfoque que da el autor es diferente al que puede verse en otros textos sobre esta materia, centrándose fundamentalmente en la teoría de DAEs (Parte I) y en su aplicación a la teoría de circuitos (Parte II). Está escrito con claridad y gran rigor matemático. El elevado número de ejemplos analizados a lo largo del texto, muestra el potencial de las técnicas y resultados analizados en el libro.



El libro es autocontenido, y tanto la monografía completa como cada una de sus partes por separado son de gran interés para una gran variedad de lectores. Algunos temas de la Parte I, en la que se estudian

distintos aspectos de la teoría de DAEs, pueden ser una referencia básica para todos aquellos interesados en las DAEs desde el punto de vista de su resolución numérica. Asimismo, el material de esta Parte I también resultará de gran utilidad a quienes, en el contexto de los sistemas mecánicos, procesos químicos, teoría del control, etc., deban trabajar con DAEs. Además, por su enfoque hacia la teoría de circuitos, este libro es una buena referencia para aquellos científicos que deseen tener unas nociones sobre circuitos y los problemas matemáticos que

surgen en este contexto.

La Parte I de este libro comienza con una breve introducción a las DAEs, presentando y adelantando algunos conceptos que surgirán a lo largo del texto: tipos de DAEs (lineales con coeficientes constantes y con coeficientes dependientes del tiempo, semi-implícitas, cuasi-lineales, etc), conceptos de índice (de Kronecker, de tractabilidad, diferencial, geométrico), etc.

El Capítulo 2 está dedicado a las DAEs lineales (coeficientes constantes y variables). Utilizando la técnica de proyectores desarrollada por R. März (Universidad Humboldt, Berlín), el autor muestra que se pueden dar condiciones precisas sobre los datos del problema para garantizar la existencia y unicidad de solución, y caracterizaciones explícitas de la solución en términos de las variables originales del problema. Como anticipo a la Parte II, los resultados del capítulo se utilizan para el análisis de un circuito sencillo en el que, en función de las características de los distintos dispositivos, se obtienen distintos índices en la DAE que modela el circuito.

Los métodos de reducción, basados en la investigación de Rabier y Rheinboldt, entre otros, proporcionan un marco potente para analizar DAEs no lineales. El Capítulo 3 está dedicado a estas técnicas donde, además, se introducen técnicas locales para analizar DAEs cuasi-lineales que permiten definir el concepto de índice geométrico.

La Parte I finaliza con el estudio de DAEs lineales y cuasi-lineales singulares. Los resultados más recientes sobre el análisis y clasificación de singularidades están contenidos en el Capítulo 4.

Tras presentar los aspectos más relevantes sobre teoría de DAEs, en la Parte II de este libro el autor se centra en el estudio de las DAEs, tanto lineales como no lineales, que surgen en el contexto de circuitos eléctricos. En el Capítulo 5 se analizan DAEs obtenidas mediante análisis nodal (nodal methods), que se caracterizan por utilizar, como variables en el modelo, los potenciales en los nodos del circuito, y algunas variables en las ramas del circuito. El enfoque del Capítulo 6 es distinto, ya que en él se analizan DAEs que se obtienen al usar como variables del modelo las intensidades y los voltajes en las ramas del circuito (branch-oriented methods).

El Capítulo 5 comienza presentando con detalle los elementos básicos de la teoría de grafos y circuitos eléctricos. Los modelos obtenidos mediante diferentes métodos (NTA -Node Tableau Analysis-, ANA -Augmented Nodal Analysis-, MNA -Modified Nodal Analysis-), dan lugar a DAEs cuyo índice es caracterizado usando las técnicas de proyectores estudiadas en el Capítulo 2. Varios ejemplos con circuitos concretos son analizados en esta parte.

En el último capítulo del libro, se utilizan las técnicas descritas en el Capítulo 3 para analizar el índice geométrico de las DAEs obtenidas utilizando como variables intensidades y voltajes. El capítulo termina estudiando diferentes aspectos cualitativos en la dinámica de circuitos. A lo largo del capítulo hay diversos ejemplos que muestran cómo se pueden aplicar los resultados del mismo.

El autor, Ricardo Rianza Rodríguez, es Profesor Titular de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información (Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación,

Universidad Politécnica de Madrid). Licenciado en Matemáticas, Ingeniero de Telecomunicación y Doctor en Matemáticas es autor de numerosas publicaciones en el campo de las DAEs, ecuaciones diferenciales implícitas, y aspectos analíticos de circuitos eléctricos no lineales.

Introducción al Método de los Volúmenes Finitos

María Elena Vázquez Cendón

Servizo de Publicacións e Intercambio Científico de la Universidad de Santiago de Compostela

ISBN: 978-8498870312 (180 páginas) – 2009



El método de volúmenes finitos está siendo empleado en numerosas aplicaciones y por parte de una amplia comunidad científica multidisciplinar. El objetivo de este manual es transmitir esta importante herramienta a estudiantes, investigadores en formación y personal docente e investigador de diferentes ámbitos de la ciencia y de la tecnología. La elección de contenidos es fruto de la experiencia de la autora impartiendo cursos de doctorado y de máster en diferentes universidades. En la obra -diseñada como manual de estudio-, la introducción de nuevos conceptos y métodos numéricos va acompañada de pequeños ejercicios, ejemplos y aplicaciones que contribuyen a fortalecerlos. Además, algunos de ellos suponen la ejecución de los códigos MATLAB que se facilitan. Esta metodología ayuda a centrar el proceso de aprendizaje en el propio estudiante. Consciente la autora de que los conocimientos iniciales de los estudiantes en el postgrado son muy diferentes, el manual busca alcanzar la comprensión de una terminología común con un equilibrio entre el rigor matemático y la intuición física que caracteriza el origen de estos métodos. El título es una invitación a una aproximación inicial al método de volúmenes finitos y se pretende que, tras su estudio, se puedan seguir referencias bibliográficas más específicas y utilizar programas comerciales o de software libre en el marco de la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD).

