

S \tilde{e} MA
BOLETÍN NÚMERO 34
Marzo 2006
Actas del CEDYA 2005

sumario

Editorial	5
Palabras del presidente	7
Obituario: Javier Chavarriga Soriano	9
Conferencias plenarias	15
<i>Problemas de Dirichlet con datos singulares</i> , por L. Boccardo	17
<i>Discontinuous Galerkin Approximation of heterogeneous Maxwell source problem</i> , por A. Buffa e I. Perugia	33
<i>Dos ejemplos de singularidades en interfases fluidas: gotas cargadas eléctricamente y evolución de hojas de vorticidad</i> , por M. A. Fontelos	45
<i>Numerical solutions of structural eigenvalue problems</i> , por V. Mehrmann	57
<i>Application of high order well-balanced schemes to a class of hyperbolic systems with source terms</i> , por Y. Xing y C. W. Shu	69
<i>Recent developments in the theory of homogenization for fully nonlinear first and second-order pde in random environments</i> , por P. E. Souganidis	81
Sesiones monográficas	91
<i>Ecuaciones en Derivadas Parciales</i> . Coord.: J. L. Vázquez y A. de Pablo	91
<i>Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</i> . Coord.: R. Ortega	111
<i>Sistemas Dinámicos</i> . Coord.: J. Llibre y A. Gasull	130
<i>Teoría de la Aproximación</i> . Coord.: G. López	152
<i>Complejidad: Mecánica Estadística y Ciencia no Lineal</i> . Coord.: A. Sánchez	175
<i>Álgebra Lineal Numérica</i> . Coord.: F. Martínez	190
<i>Métodos Numéricos y Aplicaciones</i> . Coord.: R. Donat	209
<i>Teoría de Control</i> . Coord.: E. Casas	232
Noticias	257

Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĕMA

Grupo Editor

L. Ferragut Canals (U. de Salamanca) E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
F. Andrés Pérez (U. de Salamanca) M.I. Asensio Sevilla (U. de Salamanca)
M.T. de Bustos Muñoz (U. de Salamanca) A. Fernández Martínez (U. de Salamanca)

Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla) A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)
E. Casas Rentería (U. de Cantabria) J.L. Cruz Soto (U. de Córdoba)
L. Ferragut Canals (U. de Salamanca) J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia)
I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid) J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)
L. Vega González (U. del País Vasco) E. Zuazua Iriondo (U. Comp. de Madrid)

Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)
Historia Matemática: J.M. Vegas Montaner (U. Comp. de Madrid)
Resúmenes: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)
Noticias de SĕMA: C.M. Castro Barbero (Secretario de SĕMA)
Anuncios: Ó. López Pouso (U. de Santiago de Compostela)

Página web de SĕMA

<http://www.sema.org.es/>

Este Boletín ha sido parcialmente financiado por el proyecto MTM2005-24566-E del Ministerio de Educación y Ciencia, con cofinanciación de los FEDER.

Dirección Editorial: Boletín de SĕMA. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37008. Salamanca. boletin_sema@usal.es.

ISSN 1575-9822.

Depósito Legal: AS-1442-2002.

Imprime: Gráficas Lope. C/ Laguna Grande, parc. 79, Políg. El Montalvo II 37008. Salamanca.

Diseño de portada: Luis Ferragut Alonso.

Consejo Ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada
SĕMA

Presidente

Juan Ignacio Montijano Torcal

Vicepresidente

Mikel Lezaun Iturralde

Secretario

Carlos Manuel Castro Barbero

Tesorera

María Pilar Laburta Santamaría

Vocales

Rafael Bru García

Jose Antonio Carrillo de la Plata

Inmaculada Higuera Sanz

Pablo Pedregal Tercero

Ireneo Peral Alonso

Enrique Zuazua Iriondo

Estimados socios:

Este es un número especial del Boletín SĒMA editado con ocasión del último Congreso CEDYA, que fue organizado por la Universidad Carlos III y tuvo lugar en Leganés, del 19 al 23 de septiembre de 2005.

Podéis encontrar en él los textos suministrados por los conferenciantes plenarios y los participantes en las sesiones monográficas. Como podéis comprobar, el número de páginas resultante es algo superior al habitual, pero estamos convencidos de que los esfuerzos económicos y de trabajo realizados merecen con creces la pena.

Desde aquí, queremos dejar constancia de la labor llevada a cabo por los organizadores del Congreso y de las sesiones monográficas, que ha permitido agrupar todos estos interesantes trabajos. Es indudable que se ha conseguido un amplísimo espectro de temas, que constituye una muestra enormemente significativa de la Matemática Aplicada actual.

En especial queremos agradecer a Arturo de Pablo su esfuerzo en la recopilación de todos los trabajos facilitando enormemente la labor del grupo editor.

Queremos aprovechar la ocasión para hacer dos anuncios.

En primer lugar, tenemos la satisfacción de poder anunciar que en los próximos volúmenes irán siendo publicados varios artículos relacionados con las aplicaciones de las Matemáticas a la Biología y a la Medicina. Esto es el resultado de la muy eficiente gestión de nuestro compañero Renato Álvarez Nodarse, de la Universidad de Sevilla. Sucesivamente, tendremos la oportunidad de leer trabajos del propio Renato Álvarez Nodarse, Angel Sánchez (Universidad Carlos III de Madrid), Niurka Rodríguez (Universidad de Sevilla), Mariano Ruiz de Almodóvar (Universidad de Granada), Antonio Marín (Universidad de Sevilla) y Jose L. Oliver (Universidad de Granada).

En segundo lugar, también os anunciamos con gran satisfacción que en volúmenes sucesivos iréis encontrando varios artículos sobre la “Dinámica de Fluidos Computacional” escritos por Ronald Glowinski y sus colaboradores, Richard Sanders (Universidad de Houston, Texas) y Zhangxin Chen (Southern Methodist University, Dallas). Entre los temas tratados, se incluye el análisis numérico de fluidos viscosos incompresibles, la Dinámica de gases y la simulación de depósitos petroleros. Estas gestiones han sido realizadas por nuestro compañero Héctor L. Juárez, de la Universidad Autónoma Metropolitana de México, a quien es justo mostrar nuestro agradecimiento.

Con estas buenas noticias nos despedimos, deseando que el volumen presente resulte de vuestro agrado.

Grupo Editor
boletin_sema@usal.es

En recuerdo de Javier Chavarriga

Por fortuna no es frecuente el tener que transmitir en nuestro Boletín malas noticias. Pero en ocasiones los acontecimientos nos obligan a ello, como fue el caso reciente del inesperado fallecimiento, el pasado 9 de noviembre, de nuestro compañero y amigo Javier Chavarriga. Javier fue un socio de SEMA muy activo y siempre manifestó un claro interés por los asuntos de nuestra Sociedad. No es por ello sorprendente que en el año 2000 pasase a formar parte del Consejo ejecutivo, pertenencia que renovó tres años mas tarde y que debería haber concluido en el próximo septiembre. En el periodo en el que hemos compartido con él responsabilidades me queda el recuerdo de su excelente disposición, siempre con el objetivo de hacer llegar a la SEMA a cuantos colegas le fue posible, intentando abrir nuestra sociedad a todos los ámbitos de la matemática aplicada. Cuando en el Comité Español de Matemáticas (CEMAT) se constituyeron diversas comisiones, Javier se incorporó a la comisión de Desarrollo y Cooperación, en la que ha sido miembro muy entregado hasta el lamentable momento de su pérdida. Por toda su buena y generosa labor, quiero dejar aquí constancia de nuestro agradecimiento.

Aunque muchos de nosotros ya hemos expresado a su familia y amigos nuestro profundo pesar, queremos hacerlo de nuevo con todo cariño desde las páginas de este Boletín.

Sus compañeros de la Universidad de Lleida han querido hacernos llegar unas palabras que sirvan para recordarlo, y a ese recuerdo me sumo como Presidente en nombre de toda la SEMA.

Un fuerte abrazo de todos, Javier

Juan I. Montijano

Presidente de la SEMA

Sirva el presente escrito para dar testimonio de una vida dedicada a las matemáticas.

Javier Chavarriga cursó la licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Central de Barcelona en el periodo 1974-79, especializándose en Análisis Matemático y se licenció en junio de 1979. Obtuvo el Grado de Licenciatura, modalidad tesina en diciembre de 1981. Se doctoró en Ciencias Matemáticas en la misma Facultad en noviembre de 1985, obteniendo la calificación de Apto CUM LAUDE bajo la dirección del Dr. Carlos Simó Torres. Durante los cursos 1979-83 ejerció de profesor ayudante en el departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Barcelona. Muchos, hoy profesores, recuerdan aquel flamante licenciado que daba clases de ecuaciones diferenciales y transmitía el gran ímpetu y entusiasmo que sentía por las matemáticas y que siempre lo han caracterizado.

Inicia el curso 1983-84 como profesor Colaborador de Docencia e Investigación en la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Cataluña. En noviembre de 1984 obtiene una plaza de profesor adjunto interino de Matemáticas Generales en la Facultad de Farmacia de la Universidad de Barcelona, donde desempeña su actividad docente en el periodo comprendido entre noviembre de 1984 y junio de 1992. En Enero de 1985 es nombrado Profesor Titular de Universidad interino de Matemática Aplicada. En Mayo de 1987 gana por Concurso-Oposición la plaza de Profesor Titular de Universidad de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática Aplicada y Análisis de la Universidad de Barcelona.

En los años 90 se produce la reestructuración del sistema universitario catalán. En aquellos momentos Cataluña sólo contaba con tres universidades con diversas delegaciones en las diferentes provincias de Cataluña. Con la reestructuración se crean o restituyen (es el caso de la Universidad de Lleida) nuevas universidades como la Universidad de Girona, la Universidad de Lleida y la Universidad Rovira i Virgili de Tarragona.

Sus lazos sentimentales y familiares con las tierras de Franja de la provincia de Huesca y más concretamente con el pueblo de Sena, a poco más de 50 Km. de la ciudad de Lleida, propiciaron que, durante ese periodo de cambios, apostara por la Universidad de Lleida de la cual, más tarde, se sentía muy orgulloso.

Así, en octubre de 1992 se incorporó a la sección de Matemáticas del Segrià de la Universidad Politécnica de Cataluña en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Lleida. Dicho centro queda adscrito en noviembre de 1992 a la Universidad de Lleida. Y en Junio de 1995 gana la plaza de Profesor Titular de Universidad de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática de la Universidad de Lleida.

Desde entonces y hasta ahora hemos compartido buena parte de sus mismas inquietudes y fue en esta universidad donde desarrolló su principal y más fructífero trabajo docente e investigador. Fue uno de los impulsores del recién

creado Departamento de Matemática de nuestra Universidad, ocupando el cargo de director durante un largo periodo.

Su gran ilusión era formar un grupo de investigación en sistemas dinámicos: quería crea escuela. Lo primero que hizo fue buscar alumnos. Para lograr su propósito inició un curso de doctorado titulado "Modelización Matemática", que algunos miembros de nuestro departamento cursamos como alumnos. De éstos, Jaume Giné continuó como doctorando y se creó así el núcleo inicial de nuestro grupo de investigación. El año 1995 se incorporó Isaac A. García.

Los inicios fueron muy duros: aún recordamos el despacho compartido por los tres y de 4 m² en el edificio del rectorado. Grandes sacrificios marcan esa época con muchas horas de dedicación al trabajo. En ese periodo Javier mostraba las grandes virtudes que lo caracterizaban. Su ímpetu y su fuerza que le permitían superar obstáculos de cualquier magnitud y su gran estima al trabajo bien hecho.

Los frutos de estos esfuerzos se hacen evidentes con el reconocimiento de los miembros de la comunidad científica internacional y las primeras colaboraciones y visitas se suceden. Se establecen importantes colaboraciones científicas a nivel nacional e internacional, sin pretender ser exhaustivos, profesores como Héctor Giacomini de la Universidad de Tours, Armengol Gasull y Jaume Llibre de la Universidad Autónoma de Barcelona, Mircea Sofonea de la Universidad de Perpingan, Laurent Cairó de la Universidad de Orleáns, Mijhail Popescu del Instituto de Matemáticas de Bucarest, Marco Sabatini de la Universidad de Trento, ... fueron profesores visitantes durante ese periodo inicial.

La consolidación del grupo de investigación "Seminari de Sistemes Dinàmics" y estas distintas colaboraciones propiciaron la organización de diferentes congresos entre los que cabe destacar las "Jornadas Catalanas de Matemática Aplicada" y las dos ediciones del "Symposium on planar vector fields".

Mas adelante, el grupo se amplía con los doctorandos Jordi Sorolla y Maite Grau, de manera que la continuidad de la escuela de sistemas dinámicos creada por Javier quedaba garantizada.

Su investigación se enmarcó en los Sistemas Dinámicos continuos y, en particular, en los de dimensión dos. Estos sistemas se pueden pensar como ecuaciones diferenciales ordinarias que han sido parametrizadas por una variable temporal. Sus contribuciones al problema del centro y al problema de la integrabilidad son remarcables. Se dedicó también al estudio de temas como los centros isócronos, la reversibilidad, los sistemas nilpotentes y degenerados, las bifurcaciones, los ciclos límite (16^o problema de Hilbert), las simetrías de Lie, las ecuaciones diferenciales en el plano complejo proyectivo, etc.

En los últimos tiempos fue uno de los impulsores de la Teoría de la integrabilidad de Darboux. Esta teoría se basa en que la determinación de un número suficientemente alto de soluciones algebraicas para un sistema dinámico en el plano, si éstas existen, permite dar la integral primera del sistema. El matemático Gaston Darboux inició esta teoría y, tras leer su memoria, Javier vio en las ideas de Darboux el inicio de la Teoría Algebraica de las Ecuaciones Diferenciales, que pretende el estudio de las características de las curvas algebraicas invariantes de un sistema diferencial y su relación con las

demás soluciones del sistema. Todos los alumnos de Javier coincidimos en que poseía el don de una gran intuición matemática. Se volcó en gran medida en el estudio de estas curvas algebraicas invariantes, cosa que le permitió encontrar familias de sistemas con propiedades de integrabilidad interesantes, nuevos ejemplos de ciclos límite algebraicos para sistemas cuadráticos y determinar propiedades para sistemas cuadráticos con integral primera racional.

En Julio de 2002 Javier obtiene la plaza de Catedrático de Universidad de Matemática Aplicada. Hecho que supone la culminación del trabajo docente e investigador realizado durante toda su carrera universitaria.

Además, Javier Chavarriga se preocupó por la difusión y divulgación de las matemáticas y la ciencia en general organizando diferentes ciclos de conferencias en el Instituto de Estudios Ilerdenses (I.E.I.), del cual fue consejero, en el Instituto de Ciencias de la Educación (I.C.E.), o desde la propia Universidad de Lleida, donde también organizó cursos de libre elección abiertos a todo el alumnado de la universidad y también para profesorado de secundaria. Entre ellos, las "Lecciones populares de Matemáticas" que tuvieron una gran acogida.

A nivel docente, y dentro de la Escuela Politécnica Superior (E.P.S.), destacaremos que Javier se involucró en el inicio de los estudios de Ingeniería Técnica Industrial, desde el curso inicial 97/98 como profesor de la asignatura de Cálculo, y participando en la consolidación de dicha titulación. Hay que remarcar que Javier sabía hacer atractivas las asignaturas que impartía y que era apreciado y estimado por sus alumnos. Así lo muestra, entre otras cosas, las diferentes veces que se le pidió ser padrino de distintas promociones.

La última etapa de Javier ha sido como miembro del equipo directivo de la E.P.S. Durante este último año y medio Javier volcó todas sus ilusiones y esfuerzos hacia la Escuela, iniciando los estudios de Arquitectura Técnica, de los cuales ha sido un gran impulsor, y la apertura del Centro de Investigación de Energías Aplicadas. En los últimos meses participó en la elaboración de una propuesta de postgrado de Ingeniería y Tecnologías de la Información consiguiendo el consenso necesario para llevar a cabo el proyecto. Otra de sus características que siempre lo han definido era buscar el consenso entre todos.

Desde su vertiente más humana, todos los que le hemos conocido, hemos visto la gran devoción hacia su padre, hacia su mujer Cristina y sobre todo a sus hijos Marta y Javier de los cuales estaba orgulloso. Además de ciencia, Javier nos ha enseñado muchas otras cosas de la vida. Su ímpetu, su cariño por las matemáticas, sus ganas de trabajar, de entender los problemas. Su legado queda en nosotros y nosotros no seríamos lo que somos si no fuera gracias a él.

Estamos seguros que nos animaría a todos, con su peculiar forma de ser y su risa, a continuar adelante. Continuar su legado, fruto de su trabajo y dedicación, es la mejor forma de continuar recordándole.

Un fuerte abrazo,

Isaac A. García, Jaume Giné, Maite Grau y Jordi Sorolla

En las páginas que siguen encontraremos los artículos correspondientes a las conferencias plenarias y sesiones monográficas impartidas en el último congreso CEDYA05, (XIX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, IX Congreso de la Sociedad Española de Matemática Aplicada), celebrado en Leganés en septiembre de 2005.

En la primera parte se recopila la mayor parte de las siete conferencias plenarias que se presentaron en el congreso, aunque nos habría gustado poder contar con todas.

En cuanto a las sesiones monográficas, es un placer decir que sí podemos disfrutar de la totalidad de las contribuciones. Queremos resaltar que en este apartado, a las clásicas sesiones de Ecuaciones en Derivadas Parciales, Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos, Métodos Numéricos y Aplicaciones y Teoría de Control, que se vienen incluyendo más o menos tradicionalmente en los CEDYA, se han añadido en esta edición tres sesiones que de alguna manera reflejan la particularidad de la investigación que se realiza en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid: *Teoría de la Aproximación, Álgebra Lineal Numérica y Complejidad: Mecánica Estadística y Ciencia no Lineal*.

Desde el comité organizador quisimos dejar libertad a los organizadores de estas sesiones a la hora de presentar sus contribuciones. Algunos de ellos han recopilado los artículos escritos por los propios conferenciantes, añadiendo en ocasiones una pequeña introducción que hiciera de nexo. Dos de los organizadores sin embargo nos presentan un resumen elaborado por ellos mismos de lo que supuso cada sesión y finalmente contamos con un artículo en el que el organizador de la sesión ofrece una visión personal del tema en cuestión. Una diversidad de formatos que creemos enriquece este número especial.

Por otro lado, queremos también hacer mención aquí a las contribuciones ordinarias, la tercera parte sobre la que se sustenta el congreso CEDYA05 y que sin duda ha tenido también tradicionalmente una gran importancia en anteriores ediciones. Estas contribuciones suponen un importante apoyo e incentivo a los investigadores que comienzan, aunque es destacable la cantidad de contribuciones de investigadores asentados registrada este año. El nivel ha sido muy alto. De hecho el elevado número de contribuciones recibidas, y aceptadas (186) después del informe preceptivo de una comisión científica, así lo atestigua. Los artículos correspondientes a las contribuciones ordinarias aparecerán, simultáneamente con este número especial, en un CD-ROM, que se enviará a todos los participantes. Queremos resaltar en este sentido la colaboración prestada por Esteban Moro en su edición.

Deseamos agradecer, por último, al grupo editor del Boletín de SEMA toda la colaboración prestada desde que les propusimos la idea de elaborar este número especial. Esperamos que la experiencia resulte positiva y tenga continuidad en próximos congresos.

Arturo de Pablo
Comité Organizador

Sesiones plenarias

Participantes:

LUCIO BOCCARDO

ANNALISA BUFFA

MARCO ANTONIO FONTELOS LÓPEZ

VOLKER MEHRMANN

CHI-WANG SHU

PANAGIOTIS E. SOUGANIDIS

Problemas de Dirichlet con datos singulares

LUCIO BOCCARDO

Dipartimento di Matematica
Piazza A. Moro 2, Roma, Italia1.

boccardo@mat.uniroma1.it



CEDYA XIX, MADRID, 19. 9. 2005

Gracias a

Fuensanta,

David, Ildefonso, Ireneo, Juan Luis,

Miguel, Miguel Angel, Sergio.

1 Marco general: datos que son medidas.

Marco general: consideremos el problema elíptico

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) = \mu & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde

- Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N
- μ es una medida de Radon sobre Ω
- A es un operador de tipo Leray-Lions definido de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en su dual, con $1 < p < N$. En concreto A viene definido por

$$A(v) = -\operatorname{div}(a(x, v, \nabla v))$$

donde $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ es una función de Caratheodory, que satisface:

- Existe una constante positiva α tal que

$$a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^p, \quad (2)$$

– Existe una constante positiva β tal que para casi todo $x \in \Omega$

$$|a(x, s, \xi)| \leq \beta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad (3)$$

– Para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ distintos

$$(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0 \quad (4)$$

Tomamos como modelo a modo de ejemplo el siguiente operador

$$- \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} |\nabla u|).$$

Existe una solución débil u en el espacio de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q < \tilde{p} = \frac{(p-1)N}{N-1}$. Notemos que $q \geq 1$ si $p > 2 - \frac{1}{N}$.