M. Elena Vázquez Cendón es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela, en la que se doctoró en 1984 con una tesis dirigida por el Profesor Alfredo Bermúdez de Castro. Además de impartir docencia de cálculo y análisis numérico en diferentes diplomaturas y licenciaturas de la universidad compostelana en sus campus de Lugo y Santiago, ha participado en cursos de doctorado y de máster impartiendo materias relacionadas directamente con el método de volúmenes finitos. La línea principal de sus trabajos de investigación es la aplicación del método de volúmenes finitos a las leyes de conservación con términos fuente. Las ecuaciones de las aguas poco profundas son el modelo matemático más empleado en sus trabajos. Desde 1997 es profesora titular del área de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela.

50 AÑOS DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

COMISIÓN DEL 50 ANIVERSARIO

Juan M. Viaño, Regina Castro, Rosana Rodríguez, Rosa Bassave, Luis A. Cordero, José A. Docobo, Iván Fernández, Ignacio García, Dolores Gómez, Luis Hervella, Ariadna Lago, M. Victoria Otero, Mario Otero, Ana I. Portugués, Carmen Rodríguez, Elena Vázquez Abal y Elena Vázquez Cendón.

La celebración de los 50 años de la Licenciatura de Matemáticas

La Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela celebró durante el curso 2007-08 el 50 aniversario de la implantación de la Licenciatura. Fue una ocasión magnífica para volver la vista atrás, observar el camino recorrido, hacer memoria de los logros alcanzados, que son muchos, y coger alientos para el futuro.

Como profesionales de esta ciencia, antiguos alumnos y profesores, cumplimos un deber moral de hacer este recuerdo histórico de los 50 años, como reconocimiento a todas y a todos los que han contribuido a colocar la Facultad en el destacado lugar que ocupa hoy.

La Junta de Facultad en sesión celebrada el 13 de septiembre de 2007 nombró la Comisión del 50 Aniversario con el encargo de organizar a lo largo del año diferentes manifestaciones dirigidas al recuerdo histórico de la creación de la Licenciatura y los hitos más importantes de estos 50 años. La Comisión, bajo la presidencia y coordinación del Decano de la Facultad, Juan M. Viaño, repartió el trabajo en tres subcomisiones, con atención respectiva a los tres ejes de actuación previstos: actos institucionales, exposición retrospectiva y actividades lúdico-culturales, dirigidas a la sociedad, mostrando la importancia de las Matemáticas en la vida humana. A continuación resumimos las actuaciones en cada uno de los ejes, lo que nos dará una idea general de lo que fue un año lleno de recuerdos y emociones.

Actos Institucionales

La celebración del 50 aniversario comenzó oficialmente el 14 de noviembre de 2007 con un acto institucional en el aula Magna de la Facultad de Matemáticas, presidido por el Rector de la Universidad, Senén Barro, seguido de una rueda de prensa de presentación del programa general de la celebración. Anteriormente ya se había diseñado el logotipo y nombrado padrino al matemático húngaro,



ANIVERSARIO
LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS USC

Logotipo del 50 aniversario

Peter Lax, Premio Abel 2005, que visitó nuestra ciudad invitado por el programa Conciencia del Consorcio de Santiago de Compostela. La madrina de la celebración fue la primera doctora en Matemáticas por la USC, la profesora Antonia Ferrín Moreiras, que nos acompañó en los actos institucionales.



Foto oficial del Acto Institucional del 50 Aniversario
Salón Noble – Palacio de Fonseca – 24-05-08

El acto solemne del 50 aniversario tuvo lugar en el Salón Noble del Palacio de Fonseca, el 24 de mayo de 2008, presidido por el Rector, con asistencia de autoridades académicas (entre ellas la Presidenta de la Real Sociedad Matemática Española, Olga Gil) contó con la presencia de una nutrida representación de la familia matemática de Galicia. El acto fue diseñado y conducido por Luis Hervella y Elena Vázquez Cendón, para rendir homenaje a las 50 promociones que han iniciado estudios

de Matemáticas en la Facultad y a sentir la presencia de los 2500 licenciados (de los que 210 son doctores) salidos de sus aulas. De cada promoción fue seleccionado un representante que recibió un diploma simbólico con el número de su promoción. La selección de los representantes fue hecha atendiendo a hacer visible los diferentes sectores profesionales que ocupan los matemáticos hoy en día. Así, desfilaron por el estrado, rectores y vicerrectores de universidad, políticos de renombre, altos cargos de la administración, profesores de todos los niveles, presidentes y cargos importantes de sociedades matemáticas, empresarios de prestigio, controladores aéreos...En representación de todos intervinieron Pablo Fernández Ascariz, Mercedes Feijoo Díaz y Alfonso Amorín Gómez. La emoción pudo con muchos de los asistentes en varios momentos del acto. Especialmente cargado de simbolismo fue la entrega de la orla de su promoción al Presidente del Principado de Asturias, Vicente Álvarez Areces.

Emocionante fue también el acto de clausura del Cincuentenario celebrado en el aula Magna de la Facultad el día 14 de noviembre, coincidiendo con la festividad de San Alberto Magno. El acto estuvo centrado en la dedicación de seis aulas de la Facultad a los seis profesores siguientes, destacados por su contribución relevante a la implantación de los estudios de Matemáticas en la USC: Ramón María Aller Ulloa, Enrique Vidal Abascal, Eduardo García-Rodeja Fernández, Antonia Ferrín Moreiras, Antonio Valle Sánchez y Ramiro Melendreras Gimeno.

Una semblanza biográfica de cada uno de los homenajeados fue hecha por sus respectivos antiguos alumnos, hoy profesores en la Facultad: José A. Docobo, Xosé M. Masa, Emilio Villanueva, Josefina Ling, Gerardo Rodríguez y Luis

Coladas. Una placa con su nombre en la puerta de cada aula recuerda desde ese día su dedicación.

La colocación de una placa conmemorativa de los 50 años en el Recanto da Saudade de la USC, una visita a las obras de la Cidade da Cultura de Galicia y un Concierto especial del Orfeón Caixa Galicia “Terra A Nosa”, en la Capilla Real de Ánimas, pusieron punto final a esta celebración.

Además de las fotos y el logotipo de la celebración, en la Facultad quedará como recuerdo del 50 aniversario, la escultura en madera de plátano *Exploración* cedida por el escultor gallego Álvaro de la Vega y descubierta en el acto de clausura por el Rector y el propio autor de la obra.

La *Conselleira* de Educación y Ordenación Universitaria, Laura Sánchez Piñón, se sumó a los actos de clausura del cincuentenario con una visita institucional a la Facultad el día 11 de noviembre, acompañada de su equipo.

La subcomisión de los actos estuvo constituida por los profesores Luis Hervella, Elena Vázquez Cendón y el equipo decanal (Juan Viaño, Regina Castro y Rosana Rodríguez).



La primera doctora en Matemáticas por la USC y madrina del 50 aniversario, Antonia Ferrín, saludada por su alumna, la profesora Josefina Ling

Exposición bibliográfica y documental retrospectiva de los 50 años

El tema central de la exposición es el recuerdo histórico de la creación de la Licenciatura y los hechos más importantes de estos 50 años. Coordinada por el Decano de la Facultad, constó de 3 secciones, cada una con un comisario y un grupo de trabajo propio. La primera, cuyo comisario fue el profesor José A. Docobo, tuvo por título *Los estudios de Matemáticas en la USC*, hacía un recorrido histórico de los antecedentes, creación y evolución de los estudios de Matemáticas en la Universidad de Santiago de Compostela, incluyendo una colección de biografías. Colaboraron en la misma los profesores Regina Castro, Luís A. Cordero, Iván Fernández y Felipe Gago. También hizo aportaciones de especial interés el profesor Enrique Vidal Costa.

La segunda, *Fondos de Matemáticas en la Biblioteca de la USC*, mostró una selección de los fondos bibliográficos de la Biblioteca de la Universidad de Santiago de Compostela, relacionados con las Matemáticas y una revisión de los datos de la producción científica de la Facultad en los 50 años. El comisario responsable de la misma fue el profesor Luís A. Cordero, que contó con la colaboración de la funcionarias de la Biblioteca Rosa Bassave y Ana I. Portugués y el profesor José A. Docobo.

Finalmente, la tercera sección estuvo organizada por su comisario, Luis

C. Cachafeiro, con la colaboración de José A. Carpenente, Margarita Losada y Francisco M. Rodríguez, todos ellos profesores de Matemáticas en la enseñanza media. El título de la sección fue *50-5 Años de docentes en Matemáticas formados en la USC* y procuró una visión retrospectiva de los cambios en la docencia de las Matemáticas en la Enseñanza Media.

Un catálogo completo de la exposición será editado próximamente.

Actividades culturales y divulgación de las Matemáticas

El conjunto de actividades culturales y divulgación de las Matemáticas, dirigidas al público en general, estuvo agrupado bajo el expresivo nombre de *MatetodoTodomate* que diseñó y coordinó la profesora Elena Vázquez Abal con la colaboración de los profesores Ignacio García, Dolores Gómez, M. Victoria Otero, Carmen Rodríguez y los alumnos Ariadna Lago y Mario Otero. La relación de actividades es interminable y comprende espectáculos de matemáticas con malabares, magia (Matemáxicas), papiroflexia (Papiromáticas), cine (Cinemáticas), teatro (Teatromates) con los espectáculos *Matemáticas por un tubo* a cargo del grupo sevillano *Ars binomium* y la obra *Proof* de David Auburn, dirigida y representada, en la Iglesia de la Universidad, por alumnos y profesores de Matemáticas de la Universidad de Vigo.... y un largo etcétera.

Dentro de este grupo de actividades tienen especial relevancia las conferencias y actos organizados bajo los lemas *La mujer: elemento innovador de la Ciencia* y *Mujeres ConFormando la Ciencia* en colaboración con la Unidad Mujer y Ciencia de Galicia y la Comisión Mujeres y Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española, dinamizadas por Elena Vázquez Cendón, Elena Vázquez Abal y Josefina Ling.

Por último, pero no menos importante, destacar la exposición dirigida a los estudiantes de enseñanza media, organizada por M. Victoria Otero, Carmen Rodríguez y Elena Vázquez Abal en el marco de la Semana de la Ciencia, titulada *Brevísima historia de cómo aprendemos a contar y los aparatos empleados* de la que son autores Trinidad López y Tomás Area.