La existencia de solución para el problema (1) ha sido estudiada en el caso en que A es lineal (y $p=2$) por G. Stampacchia [18]. El caso en que A es no lineal ha sido considerado en [7], [8], [1], [12].

En cuanto a la unicidad de solución en el sentido débil, incluso en el caso lineal, no es cierta. Puede verse un contraejemplo en [17] (una descripción completa puede encontrarse en [16]).

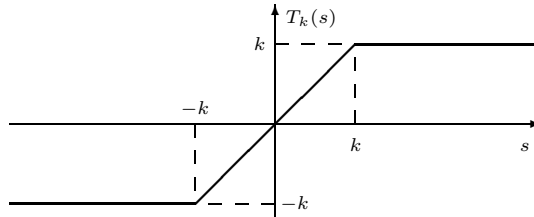
La formulación débil del problema (1) es

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < \tilde{p} = \frac{(p-1)N}{N-1}, \\ \int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \quad (5)$$

Sin embargo, si A es monótono se puede probar la unicidad añadiendo a la formulación débil del problema (1) la condición que llamaremos de entropía ([1]).

DEFINICIÓN 1.1 $T_k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es la función definida por

$$T_k(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq k, \\ k \frac{t}{|t|}, & |t| > k \end{cases}$$



DEFINICIÓN 1.2 Consideremos el problema (1) con segundo miembro $\mu = f$ una función in $L^1(\Omega)$. Se dice entonces que u es una solución de entropía de dicho problema si

$$\left\{ \begin{array}{l} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall k > 0 : \\ \int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi), \\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega), \end{array} \right. \quad (6)$$

La dificultad principal que presenta la formulación débil del problema (1) es que no se puede utilizar como función test la propia solución, y es por este motivo que se usan funciones truncadas. Además, es realmente importante que las funciones test sean acotadas ya que si tomáramos funciones que sólo estuvieran en $W_0^{1,p}(\Omega)$, podría ocurrir en algún caso que el término $a(x, u, \nabla u) \nabla v$ no perteneciera a $L^1(\Omega)$.

Las técnicas para las estimaciones a priori en los espacios de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$, $q < \tilde{p}$ ($u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < \tilde{p} = \frac{(p-1)N}{N-1}$), pueden verse en [7],[8]. El caso $p \leq 2 - \frac{1}{N}$ ha sido estudiado en [1].

2 Para simplificar: $p = 2$.

Para simplificar las demostraciones suponemos que nos encontramos en el caso $p = 2$, que $a(x, s, \xi) = M(x)\xi$, donde $M(x)$ es una matriz acotada y elíptica, y el dato es una función de $L^1(\Omega)$.

En tal caso (5) y (6) se escriben como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < \frac{N}{N-1}, \\ \int_{\Omega} M(x) \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{array} \right. \quad (7)$$

y si $f \in L^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < \frac{N}{N-1}, \\ \int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \\ \left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < \frac{N}{N-1}, \\ T_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \forall k > 0, \\ \int_{\Omega} M(x) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi), \\ \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8)$$

3 Datos en $L^1(\Omega)$: Existencia.

Sea $L(v) = -\operatorname{div}(M(x)\nabla v)$ y f una función de $L^1(\Omega)$. Consideremos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L^{\infty}(\Omega)$ que converja a f en $L^1(\Omega)$, y denotemos por u_n la función de $W_0^{1,2}(\Omega)$ solución débil del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(u_n) = f_n & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (9)$$

TEOREMA 3.1 *Para todo $q < \tilde{2} = \frac{N}{N-1}$ existe una constante positiva c_q que no depende de n tal que*

$$\|u_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq R_q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, u_n converge en $W_0^{1,q}(\Omega)$ a una función u que es una solución débil y una solución entrópica del problema de Dirichlet (8)

NOTA 3.1 • *Basta aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener la existencia de solución débil u_n de los problemas aproximados.*

- *Una posible elección para la sucesión de funciones f_n es tomarlas como las funciones truncadas a nivel n de la función f , es decir $f_n = T_n(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración consta de dos etapas. En primer lugar se hace un estudio de las estimaciones a priori y, posteriormente, el paso al límite en los problemas aproximados.

ETAPA 1 - ESTIMACIONES A PRIORI

Se trata de probar que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $W_0^{1,q}(\Omega)$ para cada $q < \tilde{2}$. Para ello sea $k > 0$ y se define la función $\psi_k(t)$ como:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, k] \\ t - k & \text{si } t \in (k, k + 1] \\ 1 & \text{si } t \in (k + 1, +\infty) \\ -\psi_k(-t) & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (10)$$

Como cada u_n pertenece a $W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos asegurar que $\psi_k(u_n)$ está en $W_0^{1,2}(\Omega)$, y, en consecuencia, podemos utilizarla como función test en la formulación débil del problema (9). Se obtiene

$$\int_{\Omega} M(x) \nabla u_n \nabla \psi_k(u_n) = \int_{\Omega} f_n \psi_k(u_n)$$

El segundo miembro de esta igualdad puede acotarse por $\|f\|_{L^1(\Omega)}$, ya que por definición $|\psi_k(t)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. En cuanto al primer miembro, usando la elipticidad y el hecho de que $\nabla \psi_k(u_n)$ es cero salvo en el conjunto (que llamaremos B_k) donde coincide con ∇u_n , se llega a que

$$\alpha \int_{B_k} |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

siendo $B_k = \{x \in \Omega : k \leq |u_n(x)| < k + 1\}$.

Luego

$$\int_{B_k} |\nabla u_n|^2 \leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha}.$$

Tomemos ahora $\lambda > 1$. Se trata de acotar $\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1 + |u_n|)^{\lambda}}$. Para ello, usamos la cota anterior y la descomposición del dominio $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$. Obtenemos

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1 + |u_n|)^{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_k} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1 + |u_n|)^{\lambda}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha(1+k)^{\lambda}} = c_1 = c_1(\lambda).$$

Esta desigualdad se obtiene por la definición de B_k y se puede asegurar que es menor que una constante porque la serie obtenida es convergente ($\lambda > 1$).

Buscaremos ahora una cota para $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q$, con q un número real al cual (de momento) solo exigimos que sea menor que 2.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{(1 + |u_n|)^{\frac{\lambda q}{2}}} (1 + |u_n|)^{\frac{\lambda q}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1 + |u_n|)^{\lambda}} \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\frac{\lambda q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}} \leq (c_1)^{\frac{q}{2}} c_2 \left(1 + \int_{\Omega} |u_n|^{\frac{\lambda q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

Para obtener estas desigualdades hemos utilizado la desigualdad de Hölder y la cota obtenida anteriormente.

Ahora bien, por las inmersiones entre espacios de Sobolev, sabemos que

$$\mathcal{S}^q \left(\int_{\Omega} |u_n|^{q^*} \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q$$

Y en consecuencia

$$\mathcal{S}^q \left(\int_{\Omega} |u_n|^{q^*} \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq (c_1)^{\frac{q}{2}} c_2 \left(1 + \int_{\Omega} |u_n|^{\frac{\lambda q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}}.$$

La desigualdad previa nos lleva a una estimación a priori para $\{u_n\}$ si

- $\frac{q}{q^*} > 1 - \frac{q}{2}$,
- $q^* = \frac{\lambda q}{2-q}$.

Como $q < 2$ y $\lambda > 1$, las condiciones anteriores se satisfacen si $N > 2$ y $q < \tilde{2}$. Bajo estas condiciones, podemos asegurar que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $W_0^{1,q}(\Omega)$:

$$\|u_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq R_q.$$

Por tanto, deducimos la existencia de una subsucesión (que seguiremos denotando por $\{u_n\}$) y de una función u tal que ¹

$$u_n \rightarrow u \quad \begin{array}{l} \text{débil en } W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q \text{ tal que } 1 \leq q < \tilde{2}, \\ \text{fuerte en } L^r(\Omega), \quad \forall r < \frac{N}{N-2}. \end{array}$$

Por otro lado, $T_k(u_n)$ es una función de $W_0^{1,2}(\Omega)$. Tomándola como función test en la formulación débil de (9), se deduce que $\{T_k(u_n)\}$ está acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$. En consecuencia podemos asegurar que

$$T_k(u_n) \rightarrow T_k(u) \quad \text{débil en } W_0^{1,2}(\Omega) \quad \text{para todo } k > 0.$$

ETAPA 2 - PASO AL LÍMITE

El paso al límite en el segundo miembro no presenta ninguna dificultad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n T_k(u_n - \varphi) = \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi).$$

Para pasar al límite en el primer miembro, hay que tener en cuenta que

$$M(x) \nabla(u_n - \varphi) \nabla T_k(u_n - \varphi) = M(x) \nabla T_k(u_n - \varphi) \nabla T_k(u_n - \varphi)$$

y que

$$\nabla T_k(u_n - \varphi) = \nabla(u_n - \varphi) \chi_{|u_n(x) - \varphi(x)| \leq k}.$$

Entonces, se tiene $(M(x) \nabla(u_n - \varphi) \nabla T_k(u_n - \varphi) = M(x) \nabla T_k(u_n - \varphi) \nabla T_k(u_n - \varphi))$

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} M(x) \nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} M(x) \nabla(u_n - \varphi) \nabla T_k(u_n - \varphi) + \\ &+ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} M(x) \nabla \varphi \nabla T_k(u_n - \varphi) \geq \int_{\Omega} M(x) \nabla(u - \varphi) \nabla T_k(u - \varphi) + \\ &+ \int_{\Omega} M(x) \nabla \varphi \nabla T_k(u - \varphi) = \int_{\Omega} M(x) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) \end{aligned}$$

En conclusión, tomando como función test $T_k(u_n - \varphi)$ se puede pasar al límite, y queda demostrada la existencia de solución entrópica u del problema de Dirichlet (8).

NOTA 3.2 *En la etapa 1 de la demostración no interviene en ningún momento que el operador sea lineal.*

TEOREMA 3.2 $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ fuerte en $L^r(\Omega)$, $\forall 1 \leq r < \frac{N}{N-1}$.

¹Esto es suficiente para comprobar la existencia de una solución débil (también si los datos son medidas).

DEMOSTRACIÓN. Sean $r < q < \frac{N}{N-1}$ y $z_{n,m}$ soluciones de

$$z_{n,m} \in W_0^{1,2}(\Omega) : -\operatorname{div}(M^*(x)\nabla z_{n,m}) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u_n - \nabla u_m}{|\nabla u_n - \nabla u_m|}\right) \quad (11)$$

Tomando en este problema como función test $u_n - u_m$ y tomando como función test $z_{n,m}$ en (9), llegamos a (cada $z_{n,m}$ pertenece a $L^\infty(\Omega)$, [18])

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n - \nabla u_m|^2}{|\nabla u_n - \nabla u_m|} \\ &= \left| \int_{\Omega} (f_n - f_m) z_{n,m} \right| \leq \|z_{n,m}\|_{\infty} \|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{N+1}{\alpha \mathcal{S}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{N}} \|f_n - f_m\|_1. \end{aligned}$$

Entonces, usando la desigualdad de Hölder (interpolación),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^r &= \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{\frac{q-r}{q-1}} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{\frac{(r-1)q}{q-1}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^q \right)^{\frac{(r-1)}{q-1}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m| \right)^{\frac{q-r}{q-1}} \\ &\leq (2R_q)^{\frac{(r-1)q}{q-1}} \left(\frac{N+1}{\alpha \mathcal{S}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{N}} \|f_n - f_m\|_1 \right)^{\frac{q-r}{q-1}} \end{aligned}$$

NOTA 3.3 Además, este método es útil para comprobar la unicidad de una solución obtenida por aproximación (también con datos medidas, si el operador es lineal.).

4 Mas informaciones sobre $u(x)$ y $\nabla u(x)$.

Tomando $\varphi = 0$ como función en (8) deducimos

$$\begin{aligned} k^2 \mathcal{S}^2 (\mu\{x \in \Omega : |u(x)| > k\})^{2/2^*} &\leq \mathcal{S}^2 \left(\int_{\{x: |u(x)| > k\}} |T_k(u)|^{2^*} \right)^{2/2^*} \\ &\leq \mathcal{S}^2 \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{2^*} \right)^{2/2^*} \leq \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^2 \leq k \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha}, \end{aligned}$$

lo que implica

$$(\mu\{x \in \Omega : |u(x)| > k\}) \leq \left(k \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha \mathcal{S}^2} \right)^{\frac{N}{N-2}}. \quad (12)$$

Además

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u_n)|^2 \leq k \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow t^2 \left| \begin{array}{c} \{|u_n| \leq k\} \\ \{|\nabla u_n| > t\} \end{array} \right| \leq \int_{\substack{\{|u_n| \leq k\} \\ \{|\nabla u_n| > t\}}} |\nabla u_n|^2 \leq k \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha}$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\{|\nabla u_n(x)| > t\}| &\leq \left| \begin{array}{c} \{|u_n| \leq k\} \\ \{|\nabla u_n| > t\} \end{array} \right| + |\{|u_n| > k\}| \\ &\leq \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)} k}{\alpha t^2} + \left(\frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha \mathcal{S}^2} \right)^{\frac{N}{N-2}} \frac{1}{k^{\frac{N}{N-2}}} \end{aligned}$$

Minimizaci3n en k nos lleva a

$$\mu \{x \in \Omega : |\nabla u_n(x)| > t\} \leq C(\|f\|_{L^1(\Omega)}, \alpha, \mathcal{S}) \frac{1}{t^{\frac{N}{N-1}}} \quad (13)$$

5 Datos en $L^m(\Omega)$, $1 < m < \frac{2N}{N+2}$.

TEOREMA 5.1 *Sea $f \in L^m(\Omega)$, $1 < m < \frac{2N}{N+2}$. La soluci3n entropica u de (8) pertenece a $W_0^{1,m^*}(\Omega)$.*

DEMOSTRACI3N. Sea $\gamma = \frac{m^{**}}{2}$: $\frac{1}{2} < \gamma < 1 \iff 1 < m < \frac{2N}{N+2}$. Si $f \in L^m(\Omega)$, en lugar de usar la funci3n test $\psi_k(u_n)$ como en la demostraci3n del Teorema 3.1, podemos utilizar como funci3n test en la formulaci3n d3bil del problema (9), $v_\epsilon \equiv ((\epsilon + |u_n|)^{2\gamma-1} - \epsilon^{2\gamma-1}) \operatorname{sgn}(u_n)$. De una forma an3loga se prueba que

$$\begin{aligned} \frac{(2\gamma-1)\alpha}{\gamma^2} \int_{\Omega} |\nabla [(\epsilon + |u_n|)^\gamma - \epsilon^\gamma]|^2 &= (2\gamma-1)\alpha \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(\epsilon + |u_n|)^{2-2\gamma}} \\ &\leq \int_{\Omega} |f| |(\epsilon + |u_n|)^{2\gamma-1} - \epsilon^{2\gamma-1}| \end{aligned}$$

y con la desigualdad de H3lder

$$\mathcal{S} \frac{(2\gamma-1)\alpha}{\gamma^2} \left(\int_{\Omega} [(\epsilon + |u_n|)^\gamma - \epsilon^\gamma]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\Omega} |f| |(\epsilon + |u_n|)^{2\gamma-1} - \epsilon^{2\gamma-1}|.$$

El teorema de la convergencia ($\epsilon \rightarrow 0$) dominada de Lebesgue implica

$$\mathcal{S} \frac{(2\gamma-1)\alpha}{\gamma^2} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{m^{**}} dx \right)^{\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'}} \leq \|f\|_m. \quad (14)$$

Adem3s

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(\epsilon + |u_n|)^{2-2\gamma}} \leq M_\epsilon = \frac{1}{(2\gamma-1)\alpha} \int_{\Omega} |f| |(\epsilon + |u_n|)^{2\gamma-1} - \epsilon^{2\gamma-1}|.$$

Sea $q = \frac{2N\gamma}{N-(2-2\gamma)}$. Entonces $1 \leq q < 2$ y $\frac{(2-2\gamma)q}{2-q} = q^* = m^*$. La desigualdad de Hölder con $\{\frac{2}{q}, \frac{2}{2-q}\}$ implica

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{(\epsilon + |u_n|)^{(1-\gamma)q}} (\epsilon + |u_n|)^{(1-\gamma)q} \leq M_{\epsilon}^{\frac{q}{2}} \left(\int_{\Omega} (\epsilon + |u_n|)^{\frac{(1-\gamma)2q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}}$$

$\frac{q}{q^*} > 1 - \frac{q}{2} : N > 2$. Entonces $(\epsilon \rightarrow 0)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{m^*} \leq \left[\frac{1}{(2\gamma - 1)\alpha} \|f\|_m \|u_n\|_{m^{**}} \right]^{\frac{m}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{m^*} \right)^{1-\frac{m}{2}}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q \leq C(\alpha, m, N,) \|f\|_m \|u_n\|_{m^{**}} \tag{15}$$

TEOREMA 5.2 *Sea $f \in L^1 \log L^1(\Omega)$. La solución entropica u de (8) pertenece a $W_0^{1, \frac{N}{N-1}}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Tomamos como función test, en la formulación débil del problema (9), $\log(1 + |u_n|)sgn(u_n)$

$$\alpha \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1 + |u_n|)} \leq \int_{\Omega} |f| |\log(1 + |u_n|)| \leq \int_{\Omega} e^{\log(1+|u_n|)} + \int_{\Omega} |f| |\log(|f|)|$$

en virtud de la desigualdad $|r||s| \leq |r| |\log(|r|)| + e^{|s|}$, obtenemos

$$4S\alpha \left(\int_{\Omega} [(\epsilon + |u_n|)^{\frac{1}{2}} - \epsilon^{\frac{1}{2}}]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\Omega} (1 + \frac{|u_n|}{\epsilon}) + \int_{\Omega} |f| |\log(|f|)|$$

$$4S\alpha \left(\int_{\Omega} [(1 + |u_n|)^{\frac{1}{2}} - 1]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\Omega} (1 + |u_n|) + \int_{\Omega} |f| |\log(|f|)|$$

6 Datos en $L^1(\Omega)$: Unicidad de soluciones de entropía.

Nos ocupamos ahora de estudiar la unicidad de soluciones de entropía para el problema de Dirichlet.

TEOREMA 6.1 ([1]) *La solución de entropía es única.*

DEMOSTRACIÓN DE [15]. Sea z una una solución de entropía para el problema de (8)

$$\begin{cases} z \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \forall q < \tilde{2} = \frac{N}{N-1}, \\ T_k(z) \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \forall k > 0, \\ \int_{\Omega} M(x) \nabla z \nabla T_k(z - \varphi) \leq \int_{\Omega} f T_k(z - \varphi), \\ \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

Consideremos la sucesión de datos $\{f_n\}$ y la sucesión de soluciones $\{u_n\}$ del problema (9). Cada u_n pertenece a $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ([18]), con lo que la podemos tomar como función test φ :

$$\int_{\Omega} M(x) \nabla z \nabla T_k(z - u_n) \leq \int_{\Omega} f T_k(z - u_n).$$

Observemos también que $T_k(z - u_n) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Consecuentemente de (9) se tiene además que

$$\int_{\Omega} M(x) \nabla u_n \nabla T_k(z - u_n) = \int_{\Omega} f_n T_k(z - u_n),$$

de donde,

$$\int_{\Omega} M(x) \nabla(z - u_n) \nabla T_k(z - u_n) \leq \int_{\Omega} (f - f_n) T_k(z - u_n).$$

Usando estos los resultados del Teorema 3.1, podemos pasar al límite y concluir que

$$\int_{\Omega} M(x) \nabla(z - u) \nabla T_k(z - u) \leq 0,$$

lo que implica de forma inmediata que $u = z$, y por tanto que la solución entropica es única.

NOTA 6.1 *En la demostración del teorema de existencia 9 sólo interviene el hecho de la convergencia débil en L^1 de la sucesión f_n .*

NOTA 6.2 *Los teoremas anteriores de existencia y unicidad siguen siendo validos cuando se toma como segundo miembro $[f - \operatorname{div}(F)]$, con $F \in (L^2(\Omega))^N$, lo cual es equivalente a considerar como dato una medida que no contiene a los conjuntos con p -capacidad cero. (ver [10]).*

7 Minimización de funcionales con datos en L^1 .

Sean $j : \Omega \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ una función de Caratheodory, coerciva y convexa con respecto a la segunda variable ξ , y sea μ una medida acotada sobre Ω ; con estos datos se construye el funcional

$$I(v) = \int_{\Omega} j(x, \nabla v) - \int_{\Omega} v d\mu.$$

Bajo ciertas hipótesis sobre la función j , L.Orsina demuestra la existencia de u mínimo débil del funcional I . (ver[14])

En nuestro caso vamos a sustituir la medida μ por una función $f \in L^1(\Omega)$, y tomamos $j(x, \nabla v) = \frac{1}{2}M(x)\nabla v\nabla v$, donde $M(x)$ es una matriz coerciva, acotada y simétrica. Se define entonces el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M(x)\nabla v\nabla v - \int_{\Omega} f v$$

El objetivo de esta sección es hallar una relación entre la solución del problema de mínimos para este funcional y la solución del problema de Dirichlet (1). Para poder establecer dicha relación, vamos a definir el concepto de T -mínimo de forma análoga a como se define el concepto de solución de entropía para el problema de Dirichlet.

DEFINICIÓN 7.1 *Se dice que u es T -mínimo para el funcional J si*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < \frac{N}{N-1}, \\ T_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \forall k > 0 : \\ \frac{1}{2} \int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla u\nabla u \leq \frac{1}{2} \int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla\varphi\nabla\varphi + \int_{\Omega} f T_k(u-\varphi), \\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{array} \right.$$

Veamos en primer lugar que el funcional j posee algún T -mínimo .

TEOREMA 7.1 *Bajo las hipótesis anteriores sobre $M(x)$ y f , existe un T -mínimo para el funcional J .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones regulares que converjan a f en $L^1(\Omega)$ y definamos los funcionales

$$J_n(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M(x)\nabla v\nabla v - \int_{\Omega} f_n v.$$

Para cada funcional J_n el problema de mínimo tiene solución u_n ; es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) : \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} M(x)\nabla u_n\nabla u_n - \int_{\Omega} f_n u_n \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} M(x)\nabla\varphi\nabla\varphi - \int_{\Omega} f_n \varphi, \\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{array} \right. \quad (16)$$

Elegimos como función $\varphi = u_n - \psi_k(u_n)$, donde ψ_k es la función definida en (10). Repitiendo el mismo razonamiento que en el teorema 3.1, se obtiene que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Si tomamos como funciones test $\varphi = u_n - T_k(u_n)$ se obtiene que la sucesión $\{T_k(u_n)\}$ está acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Por ultimo, elegimos $\varphi = u_n - T_k(u_n - \phi)$, $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y obtenemos la desigualdad siguiente

$$\frac{1}{2} \int_{\{|u_n - \phi| \leq k\}} M(x) \nabla u_n \nabla u_n \leq \frac{1}{2} \int_{\{|u_n - \phi| \leq k\}} M(x) \nabla \phi \nabla \phi + \int_{\Omega} f_n T_k(u_n - \phi)$$

Gracias a las acotaciones de las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{T_k(u_n)\}$, se puede pasar al límite, y obtener como consecuencia la existencia de T -mínimo para el funcional J .

Antes de ver el teorema que nos va a dar exactamente la relación entre los dos problemas, vamos a ver una versión en $L^1(\Omega)$ del Lema de Minty.

LEMA 7.1 *u es T-mínimo si y sólo si*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,q}(\Omega), \quad \forall q < \frac{N}{N-1}, \\ T_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad \forall k > 0 : \\ \int_{\Omega} M(x) \nabla u \nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi), \\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{array} \right. \quad (17)$$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que si u satisface (17) entonces es solución de entropía, ya que la otra implicación es trivial por la monotonía del operador.

Supongamos entonces que u satisface las condiciones (17), elegimos como función test $\varphi = T_i(u) + t T_k(v - u)$, donde i es un número real positivo, $t \in (0, 1)$, y v es cualquier función de $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} I_\Omega &= \int_{\Omega} M(x) \nabla (T_i(u) + t T_k(v - u)) \nabla T_k(t T_k(v - u) - G_i(u)) \leq \\ &\int_{\Omega} f T_k(t T_k(v - u) - G_i(u)) = J_\Omega \end{aligned}$$

donde $G_i(u) = u - T_i(u)$. Usando la definición de T_k en I_Ω , llegamos a

$$\begin{aligned} I_\Omega &= \int_{\{|t T_k(v-u) - G_i(u)| < k\}} M(x) \nabla (T_i(u) + t \nabla T_k(v-u)) \nabla (t T_k(v-u) - G_i(u)) = \\ &= t \int_{\{|t T_k(v-u) - G_i(u)| < k\}} M(x) \nabla (T_i(u) + t \nabla T_k(v-u)) \nabla T_k(v-u) \\ &\quad - \int_{\{|t T_k(v-u) - G_i(u)| < k\}} M(x) \nabla (T_i(u) + t \nabla T_k(v-u)) \nabla G_i(u). \end{aligned}$$

Si $i > k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, entonces

$$I_\Omega = t \int_{\Omega} M(x) (\nabla u + t \nabla T_k(v-u)) \nabla T_k(v-u) \chi_{\{|t T_k(v-u) - G_i(u)| < k\}}.$$

Pasando al límite cuando i tiende a infinito en esta expresión para I_Ω y en J_Ω tenemos

$$I_\Omega \mapsto t \int_{\Omega} M(x)(\nabla u + t\nabla T_k(v - u))\nabla T_k(v - u)$$

$$J_\Omega \mapsto t \int_{\Omega} fT_k(v - u).$$

Luego

$$t \int_{\Omega} M(x)(\nabla u + t\nabla T_k(v - u))\nabla T_k(v - u) \leq t \int_{\Omega} fT_k(v - u).$$

Dividendo por t y pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$, llegamos a lo que queríamos probar

$$\int_{\Omega} M(x)\nabla u\nabla T_k(v - u) \leq \int_{\Omega} fT_k(v - u) \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Con la ayuda de este lema estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 7.2 *u es T -mínimo del funcional J si y sólo si u es solución de entropía del problema de Dirichlet.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que la solución de entropía satisface las condiciones (17). Sea u solución de entropía del problema de Dirichlet, entonces

$$\int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla u\nabla(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} fT_k(u - \varphi).$$

Mediante la desigualdad de Schwarz obtenemos que

$$\int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla u\nabla u \leq \frac{1}{2} \int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla u\nabla u +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla\varphi\nabla\varphi + \int_{\Omega} fT_k(u - \varphi),$$

y así

$$\frac{1}{2} \int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla u\nabla u \leq \frac{1}{2} \int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla\varphi\nabla\varphi + \int_{\Omega} fT_k(u - \varphi).$$

Como $M(x)$ es simétrica, $\frac{1}{2}M(x)\nabla u\nabla u = \frac{1}{2}M(x)\nabla\varphi\nabla\varphi + M(x)\nabla\varphi\nabla(u - \varphi)$.

En consecuencia

$$\int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} M(x)\nabla\varphi\nabla(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} fT_k(u - \varphi)$$

Luego si u es solución entropica, satisface las condiciones (17) del lema 7.1, y, por tanto, equivale a ser T -mínimo .

8 Efecto regularizante del termino de orden inferior: Problemas cuasilineales.

Es bien conocido el efecto regularizante del termino de orden inferior en problemas semilineales: la solución débil u de

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + |u|^{p-1}u = f \in L^1(\Omega)$$

pertenece a $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r < \frac{2p}{p+1}$ ([12]). Observemos que $\frac{2p}{p+1} > \frac{N}{N-1}$, si $p > \frac{N}{N-2}$.

Es posible probar un teorema de existencia de un T -mínimo ([5]) para funcionales de tipo

$$J(v) = \int_{\Omega} j(x, |v|, \nabla v) - \int_{\Omega} f v.$$

Estudiamos ahora solo un ejemplo: el funcional J_{γ} definido por

$$J_{\gamma}(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 + |v|)^{\gamma} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v, \quad \gamma \geq 1$$

con $f \in L^1(\Omega)$, usando el método de la ecuación de Euler. Consideremos la sucesión $\{f_n\}$, $f_n = T_n(f)$, de funciones de $L^{\infty}(\Omega)$ que converge a f en $L^1(\Omega)$, y denotemos por u_n la función de $W_0^{1,2}(\Omega)$ mínimo de J_n con J_n dado por

$$J_n(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 + |v|)^{\gamma} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f_n v.$$

La ecuación de Euler asociada al problema de minimización de J_n es ($v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$)

$$\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\gamma} \nabla u \nabla v + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} u_n |u_n|^{\gamma-2} |\nabla u_n|^2 v = \int_{\Omega} f_n v$$

Es posible usar como función test $v = T_k(u_n)$ para deducir

$$\int_{|u_n| \leq k} |\nabla u_n|^2 + \frac{\gamma}{2} k^{\gamma} \int_{k < |u_n|} |\nabla u_n|^2 \leq k \|f\|_1.$$

Esta acotación es suficiente para comprobar una cota a priori de $\{u_n\}$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$, aunque $f \in L^1(\Omega)$ ([9], [11]).

REFERENCIAS

- [1] PH. BENILAN, L. BOCCARDO, T. GALLOUËT, R. GARIEPY, M. PIERRE, J.L. VAZQUEZ *An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions for nonlinear elliptic equations* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22 (1995), 240–273.

- [2] L. BOCCARDO *Some nonlinear Dirichlet problems in L^1 involving lower order terms in divergence form.* in *Progress in Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, ed. A. Alvino, P. Buonocore, V. Ferone, E. Giarrusso, S. Matarasso, R. Toscano, G. Trombetti, Longman (1996), 43–57.
- [3] L. BOCCARDO *Positive solutions for some quasilinear elliptic equations with natural growths* Atti Accad. Naz. Lincei 11 (2000), 31–39.
- [4] L. BOCCARDO *T-minima: An approach to minimization problems in L^1 .* Contributi dedicati alla memoria di Ennio De Giorgi. Ricerche di Matematica, 49 (2000), 135–154.
- [5] L. BOCCARDO *T-minima.* Proceedings of the Conference held in Campinas on the occasion of the 70th birthday of Djairo De Figueiredo. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 66, Birkhauser, Basel, 2005, 93–103.
- [6] L. BOCCARDO, A. DALL’AGLIO, T. GALLOUËT, L. ORSINA *Nonlinear parabolic equations with right hand side measures* J. Funct. Anal. 147 (1997), 1, 237–258..
- [7] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data.* J. Funct. Anal., 87 (1989), 149–169.
- [8] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures.* Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992) 641–655.
- [9] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data.* Nonlinear Anal TMA 19 (1992), 573–579.
- [10] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT, L. ORSINA *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with right hand side measures.* Ann. Inst. H. Poincaré, 5 (1996), 539–551.
- [11] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT, L. ORSINA *Existence and nonexistence of solutions for some nonlinear elliptic equations.* J. Anal. Math. 73 (1997), 203–223.
- [12] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT, J.L. VAZQUEZ *Nonlinear elliptic equations in R^N without growth restrictions on the data.* J. Differential Equations, 105 (1993), 334–363.
- [13] L. BOCCARDO, L. ORSINA *Existence results for Dirichlet problems in L^1 via Minty’s lemma* Appl. Anal. 76 (2000), 309–317.
- [14] L. ORSINA *Weak minima for functionals and elliptic equations with measure data.* C.R.A.S., 318 (1996), 384–388.
- [15] M.M. Porzio *A uniqueness result for monotone elliptic problems.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 5, 313–316.

- [16] A. PRIGNET *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right hand side measures*. Rend Mat., 15 (1995), 321–337.
- [17] J. SERRIN *Pathological solutions of elliptic differential equations*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), 385–387.
- [18] G. STAMPACCHIA *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1966).

Discontinuous Galerkin Approximation of heterogeneous Maxwell source problem

ANNALISA BUFFA AND ILARIA PERUGIA

Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche -
CNR, Pavia, Italy
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Pavia, Italy

Abstract

In this paper we propose the analysis of discontinuous Galerkin discretizations for the heterogeneous time-harmonic Maxwell equations in a bounded domain. A quasi optimal error estimate is provided.

Key words: *Discontinuous Galerkin methods, Maxwell's equations, discontinuous coefficients*

1 Introduction

This paper concerns with the use of Discontinuous Galerkin (DG) Method for the numerical approximation of electromagnetic fields. The DG approach is attracting thanks to its flexibility in the mesh design and in the choice of shape functions. A unified presentation and analysis of all the DG methods available in the literature, in the elliptic context, is contained in [2], whereas the extension of these methods to the time-domain and frequency-domain Maxwell equations is the object of ongoing research (see, among others, [9], [8] and the references therein).

We denote by Ω the problem domain, which we assume to be a bounded Lipschitz polyhedral domain in \mathbb{R}^3 , and by \mathbf{n} the normal unit vector to its boundary $\partial\Omega$, pointing outside Ω . We assume, for simplicity, $\partial\Omega$ to be connected and the topology of Ω to be trivial.

We consider the following Maxwell indefinite source problem with linear, inhomogeneous, anisotropic and possibly discontinuous electric permittivity ε and magnetic permeability μ : for a fixed frequency ω , away from resonances, find \mathbf{u} such that

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

with $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ on $\partial\Omega$, and \mathbf{f} is a given source term.

In the paper [3], it is proved that there exists a relation between the stability in the discretization of this problem and the spectral correctness of the discretization method which is used. Here, based on the theory developed in [3], we analyse the wellposedness of discontinuous Galerkin discretizations of (1). The notation is simplified with respect to [3] since we do not deal with the approximation of eigenvalues and eigenspaces, and we can specialize the results to the numerical approximation of (1). In particular we provide a quasi-optimal convergence result.

The outline of the paper is as follows. Section 2 is devoted to set notation and provide the variational formulation for our problem of interest; in Section 3 the DG spaces, meshes and bilinear forms are introduced with their main properties; Section 4 is devoted to the main theoretical results which ensures the wellposedness and optimal error estimates proved in Section 5.

In the rest of the paper, for a bounded domain D in \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$, we denote by $H^s(D)$ the standard Sobolev space of order $s \geq 0$ of real or complex functions, and by $\mathbb{N}_{\cdot, s, D}$ the usual Sobolev norm. For $s = 0$, we write $L^2(D)$ in lieu of $H^0(D)$. We also use $\mathbb{N}_{\cdot, s, D}$ to denote the norm for the space $H^s(D)^d$.

2 Continuous Problems

We assume Ω to be occupied by inhomogeneous, anisotropic materials, i.e., for which the electric permittivity $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x})$ and magnetic permeability $\mu = \mu(\mathbf{x})$ are second order, real, symmetric, tensor-valued functions. We assume that there exist ε^* , ε_* , μ^* , $\mu_* \in L^\infty(\Omega)$ such that

$$0 < \varepsilon_*(\mathbf{x}) \leq \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{i,j} \xi_i \xi_j \leq \varepsilon^*(\mathbf{x}) \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \|\xi\| = 1,$$

$$0 < \mu_*(\mathbf{x}) \leq \sum_{i,j=1}^3 \mu_{i,j} \xi_i \xi_j \leq \mu^*(\mathbf{x}) \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \|\xi\| = 1.$$

and that there exists a partition of Ω into Lipschitz subdomains such that in each of them ε , μ and μ^{-1} are smooth. A further restriction on the material coefficients will be stated in Section 3 below (see (2)).

We assume the source term \mathbf{f} in (1) to be in $L^2(\Omega)^3$.

We define, as usual, the following spaces of complex functions:

$$H_0(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \times \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega\},$$

$$H_0(\text{curl}^0; \Omega) = \{\mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega) : \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}\},$$

$$H(\text{div}_\varepsilon^0; \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{v}) = 0\},$$

and set $\mathbf{V} = H_0(\text{curl}; \Omega)$, $\mathbf{V}^0 = H_0(\text{curl}^0; \Omega)$ and $\mathbf{W} = \mathbf{V} \cap H(\text{div}_\varepsilon^0; \Omega)$.

Moreover, we denote by (\cdot, \cdot) the standard inner product in $L^2(\Omega)^3$ given by $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$, and write $L_\varepsilon^2(\Omega)^3$ for the space $L^2(\Omega)^3$ endowed with the

ε -weighted inner product $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon = \int_\Omega \varepsilon \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$. The L^2 -norm and the L_ε^2 -norm are clearly equivalent, due to the assumptions on ε .

We endow \mathbf{V} with the seminorm $|\mathbf{v}|_{\mathbf{V}} = \mathbb{N} \mu^{-1/2} \nabla \times \mathbf{v}_{0,\Omega}$, inner product $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon$ and norm $\mathbb{N} \mathbf{v}_{\mathbf{V}}^2 = |\mathbf{v}|_{\mathbf{V}}^2 + \mathbb{N} \varepsilon^{1/2} \mathbf{v}_{0,\Omega}^2$.

Define the (hermitian) bilinear forms $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ and $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ as

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{V}}. \end{aligned}$$

Let \mathcal{E}_M denote the countable set of Maxwell eigenfrequencies, i.e., the values of ω such that the problem:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

admits non trivial solutions.

The variational formulation of the source problem (1) is the following.

Problem 1 *Let $\omega \notin \mathcal{E}_M$, and $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$. Find $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ such that*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2 (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

We end this section with some more notation needed in the rest of the paper.

Define the solution operator $A : L^2(\Omega)^3 \rightarrow \mathbf{V}$ as follows: given $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, $A\mathbf{f}$ is the (unique) element of \mathbf{V} which satisfies

$$b(A\mathbf{f}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\varepsilon \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

We have that $A \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^3, \mathbf{V})$. We denote by $\sigma(A)$ and $\rho(A)$ the spectrum and the resolvent set (in the complex plane), respectively, of the solution operator A .

3 Discontinuous Galerkin Approximations: Definitions and Standard Properties

In this section we introduce the meshes, DG spaces and bilinear forms, and the standard assumptions satisfied by the most common DG methods.

3.1 Meshes, DG Spaces and Norms

Let \mathcal{T}_h be a conformal, shape-regular partition of Ω into tetrahedra $\{K\}$, where $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, with $h_K = \text{diam}(K)$. We assume \mathcal{T}_h to be aligned with the possible discontinuities of ε and μ . We denote by \mathcal{F}_h the set of all the faces of elements in \mathcal{T}_h .

We define, for later use, the broken regular spaces

$$\begin{aligned} H^s(\mathcal{T}_h)^3 &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{v}|_K \in H^s(K)^3 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{for } s \geq 0, \\ H^r(\text{curl}; \mathcal{T}_h) &= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \varepsilon \mathbf{v}|_K \in H^r(K)^3, \\ &\quad \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{v}|_K \in H^r(K)^3 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{for } r > 0, \end{aligned}$$

and the norms

$$\begin{aligned}\mathbb{N}\mathbf{v}_{H^s(\mathcal{T}_h)^3}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbb{N}\mathbf{v}_{s,K}^2, \\ \mathbb{N}\mathbf{v}_{H^r(\text{curl}; \mathcal{T}_h)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\mathbb{N}\varepsilon^{1/2} \mathbf{v}_{r,K}^2 + \mathbb{N}\mu^{-1/2} \nabla \times \mathbf{v}_{r,K}^2 \right).\end{aligned}$$

For piecewise smooth vector-valued functions \mathbf{v} , on interior faces, we denote by $[\![\mathbf{v}]\!]_T$ and $\{\!\!\{\mathbf{v}\}\!\!\}$ the tangential jump and mean value of \mathbf{v} , respectively. On boundary faces, we set $[\![\mathbf{v}]\!]_T = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ and $\{\!\!\{\mathbf{v}\}\!\!\} = \mathbf{v}$.

In addition to the assumptions on the coefficients in Section 2, we suppose that there exists a constant $\bar{\mu} > 0$ independent of the mesh size such that

$$\max_{\mathbf{x} \in K} \frac{\mu^*(\mathbf{x})}{\mu_*(\mathbf{x})} \leq \bar{\mu} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (2)$$

For $\ell \geq 1$, we define the complex discontinuous finite element space

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{v}|_K \in \mathcal{P}^\ell(K)^3 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3)$$

where $\mathcal{P}^\ell(K)$ is the space of complex polynomials of total degree at most ℓ on K . We point out that all the results below hold true also with the choice of the local Nédélec's elements of the first type [11], instead of the full polynomials of degree ℓ , in (3).

We define the sum space $\mathbf{V}(h) = \mathbf{V} + \mathbf{V}_h$, and endow both \mathbf{V}_h and $\mathbf{V}(h)$ with the seminorm and norm

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}|_{\mathbf{V}(h)}^2 &= \mathbb{N}\mu^{-1/2} \nabla_h \times \mathbf{v}_{0,\Omega}^2 + \mathbb{N}\mathbf{h}^{-1/2} [\![\mathbf{v}]\!]_{T_{0,\mathcal{F}_h}}^2, \\ \mathbb{N}\mathbf{v}_{\mathbf{V}(h)}^2 &= |\mathbf{v}|_{\mathbf{V}(h)}^2 + \mathbb{N}\varepsilon^{1/2} \mathbf{v}_{0,\Omega}^2,\end{aligned}$$

where we have denoted by ∇_h the elementwise application of the ∇ operator, and used the notation $\mathbb{N}\varphi_{0,\mathcal{F}_h}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_h} \mathbb{N}\varphi_{0,f}^2$; we will also use the notation $\int_{\mathcal{F}_h} \varphi ds := \sum_{f \in \mathcal{F}_h} \int_f \varphi ds$. The mesh function $\mathbf{h} \in L^\infty(\mathcal{F}_h)$ is defined by

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) := h_f \mathbf{m}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in f, \quad f \in \mathcal{F}_h,$$

with $h_f = \text{diam}(f)$ and the function $\mathbf{m} \in L^\infty(\mathcal{F}_h)$ is defined as follows: if μ_K denotes the extension of $\mu|_K$ up to ∂K , and $|\mu_K(\mathbf{x})|$ denotes the spectral norm of the tensor $\mu_K(\mathbf{x})$, then $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \min\{|\mu_{K^+}(\mathbf{x})|, |\mu_{K^-}(\mathbf{x})|\}$, if \mathbf{x} is in the interior of $\partial K^+ \cap \partial K^-$, and $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = |\mu_K(\mathbf{x})|$, if \mathbf{x} is in the interior of $\partial K \cap \partial\Omega$.