Representación de “Matemáticas por un tubo” a cargo de “Ars Binomium” en el Aula Magna de la Facultad de Matemáticas, coincidiendo con la entrega de premios a los ganadores de la Fase Gallega de la XLIV Olimpiada Matemática

Breves notas históricas

Mencionamos muy brevemente algunas notas históricas que enmarcan el tiempo de la implantación de los estudios y la labor de los profesores homenajeados

en el acto de clausura. En 1945 se creó, dentro del Observatorio Astronómico de la Universidad (construido en 1943), la Sección de Astronomía Teórica y Matemática "Durán Loriga", siendo Enrique Vidal Abascal su primer Director. Puede decirse que esta sección fue el germen de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias creada por Orden del 18 de septiembre de 1957 con plena validez académica y carácter oficial a partir del curso 1957-58. Los primeros profesores fueron el catedrático extraordinario de Astronomía, Ramón M. Aller, el catedrático Enrique Vidal Abascal y la ayudante de clases prácticas, encargada de adjuntía, Antonia Ferrín Moreiras.

La celebración del 50 aniversario de la Sección, coincide con el 30 aniversario de la creación de la Facultad, que tuvo lugar en el curso 1977-78, al dividirse la Facultad de Ciencias en las Facultades de Química, Biología y Matemáticas (Decreto del 14 de octubre de 1977 -BOE del 11 de noviembre) y con los 25 años del traslado al actual edificio en el Campus Sur que tuvo lugar en el año 1983.

El primer Decano de la Facultad fue el profesor Enrique Vidal Abascal hasta su jubilación en 1978. En los años sucesivos fueron Decanos: Eduardo García-Rodeja (1978-1984), Xosé M. Masa (1984-1989), José L. Freire (1989-1990), Celso Rodríguez (1990-1994), Enrique Macías (1994-2001), Juan M. Viaño (2001-).

El actual Departamento de Álgebra sucede al original de Álgebra y Fundamentos, dirigido hasta su jubilación por Eduardo García-Rodeja (incorporado a la Sección en el curso 60-61). El Departamento de Análisis Matemático, que agrupó los antiguos de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales, es el heredero del departamento dirigido por Antonio Valle, quien se había incorporado a la sección de Matemáticas en el curso 67-68. El Departamento de Estadística e Investigación Operativa fue creado por primera vez a mediados de los años setenta y su primer director fue Ramiro Melendreras, fallecido en 1983. El Departamento de Matemática Aplicada, creado en el año 1986, antes de la segregación de las universidades de A Coruña y Vigo, agrupó a los profesores de los 7 campus de las 7 ciudades gallegas de esta área de conocimiento. Integra también el área de Astronomía y Astrofísica. El Departamento de Geometría y Topología es continuador del departamento tradicional del mismo nombre dirigido por Vidal Abascal.

Los matemáticos formados en nuestras aulas y departamentos en estos años ampliaron estudios o se fijaron en Departamentos de toda España y en el extranjero, principalmente Francia y Estados Unidos. La implantación de estudios técnicos en las Universidades de A Coruña y Vigo ha permitido crear en estas universidades potentes departamentos de Matemáticas con doctores formados en nuestra Facultad, consolidados actualmente como grandes centros de investigación matemática.

Actualidad brillante, futuro esperanzador

La Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela es una de las 25 Facultades de Matemáticas de España y la única Facultad

de Matemáticas que existe en la Comunidad Autónoma de Galicia. Desde su creación vino impartiendo, bajo distintos planes de estudio, la Licenciatura de Matemáticas, cuya duración es de 5 años. En los próximos años esta titulación irá desapareciendo paulatinamente de la oferta pues será sustituida por el nuevo Título de Grado en Matemáticas, de 4 años, adaptado a las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior, que comenzó a impartirse este curso 2008-09. Además de los estudios de Grado, la Facultad imparte dos Títulos Oficiales de Máster que serán tres a partir del curso 2009-10 (Ingeniería Matemática, Matemáticas y Técnicas Estadísticas) con sus correspondientes programas de doctorado. Con una entrada de 80 alumnos en el curso 2008-09 conseguimos remontar la caída de alumnos que se produjo en las carreras de ciencias en los últimos años y situarnos entre las seis primeras facultades de Matemáticas de España en primera matrícula.



La celebración de los 50 años de la Licenciatura ocurre en un momento especialmente dulce de las Matemáticas en nuestro país. En efecto, hace 50 años, incluso hace 30, España no tenía ninguna relevancia en la matemática mundial. Hoy, gracias al esfuerzo y dedicación de los profesionales de las matemáticas, en la investigación y en la docencia, la producción matemática de España supone el 5% del total mundial y ocupa un noveno puesto de privilegio, en igualdad con países de mayor tradición científica que el nuestro.

La investigación matemática gallega se encuentra en estos momentos a un gran nivel, tanto por el número y la calidad de las publicaciones científicas, como por la gran cantidad de contratos estables de transferencia de los resultados de investigación a empresas, centros tecnológicos e instituciones públicas, así como también por proyectos de investigación competitivos. Así lo reconocen las sociedades matemáticas al concederle a los grupos de investigación de la Facultad el privilegio de organizar congresos mundiales de primera fila y reuniones de la importancia del Encuentro de las Sociedades Latinoamericanas de Matemáticas (2003) o de la Asamblea General de la Unión Matemática Internacional (2006).