We define the following seminorms and norms: for a σ such that $0 < \sigma < 1/2$,

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}|_{+, \sigma}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{2\sigma} M_K \|\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{v}\|_{\sigma,K}^2 + h_K^2 M_K \|\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{v})\|_{0,K}^2), \\ \mathbb{N}\mathbf{v}_{+, \sigma}^2 &= \mathbb{N}\mathbf{v}_{\mathbf{V}(h)}^2 + |\mathbf{v}|_{+, \sigma}^2;\end{aligned}$$

here and in the following, M_K is defined by $M_K = \max_{\mathbf{x} \in \bar{K}} |\mu_K(\mathbf{x})|$.

The following best approximation result holds true (see [3, Appendix]).

Proposition 1 *Let $s \geq 0$, $r > 0$ and $0 < \sigma < \min\{r, 1/2\}$. For all $\mathbf{v} \in H^r(\text{curl}; \mathcal{T}_h)$ with $(\nabla_h \times (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{v})) \in H^s(\mathcal{T}_h)^3$ it holds:*

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{N}\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h+, \sigma}\| \leq Ch^{\min\{r, \ell, s+1\}} \left(\|\mathbf{v}\|_{H^r(\text{curl}; \mathcal{T}_h)} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K \|\nabla_h \times (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{v})\|_{s, K}^2 \right)^{1/2} \right),$$

where the constant $C > 0$ is independent of the mesh size.

3.2 DG bilinear forms

Let $a_h : \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbb{C}$ be the DG bilinear form obtained by discretizing $\mathbf{a} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}$ by any DG method, and define

$$b_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h.$$

We restrict ourselves to DG methods which provide *consistent* discretizations to the coercive source problem: given $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, find $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ such that

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega. \quad (4)$$

Thus, we are also requiring $a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ to be well-defined for all the pairs (\mathbf{u}, \mathbf{v}) such that $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ with $\nabla_h \times (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{u}) \in L^2(\Omega)^3$, and $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$.

First, we consider the interior penalty methods, for which

$$\begin{aligned} a_h^{IP}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{u}, \nabla_h \times \mathbf{v}) - \int_{\mathcal{F}_h} \llbracket \bar{\mathbf{v}} \rrbracket_T \cdot \{ \mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{u} \} ds \\ &\quad - k \int_{\mathcal{F}_h} \llbracket \bar{\mathbf{u}} \rrbracket_T \cdot \{ \mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{v} \} ds + \int_{\mathcal{F}_h} \mathbf{a}[\mathbf{u}]_T \cdot \llbracket \bar{\mathbf{v}} \rrbracket_T ds, \end{aligned}$$

with

$$\mathbf{a} := a_{IP} h^{-1}, \quad (5)$$

$a_{IP} > 0$ being a parameter independent of the mesh size and the material coefficients, and with $k = 1, -1, 0$ for the symmetric interior penalty SIP method [1], the non-symmetric interior penalty NIP method [12], and the incomplete interior penalty IIP method [7], respectively. The local discontinuous Galerkin LDG method [5], could be considered instead.

The LDG form is defined as follows:

$$a_h^{LDG}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mu^{-1} (\nabla_h \times \mathbf{u} - \mathcal{L}(\mathbf{u})), \nabla_h \times \mathbf{v} - \mathcal{L}(\mathbf{v})) + \int_{\mathcal{F}_h} \mathbf{a}[\mathbf{u}]_T \cdot \llbracket \bar{\mathbf{v}} \rrbracket_T ds, \quad (6)$$

with \mathbf{a} again as in (5), and \mathcal{L} is the *lifting operator* from $\mathbf{V}(h)$ into \mathbf{V}_h defined by

$$(\mathcal{L}(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = \int_{\mathcal{F}_h^i} \mathbf{b}[\mathbf{v}]_T \cdot \llbracket \bar{\mathbf{w}} \rrbracket_T ds + \int_{\mathcal{F}_h} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_T \cdot \{ \bar{\mathbf{w}} \} ds \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_h;$$

here, $\mathbf{b} \in L^\infty(\mathcal{F}_h)$ is a bounded function independent of the mesh size.

Remark 1 *The LDG method is usually defined by introducing the auxiliary variable $\mathbf{s} := \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}$ and rewriting the second order problem in mixed form, as a first order system; then an element-by-element integration by parts is performed, and the traces along the elemental boundaries are replaced by the so-called numerical fluxes, obtaining a (\mathbf{s}, \mathbf{u}) -formulation of the method, which is equivalent to the \mathbf{u} -formulation $a_h^{LDG}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon$, with $a_h^{LDG}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ as in (6), after elimination of the auxiliary variable \mathbf{s} in terms of \mathbf{u} . Here, we concentrate on the \mathbf{u} -formulation because we are only concerned with the analysis of the method in the framework presented in this paper.*

From now on $a_h(\cdot, \cdot)$ will denote any of the previous bilinear forms.

Define the kernel of $a_h(\cdot, \cdot)$ and its $\mathbf{V}(h)$ -orthogonal complement as follows:

$$\begin{aligned} K_h &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h : a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_h\}, \\ K_h^\perp &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h : (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{V}(h)} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in K_h\}. \end{aligned}$$

Notice that, also for the non-hermitian NIP and IIP methods, the left kernel coincides with the right kernel, i.e., $a_h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ and $\mathbf{w} \in K_h$.

As in the continuous case, we define the DG solution operator $A_h : L^2(\Omega)^3 \rightarrow \mathbf{V}_h$ as follows: given $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, $A_h \mathbf{f}$ is the (unique) element of \mathbf{V}_h which satisfies

$$b_h(A_h \mathbf{f}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\varepsilon \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h.$$

The operator A_h is well-defined and $A_h \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^3, \mathbf{V}_h)$ (see Remark 2 below). Finally, we denote by $\sigma(A_h)$ and $\rho(A_h)$ the spectrum and the resolvent set, respectively, of the DG solution operator A_h .

For the considered DG bilinear forms, the following Proposition holds (the first part is standard, while the second part has been proved in [3, Appendix]).

Proposition 2 (Coercivity in seminorm and continuity) *Provided that a_{IP} in (5) is large enough, in the case of the SIP and IIP methods, there exist positive constants α, γ independent of the mesh size such that*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [a_h(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &\geq \alpha |\mathbf{v}|_{\mathbf{V}(h)}^2 && \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \\ |a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \gamma \mathbb{N}_{\mathbf{u}_{\mathbf{V}(h)}} \mathbb{N}_{\mathbf{v}_{\mathbf{V}(h)}} && \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

Moreover, for any σ such that $0 < \sigma < \min\{1/2, r\}$, there exists a constant $\gamma_\sigma > 0$ independent of the mesh size such that

$$|a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \gamma_\sigma \mathbb{N}_{\mathbf{u}_{+, \sigma}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}(h)}$$

for all $\mathbf{u} \in H^r(\operatorname{curl}; \mathcal{T}_h)$ with $\nabla_h \times (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{u}) \in L^2(\Omega)^3$, and $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$.

Remark 2 *From the first part of Proposition 2 it follows that*

$$\operatorname{Re} [b_h(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \geq \min\{\alpha, 1\} \mathbb{N}_{\mathbf{v}_{\mathbf{V}(h)}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h.$$

Therefore, for any $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, there exists a unique $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ such that $b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\varepsilon$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$, and $\mathbb{N}_{\mathbf{u}_h_{\mathbf{V}(h)}} \leq C \mathbb{N}_{\mathbf{f}_{0, \Omega}}$, with $C > 0$ independent of the mesh size.

Finally, the following statement is a straightforward consequence of Proposition 2 (see Remark 2), consistency, and Proposition 1.

Corollary 3 (Convergence for the coercive problem) *Let \mathbf{u} be the solution to the coercive source problem (4) with $\mathbf{f} \in H(\operatorname{div}_\varepsilon^0; \Omega)$, and let \mathbf{u}_h be its DG approximation which satisfies $b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\varepsilon$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$. If $\mathbf{u} \in H^r(\operatorname{curl}; \mathcal{T}_h)$, $r > 0$ (see [6]), and $(\nabla_h \times (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{u})) \in H^s(\mathcal{T}_h)^3$, $s \geq 0$, we have:*

$$\begin{aligned} & \mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h \mathbf{v}_{(h)} \\ & \leq Ch^{\min\{\ell, r, s+1\}} \left(\mathbb{N}\mathbf{u}_{H^r(\operatorname{curl}; \mathcal{T}_h)} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K \|\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u})\|_{s, K}^2 \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

where $C > 0$ is independent of the mesh size.

4 Theoretical Results on the Maxwell solution operator

In this section we present some theoretical results which are important in the analysis of the DG discretization of Problem 1. It has been established in [3] that the following two properties are the main steps for an approximation theory of the Maxwell eigenproblem and of the Maxwell source problem with a DG method.

Property 1 (Discrete Friedrichs inequality) *There exists $C > 0$ independent of the mesh size such that*

$$\mathbb{N}\varepsilon^{1/2} \mathbf{v}_{0, \Omega}^2 \leq C \operatorname{Re} [a_h(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in K_h^\perp.$$

Property 2 (Gap property) *For all h small enough, for any $\mathbf{w}_h \in K_h^\perp$ there exists $\mathbf{w} = \mathbf{w}(h) \in H(\operatorname{div}_\varepsilon^0; \Omega)$ such that*

$$\mathbb{N}\mathbf{w} - \mathbf{w}_{h0, \Omega} \leq \eta_h \mathbb{N}\mathbf{w}_h \mathbf{v}_{(h)}, \quad \text{with } \eta_h \rightarrow 0 \text{ as } h \rightarrow 0.$$

The DG methods considered in Section 3 actually satisfy Properties 1 and 2 (see again [3]). The proof of these results is based on an approximation property that allows us to find an $H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$ -conforming finite element function close to any discontinuous one (see [10] and [9]), and on the *discrete compactness property* possessed by the conforming Nédélec elements of the second family (see, e.g., [4]). This is the reason why our analysis is restricted to the case of meshes with no hanging-nodes.

The main consequence of Properties 1 and 2 is the following theorem.

Theorem 4 *Fix $0 \neq z \in \rho(A)$. For h small enough, there exists a positive constant C only depending upon Ω and $|z|$ such that*

$$\mathbb{N}(z - A_h)\mathbf{f} \mathbf{v}_{(h)} \geq C \mathbb{N}\mathbf{f} \mathbf{v}_{(h)} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{V}_h.$$

The recall here the proof of this statement, which articulates in few Lemmas.

Lemma 5 *For all $\mathbf{f}_h^0 \in K_h$, we have $(A - A_h)\mathbf{f}_h^0 = 0$.*

Proof. The condition $\mathbf{f}_h^0 \in K_h$ implies that $\mathbf{f}_h^0 \in \mathbf{V}_h \cap \mathbf{V}^0$ (see Remark 2). Therefore, $b(A\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v})_\varepsilon$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ implies that $A\mathbf{f}_h^0$ is solution to $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v})_\varepsilon$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Since $\mathbf{f}_h^0 \in \mathbf{V}^0$, then $\mathbf{u} = \mathbf{f}_h^0$ is a solution; uniqueness implies that $A\mathbf{f}_h^0 = \mathbf{f}_h^0$. Therefore, we only need to prove that $A_h\mathbf{f}_h^0 = \mathbf{f}_h^0$. But $a_h(\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v}) = 0$ for all $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ implies that

$$b_h(A_h\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v})_\varepsilon = b_h(\mathbf{f}_h^0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h,$$

from which $A_h\mathbf{f}_h^0 = \mathbf{f}_h^0$ owing to the well-posedness in Remark 2, and the proof is complete. \square

Proposition 6 *It holds:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{N}A - A_{h\mathcal{L}(\mathbf{V}_h, \mathbf{V}(h))} = 0.$$

Proof. Decompose $\mathbf{f}_h \in \mathbf{V}_h$ as $\mathbf{f}_h = \mathbf{f}_h^0 + \mathbf{f}_h^\perp$, with $\mathbf{f}_h^0 \in K_h$ and $\mathbf{f}_h^\perp \in K_h^\perp$ and $\mathbb{N}\mathbf{f}_h^2_{\mathbf{V}(h)} = \mathbb{N}\mathbf{f}_h^2_{\mathbf{V}(h)} + \mathbb{N}\mathbf{f}_h^{\perp 2}_{\mathbf{V}(h)}$. Owing to Lemma 5, it is enough to prove that, for all h small enough,

$$\mathbb{N}(A - A_h)\mathbf{f}_h^\perp_{\mathbf{V}(h)} \leq \xi_h \mathbb{N}\mathbf{f}_h^\perp_{\mathbf{V}(h)} \quad \forall \mathbf{f}_h^\perp \in K_h^\perp, \quad (7)$$

with $\xi_h \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. For h small enough, we can write

$$\mathbb{N}(A - A_h)\mathbf{f}_h^\perp_{\mathbf{V}(h)} \leq \mathbb{N}(A - A_h)(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h^\perp)_{\mathbf{V}(h)} + \mathbb{N}(A - A_h)\mathbf{f}_{\mathbf{V}(h)}, \quad (8)$$

with $\mathbf{f} \in H(\operatorname{div}_\varepsilon^0; \Omega)$ as in Property 2.

For the first term at right-hand side in (8), we have

$$\begin{aligned} \mathbb{N}(A - A_h)(\mathbf{f} - \mathbf{f}_h^\perp)_{\mathbf{V}(h)} &\leq (\mathbb{N}A_{\mathcal{L}(L^2(\Omega)^d, \mathbf{V})} + \mathbb{N}A_{h\mathcal{L}(L^2(\Omega)^d, \mathbf{V}_h)}) \mathbb{N}\mathbf{f} - \mathbf{f}_h^\perp_{0, \Omega} \\ &\leq C \eta_h \mathbb{N}\mathbf{f}_h^\perp_{\mathbf{V}(h)}, \end{aligned}$$

owing to the continuity of A_h (see Remark 2) and Property 2.

For the second term at right-hand side in (8), since $\mathbf{f} \in H(\operatorname{div}_\varepsilon^0; \Omega)$, from Corollary 3 we have that there exists a $\sigma > 0$ such that:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}(A - A_h)\mathbf{f}_{\mathbf{V}(h)} &\leq Ch^\sigma \mathbb{N}\mathbf{f}_{0, \Omega} \leq Ch^\sigma (\mathbb{N}\mathbf{f} - \mathbf{f}_h^\perp_{0, \Omega} + \mathbb{N}\mathbf{f}_h^\perp_{0, \Omega}) \\ &\leq Ch^\sigma (\eta_h + 1) \mathbb{N}\mathbf{f}_h^\perp_{\mathbf{V}(h)}, \end{aligned}$$

where we have used again Property 2 and the definition of the $\mathbf{V}(h)$ -norm. Therefore, (7) holds true with $\xi_h = h^\sigma (\eta_h + 1)$. \square

Proof. (of Theorem 4) We first prove that for $0 \neq z \in \rho(A)$, there exists a positive constant C only depending upon Ω and $|z|$ such that, for all $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(h)$,

$$\mathbb{N}(z - A)\mathbf{f}_{\mathbf{V}(h)} \geq C\mathbb{N}\mathbf{f}_{\mathbf{V}(h)}. \quad (9)$$

Let $\mathbf{f} \in \mathbf{V}(h)$ and $\mathbf{g} := (z - A)\mathbf{f}$. By construction, $\mathbf{g} \in \mathbf{V}(h)$ and $z\mathbf{f} - \mathbf{g} \in \mathbf{V}$. Moreover, $(z\mathbf{f} - \mathbf{g})$ solves

$$B^{-1}(z\mathbf{f} - \mathbf{g}) - \frac{1}{z}(z\varepsilon\mathbf{f} - \varepsilon\mathbf{g}) = \frac{1}{z}\varepsilon\mathbf{g},$$

where B^{-1} is the operator $\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times (\cdot)) + \varepsilon(\cdot)$. Since $z \in \rho(A)$, and $z\mathbf{f} - \mathbf{g}$ verifies homogeneous Dirichlet boundary condition, well-posedness implies that

$$\mathbb{N}z\mathbf{f} - \mathbf{g}_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{|z|}\mathbb{N}\varepsilon^{1/2}\mathbf{g}_{0,\Omega} \leq \frac{C}{|z|}\mathbb{N}\mathbf{g}_{\mathbf{V}(h)}.$$

Thanks to our choice of norms, it holds $\|z\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\mathbf{V}} = \|z\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\mathbf{V}(h)}$. Therefore

$$\mathbb{N}\mathbf{f}_{\mathbf{V}(h)} \leq \frac{1}{|z|}(\mathbb{N}z\mathbf{f} - \mathbf{g}_{\mathbf{V}} + \mathbb{N}\mathbf{g}_{\mathbf{V}(h)}) \leq C(|z|)\mathbb{N}\mathbf{g}_{\mathbf{V}(h)}.$$

By triangle inequality, we have

$$\|(z - A_h)\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}(h)} \geq \|(z - A)\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}(h)} - \|(A - A_h)\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}(h)}.$$

Using (9) and the continuity of the operator $A - A_h$ yield

$$\|(z - A_h)\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}(h)} \geq (C - \|A - A_h\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_h, \mathbf{V}(h))})\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}(h)},$$

and Proposition 6 allows to conclude. \square

5 The Maxwell Indefinite Source Problem

Given $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ and $\omega \notin \mathcal{E}_M$, we consider now the DG approximation of Problem 1: find $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{u}_h \mathbf{v})_{\varepsilon} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \quad (10)$$

Theorem 7 *Provided that Properties 1 and 2 are satisfied, the method (10) is well-posed, for h small enough.*

Proof. Let \mathbf{g}_h be the (unique) element of \mathbf{V}_h such that

$$(\mathbf{g}_h, \mathbf{v})_{\varepsilon} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \quad (11)$$

Then, since $a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})_{\varepsilon} = b_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - (1 + \omega^2)(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})_{\varepsilon}$, recalling the definition of the operator A_h and setting $z = 1/(1 + \omega^2)$, we can write (10) as

$$b_h(A_h\mathbf{u}_h + zA_h\mathbf{g}_h - z\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h,$$

from which, due to the coercivity of $b_h(\cdot, \cdot)$ (see Proposition 2 and Remark 2),

$$(z - A_h)\mathbf{u}_h = zA_h\mathbf{g}_h. \quad (12)$$

Since ω^2 is not an eigenvalue of Problem 1, then $0 \neq z \in \rho(A)$; thus Theorem 4 applies and we have that, for h small enough, (12) admits the unique solution $\mathbf{u}_h = z(z - A_h)^{-1} A_h \mathbf{g}_h$. Moreover, again due to Theorem 4, $(z - A_h)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_h, \mathbf{V}_h)$; this, together with the fact that $A_h \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^3, \mathbf{V}_h)$, gives the existence of a constant $C > 0$ independent of the mesh size such that

$$\mathbb{N}\mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \leq C \mathbb{N}\mathbf{g}_{h0,\Omega} \leq C \mathbb{N}\mathbf{f}_{0,\Omega}, \quad (13)$$

where the second bound follows from (11) and the equivalence between the L^2 -norm and the L^2_ε -norm. \square

The following inf-sup condition, which is a key ingredient on the proof of error estimates, is a consequence of Theorem 7.

Proposition 8 *With the assumptions of Theorem 7, for h small enough, there exists a constant $\kappa > 0$ independent of the mesh size such that*

$$\inf_{\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h} \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \frac{\operatorname{Re} [a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\varepsilon]}{\mathbb{N}\mathbf{u} \mathbf{v}_h \mathbb{N}\mathbf{v} \mathbf{v}_h} \geq \kappa. \quad (14)$$

Proof. Theorem 7 implies that, for h small enough, there exists a constant $\kappa' > 0$ independent of h such that

$$\inf_{\mathbf{0} \neq \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\operatorname{Re} [a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \omega^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_\varepsilon]}{\mathbb{N}\mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \mathbb{N}\mathbf{v}_h \mathbf{v}_h} \geq \kappa'. \quad (15)$$

In fact, fix $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ and set $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^1 + (1 + \omega^2)\mathbf{u}_h^2$, with $\mathbf{u}_h^1 = \mathbf{v}_h$ and \mathbf{u}_h^2 solution to (10) with $\mathbf{f} = \varepsilon \mathbf{v}_h$; the stability estimate (13) and the coercivity in Assumption 2 lead to (15).

If $a_h(\cdot, \cdot)$ is hermitian, (14) coincides with (15), and the proof is complete. Otherwise, we prove well-posedness of the adjoint problem: given $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that ω^2 is not an eigenvalue of Problem 1, find $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$a_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - \omega^2(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)_\varepsilon = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (16)$$

Existence and uniqueness of the solution of (16), for h small enough, immediately follow from Theorem 7, due to finite-dimensionality. For the stability, due to (15), in correspondence to \mathbf{v}_h , we can find $\mathbf{0} \neq \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$\begin{aligned} \kappa' \mathbb{N}\mathbf{w}_h \mathbf{v}_h \mathbb{N}\mathbf{v}_h \mathbf{v}_h &\leq \operatorname{Re} [a_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) - \omega^2(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)_\varepsilon] = \operatorname{Re} [(\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)] \\ &\leq \mathbb{N}\mathbf{f}_{L^2(\Omega)^d} \mathbb{N}\mathbf{w}_h \mathbf{v}_h, \end{aligned}$$

which immediately gives $\mathbb{N}\mathbf{v}_h \mathbf{v}_h \leq C \mathbb{N}\mathbf{f}_{L^2(\Omega)^d}$, with $C > 0$ independent of h .

Therefore, the inf-sup condition (14) follows from the well-posedness of the adjoint problem (16) the same way as the inf-sup condition (15) follows from the well-posedness of problem (10), and the proof is complete. \square

Theorem 9 *Let \mathbf{u} be the solution of Problem 1 and let \mathbf{u}_h be its DG approximation defined by (10). If $\mathbf{u} \in H^r(\text{curl}; \mathcal{T}_h)$, $r > 0$, with $(\nabla_h \times (\mu^{-1} \nabla_h \times \mathbf{u}_s)) \in H^s(\mathcal{T}_h)^3$, $s \geq 0$, we have*

$$\begin{aligned} & \mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h \mathbf{v}(h) \\ & \leq Ch^{\min\{r, \ell, s+1\}} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^r(\text{curl}; \mathcal{T}_h)} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K \|\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u})\|_{s, K}^2 \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

where $C > 0$ is independent of the mesh size.

Proof. By triangle inequality, we have

$$\mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h \mathbf{v}(h) \leq \mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{v}_h \mathbf{v}(h) + \mathbb{N}\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h \mathbf{v}(h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (17)$$

The inf-sup condition in Proposition 8 guarantees that, in correspondence to $\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h$, there exists $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$\kappa \mathbb{N}\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h \mathbf{v}(h) \mathbb{N}\mathbf{w}_h \mathbf{v}(h) \leq \text{Re} [a_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - \omega^2(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_\varepsilon].$$

From consistency and the second part of Proposition 2, we obtain for a fixed σ , $0 < \sigma < \min\{r, 1/2\}$:

$$\mathbb{N}\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h \mathbf{v}(h) \leq \kappa^{-1}(\gamma_\sigma + \omega^2) \mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{v}_{h+, \sigma}.$$

This, together with (17) and the definition of the norm $\mathbb{N}_{\cdot+, \sigma}$, gives

$$\mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h \mathbf{v}(h) \leq (1 + \kappa^{-1}(\gamma_\sigma + \omega^2)) \mathbb{N}\mathbf{u} - \mathbf{v}_{h+, \sigma} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

The best approximation property in Proposition 1 allows us to conclude. \square

References

- [1] D.N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19:742–760, 1982.
- [2] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39:1749–1779, 2001.
- [3] A. Buffa and I. Perugia. Discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell eigenproblem. Technical Report PV-24, IMATI-CNR, Pavia, Italy, 2005. <http://www.imati.cnr.it/~annalisa/PS/maxwell.pdf>.
- [4] S. Caorsi, P. Fernandes, and M. Raffetto. On the convergence of Galerkin finite element approximations of electromagnetic eigenproblems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38:580–607, 2000.

- [5] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35:2440–2463, 1998.
- [6] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *Modél. Math. Anal. Numér.*, 33:627–649, 1999.
- [7] C. Dawson, S. Sun, and M.F. Wheeler. Compatible algorithms for coupled flow and transport. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:2565–2580, 2004.
- [8] J.S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids. Part I. Time-domain solution of Maxwell’s equations. *J. Comput. Phys.*, 181:186–221, 2002.
- [9] P. Houston, I. Perugia, A. Schneebeli, and D. Schötzau. Interior penalty method for the indefinite time-harmonic Maxwell equations. *Numer. Math.*, 100:485–518, 2005.
- [10] P. Houston, I. Perugia, and D. Schötzau. Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator: Non-stabilized formulation. *J. Sci. Comp.*, 22:325–356, 2005.
- [11] J.C. Nédélec. Éléments finis mixtes incompressibles pour l’équation de Stokes dans \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 39:97–112, 1982.
- [12] B. Rivière, M.F. Wheeler, and V. Girault. Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, Part I. *Computational Geosciences*, 3:337–360, 1999.

Dos ejemplos de singularidades en interfases fluidas: gotas cargadas eléctricamente y evolución de hojas de vorticidad

MARCO ANTONIO FONTELOS LÓPEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

Abstract

La evolución de superficies de separación entre fluidos puede dar lugar a la formación de singularidades en tiempo finito. Son muchos los ejemplos físicos en los que esto ocurre: ruptura de tubos fluidos en gotas, formación de cúspides en burbujas,... A pesar de la importancia del fenómeno, la teoría matemática del mismo progresa lentamente. En esta nota presentamos algunos resultados obtenidos en torno a dos de estos problemas: la evolución de gotas cargadas eléctricamente y la aparición de singularidades en la evolución de hojas de vorticidad a partir de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Key words: *Ecuaciones en derivadas parciales, Problemas de frontera libre, Mecánica de fluidos, Singularidades.*

AMS subject classifications: *35Q30, 35R35, 74H35, 35Q35*

1 Introducción

Uno de los temas más importantes en la mecánica de fluidos es el de las inestabilidades hidrodinámicas. En particular, aquellas que acontecen en la evolución de las superficies de separación de dos fluidos llamadas interfases. Estas inestabilidades se producen al perturbar ligeramente situaciones de equilibrio y pueden dar lugar a la formación de singularidades en tiempo finito; es decir, puntos en los que el campo de velocidades o la geometría de la interfase pierden la regularidad que tenían en el tiempo inicial. También aparecen singularidades, en este caso persistentes en el tiempo, durante la evolución de interfases en presencia de líneas de contacto con un sólido. Pensemos por ejemplo en la evolución de una gota fluida derramando sobre un sólido.

Matemáticamente, el impulso a la investigación de comportamientos singulares viene determinado por varias razones:

1) Fenómenos de naturaleza diversa como el derrame de una gota sobre una superficie o la formación de una gota están dominados por el comportamiento de una singularidad. Sólomente un análisis matemático riguroso es capaz de esclarecer los mecanismos determinantes en tales fenómenos.

2) Las singularidades en sí mismas pueden señalar la existencia de mecanismos interesantes a nivel microscópico, ya sea en la forma de la descripción del continuo o a nivel de dinámica molecular. La comprensión de la naturaleza de las singularidades que aparecen ha sido, y seguirá siendo, crucial para alcanzar una descripción completa de los mecanismos físicos relevantes.

3) Las singularidades actúan en ocasiones como organizadores de la dinámica a nivel macroscópico. El comportamiento global de muchos sistemas solo pueden ser entendido a partir de una descripción matemática precisa de su comportamiento cerca de la singularidad.

4) Las singularidades son vitales en muchos problemas de la ingeniería tales como los que involucran los procesos de impresión, recubrimiento de superficies, etc. El conocimiento preciso de los detalles matemáticos sobre el comportamiento cerca de una singularidad es vital para controlar estos procesos. Incluso la elaboración de códigos numéricos eficientes necesita del conocimiento preciso del comportamiento a estas escalas.

5) El enfoque a escalas microscópicas inherente a una singularidad se puede usar en la fabricación de objetos pequeños o en el control de procesos a nivel micro y nanoscópico. Es el caso, por ejemplo, de los chorros fluidos de grosor nanoscópico que se pueden desarrollar a partir de gotas cargadas eléctricamente. Mencionamos a este respecto que los problemas de frontera libre involucrando fluidos cargados y la acción de fuerzas de tensión superficial están comenzando a atraer una gran atención debido al control del comportamiento que se consigue mediante la acción de campos eléctricos y magnéticos.

El estudio de las singularidades plantea desafíos matemáticos de primera categoría, como son:

- Determinar cuál es el carácter de las singularidades.
- Determinar por qué ocurren, dónde (tamaño -dimensión Hausdorff- del conjunto de singularidad) y cuándo.
- Determinar cómo se puede continuar una solución más allá de una singularidad. Es también interesante el hallar, si es que existe, la relación entre la forma de las singularidades y la evolución posterior del sistema.
- Deducir nociones apropiadas de soluciones globales y únicas correspondientes a la clase de todas las condiciones iniciales razonables. Relacionada con ésta es la cuestión del rango de validez de la teoría física sobre la que se sustentan las ecuaciones.

Nuestro objetivo genérico es el estudio de la posible formación de singularidades o estructuras casi-singulares en forma de esquinas, frentes, etc. Otro problema prácticamente inexplorado es el de determinar el papel que las singularidades juegan en la evolución posterior del sistema y en la formación de estructuras. Estas estructuras aparecen como chorros emitidos de una gota de fluido cargado o como remolinos en la superficie de separación de dos fluidos poco viscosos, por dar dos ejemplos de los que hablaremos más abajo.

2 Conos de Taylor dinámicos en gotas cargadas

Recientemente [6] se ha podido observar de forma experimental el proceso de desestabilización por ruptura de simetría (ver también [8]) de una gota esférica cargada suspendida en el vacío. Cuando la carga supera un cierto umbral, la gota adopta la forma de un elipsoide y, eventualmente, emite desde los polos sendos chorros con un espesor de micras. Los microchorros emitidos experimentan una desestabilización secundaria y se rompen en gotas de tamaño también microscópico. Las técnicas de electroespray se basan en una cascada de inestabilidades de este tipo para transferir biomoléculas grandes y con elevada carga eléctrica a una fase gaseosa, con objeto de poder realizar espectroscopía de masas de las mismas [7]. Su utilización en biotecnología mereció el Premio Nóbel de Química del año 2003. Una segunda aplicación aparece en los propulsores electrostáticos, en los que se usa el mismo principio (emisión de microchorros originados por repulsión electrostática) como alternativa a la propulsión por gases resultado de una reacción química [3], [10].

A pesar de la importancia práctica de este fenómeno, su comprensión a nivel teórico es aún muy incompleta. No hay una teoría bien asentada que permita predecir el tamaño de las microgotas resultantes a partir de los parámetros físicos del problema. Cuando una gota sufre la inestabilidad descrita arriba y emite chorros puede perder hasta un 30 % de su carga, mientras que su masa disminuye tan sólo en un 1 %. Este hecho no ha recibido aún una explicación satisfactoria.

G. I. Taylor fue el primero que abordó el estudio de la dinámica de fluidos conductores cargados. Observó que un menisco de fluido de forma semiesférica, cuando se carga eléctricamente, puede convertirse en un cono, llamado hoy cono de Taylor. Un cálculo sencillo demuestra que sólo una configuración cónica permite equilibrar las fuerzas de tensión superficial con las fuerzas de repulsión electrostática. Aún más, la apertura de dicho cono ha de ser, exactamente, de 98.6 grados. No obstante, los conos de Taylor son estructuras estacionarias que, como mostramos más abajo, no son genéricas en la evolución de gotas cargadas. En este caso, aparecen conos pero con ángulos próximos a los 60 grados.

Supongamos que la gota ocupa una región $\Omega(t)$. Como la gota es conductora de la electricidad, toda la carga estará localizada en $\partial\Omega$, y como el medio circundante es dieléctrico, la carga total Q permanece constante. El campo eléctrico \mathbf{E} fuera de la gota está dado por $\mathbf{E} = -\nabla V$ donde

$$\Delta V = 0 \quad \text{en } \mathbf{R}^3 \setminus \Omega, \tag{1}$$

$$V = C \quad \text{en } \partial\Omega, \tag{2}$$

$$V(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty. \tag{3}$$

En la superficie de un conductor, la densidad superficial de carga σ está dada por

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}, \tag{4}$$

y la fuerza repulsiva electrostática por unidad de área es

$$\mathbf{F}_e = \frac{\mathbf{E}\sigma}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 \mathbf{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (5)$$

siendo \mathbf{n} el vector normal a $\partial\Omega(t)$.

La velocidad del fluido \mathbf{u} y la presión p dentro de la gota satisfacen las ecuaciones de Stokes (suponemos que el número de Reynolds es muy pequeño para poder despreciar los términos de inercia en Navier-Stokes):

$$-\nabla p + \mu_1 \Delta \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega(t), \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega(t), \quad (7)$$

donde μ_1 es la viscosidad del líquido dentro de la gota. Fuera de la gota han de satisfacerse ecuaciones análogas a (6), (7) pero con μ_1 reemplazado por μ_2 , la viscosidad del líquido circundante.

La condición de contorno expresa equilibrio de fuerzas y se escribe como:

$$(T^{(2)} - T^{(1)})\mathbf{n} = \left(\gamma\kappa - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \right) \mathbf{n} \text{ en } \partial\Omega(t),$$

donde κ es la curvatura media de la superficie, \mathbf{n} es la normal exterior y $T^{(k)}$ es el tensor de esfuerzos en el interior ($k = 1$) o en el exterior ($k = 2$) de la gota, y está dado por

$$T_{ij}^{(k)} = -p\delta_{ij} + \mu_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

Finalmente, la condición cinemática es

$$v_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ en } \partial\Omega(t), \quad (9)$$

donde v_N es la velocidad del contorno en la dirección normal.

Para estudiar la evolución de la gota, hemos desarrollado un método numérico basado en el método de integrales de contorno para el sistema de Stokes (ver [13], [14]). En este método la ecuación para la velocidad en $\partial\Omega(t)$ se escribe como una ecuación integral de Fredholm:

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{r}_0) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \int_{\partial\Omega(t)} f_i(\mathbf{r}) G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS(\mathbf{r}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \int_{\partial\Omega(t)} u_i(\mathbf{r}) T_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) n_k(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (10)$$

donde \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 son vectores posición de puntos en $\partial\Omega(t)$ y

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{(r_i - r_{0,i})(r_j - r_{0,j})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \\ T_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= -6 \frac{(r_i - r_{0,i})(r_j - r_{0,j})(r_k - r_{0,k})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5}, \\ f_i(\mathbf{r}) &= \left[\gamma\kappa(\mathbf{r}) - \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2(\mathbf{r}) \right] n_i(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

La solución para el potencial también se puede escribir como

$$V(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega(t)} \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dS(\mathbf{r}) .$$

Esta ecuación integral se puede invertir numéricamente para obtener la densidad de carga. $V(\mathbf{r}_0)$ es constante en la superficie y se determina por la condición

$$Q = \int_{\partial\Omega(t)} \sigma(\mathbf{r}) dS(\mathbf{r}) . \quad (11)$$

Partiendo de una configuración inicial consistente en una pequeña perturbación axisimétrica de una gota esférica y con una carga total idéntica a la carga límite de estabilidad (por encima de la cual las gotas esféricas se desestabilizan y por debajo de la cual permanecen estables [8]), hemos observado la evolución temporal. En la figura 1 mostramos la evolución de una gota esférica ligeramente perturbada para distintos tiempos con $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$ y en la figura 2 mostramos la evolución de κ^{-2} . Cuando $\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$, se observa en todos los casos la formación de puntas cónicas con un semiángulo de apertura dependiente de $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ pero siempre próximo a los 27 grados. En [2] argumentamos que la forma en que se forman las puntas cónicas es autosimilar y, de hecho, el comportamiento asintótico cerca de la singularidad es

$$\begin{aligned} z &= (t_0 - t)^{\frac{1}{2}} f(\rho) , \\ p &= \frac{1}{(t_0 - t)} P(\xi, \rho) , \\ \mathbf{u} &= \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(\xi, \rho) , \\ V &= \Phi(\xi, \rho) , \end{aligned}$$

con $\rho = \frac{r}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}}$ y $\xi = \frac{z}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}}$. Aquí t_0 es el tiempo de formación de las puntas, (z, r) son coordenadas cilíndricas siendo $z = 0$ el punto en el que se forma la singularidad.

3 La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz y la singularidad de Moore

Consideremos el movimiento bidimensional de dos fluidos inmiscibles, incompresibles y no viscosos separados por una interfase. Sean ρ_1 y ρ_2 las respectivas densidades de ambos fluidos y supongamos una periodicidad horizontal de la interfase con periodo 2π . Asumamos también que no hay vorticidad inicialmente en el interior de los fluidos. Bajo estas condiciones, la vorticidad permanecerá concentrada en la superficie de separación que, es por tanto, una hoja de vorticidad. La cuestión que nos planteamos es cómo evoluciona dicha hoja. Experimentalmente se comprueba que la evolución de la

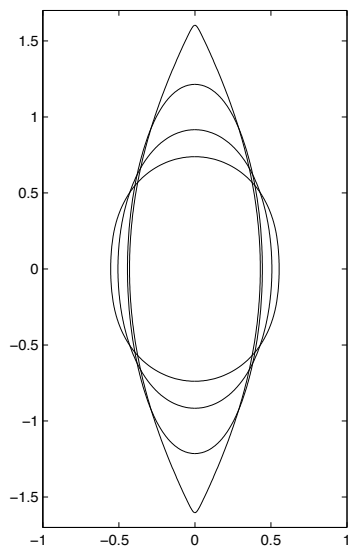


Figura 1: Evolución de una gota inicialmente esférica ligeramente perturbada con $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$. Observar la formación de puntas cónicas en los polos.

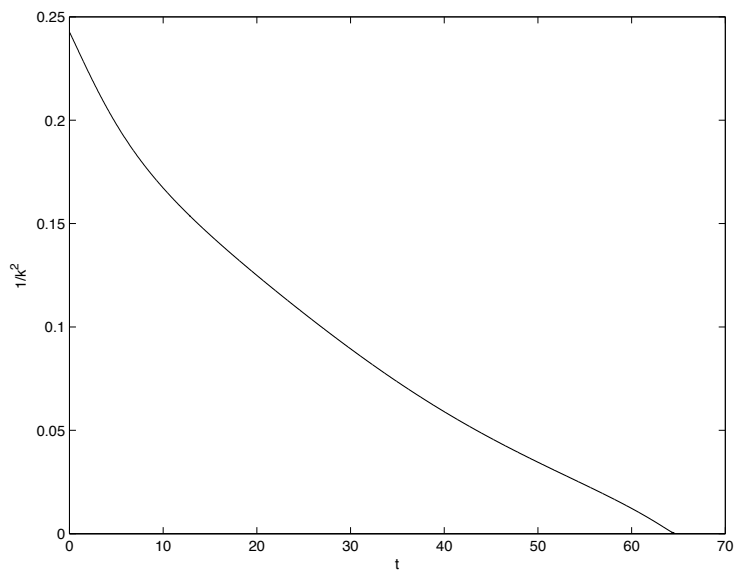


Figura 2: Evolución de la inversa del cuadrado de la curvatura media máxima. Notar que tiende a cero linealmente, sugiriendo la ley $\kappa \sim \frac{C}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}}$ e indicando la escala autosimilar $r \sim C(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}$.

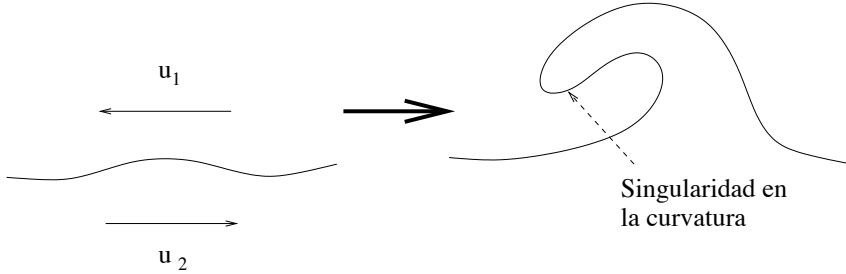


Figura 3: Evolución de una hoja de vorticidad. El problema de la posible aparición de una singularidad en la curvatura (singularidad de Moore) permanece abierto.

superficie se revuelve sobre sí misma (ver figura 3) y a tiempos grandes da lugar a estructuras en forma de espiral.

La geometría bidimensional del problema permite considerar los puntos del plano como números complejos e introducir la posición de los puntos de la interfase en la forma

$$z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t) ,$$

siendo α un parámetro que etiqueta a las partículas fluidas de la frontera. Las velocidades de ambos fluidos en la interfase, que denotaremos por \vec{u}_1 y \vec{u}_2 han de tener la misma componente normal:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} ,$$

mientras que las componentes tangenciales de la velocidad pueden ser discontinuas. Definiremos $\tilde{\gamma}$ como

$$\tilde{\gamma} = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{n} ,$$

es decir, el salto en las componentes tangenciales de la velocidad al cruzar la interfase. Sea

$$\gamma = \tilde{\gamma} |z_\alpha| .$$

Entonces, tal como mostraron Baker, Meiron y Orszag (ver [11]):

$$z_t^*(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi i} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' , \quad (12)$$

La ecuación para $\gamma(\alpha, t)$ es algo complicada, pero se simplifica notablemente en el caso particular en el que ambos fluidos tienen la misma densidad ρ y se tiene

$$\gamma_t(\alpha, t) = -\frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R} \right) , \quad (13)$$

siendo R el radio de curvatura de la interfase en el punto etiquetado con el parámetro α . Las ecuaciones (12), (13) constituyen un sistema de dos ecuaciones integrodiferenciales para $z(\alpha, t)$ y $\gamma(\alpha, t)$.