Los organismos públicos nacionales y autonómicos relacionados con la investigación y la docencia, en los últimos tiempos dieron muestras de sensibilidad hacia esta realidad de las Matemáticas y vienen prestando un apoyo sin precedentes para mantener los niveles internacionales alcanzados.

En este marco excepcionalmente favorable, coincidiendo con el 50 aniversario, Galicia fue elegida, en competencia con otras ofertas de distintas comunidades autónomas, como una de las cuatro sedes del Centro Nacional de Investigación en Matemáticas (IEMath) creado por el Ministerio de Educación y

Ciencia. Se trata de un éxito colectivo de toda la comunidad matemática gallega, que supondrá un salto cualitativo de enorme importancia y una interacción con otras disciplinas científicas y con el sector productivo.

En resumen, las Matemáticas en Galicia están, 50 años después, ante una magnífica oportunidad para ensanchar sus logros hasta límites que nuestros antepasados nunca pudieron soñar. La gran familia de los matemáticos y de las matemáticas de Galicia habrá de poner todo el empeño para no desperdiciar esta oportunidad. Será el mejor homenaje que podemos rendir a los pioneros que hace 50 años lucharon por implantar los estudios universitarios de Matemáticas, imprescindibles para el progreso de la sociedad.

La Comisión del 50 Aniversario agradece el apoyo de los organismos patrocinadores y de todos los que han dedicado una parte de su tiempo a la organización de esta celebración (incluidos los que no aparecen nombrados en este resumen), felicita a todos los matemáticos y matemáticas de Galicia por lo que han conseguido y los alienta a seguir por la senda marcada en estos 50 años, en la búsqueda de mayores logros que aún son posibles en el futuro.

Más información escrita y gráfica sobre el 50 Aniversario:

<http://www.usc.es/mate50>

Santiago de Compostela, 24 de diciembre de 2008
Comisión del 50 Aniversario de la Licenciatura de Matemáticas
Universidad de Santiago de Compostela
15782 Santiago de Compostela
E-mail: juan.viano@usc.es

Tipo de evento: Congreso
Nombre: CONGRESO EN MEMORIA DE FUENSANTA ANDREU
Lugar: Burjassot, València, Spain
Fecha: May 28–30, 2009
Organiza: Josep Martínez, Salvador Moll, Sergio Segura de León y Julián Toledo (Universitat de València)
Información:
E-mail: edpno1@uv.es
WWW: <http://www.uv.es/fuensanta/>

Tipo de evento: Congreso
Nombre: 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPROXIMATION METHODS AND NUMERICAL MODELING IN ENVIRONMENT AND NATURAL RESOURCES
Lugar: Pau, France
Fecha: June 8–11, 2009
Organiza: University of Pau and C.Ñ. R. S (France), University of Granada (Spain), and University Mohammed I–Oujda (Morocco)
Información:
E-mail: mamern@univ-pau.fr
WWW: <http://lma.univ-pau.fr/meet/mamern09/>

Tipo de evento: Congreso
Nombre: ESF–EMS–ERCOM CONFERENCE ON HARMONIC ANALYSIS, GEOMETRIC MEASURE THEORY AND QUASICONFORMAL MAPPINGS
Lugar: CRM - Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra, Barcelona, Spain
Fecha: June 15–19, 2009
Organiza: European Science Foundation (ESF) in partnership with the The European Mathematical Society (EMS)
Información:
E-mail: apicolotto@esf.org
WWW: <http://www.esf.org/conferences/09308/>

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	ENMA EDUCATION 2009 AND ENMA SCIENTIFIC 2009
Lugar:	Bilbao, Spain
Fecha:	June 17–19, 2009
Organiza:	European Science Foundation (ESF) in partnership with the The European Mathematical Society (EMS)
Información:	
E-mail:	secretariat@enma.org.es
WWW:	http://enma.org.es/