Una solución obvia de (12), (13) es $z(\alpha, t) = \alpha$, $\gamma(\alpha, t) = \gamma_0$ que corresponde a la interfase plana. Si perturbamos ligeramente esta solución, entonces la relación de dispersión resultante es tal que los modos de longitud de onda suficientemente grande se vuelven inestables.

En 1979 D. W. Moore (ver [12]) estudió el problema (12) con $\gamma(\alpha, t)$ constante. Si tomamos un dato inicial de la forma

$$z(\alpha, 0) = \alpha + i\varepsilon \sin \alpha ,$$

correspondiente a una perturbación periódica de la interfase plana, y buscamos la solución de (12) de la forma

$$z(\alpha, t) = \alpha + \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n(t) e^{in\alpha} ,$$

entonces los coeficientes $A_n(t)$ satisfacen un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con datos iniciales $A_1(0) = \varepsilon/2$, $A_{-1}(0) = -\varepsilon/2$, $A_n(0) = 0$ ($n \neq \pm 1$). Usando métodos asintóticos formales y cálculo numérico, Moore observó que existe un tiempo crítico $t_c(\varepsilon) = O(-\ln \varepsilon)$ tal que los coeficientes (finitos) $A_n(t)$ que pudo calcular tenían valores compatibles con un comportamiento asintótico de la forma

$$A_n(t_c) \underset{|n| \rightarrow \infty}{\sim} C |n|^{-\frac{5}{2}} ,$$

y que esto implica que la curvatura de la interfase se hace singular en t_c .

Hou, Lowengrub y Shelley mostraron en [9] evidencia numérica de la existencia de este tipo de singularidades en la curvatura. Más tarde, Siegel (ver [15]) encontró resultados análogos a los de Moore sobre formación de singularidades pero añadiendo los efectos de tensión superficial (ecuación (13)).

Geoméricamente, la singularidad se manifiesta para tiempos mayores que t_c en un enrollamiento de la interfase sobre sí misma en forma de espiral. A pesar de que la evidencia numérica del escenario descrito arriba es fuerte y los métodos asintóticos a partir de los cuáles se deduce la singularidad en la curvatura son bastante convincentes, el hecho es que no existe aún una demostración matemáticamente rigurosa de la aparición de tal singularidad. En [1] se propuso un modelo unidimensional como un primer paso en la demostración de existencia para la singularidad de Moore. El modelo transforma la ecuación (12) por su análogo unidimensional

$$\frac{dx(\alpha, t)}{dt} = -H(\theta) ,$$

donde se identifica $\gamma(\alpha, t)$ con θ . En el límite $\sigma = 0$ en (13) se concluye que γ es constante a lo largo de las trayectorias y este hecho conduce a la ecuación:

$$\theta_t - (H\theta) \theta_x = 0 . \tag{14}$$

En [1] se realizó un estudio análogo al de Moore y se concluyó la existencia de idénticos indicadores de existencia de singularidad.

El resultado obtenido por nosotros en [4] para datos iniciales $\theta_0(x)$ simétricos y extendido recientemente a datos generales positivos muestra que las soluciones de soporte compacto de (14) desarrollan singularidades en tiempo finito. La idea fundamental de la demostración es la utilización de estimaciones del tipo

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x(x) [(Hf)(x) - (Hf)(0)]}{|x|^{1+\delta}} dx \geq C_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(x) - f(0))^2}{|x|^{2+\delta}} dx, \quad 0 < \delta < 1. \quad (15)$$

La estimación (15) es cierta para toda función $f(x)$ no negativa o no positiva. Su demostración se basa en una descomposición de $f(x)$ en una parte simétrica y una antisimétrica, seguida de estimaciones para cada una de ellas en un semieje mediante el uso de transformadas de Mellin (ver [4] y [5] para más detalle).

Nos centraremos, por simplicidad, en el caso $\theta_0(x)$ simétrico, positivo y de soporte compacto (incluido en $[-L, L]$). En este caso, dado que

$$(H\theta_0)(L) = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \frac{\theta_0(y)}{L-y} dy = \frac{2L}{\pi} \int_0^L \frac{\theta_0(y)}{L^2 - y^2} dy \geq 0,$$

y análogamente $(H\theta_0)(-L) \leq 0$, se tiene que el soporte de $\theta(x, t)$ comienza disminuyendo y, de hecho, estará siempre en $[-L, L]$.

Teniendo ahora en cuenta que de (15) se sigue

$$(1 - \theta)_t = -H(1 - \theta)(1 - \theta)_x,$$

dividiendo esta expresión por $x^{1+\delta}$ con $0 < \delta < 1$ e integrando en $[0, L]$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L \frac{(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \right) = - \int_0^L \frac{(1 - \theta)_x H(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx.$$

Como θ se cancela fuera del intervalo $[-L, L]$, podemos escribir

$$- \int_0^L \frac{(1 - \theta)_x H(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx = - \int_0^\infty \frac{(1 - \theta)_x H(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx. \quad (16)$$

Por (15),

$$- \int_0^\infty \frac{(1 - \theta)_x H(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \geq C_\delta \int_0^\infty \frac{(1 - \theta(x, t))^2}{x^{2+\delta}} dx$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \geq C_\delta \int_0^\infty \frac{(1 - \theta)^2}{x^{2+\delta}} dx \geq C_{L,\delta} \left(\int_0^L \frac{(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \right)^2,$$

lo que implica explosión de $\int_0^L \frac{(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx$ en tiempo finito. Esto implica, en particular, explosión de θ_x en tiempo finito ya que

$$\int_0^L \frac{(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \leq \sup_x \frac{1 - \theta}{x} \int_0^L \frac{dx}{x^\delta} \leq \frac{L^{1-\delta}}{1 - \delta} \sup_x |\theta_x|.$$

Este resultado apunta en la dirección de existencia de singularidades para la evolución de hojas de vorticidad. No obstante, el problema original permanece abierto.

Referencias

- [1] G. R. BAKER, X. LI, AND A. C. MORLET, Analytic structure of 1D-transport equations with nonlocal fluxes, *Physica D* 91 (1996), 349–375.
- [2] S. BETELÚ, M. A. FONTELOS, U. KINDELÁN, O. VANTZOS, Curvature blow up in charged drops, prepublicación.
- [3] J. A. CARRETERO, F. J. HIGUERA Y M. MARTÍNEZ-SÁNCHEZ, Modeling developments in colloid thrusters, International Electric Propulsion Conference, Toulouse (Fr), Marzo 2003.
- [4] A. CÓRDOBA, D. CÓRDOBA, M. A. FONTELOS, Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity, *Ann. of Math.* 182, (2005), 1375-1387.
- [5] A. CÓRDOBA, D. CÓRDOBA, M. A. FONTELOS, Integral inequalities for the Hilbert transform applied to a non-local transport equation, prepublicación.
- [6] D. DUFT, T. ACHTZEHN, R. MÜLLER, B. A. HUBER Y T. LEISNER, Rayleigh jets from levitated microdroplets, *Nature* 421 (2003), pg. 128.
- [7] J. B. FENN, M. MANN, C. K. MENG, S. F. WONG Y C. M. WHITEHOUSE, Electrospray ionization for Mass spectrometry of large biomolecules, *Science* 246, 64 (1989).
- [8] M. A. FONTELOS Y A. FRIEDMAN, Symmetry-breaking bifurcations of charged drops, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 172-2 (2004), 267-294.
- [9] T. HOU, J. LOWENGRUB, M. SHELLEY. Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension, *J. Comput. Phys.*, 114 (1994), 312-338.
- [10] R. G. JAHN Y E. Y. CHOUERI, Electric propulsion, *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Third Edition, Vol. 5 (2002).
- [11] D. I. MEIRON, G. R. BAKER, S. A. ORSZAG, Analytical structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability, *J. Fluid Mech.* 114, (1982), 283-298.
- [12] D. W. MOORE. The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 365 (1979), 105-119.

- [13] C. POZRIKIDIS, Boundary integral methods for linearized viscous flow, Cambridge texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1992.
- [14] J. M. RALLISON, A. ACRIVOS, A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an external flow, J. Fluid Mech. **89** (1978), 191-200.
- [15] M. SIEGEL. A study of singularity formation in the Kelvin-Helmholtz instability with surface tension. SIAM J. Appl. Math., 55-4 (1995), 865-891.

Numerical solution of structured eigenvalue problems *

VOLKER MEHRMANN

Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin,
Berlin, Germany

mehrmann@math.tu-berlin.de

Abstract

We consider the numerical solution of structured linear or quadratic eigenvalue problems. We will present several applications where such problems arise and we discuss how linearization, i.e. the transformation to first order form can be obtained in a structure preserving way. We present structure preserving numerical methods for the solution of the resulting structured eigenvalue problems and demonstrate their performance with some numerical examples.

Key words: *Quadratic eigenvalue problem, palindromic matrix polynomial, even matrix polynomial, linearization, Hamiltonian matrix, Hamiltonian Schur form, skew Hamiltonian Schur form, isotropic Arnoldi iteration*

AMS subject classifications: *65F15, 15A18, 15A57*

1 Introduction

We consider the numerical solution of second order eigenvalue problems $P(\lambda)x = 0$ associated with $n \times n$ quadratic matrix polynomials of the form

$$P(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0, \quad A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad A_2 \neq 0, \quad (1)$$

where \mathbb{F} denotes the field \mathbb{R} or \mathbb{C} .

Eigenvalue problems of this kind arise in many applications, e.g. the vibration analysis of buildings, machines, and vehicles, see e.g. [12, 17, 27]. Often, the eigenvalue problem has extra structure that results in symmetries in the spectrum, we present several examples in Section 2. But let us first introduce the structures that we are interested in.

Definition 1 [19] *Let $Q(l) = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0$ be a quadratic matrix polynomial, with $B_0, B_1, B_2 \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $B_2 \neq 0$. Then we define the reversal $\text{rev}Q(\lambda)$ of $Q(l)$, by*

$$\text{rev}Q(\lambda) := \lambda^2 B_0 + \lambda B_1 + B_2. \quad (2)$$

*Supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft through DFG Research Center MATHEON, ‘Mathematics for key technologies’ in Berlin

We say that a matrix polynomial $P(\lambda)$ as in (1) is palindromic if $\text{rev}P(l) = P(l)^T$ and $P(\lambda)$ is even if $P(-l) = P(l)^T$.

A matrix polynomial is called regular if the coefficient matrices are square and there exists a real or complex number λ_0 such that $\det(P(\lambda_0)) \neq 0$.

Even and palindromic matrix polynomials have spectra with special symmetry properties.

Proposition 1 [19] *Let $P(l)$ be a regular matrix polynomial that is even or palindromic. Then the spectrum of $P(l)$ has the pairing $(l, -l)$ or $(l, 1/l)$, respectively. Moreover, the algebraic, geometric, and partial multiplicities of eigenvalues in each such pair are equal. (Here, we allow $\lambda = 0$ and interpret $1/\lambda$ as the eigenvalue ∞ .)*

The eigenvalue pairing of even and palindromic matrix polynomials is an important property that has its origin in the physical properties of the underlying application. For this reason, also in finite precision arithmetic a numerical method for the solution of these eigenvalue problems should preserve this eigenvalue pairing to avoid physically meaningless results.

The classical approach to investigate or numerically solve quadratic eigenvalue problems is *linearization*, i.e., to transform the given polynomial (1) into a $2n \times 2n$ matrix pencil $L(\lambda) = \lambda N + M$ that satisfies

$$U(\lambda)L(\lambda)V(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

for *unimodular matrix polynomials* $U(\lambda), V(\lambda)$, see, e.g., [12]. (A matrix polynomial is called *unimodular* if it is square and its determinant is a nonzero constant, independent of λ .)

The standard approach for obtaining linearizations of matrix polynomials $P(\lambda)$ is to use one of the block-companion forms [12]. But if the eigenvalue problem has extra structure, then the block-companion linearizations usually do not reflect this structure and numerical methods may fail to produce eigenvalues and eigenvectors that can be associated with a problem of the given structure. Therefore, it is important to construct linearizations that reflect the structure of the given matrix polynomial. Furthermore, it is essential to properly take care of the eigenstructure associated with the infinite eigenvalues, see [22].

Recently, in [20] a new linearization theory has been introduced that introduces a large vector space of linear pencils that are potential linearizations. A characterization when such a pencil really is a linearization is obtained as well. Within this class one can then look for structure preserving linearizations of palindromic or even matrix polynomials [19]. Furthermore, in [14] it has been shown how the conditioning eigenvalues of the linearization is related to that of the original matrix polynomials.

The paper is organized as follows. After introducing some classes of applications in Section 2, we derive structure preserving linearizations for even and palindromic quadratic polynomials in Section 3. In Section 4 we then discuss structure preserving methods for the solution of the resulting linear eigenvalue problems and give some numerical examples in Section 5.

2 Applications

Quadratic eigenvalue problems arise in the analysis and numerical solution of second order systems of ordinary differential equations. In this section we discuss some applications that lead to problems with even or palindromic structure.

Example 1 The investigation of noise in rail traffic that is caused by high speed trains leads to the complex quadratic parametric eigenvalue problem

$$(\lambda^2 A_1(\omega) + \lambda A_0(\omega) + A_1(\omega)^T)y = 0,$$

where $A_0(\omega) = A_0(\omega)^T$ and ω is the excitation frequency, see [15]. For every fixed frequency ω , the underlying matrix polynomial is palindromic and one is interested in the eigenvalues near the unit circle for all frequencies in a range from 0 to 5000 hz. It should be noted that in this application A_1 is highly rank-deficient, i.e. most of the eigenvalues are at 0 and ∞ .

Example 2 The study of corner singularities in anisotropic elastic materials [2, 18, 23] leads to even quadratic eigenvalue problems of the form

$$P(\lambda)v = (\lambda^2 M + \lambda G + K)v = 0,$$

where $M = M^T$ is a positive definite mass matrix, $K = K^T$ is negative definite and $G = -G^T$. All coefficients are real, large and sparse having been produced by a finite element discretization and one is interested in the eigenvalues near to the imaginary axis.

Example 3 The optimality condition for the linear quadratic optimal control problem to minimize a cost functional

$$\int_0^\infty x^T Q_0 x + \dot{x}^T Q_1 \dot{x} + u^T R u \, dt,$$

with $Q_0 = Q_0^T$, $Q_1 = Q_1^T$ positive semidefinite and $R = R^T$ positive definite, subject to a linear second order control system

$$M\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = Bu, \quad x(0) = x_0,$$

leads to a linear boundary value problem with an associated even second order eigenvalue problem

$$\left(\lambda^2 \begin{bmatrix} -Q_1 & M^T \\ M & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Q_0 & K^T \\ K & -BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \right) v = 0,$$

see [3, 24]. In this application one is interested in computing the deflating subspace associated with eigenvalues in the left half plane.

Example 4 The discrete time optimal control problem to minimize

$$\sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x_j \\ u_j \end{bmatrix}^T \mathcal{Q} \begin{bmatrix} x_j \\ u_j \end{bmatrix}, \quad (4)$$

with $\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ positive semidefinite and $R = R^T$ positive definite, subject to the discrete time control problem

$$Mx_{i+2} + Gx_{i+1} + Kx_i = Bu_i,$$

with x_0, x_1 given, leads after some transformations, see [19], to a linear boundary value problem with an associated quadratic palindromic eigenvalue problem

$$\left(\lambda^2 \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ M^T & 0 & 0 \\ -B^T & S^T & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & G & 0 \\ G^T & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M & -B \\ K^T & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v = 0. \quad (5)$$

In this application one is interested in computing the deflating subspace associated with eigenvalues inside the unit circle. Again, the leading and last coefficient are rank deficient.

3 Structured linearization

In [19] it has been shown how one can construct for even palindromic matrix polynomials associated linear matrix pencils with even and palindromic structure from a vector space of linear pencils and it has been characterized when these are really linearizations. For an even quadratic palindromic polynomial

$$P(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0, \quad (6)$$

with $A_2 = A_2^T$, $A_0 = A_0^T$, and $A_1 = -A_1^T$ the associated even linear eigenvalue problems have the form

$$l \begin{bmatrix} 0 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

The analysis in [19] shows that a matrix pencil of this form is a linearization of the even quadratic (6) if and only if ∞ is not an eigenvalue of $P(\lambda)$. If ∞ is an eigenvalue of $P(\lambda)$, i.e. if A_2 is singular, then no even linearizations in this class exist. This happens if the underlying second order differential equation is coming from a differential-algebraic equation. It has been shown in the unstructured case in [22] how to properly turn such second order systems to first order and how to deflate the part associated with the eigenvalue ∞ and the singular parts. Structure preserving deflation of these parts in the case of even matrix pencils has been studied in a recent paper [10], where a structured staircase form for even matrix pencils has been derived. The extension of these

results to the case to even quadratic or higher order even matrix polynomials is currently under investigation.

If A_2 is close to singular, then (7) is a linearization, but the analysis of [14] shows that this pencil will be ill-conditioned. In the applications arising from optimal control, furthermore, also the eigenvalues on or near the imaginary axis usually present difficulties for the numerical methods. Both types of eigenvalues should be deflated before using the standard numerical methods. How to do this efficiently is currently under investigation. Fortunately, in many practical examples such as Example 2 it can be guaranteed by the analysis of the underlying physical problem, that eigenvalues are bounded away from the imaginary axis, see [2]. In the next section, we therefore discuss numerical methods only for even pencils that do not have eigenvalues on the imaginary axis or at ∞ .

Analogously, for a quadratic palindromic polynomial

$$P(\lambda) = \lambda^2 A_1 + \lambda A_0 + A_1^T, \quad (8)$$

with $A_0 = A_0^T$, the associated linear palindromic eigenvalue problems in the vector space of potential linearizations have the form

$$\lambda Z + Z^T = \lambda \begin{bmatrix} A_0^T & A_1 - A_0 \\ A_0^T & A_0^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_0 & A_0 \\ A_1 - A_0^T & A_0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

The analysis in [19] shows that a matrix pencil of this form is a linearization of the palindromic polynomial (8) if and only if -1 is not an eigenvalue of $P(\lambda)$. If -1 is an eigenvalue of $P(\lambda)$, then no palindromic linearization in this class exists. Furthermore, the analysis of [14] shows that the linearization is ill-conditioned if -1 is near to an eigenvalue of $P(\lambda)$.

In the application of Example 1 the eigenvalue -1 can be excluded by the physics of the problem, since this would correspond to an undamped vibration of the rail, but eigenvalues near -1 may occur for particular frequencies. In the applications from discrete time optimal control also the other eigenvalues near the unit circle may lead to ill-conditioning, see [9].

Thus, if a palindromic eigenvalue problem has an eigenvalue at or close to -1 , then before performing the linearization, this part of the spectrum should be deflated, i.e. the problem should be projected to a smaller eigenvalue problem without this eigenvalues. Structure preserving deflation of the eigenvalues near -1 and those at $0, \infty$ for Example 1 has been discussed in [15]. The general case is currently under investigation.

4 Numerical methods for linear even eigenvalue problems

In this section we discuss the numerical solution of linear eigenvalue problems associated with even pencils

$$\lambda N + M, \quad (10)$$

where in view of the discussion in the last section we assume that $N = -N^T$ and $M = M^T$ are nonsingular. The case of palindromic pencils can be reduced

to this case via the Cayley transformation, see [19]. For a palindromic pencil $\lambda Z + Z^T$ the eigenvalues and eigenvectors can be obtained from the even pencil

$$\lambda N + M := \lambda(Z - Z^T) + (Z + Z^T). \quad (11)$$

Eigenvalue methods for real even matrix pencils have been introduced in the small dense case in [5] and for large and sparse problems in [24]. Using the fact that by assumption the skew-symmetric matrix N is nonsingular, we can perform a Cholesky like factorization $N = L J L^T$ with $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$, see [4], and transform the generalized eigenvalue problem for $\lambda N + M$ to the eigenvalue problem for the Hamiltonian matrix $\mathcal{M} = J L^{-1} M L^{-T}$. (A real matrix \mathcal{M} is called Hamiltonian if $(J\mathcal{M})^T = J\mathcal{M}$.)

The development of structure preserving methods for Hamiltonian eigenvalue problems has been an active research area for many years, see [8, 21] and the references therein. Recently a new method for real Hamiltonian matrices has been suggested in [11]. The basis of this method is the computation of a real skew-Hamiltonian Schur form

$$Q^T \mathcal{N} Q = \begin{bmatrix} \Psi & \Xi \\ 0 & \Psi^T \end{bmatrix},$$

of the skew-Hamiltonian matrix $\mathcal{N} = \mathcal{M}^2$, with Ψ quasi-upper triangular, $\Xi = -\Xi^T$, and Q orthogonal and symplectic, i.e. $Q^T Q = I_{2n}$ and $Q^T J Q = J$. (A real matrix \mathcal{N} is called skew-Hamiltonian if $(J\mathcal{N})^T = J\mathcal{N}$.) The real skew-Hamiltonian Schur form was originally suggested in [28], where also a numerical method was presented that computes this form and that is backward stable for \mathcal{N} . This method has the disadvantage that the computation of \mathcal{N} in a worst case situation creates an error of order $\sqrt{\text{eps}}$ for the eigenvalues that are small in modulus, where eps is the machine precision. A backward stable method to compute the real skew-Hamiltonian Schur form of $\mathcal{N} = \mathcal{M}^2$ without forming \mathcal{M}^2 explicitly was developed in [8]. The method uses the following decomposition.