Tipo de evento:	Workshop
Nombre:	WORKSHOP ON NON-LOCAL EQUATIONS, DEDICATED TO THE MEMORY OF FUENSANTA ANDREU
Lugar:	Leganés, Spain
Fecha:	June 29–30, 2009
Organiza:	Universidad Carlos III de Madrid
Información:	
E-mail:	cristina.brandle@uc3m.es (Cristina Brändle), manu@lmppt.univ-tours.fr (Emmanuel Chasseigne), raul.ferreira@mat.ucm.es (Raúl Ferreira), arturop@math.uc3m.es (Arturo de Pablo)
WWW:	http://www.nonlocal-2009.es/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	9 TH INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTATIONAL AND MATHEMATICAL METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING
Lugar:	Gijón, Spain
Fecha:	del 30 de junio al 3 de julio de 2009
Organiza:	
Información:	
E-mail:	cmmse@usal.es
WWW:	http://xixon.epv.uniovi.es/cmmse09/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	14 TH GENERAL MEETING OF EUROPEAN WOMEN IN MATHEMATICS (EWM)
Lugar:	Novi Sad, Serbia
Fecha:	August 25–28, 2009
Organiza:	European Women in Mathematics
Información:	
E-mail:	ewm2009@im.ns.ac.yu
WWW:	http://ewm2009.wordpress.com/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	NEW TRENDS IN MODEL COUPLING THEORY, NUMERICS & APPLICATIONS
Lugar:	Paris, France
Fecha:	September 2–4, 2009
Organiza:	
Información:	
E-mail:	mcparis09@ann.jussieu.fr
WWW:	http://www.ann.jussieu.fr/mcparis09/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	NUMERICAL APPROXIMATIONS OF HYPERBOLIC SYSTEMS WITH SOURCE TERMS AND APPLICATIONS
Lugar:	Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM), Castro Urdiales, Cantabria, Spain
Fecha:	September 7–11, 2009
Organiza:	Denise Aregba–Driollet (Institut de Mathématique de Bordeaux, Université de Bordeaux, France), Christophe Berthon (Laboratoire de Mathématique Jean Leray, Université de Nantes, France), Manuel Castro (Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga, Spain), Carlos Parés (Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga, Spain)
Información:	
E-mail:	castro@anamat.cie.uma.es (Manuel Castro), pares@anamat.cie.uma.es (Carlos Parés)
WWW:	www.math.sciences.univ-nantes.fr/NumHyp2009/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	MATHEMATICAL MODELS IN MEDICINE, BUSINESS & ENGINEERING 2009
Lugar:	València, Spain
Fecha:	September 8–11, 2009
Organiza:	Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar (IMM) de la Universidad Politécnica de Valencia
Información:	
E-mail:	imm@imm.upv.es
WWW:	http://jornadas.imm.upv.es/2009/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	7 TH INTERNATIONAL CONFERENCE OF NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS 2009 (ICNAAM 2009)
Lugar:	Crete, Greece
Fecha:	September 18–22, 2009
Organiza:	Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar (IMM) de la Universidad Politécnica de Valencia
Información:	
E-mail:	tsimos.conf@gmail.com , tsimos.conf09@gmail.com
WWW:	http://www.icnaam.org/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	WORLD CONGRESS ON ENGINEERING AND COMPUTER SCIENCE 2009
Lugar:	San Francisco, USA
Fecha:	October 20–22, 2009
Organiza:	
Información:	
E-mail:	wcecs@iaeng.org
WWW:	http://www.iaeng.org/WCECS2009/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS INTERNATIONAL WORKSHOP FOR THE 60 TH BIRTHDAY OF MICHEL PIERRE
Lugar:	Vittel, France
Fecha:	October 22–24, 2009
Organiza:	
Información:	
E-mail:	wcecs@iaeng.org
WWW:	http://edpa2009.iecn.u-nancy.fr/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	2 ND MEETING ON OPTIMIZATION, MODELIZATION AND APPROXIMATION
Lugar:	Casablanca, Morocco
Fecha:	November 19–21, 2009
Organiza:	
Información:	
E-mail:	moma09@lmpa.univ-littoral.fr
WWW:	http://www-lmpa.univ-littoral.fr/MOMA09/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	2 ND INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND SOFTWARE ENGINEERING (CSSE 2009)
Lugar:	Shenzhen, China
Fecha:	December 13–15, 2009
Organiza:	
Información:	
E-mail:	csse@scirp.org
WWW:	http://www.scirp.org/conf/csse2009/

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	V INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS, CONTROL AND SHAPE OPTIMIZATION (PICOF'10)
Lugar:	ETSI Industrial. Universidad Politécnica de Cartagena. Cartagena (Spain)
Fecha:	April 7–9, 2010
Organiza:	Universidad Politécnica de Cartagena (Spain) and INRIA (France)
Información:	
E-mail:	picof10@upct.es
WWW:	http://picof.upct.es/

Cano Casanova, Santiago

Profesor Propio Adjunto. *Líneas de investigación:* Análisis no lineal, EDO's y EDP's no lineales, bifurcación – UNIV. PONTIFICIA DE COMILLAS – E. T. S. de Ingeniería, ICAI – Dpto. de Matemática Aplicada y Computación – Alberto Aguilera, 25. 28015 Madrid.
Tlf.: 915.422.800, Ext. 2382.
e-mail: scano@dmc.icaui.upcomillas.es.

Durán Martín, Ángel

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Análisis numérico de EDP's, ondas no lineales – UNIV. DE VALLADOLID – E. T. S. I. de Telecomunicación – Dpto. de Matemática Aplicada – Camino del Cementerio, s/n. 47011 Valladolid.
Tlf.: 983.425.670. *Fax:* 983.423.661.
e-mail: angel@mac.uva.es.

Llorente Mediavilla, Alberto

Estudiante (Becario). *Líneas de investigación:* Teoría de Galois diferencial, cálculo simbólico de soluciones liouvillianas, algoritmos híbridos numérico-simbólicos – UNIV. DE VALLADOLID – Fac. de Ciencias – Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología – Paseo del Prado de la Magdalena. 47005 Valladolid.
Tlf.: 983.423.046. *Fax:* 983.423.788.
e-mail: llorente@agt.uva.es.

López Hernanz, Lorena

Estudiante (Becario). *Líneas de investigación:* Sistemas dinámicos discretos, sumabilidad, resurgencia – UNIV. DE VALLADOLID – Fac. de Ciencias – Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología – Paseo del Prado de la Magdalena. 47005 Valladolid.
Tlf.: 983.423.046. *Fax:* 983.423.788.
e-mail: llopez@agt.uva.es.

Pardo Zubiaur, David

Prof. de Investigación. *Líneas de investigación:* – BASQUE CENTER FOR APPLIED MATHEMATICS – Parque Tecnológico de Vizcaya, Edificio 208B. 48170 Zamudio.
Tlf.: 944.014.690. *Fax:* 944.054.787.
e-mail: dzubiaur@gmail.com.

Rivas Ulloa, Judith

Profesor Colaborador. *Líneas de investigación:* – UNIV. DEL PAÍS VASCO – Fac. de Ciencia y Tecnología – Dpto. de Matemáticas – Barrio Sarriena, s/n. 48940 Lejona (Vizcaya).

Tlf.: 946.015.353. *Fax:* 946.012.516.

e-mail: judith.rivas@ehu.es.

Simon Estrada, Sergi

Senior Lecturer. Líneas de investigación: Integrabilidad de sistemas dinámicos – UNIVERSITY OF PORTSMOUTH – Dept. of Mathematics – Lion Gate Building. Lion Terrace. Portsmouth, Hampshire PO1 3HF, United Kingdom.

e-mail: sergi.simon@gmail.com.

Toja Gómez, Raquel

Estudiante (Becario). *Líneas de investigación:* Glaciología teórica, ecuaciones en derivadas parciales, métodos iterativos – UNIV. DE LA CORUÑA – Fac. de Informática – Dpto. de Matemáticas – Campus de Elviña, s/n. 15071 - La Coruña.

Tlf.: 981.167.000, Ext. 1361. *Fax:* 981.167.160.

e-mail: rtoja@udc.es.

Univ. Politécnica de Madrid

Dep. de Fundamentos Matemáticos de la Tecnología Aeronáutica

Plaza Cardenal Cisneros, 3. 28040 Madrid. *Tlf.:* 913.363.289. *Fax:* 913.366.307.

e-mail: cvespi@fmetsia.upm.es.

<http://web.fmetsia.upm.es/>

Direcciones útiles

Consejo Ejecutivo de SĒMA

Presidente:

Carlos Vázquez Cendón. (carlosv@udc.es).
Dpto. de Matemáticas. Facultad de Informática. Univ. de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña. *Tel:* 981 16 7000-1335.

Vicepresidente:

Rosa María Donat Beneito. (Rosa.M.Donat@uv.es)
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemàtiques. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 544 727.

Secretario:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Vocales:

Sergio Amat Plata. (sergio.amat@upct.es)
Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística. Univ. Politécnica de Cartagena. Paseo de Alfonso XIII, 52. 30203 Cartagena (Murcia). *Tel:* 968 325 694.

Rafael Bru García. (rbru@mat.upv.es)
Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Agrónomos. Univ. Politécnica de Valencia. Camí de Vera, s/n. 46022 Valencia. *Tel:* 963 879 669.

José Antonio Carrillo de la Plata. (carrillo@mat.uab.es)
Dpto. de Matemáticas. Univ. Autònoma de Barcelona. Edifici C. 08193 Bellaterra (Barcelona). *Tel:* 935 812 413.

Inmaculada Higuera Sanz. (higuera@unavarra.es).
Dpto de Matemática e Informática Univ. Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. *Tel:* 948 169 526. 31006 Pamplona.

Carlos Parés Madroñal. (carlos_pares@uma.es).
Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Ciencias. Univ. de Málaga. Campus de Teatinos, s/n. 29080 Málaga. *Tel:* 952 132 017.

Pablo Pedregal Tercero. (Pablo.Pedregal@uclm.es).
Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. de Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 436

Luis Vega González. (luis.vega@ehu.es).
Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Tesorero:

Íñigo Arregui Álvarez. (arregui@udc.es).
Dpto. de Matemáticas. Fac. de Informática. Univ. de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña. *Tel:* 981 16 7000-1327.

Comité Científico del Boletín de SĕMA

Enrique Fernández Cara. (caracus.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Alfredo Bermúdez de Castro. (mabermud@usc.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus Univ.. 15706 Santiago (A Coruña) *Tel:* 981 563 100.

Carlos Conca Rosende. (cconca@dim.uchile.cl).

Dpto. de Ingeniería Matemática. Univ. de Chile. Blanco Encalada 2120. Santiago (Chile) *Tel:* (+56) 0 978 4459.

Amadeus Delshams Valdés. (Amadeu.Delshams@upc.es).

Dpto. de Matemática Aplicada I. Univ. Politécnica de Cataluña. Diagonal 647. 08028 Barcelona. *Tel:* 934 016 052.

Martin J. Gander (Martin.Gander@math.unige.ch).

Section de Mathématiques. Université de Genève. 2-4 rue du Lièvre, CP 64. CH-1211 Genève (Suiza). *Fax:* (+41) 22 379 11 76.

Vivette Girault (girault@ann.jussieu.fr). Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Paris VI. Boite Courrier 187, 4 Place Jussieu 75252 Paris Cedex 05 (Francia).

Arieh Iserles (A.Iserles@damp.cam.ac.uk).

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics. University of Cambridge. Wilberforce Rd Cambridge (Reino Unido). *Tel:* (+44) 1223 337891.

José Manuel Mazón Ruiz. (Jose.M.Mazon@uv.es).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

Pablo Pedregal Tercero. (Pablo.Pedregal@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 436 .

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

Benoît Perthame. (benoit.perthame@ens.fr).

Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Paris VI. 175, rue du Chevaleret. 75013 Paris, (Francia). *Tel:* (+33) 1 44 32 20 36.

Olivier Pironneau (pironneau@ann.jussieu.fr).

Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Paris VI. 35 rue de Bellefond. 75009 Paris (Francia). *Tel:* (+33) 1 42 80 12 97.

Alfio Quarteroni. (alfio.quarteroni@epfl.ch).