Lemma 2 [8] (Symplectic URV -decomposition.) *Let $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ be a Hamiltonian matrix. Then there exist orthogonal symplectic matrices $U, V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ such that*

$$U^T \mathcal{M} V = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & -\Theta^T \end{bmatrix}, \quad V^T \mathcal{M} U = \begin{bmatrix} \Theta & \Gamma^T \\ 0 & -\Phi^T \end{bmatrix}, \quad (12)$$

with Φ upper triangular and Θ quasi upper triangular, and also

$$U^T \mathcal{M} V V^T \mathcal{M} U = U^T \mathcal{M}^2 U = \begin{bmatrix} \Phi \Theta & \tilde{\Gamma} \\ 0 & \Theta^T \phi^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

is quasi upper triangular.

The method of [8] to compute this symplectic URV -decomposition consists of two parts. The first part is a Hessenberg-like reduction using orthogonal

symplectic transformation matrices $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ such that

$$\mathcal{U}_0^T \mathcal{M} \mathcal{V}_0 = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ 0 & -M_{2,2}^T \end{bmatrix}, \quad (14)$$

with $M_{1,1}$ upper-triangular and $M_{2,2}$ upper-Hessenberg. The second part is the computation of the periodic Schur form of $M_{1,1}M_{2,2}$, which determines (without forming the product) real orthogonal matrices U_1 and U_2 such that $U_1^T M_{1,1} (U_2 U_2^T) M_{2,2} U_1 = \Phi \Theta$ as well as $U_2^T M_{2,2} (U_1 U_1^T) M_{1,1} U_2 = \Theta \Phi$ are in real Schur form. An implementation of this method of complexity $\mathbf{O}(n^3)$ can be found in the HAPACK package [6, 16].

The key idea of the method in [11] is to form the (in general full) Hamiltonian matrix $\mathcal{U}^T \mathcal{M} \mathcal{U}$ with the matrix \mathcal{U} of (12), and to make efficient use of the fact that $(\mathcal{U}^T \mathcal{M} \mathcal{U})^2$ is in skew-Hamiltonian Schur form (13). This allows a finite step elimination procedure of complexity $\mathbf{O}(n^3)$ with an orthogonal and symplectic matrix \mathcal{W} to form

$$\mathcal{W}^T \mathcal{U}^T \mathcal{M} \mathcal{U} \mathcal{W} = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & -F^T \end{bmatrix}, \quad (15)$$

which is in real Hamiltonian Schur form with a quasi-triangular matrix F .

If the Hamiltonian matrix has no eigenvalues on or near to the imaginary axis, then this method computes the exact real Hamiltonian Schur form of a slightly perturbed Hamiltonian matrix $\tilde{\mathcal{M}}$. In the general case, the exact perturbation and error analysis for this problem is an open problem. In particular, it is unclear why the method performs well also in the case of Hamiltonian matrices that possess a Hamiltonian Schur form but have eigenvalues on the imaginary axis. The method in this form only works for real Hamiltonian matrices, the development of a general method for the complex case is currently under investigation.

For large scale eigenvalue problems, one usually only wants to find some of the eigenvalues that lie nearest to some focal point λ_0 and the associated invariant subspace. The usual approach is to use a shift-and-invert transformation and to apply an Arnoldi or Lanczos type iteration, see [25, 26]. The Arnoldi method and other Krylov subspace methods generate Krylov subspaces, where v is the starting vector and A is the operator being applied. A *Krylov subspace* $\mathcal{K}_j(A, v)$ is defined by

$$\mathcal{K}_j(A, v) = \text{span}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{j-1}v\}. \quad (16)$$

In [23] a structure preserving Arnoldi method called **SHIRA** for large scale Hamiltonian matrices has been derived and an analogous Lanczos **HIRL** has been suggested in [29]. The usual shift-and-invert transformation $(\mathcal{M} - \lambda_0 I)^{-1}$ cannot be used, since it fails to preserve the structure. Due to the pairing of the eigenvalues, we must extract all these eigenvalues together. The obvious rational transformation for this is

$$R(\lambda_0, \mathcal{M}) = (\mathcal{M} - \lambda_0 I)^{-1} (\mathcal{M} + \lambda_0 I)^{-1} (\mathcal{M} - \bar{\lambda}_0 I)^{-1} (\mathcal{M} + \bar{\lambda}_0 I)^{-1}. \quad (17)$$

(If the target λ_0 is either real or purely imaginary, one may choose to use the simpler transformation $R(\lambda_0, \mathcal{M}) = (\mathcal{M} - \lambda_0 I)^{-1}(\mathcal{M} + \lambda_0 I)^{-1}$.) The resulting matrix $R(\lambda_0, \mathcal{M})$ is real skew Hamiltonian and fast convergence of the eigenvalues near the shift-point λ_0 can be expected. A nice property of skew-Hamiltonian operators is that the Krylov subspaces that they generate are isotropic, [1]. (A subspace \mathcal{S} of \mathbb{R}^{2n} is called *isotropic* if $y^T J x = 0$ for all $x, y \in \mathcal{S}$.)

Proposition 3 [23] *Let $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ be a skew-Hamiltonian matrix, let $v \in \mathbb{R}^{2n}$, and let j be a positive integer. Then the Krylov subspace $\mathcal{K}_j(\mathcal{N}, v)$ is isotropic.*

This property of the Krylov subspace can be used to introduce an *isotropic* Arnoldi process. The Arnoldi process starts with an arbitrary unit vector q_1 and produces orthonormal vectors as follows. Given orthonormal vectors q_1, \dots, q_j , the next vector q_{j+1} is generated by forming $\mathcal{N}q_j$ and then orthogonalizing it against q_1, \dots, q_j . Thus

$$q_{j+1}h_{j+1,j} = \mathcal{N}q_j - \sum_{i=1}^j q_i h_{ij},$$

where $h_{ij} = q_i^T \mathcal{N}q_j$, $i = 1, \dots, j$, and $h_{j+1,j}$ is a positive constant chosen so that $\|q_{j+1}\|_2 = 1$.

To build isotropic subspaces one has to orthogonalize against Jq_1, \dots, Jq_j as well. Thus, the j -th step of the *isotropic Arnoldi process* is

$$q_{j+1}h_{j+1,j} = \mathcal{N}q_j - \sum_{i=1}^j q_i h_{ij} - \sum_{i=1}^j Jq_i t_{ij}, \quad (18)$$

where

$$h_{ij} = q_i^T \mathcal{N}q_j \quad \text{and} \quad t_{ij} = (Jq_i)^T \mathcal{N}q_j. \quad (19)$$

This generates orthonormal vectors that span isotropic subspaces and, since \mathcal{N} is real skew Hamiltonian, by Proposition 3, the coefficients t_{ij} in (18), (19) will all be zero.

If the starting vector q_1 is general, then in exact arithmetic, the process terminates after $n - 1$ steps, as q_1, \dots, q_n together with Jq_1, \dots, Jq_n form an orthonormal basis of \mathbb{R}^{2n} . If $Q \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ is the matrix whose columns are q_1, \dots, q_n , then (18) can be rewritten as

$$\mathcal{N}Q = \begin{bmatrix} Q & JQ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ T \end{bmatrix}, \quad (20)$$

where H is an upper Hessenberg matrix built from the coefficients h_{ij} , and T is an upper triangular matrix built from the coefficients t_{ij} . Equation (20) implies that

$$\mathcal{N} \begin{bmatrix} Q & JQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & JQ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & \tilde{G} \\ T & \tilde{H}^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

for some \tilde{G} and \tilde{H} and that $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} Q & JQ \end{bmatrix}$ is orthogonal and symplectic. Since the skew Hamiltonian property is preserved under symplectic similarity, it follows that $\tilde{H}^T = H^T$, $T^T = -T = 0$, and $G^T = -G$.

Proposition 4 *Let \mathcal{N} be a real skew Hamiltonian matrix. Then for every unit vector $q_1 \in \mathcal{R}^{2n}$, there exists an orthogonal symplectic matrix \mathcal{U} that has q_1 as its first column such that*

$$\mathcal{U}^T \mathcal{N} \mathcal{U} = \begin{bmatrix} H & G \\ 0 & H^T \end{bmatrix}, \quad (22)$$

and H is in Hessenberg form.

The multiplicity of the eigenvalues of \mathcal{N} is reflected in the structure of the matrix in (22). For each double eigenvalue of \mathcal{N} , one copy resides in F , and the other copy is in F^T .

When we apply the Arnoldi process to a large, sparse matrix in practice, we stop after k steps with $k \ll n$. The coefficients h_{ij} computed to this point, form a $k \times k$ submatrix of H , whose eigenvalues (called *Ritz values*) we can compute using the usual QR-algorithm, see [13], and use as approximations to eigenvalues of H , hence of \mathcal{N} .

5 Numerical Examples

The method of [11] has been implemented and tested for the benchmark collection of Hamiltonian matrices arising from optimal control problems in [7]. It has been demonstrated that the structure preserving method performs to full possible accuracy for all the benchmark problems and achieves the same relative accuracy as the previously best methods from the HAPACK package [6], while at the same time producing the Hamiltonian Schur form.

To demonstrate the results for large scale problems, consider Example 2 of size 2223. In [23] the following comparison was given for computing the 6 eigenvalues nearest to different focal points using the method SHIRA and the unstructured Arnoldi method `eigs` from MATLAB.

	flops (10^7)	
λ_0	SHIRA	eigs
0	32.6	140.1
0.3	32.6	79.6
0.6	28.4	69.8
0.9	28.4	50.7
1.2	19.8	31.5

The structured method (apart from producing the right eigenvalue pairing and associated isotropic invariant subspaces) also is much more efficient, in particular for focal points that are not close to eigenvalues.

6 Conclusions

We have discussed numerical methods for the numerical solution of structured eigenvalue problems arising in a variety of applications. We have focussed on even and palindromic structures and demonstrated that it is possible to derive structure preserving linearizations and associated numerical methods for the resulting linear eigenvalue problems.

Structure preservation is essential to obtain physically meaningful results and typically also leads to more efficient methods. Despite the recent success in deriving structure preserving methods, there are still many open problems. These include the detailed perturbation and error analysis for even problems with purely imaginary eigenvalues (in particular $0, \infty$) and palindromic problems with eigenvalues on the unit circle (in particular $+1, -1$), as well as numerical methods that can work directly with matrix polynomials without using linearizations.

References

- [1] G.S. AMMAR AND V. MEHRMANN. On Hamiltonian and symplectic Hessenberg forms. *Linear Algebra Appl.*, 149:55–72, 1991.
- [2] T. APEL, V. MEHRMANN, AND D. WATKINS. Structured eigenvalue methods for the computation of corner singularities in 3D anisotropic elastic structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191:4459–4473, 2002.
- [3] T. APEL, V. MEHRMANN, AND D. WATKINS. Numerical solution of large scale structured polynomial eigenvalue problems. In F. Cucker, R. DeVore, P. Olver, and E. Süli, editors, *Foundations of Computational Mathematics*, pages 137–157, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] P. BENNER, R. BYERS, H. FASSBENDER, V. MEHRMANN, AND D. WATKINS. Cholesky-like factorizations of skew-symmetric matrices. *ETNA*, 11:85–93, 2000.
- [5] P. BENNER, R. BYERS, V. MEHRMANN, AND H. XU. Numerical computation of deflating subspaces of skew Hamiltonian/Hamiltonian pencils. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24:165–190, 2002.
- [6] P. BENNER AND D. KRESSNER. Fortran 77 subroutines for computing the eigenvalues of Hamiltonian matrices II. *ACM Trans. Math. Software*, to appear, 2005. Available from <http://www.math.tu-berlin.de/kressner/hapack/>.
- [7] P. BENNER, A.J. LAUB, AND V. MEHRMANN. Benchmarks for the Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations. *Control Systems Magazine*, 7:18–28, 1997.

- [8] P. BENNER, V. MEHRMANN, AND H. XU. A numerically stable, structure preserving method for computing the eigenvalues of real Hamiltonian or symplectic pencils. *Numer. Math.*, 78:329–358, 1998.
- [9] S. BORA AND V. MEHRMANN. Perturbation theory for structured matrix pencils arising in control theory. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, to appear, 2005.
- [10] R. BYERS, V. MEHRMANN, AND H. XU. A structured staircase algorithm for skew-symmetric/symmetric pencils. Technical Report 260, DFG Research Center MATHEON, *Mathematics for key technologies* in Berlin, TU Berlin, Str. des 17. Juni 136, D-10623 Berlin, Germany, 2005. Available from <http://www.matheon.de>, submitted for publication.
- [11] D. CHU, X. LIU, AND V. MEHRMANN. A numerically backwards stable method for computing the Hamiltonian Schur form. Preprint 2004/24, Institut für Mathematik, TU Berlin, D-10623 Berlin, FRG, 2004. Available from <http://www.math.tu-berlin.de/preprints/>, submitted for publication.
- [12] I. GOHBERG, P. LANCASTER, AND L. RODMAN. *Matrix Polynomials*. Academic Press, New York, 1982.
- [13] G.H. GOLUB AND C.F. VAN LOAN. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3rd edition, 1996.
- [14] N.J. HIGHAM, D.S. MACKEY, AND F. TISSEUR. The conditioning of linearizations of matrix polynomials. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, to appear, 2006.
- [15] A. HILLIGES, C. MEHL, AND V. MEHRMANN. On the solution of palindromic eigenvalue problems. In *Proceedings of the 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*. Jyväskylä, Finland, 2004. CD-ROM.
- [16] D. KRESSNER. *Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems*, volume 46 of *Lecture notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2005.
- [17] P. LANCASTER. *Lambda-matrices and Vibrating Systems*. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [18] D. LEGUILLON. Computation of 3d-singularities in elasticity. In M. Costabel et al., editor, *Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains*, volume 167 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 161–170, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [19] D.S. MACKEY, N. MACKEY, C. MEHL, AND V. MEHRMANN. Palindromic polynomial eigenvalue problems: Good vibrations from good linearizations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, to appear, 2006.

- [20] D.S. MACKEY, N. MACKEY, C. MEHL, AND V. MEHRMANN. Vector spaces of linearizations for matrix polynomials. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, to appear, 2006.
- [21] V. MEHRMANN. *The Autonomous Linear Quadratic Control Problem, Theory and Numerical Solution*. volume 163 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, July 1991.
- [22] V. MEHRMANN AND C. SHI. Analysis of higher order linear differential-algebraic systems. Preprint 2004/17, Institut für Mathematik, TU Berlin, D-10623 Berlin, FRG, 2004. Available from <http://www.math.tu-berlin.de/preprints/>.
- [23] V. MEHRMANN AND D. WATKINS. Structure-preserving methods for computing eigenpairs of large sparse skew-Hamiltonian/Hamiltonian pencils. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22:1905–1925, 2001.
- [24] V. MEHRMANN AND D. WATKINS. Polynomial eigenvalue problems with Hamiltonian structure. *Electr. Trans. Num. Anal.*, 13:106–113, 2002.
- [25] Y. SAAD. *Numerical methods for large eigenvalue problems*. Manchester University Press, Manchester, 1992.
- [26] D.C. SORENSEN. Implicit application of polynomial filters in a k -step Arnoldi method. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13:357–385, 1992.
- [27] F. TISSEUR AND K. MEERBERGEN. A survey of the quadratic eigenvalue problem. *SIAM Rev.*, 43:234–286, 2001.
- [28] C.F. VAN LOAN. A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix. *Linear Algebra Appl.*, 61:233–251, 1984.
- [29] D.S. WATKINS. On Hamiltonian and symplectic Lanczos processes. *Linear Algebra Appl.*, 385:23–45, 2004.

Application of high order well-balanced schemes to a class of hyperbolic systems with source terms *

YULONG XING AND CHI-WANG SHU

Department of Mathematics, Brown University, Providence, USA
Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, USA

xing@dam.brown.edu, shu@dam.brown.edu

Abstract

In this short note, we survey and apply our recently designed high order accurate well-balanced finite volume WENO (weighted essentially non-oscillatory) schemes and discontinuous Galerkin finite element schemes for solving a class of hyperbolic systems. Two different approaches to obtain high order well balanced schemes, which are also essentially non-oscillatory for general solutions with discontinuities, have been designed. Such schemes are particularly useful in computing small perturbations to such steady state solutions. Some applications of these well balanced schemes on hyperbolic balance laws, including the shallow water equation, the elastic wave equation, the hyperbolic model for a chemosensitive movement, the nozzle flow, a model in fluid mechanics, the Goldstein-Taylor model of the Boltzmann equation and a two phase flow model, are introduced at the end.

Key words: *hyperbolic balance laws; WENO scheme; discontinuous Galerkin method; high order accuracy; source term; conservation laws; shallow water equation; elastic wave equation; chemosensitive movement; nozzle flow; two phase flow; Goldstein-Taylor model.*

AMS subject classifications: *65M60, 65N30, 35L65*

1 Introduction

We are interested in numerically solving the following hyperbolic conservation laws with source terms, also referred to as hyperbolic balance laws:

$$u_t + f_1(u, x, y)_x + f_2(u, x, y)_y = g(u, x, y) \quad (1)$$

*Research supported by ARO grant W911NF-04-1-0291, NSF grant DMS-0510345 and AFOSR grant FA9550-05-1-0123.

or in the one dimensional case

$$u_t + f(u, x)_x = g(u, x) \quad (2)$$

where u is the solution vector, $f_1(u, x, y)$ and $f_2(u, x, y)$ (or $f(u, x)$) are the fluxes and $g(u, x, y)$ (or $g(u, x)$) is the source term. Hyperbolicity refers to the fact that the Jacobians $\frac{\partial f_1(u, x, y)}{\partial u}$ and $\frac{\partial f_2(u, x, y)}{\partial u}$ (or $\frac{\partial f(u, x)}{\partial u}$) always have real eigenvalues and complete sets of eigenvectors. Often, this balance law would admit steady state solutions in which the source term is exactly balanced by the flux gradient. Notice that in such situations the solution u is typically a non-trivial function, hence a straightforward numerical scheme may fail to preserve exactly this balance. Many physical phenomena come from small perturbations of these steady state solutions, which are very difficult to capture numerically, unless the numerical schemes can preserve the unperturbed steady state at the discrete level. Schemes which can preserve the unperturbed steady state at the discrete level are the so called well balanced schemes. Our purpose is to design well balanced schemes without sacrificing the high order accuracy and non-oscillatory properties of the scheme when applied to general, non-steady state solutions.

A prototype example for the balance laws (2), which has been investigated extensively in the literature, is the shallow water equation with a non-flat bottom topology. Many geophysical flows are modeled by the variants of the shallow water equations. In one space dimension, they take the form

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = -ghb_x, \end{cases} \quad (3)$$

where h denotes the water height, u is the velocity of the fluid, b represents the bottom topography and g is the gravitational constant. The steady state solutions are given by

$$hu = \text{constant} \quad \text{and} \quad \frac{1}{2}u^2 + g(h + b) = \text{constant}. \quad (4)$$

Often, we are particularly interested in the still water stationary solution, denoted by

$$u = 0 \quad \text{and} \quad h + b = \text{constant}. \quad (5)$$

Bermudez and Vazquez [2] first introduced the concept of the ‘‘exact C-property’’, which refers to the ability of the scheme to exactly preserve the still water stationary solution. Many well balanced schemes satisfying the exact C-property have been developed in the literature, mostly for first and second order accuracy, e.g. [2, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 19]. It is technically difficult to construct schemes which are genuinely high order accurate in smooth regions for general solutions, are essentially non-oscillatory for general solutions with discontinuities, and at the same time can preserve exactly certain steady state solutions.

Recently, we have developed high order well-balanced finite difference and finite volume WENO (weighted essentially non-oscillatory) schemes and discontinuous Galerkin finite element schemes for solving a class of hyperbolic systems with separable source terms. In [15], we started our investigation by designing a class of high order finite difference WENO schemes which are well balanced for the still water solution of the shallow water equations. In [16], the well balanced high order finite difference WENO schemes designed in [15] are generalized to a general class of balance laws with separable source terms, including the elastic wave equation, the hyperbolic model for a chemosensitive movement, the nozzle flow and a two phase flow model. In [17], well balanced high order finite volume WENO schemes and finite element discontinuous Galerkin schemes are designed for the same class of balance laws as those in [16], which are more suitable for computations in complex geometry and / or for using adaptive meshes. The key ingredient of the technique used in [15, 16, 17] to obtain well balanced property is a special decomposition of the source term, allowing a discretization to the source term to be both high order accurate for general solutions and exactly well balanced with the flux gradient for some steady states.

In [18] we discuss a new approach of high order well balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin finite element schemes. We show that the traditional RKDG methods can achieve the well balanced property with a small modification of either the initial value or the flux. This is by far the simplest approach to obtain a high order well balanced scheme. Very little additional computational cost over the traditional RKDG methods is involved to obtain a well balanced property. Similar ideas are then applied to obtain well balanced finite volume WENO schemes. Comparing with our previous work [17], the new approach [18] requires less computational cost, and is easier to understand and to code, at least for the RKDG methods and for the application problems with simple functions in numerical integration. For the cases we have tested, this simpler approach seems to yield comparably good numerical results.

Here, we survey the new approach of high order well balanced finite element discontinuous Galerkin methods developed in [18], and present several applications not covered in [18]. In Section 2, we describe the algorithm to construct genuine high order well-balanced RKDG schemes for the shallow water equations. In Section 3, we give several examples in applications, and indicate how the algorithm discussed in Section 2 is implemented for each of them. Concluding remarks are given in Section 4.

2 A well balanced RKDG schemes for shallow water equations

We first present the well balanced schemes for the shallow water equation. The generalization of these schemes to other balance laws will be presented in Section 3. We will show that, for one-dimensional and two-dimensional shallow water equations, the traditional high order RKDG method is indeed a well balanced

scheme for still water, based on a suitable choice of the initial value or the flux. This choice will not affect the property of the scheme, such as high order accuracy in smooth region and non-oscillatory shock resolution, and it increases the computational cost only slightly.

For the shallow water equations (3), the purpose of well balanced schemes is to preserve the still water stationary solution (5) exactly. Recall in a traditional RKDG method, U is usually approximated by the piecewise polynomial U_h , which belongs to V_h , the space of piecewise polynomials of degree at most k . (We refer to [4] for more details of the traditional RKDG methods.) Here we also project the bottom function b into the same space V_h , to obtain an approximation b_h . This implies that $h_h + b_h = \text{constant}$ if $h + b = \text{constant}$. Because the first equation $(hu)_x = 0$ is satisfied exactly for any consistent scheme since $hu = 0$, here we only concentrate on the second equation, and denote it by

$$(hu)_t + f(U)_x = g(h, b)$$

where $U = (h, hu)^T$ with the superscript T denoting the transpose.

Following the idea first introduced by Audusse et al. [1], and later used in the recent paper by Noelle et al. [10], we write our numerical scheme in the following form:

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \partial_t (hu)_h v_h dx - \int_{I_j} f(U_h) \partial_x v_h dx + \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l v_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-) - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r v_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+) = \\ \int_{I_j} g(h_h, b_h) v_h dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Comparing with the standard RKDG scheme, we can see that the single valued fluxes $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ and $\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}$ have been replaced by the left flux $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l$ and the right flux $\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r$, respectively. We can rewrite the above scheme in a new form, where the left side is the traditional RKDG scheme, and the right side is an approximation to the source term with some high order correction terms at the level of $O(\Delta x^{k+1})$. Therefore, the scheme (6) is a $(k+1)$ -th order conservative scheme and will converge to the weak solution.

In order to obtain the well balanced property, we need the residue in the scheme (6) to be zero if the still water stationary state (5) is reached. The following three conditions, *which only need to be valid for the still water stationary state*, are sufficient to guarantee this zero residue property.

- All the integrals should be calculated exactly for the still water. This can be easily achieved by using suitable Gauss-quadrature rules since h_h , b_h and v_h are polynomials in each cell I_j , hence f , g are both polynomials. Note that $(hu)_h = 0$ for the still water.
- We assume that

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l = f(U_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t)), \quad \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r = f(U_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t)) \quad (7)$$

for the still water. Note that this condition is not obvious. Later we will comment on how to make it possible for the RKDG method.

- We assume that U_h , which is the numerical approximation of U , is a steady state solution of the equation $(hu)_t + f(U)_x = g(h, b_h)$, where b_h has substituted b , hence we have $\partial_x f(U_h) = g(h_h, b_h)$.

Proposition 1: RKDG schemes which satisfy the above three conditions for the shallow water equations are exact for the still water stationary state (5).

The proof of this result is rather straightforward and can be found in [18].

We also need to comment on the limiter procedure in the discontinuous Galerkin method. To prevent the limiter procedure from destroying the preservation of $h+b = \text{constant}$, we apply the limiter procedure on the function $(h_h + b_h, (hu)_h)^T$ instead. The modified RKDG solution is then defined by $h_h^{mod} \equiv (h+b)_h^{mod} - b_h$. We can easily observe that this procedure will not destroy the conservativity of h_h , which should be maintained during the limiter process. We refer to [17, 18] for more details.

Here the only thing remaining is to check that the above three conditions are satisfied for shallow water equations. It is easy to observe that the first and third conditions are true. As presented in [18], we have two choices for the second condition.

Choice A: We define the initial value and the approximation b_h by continuous piecewise polynomials by using the idea of essentially non-oscillatory (ENO) procedure [7]. Based on the values $u_{j+\frac{1}{2}}$, we can choose suitable stencils for each individual cell I_j by an ENO procedure, and then obtain a polynomial on I_j through an interpolation. If the steady state $h_h + b_h = \text{constant}$ is reached, because b_h is continuous, we will have a continuous h_h , which makes

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = F(U_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t), U_h(x_{j+\frac{1}{2}}^+, t)) = f(U_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t)) = f(U_h(x_{j+\frac{1}{2}}^+, t)).$$

We can therefore simply define the left and right fluxes as the usual flux $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$, and it will fulfill the second condition. This makes our scheme (6) to be identical to the traditional RKDG scheme without any modification.

Choice B: This idea follows the one of Audusse et al. [1]. After computing boundary values $U_{h,j+\frac{1}{2}}^\pm$, we set

$$h_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,+} = \max\left(0, h_{h,j+\frac{1}{2}}^+ + b_{h,j+\frac{1}{2}}^+ - \max(b_{h,j+\frac{1}{2}}^+, b_{h,j+\frac{1}{2}}^-)\right) \quad (8)$$

$$h_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-} = \max\left(0, h_{h,j+\frac{1}{2}}^- + b_{h,j+\frac{1}{2}}^- - \max(b_{h,j+\frac{1}{2}}^+, b_{h,j+\frac{1}{2}}^-)\right) \quad (9)$$

and redefine the left and right values of $U_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm}$ by replacing $h_{h,j+\frac{1}{2}}^\pm$ with $h_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm}$.

Then the left and right fluxes $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l$ and $\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r$ are given by:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l = F(U_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-}, U_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,+}) + \left(\frac{0}{2}(h_{h,j+\frac{1}{2}}^-)^2 - \frac{g}{2}(h_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-})^2 \right) \quad (10)$$

$$\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r = F(U_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,-}, U_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,+}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(h_{h,j-\frac{1}{2}}^+)^2 - \frac{g}{2}(h_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,+})^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Here F is a monotone flux. It is easy to check that the second condition is satisfied. We again refer to [18] for details.

Remark 2: Choice A provides a simpler scheme with smaller computational cost, hence it would be preferred. Unfortunately, although it works well for small perturbation solutions from still water for a smooth bottom, the numerical resolution for a discontinuous bottom is not ideal. On the other hand, Choice B provides good numerical results for all the test cases we have experimented. \square

The extension of the well-balanced high order RKDG schemes to 2-D shallow water equations

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \\ (hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x + (huv)_y = -ghb_x \\ (hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_y = -ghb_y \end{cases} \quad (12)$$

with the still water stationary solution

$$h + b = \text{constant}, \quad hu = 0, \quad hv = 0, \quad (13)$$

is straightforward. This scheme can be applied on any triangulation.

The generalization of this algorithm to finite volume WENO schemes is simple. We refer to [18] for details.

3 Other applications

In this section, we generalize the high order well balanced RKDG schemes, designed in Section 2, to other balance laws. The applications are quite general and include the elastic wave equation, the hyperbolic model for a chemosensitive movement, the nozzle flow, a model of fluid mechanics, a two phase flow model and the Goldstein-Taylor model of the Boltzmann equation. Our well balanced high order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods presented in [15, 16, 17] can also be designed for these cases. We refer to [15, 16, 17] for details. Due to page limitation, only the nozzle flow, fluid mechanics model and Goldstein-Taylor model are investigated here, however our technique can also be applied to the other cases. We will not present many numerical experiment results here, and refer to [18] for such details.

3.1 A model in fluid mechanics with spherical symmetry

A classical singularity arising in fluid mechanics in case of spherical symmetry leads to the following model equation

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \frac{1}{x}u^2, \quad (14)$$

which has been considered in [3]. Notice that here the source term is a nonlinear function of u . The steady state we are interested to preserve for this problem is given by

$$\frac{u}{x} = \text{constant}.$$

First, we project the initial value to obtain u_h , and also project x to obtain x_h . Since x is a polynomial, we know that x_h is the same as x . Then, we check the three conditions in Section 2 one by one.

1: The source term can be written as: $\frac{u}{x}u$. If the steady state is reached, $\frac{u_h}{x}$ is constant and u_h is a polynomial, hence the integral of the source term can be calculated exactly. Similarly, the integral of the flux can be calculated exactly.

2: We set

$$u_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,+} = \frac{u_{h,j+\frac{1}{2}}^+}{x_{h,j+\frac{1}{2}}^+} \max(x_{h,j+\frac{1}{2}}^+, x_{h,j+\frac{1}{2}}^-) = u_{h,j+\frac{1}{2}}^+ \quad (15)$$

$$u_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-} = \frac{u_{h,j+\frac{1}{2}}^-}{x_{h,j+\frac{1}{2}}^-} \max(x_{h,j+\frac{1}{2}}^+, x_{h,j+\frac{1}{2}}^-) = u_{h,j+\frac{1}{2}}^- \quad (16)$$

Then we define the left and right fluxes as:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l &= F(u_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-}, u_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,+}) + \frac{1}{2} \left(u_{h,j+\frac{1}{2}}^-\right)^2 - \frac{1}{2} \left(u_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-}\right)^2 = F(u_{h,j+\frac{1}{2}}^-, u_{h,j+\frac{1}{2}}^+) \\ \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r &= F(u_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,-}, u_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,+}) + \frac{1}{2} \left(u_{h,j-\frac{1}{2}}^+\right)^2 - \frac{1}{2} \left(u_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,+}\right)^2 = F(u_{h,j-\frac{1}{2}}^-, u_{h,j-\frac{1}{2}}^+). \end{aligned}$$

3: We note that u_h , satisfying $\frac{u_h}{x}$, is the steady state solution of :

$$\left(\frac{u_h^2}{2}\right)_x = \frac{1}{x}u_h^2.$$

With these three conditions, we can repeat the proof of Proposition 1 to show that our new schemes are indeed well balanced and high order accurate. We can observe that the well balanced schemes for this problem are actually the traditional RKDG methods, without any modification.

Next, we present a numerical result to demonstrate the well balanced property. The initial and boundary conditions are given by

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [-5, 5] \quad (17)$$

$$u(x = -5, t) = 10, \quad u(x = 5, t) = -10. \quad (18)$$

The choice of this information allows us to compute the steady state, which is $u = -2x$. Numerical computations are performed by the well-balanced version of finite volume WENO schemes and RKDG methods. To see the benefit of well balanced schemes, we also compute with non well balanced finite volume WENO schemes and RKDG methods, and compare the results. We use 100 uniform cells here. The comparison of the convergence history, measured by the L^1 norm of the difference with the steady state, is given in Figure 1. The advantage of the well balanced schemes can be easily observed.

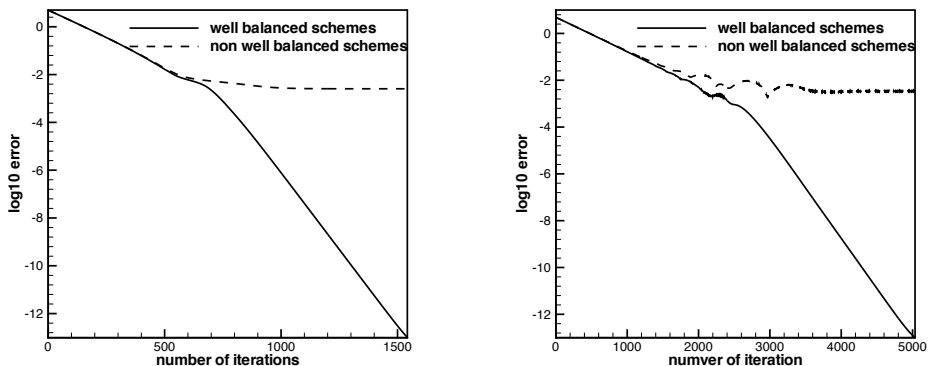


Figure 1: Comparison of the convergence history in L^1 error. Left: FV WENO schemes; right: RKDG schemes.

3.2 Nozzle flow

In this subsection we consider the balance laws for a quasi one-dimensional nozzle flow [5]. The governing equations for the quasi-one-dimensional unsteady flow through a duct of varying cross-section can be written in conservation form as:

$$\begin{cases} (\rho A)_t + (\rho u A)_x = 0 \\ (\rho u A)_t + ((\rho u^2 + p)A)_x = pA'(x) \\ (EA)_t + ((E + p)uA)_x = 0 \end{cases} \quad (19)$$

where the quantities ρ , u , p and $E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1}$ represent the density, velocity, pressure and total energy, respectively. $A = A(x)$ denotes the area of the cross section. γ is the ratio of specific heats.

As in [5], we are interested in preserving the steady state solution

$$\rho(x, t) = \bar{\rho}(x), \quad p(x, t) = \bar{p}, \quad \text{and} \quad u(x, t) = 0 \quad (20)$$

where $\bar{\rho}(x)$ is an arbitrary function in x and \bar{p} is a constant.

First, we project the initial value to obtain $U_h = ((\rho A)_h, (\rho u A)_h, (EA)_h)^T$, and also project A to obtain A_h . Then, we check the three conditions in Section 2 one by one. Only the second equation in (19) is relevant for the well balanced property.

1: If the steady state is reached, p is constant and A_h is a polynomial, hence the integral of the source term can be calculated exactly. Similarly, the integral of the flux can be calculated exactly.

2: We set

$$(EA)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,+} = \frac{(EA)_{h,j+\frac{1}{2}}^+}{A_{h,j+\frac{1}{2}}^+} \max(A_{h,j+\frac{1}{2}}^+, A_{h,j+\frac{1}{2}}^-) \quad (21)$$

$$(EA)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-} = \frac{(EA)_{h,j+\frac{1}{2}}^-}{A_{h,j+\frac{1}{2}}^-} \max(A_{h,j+\frac{1}{2}}^+, A_{h,j+\frac{1}{2}}^-), \quad (22)$$

and similarly, we can define $(\rho A)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm}$. Then we redefine the left and right values of U as:

$$U_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm} = \begin{pmatrix} (\rho A)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm} \\ (\rho u A)_{h,j+\frac{1}{2}}^{\pm} \\ (EA)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm} \end{pmatrix} \quad (23)$$

At last, we define the left and right fluxes as:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l = F(U_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-}, U_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,+}) + \begin{pmatrix} 0 \\ (pA)_{h,j+\frac{1}{2}}^- - (pA)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,-} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

$$\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^r = F(U_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,-}, U_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,+}) + \begin{pmatrix} 0 \\ (pA)_{h,j-\frac{1}{2}}^+ - (pA)_{h,j-\frac{1}{2}}^{*,+} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

where $(pA)_{h,j+\frac{1}{2}}^-$ and $(pA)_{h,j+\frac{1}{2}}^{*,\pm}$ are calculated by the relationship between pA and EA , ρA , $\rho u A$.

3: We note that U_h , satisfying $u_h \equiv 0$ and $p = \text{constant}$, is the steady state solution of :

$$((\rho u^2 + p)A_h)_x = pA'_h(x).$$

With these three conditions, we can repeat the proof of Proposition 1 to show that our new schemes are indeed well balanced and high order accurate.

The limiter procedure is performed similarly as in Section 2. We refer to [17, 18] for more details.

3.3 Goldstein-Taylor model of the Boltzmann equation

In the kinetic theory of rarefied gases classically described by the Boltzmann equation, the following two velocity model [6] is frequently used to describe the evolution of the density distribution of a fictitious gas made of two kinds of particles. Both of them move with equal speed parallel to the x-axis, either in the positive direction with a density u , or in the negative one with a density v . This model takes the form:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon^2} (v - u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon^2} (u - v) \end{cases}. \quad (26)$$

The steady state we are interested to preserve for this problem is given by

$$u - v = \text{constant } c, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon} c.$$

First, we project the initial value to obtain u_h . Then, we check the three conditions in Section 2 one by one. Both equations in (26) need to be considered for the well balanced property.

1: If the steady state is reached, $u_h - v_h$ and ϵ are both constant, hence the integral of the source term can be calculated exactly. Similarly, the integral of the flux can be calculated exactly.

2: If the steady state is reached, both u and v are linear functions. Hence their approximations u_h and v_h in the space V_h are exactly the same as them. We know the fact $U_{h,j+\frac{1}{2}}^- = U_{h,j+\frac{1}{2}}^+$ and

$$F(U_{h,j+\frac{1}{2}}^-, U_{h,j+\frac{1}{2}}^+) = f(U_{h,j+\frac{1}{2}}^-) = f(U_{h,j+\frac{1}{2}}^+).$$

From these facts, we can define

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^l = \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^r = F(U_{h,j+\frac{1}{2}}^-, U_{h,j+\frac{1}{2}}^+).$$

and prove that the second condition in Section 2 is satisfied.

3: We note that u_h and v_h are the steady state solution of :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u_h}{\partial x} &= \frac{1}{\epsilon^2} (v_h - u_h) \\ -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v_h}{\partial x} &= \frac{1}{\epsilon^2} (u_h - v_h). \end{aligned}$$

With these three conditions, we can repeat the proof of Proposition 1 to show that our schemes are indeed well balanced and high order accurate.

4 Concluding remarks

Two different approaches of well balanced high order finite volume WENO schemes and finite element discontinuous Galerkin schemes can be designed for a class of hyperbolic systems, including the shallow water equations, the elastic wave equation, the hyperbolic model for a chemosensitive movement, the nozzle flow, a model in fluid mechanics, the Goldstein-Taylor model of the Boltzmann equation and a two phase flow model. The key idea of the first approach is a suitable decomposition of source terms [15, 16, 17], and the second approach relies on the exact calculation of the integral and special treatment of the flux term [18]. These schemes maintain properties of the exact preservation of the balance laws for certain steady state solutions, the non-oscillatory property for general solutions with discontinuities, and the genuine high order accuracy in smooth regions. The generalization of these techniques to treat more general PDEs and more general steady state solutions constitutes an ongoing work.

References

- [1] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M.-O. BRISTEAU, R. KLEIN AND B. PERTHAME, *A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic*

- reconstruction for shallow water flows*, SIAM Journal on Scientific Computing, 25 (2004), pp.2050-2065.
- [2] A. BERMUDEZ AND M.E. VAZQUEZ, *Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms*, Computers and Fluids, 23 (1994), pp.1049-1071.
- [3] R. BOTCHORISHVILI, B. PERTHAME AND A. VASSEUR, *equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources*, Mathematics of Computation, 72 (2003), pp.131-157. Also, an extended version containing more numerical examples is located at <http://www.inria.fr/rrrt/rr-3891.html>
- [4] B. COCKBURN, *An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems*, in *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, B. Cockburn, C. Johnson, C.-W. Shu and E. Tadmor (Editor: A. Quarteroni), Lecture Notes in Mathematics, volume 1697, Springer, 1998, pp.325-432.
- [5] L.I. GASCÓN AND J.M. CORBERÁN, *Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, 172 (2001), pp.261-297.
- [6] L. GOSSE AND G. TOSCANI, *An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations*, Comptes Rendus Mathematique, 334 (2002), pp.337-342.
- [7] A. HARTEN, B. ENGQUIST, S. OSHER AND S. CHAKRAVATHY, *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III*, Journal of Computational Physics, 71 (1987), pp.231-303.
- [8] A. KURGANOV AND D. LEVY, *Central-upwind schemes for the Saint-Venant system*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 36 (2002), pp.397-425.
- [9] R.J. LEVEQUE, *Balancing source terms and flux gradients on high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm*, Journal of Computational Physics, 146 (1998), pp.346-365.
- [10] S. NOELLE, N. PANKRATZ, G. PUPPO AND J.R. NATVIG, *Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows*, Journal of Computational Physics, to appear.
- [11] B. PERTHAME AND C. SIMEONI, *A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term*, Calcolo, 38 (2001), pp.201-231.
- [12] T.C. REBOLLO, A.D. DELGADO AND E.D.F. NIETO, *A family of stable numerical solvers for the shallow water equations with source terms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192 (2003), pp.203-225.

- [13] G. RUSSO, *Central schemes for balance laws*, Proceedings of the VIII International Conference on Nonlinear Hyperbolic Problems, Magdeburg, 2000.
- [14] S. VUKOVIC AND L. SOPTA, *ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