Institute of Analysis and Scientific Computing. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Piccard Station 8. CH-1015 Lausanne (Suiza) *Tel:* (+41) 21 69 35546.

Juan Luis Vázquez Suárez. (juanluis.vazquez@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Crta. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 935.

Luis Vega González. (mtpvegol@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Chi-Wang Shu. (shu@dam.brown.edu).

Division of Applied Mathematics Box F. 182 George Street Brown University Providence RI 02912 *Tel:* (401) 863-2549

Enrique Zuazua Iriondo. (zuazua@bcamath.org).

Basque Center for Applied Mathematics Bizkaia Technology Park Building 208B 48170 - Zamudio (Vizcaya) *Tel:* 944 014 690

Grupo Editor del Boletín de SĒMA

Pablo Pedregal Tercero. (Pablo.Pedregal@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3809

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Ernesto Aranda Ortega. (Ernesto.Aranda@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3813

José Carlos Bellido Guerrero. (JoseCarlos.Bellido@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3859

Alberto Donoso Bellón. (Alberto.Donosos@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales. Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real. *Tel:* 926 295 300 ext. 3859

Responsables de secciones del Boletín de SĒMA

Artículos:

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Matemáticas e Industria:

Mikel Lezaun Iturralde. (mpleitm@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e I. O. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Educación Matemática:

Roberto Rodríguez del Río. (rr_delrio@mat.ucm.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Químicas. Univ. Compl. de Madrid. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid. *Tel:* 913 944 102.

Resúmenes de libros:

Fco. Javier Sayas González. (jsayas@posta.unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior . Universidad de Zaragoza. C/María de Luna, 3. 50015 Zaragoza. *Tel:* 976 762 148.

Noticias de SēMA:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos.
Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:*
91 336 6664.

Anuncios:

Óscar López Pouso. (oscarlp@usc.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de
Compostela. Campus sur, s/n. 15782 Santiago de Compostela *Tel:*
981 563 100, ext. 13228.

Responsables de otras secciones de SēMA**Gestión de Socios:**

Íñigo Arregui Álvarez. (arregui@udc.es).
Dpto. de Matemáticas. Fac. de Informática. Univ. de A Coruña. Campus de
Elviña, s/n. 15071 A Coruña. *Tel:* 981 16 7000-1327.

Página web: www.sema.org.es/:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos.
Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:*
91 336 6664.

1. Los artículos publicados en este Boletín podrán ser escritos en español o inglés y deberán ser enviados por correo certificado a

Prof. E. FERNÁNDEZ CARA
 Presidente del Comité Científico, Boletín SĕMA
 Dpto. E.D.A.N., Facultad de Matemáticas
 Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA

También podrán ser enviados por correo electrónico a la dirección

`boletin.sema@uclm.es`

En ambos casos, el/los autor/es deberán enviar por correo certificado una carta a la dirección precedente mencionando explícitamente que el artículo es sometido a publicación e indicando el nombre y dirección del autor corresponsal. En esta carta, podrán sugerirse nombres de miembros del Comité Científico que, a juicio de los autores, sean especialmente adecuados para juzgar el trabajo.

La decisión final sobre aceptación del trabajo será precedida de un procedimiento de revisión anónima.

2. Las contribuciones serán preferiblemente de una longitud inferior a 24 páginas y se deberán ajustar al formato indicado en los ficheros a tal efecto disponibles en la página web de la Sociedad (<http://www.sema.org.es/>).
3. El contenido de los artículos publicados corresponderá a un área de trabajo preferiblemente conectada a los objetivos propios de la Matemática Aplicada. En los trabajos podrá incluirse información sobre resultados conocidos y/o previamente publicados. Se anima especialmente a los autores a presentar sus propios resultados (y en su caso los de otros investigadores) con estilo y objetivos divulgativos.

Ficha de Inscripción Individual

Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

Remitir a: Iñigo Arregui, Dpto de Matemáticas, Fac. de Informática,
Universidad de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña.
CIF: G-80581911

Datos Personales

- Apellidos:
- Nombre:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Fecha de inscripción:

Datos Profesionales

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: Fax:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Categoría Profesional:
- Líneas de Investigación:
-

Dirección para la correspondencia: Profesional Personal

Cuota anual para el año 2009

- Socio ordinario: 30€ Socio de reciprocidad con la RSME: 12€
- Socio estudiante: 15€

Datos bancarios

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SēMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) sean pasados al cobro en la cuenta cuyos datos figuran a continuación

Entidad (4 dígitos)	Oficina (4 dígitos)	D.C. (2 dígitos)	Número de cuenta (10 dígitos)

- Entidad bancaria:
- Domicilio:
- C.P.: Población:

Con esta fecha, doy instrucciones a dicha entidad bancaria para que obren en consecuencia.

Atentamente,

Fdo.

Para remitir a la entidad bancaria

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SēMA (Sociedad Española de Matemática Aplicada) sean cargados a mi cuenta corriente/libreta en esa Agencia Urbana y transferidas a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander

Atentamente,

Fdo.

Ficha de Inscripción Institucional

Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA

Remitir a: Iñigo Arregui, Dpto de Matemáticas, Fac. de Informática,
Universidad de A Coruña. Campus de Elviña, s/n. 15071 A Coruña.
CIF: G-80581911

Datos de la Institución

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Fecha de inscripción:

Forma de pago

La cuota anual para el año 2009 como Socio Institucional es de 150€.
El pago se realiza mediante transferencia bancaria a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander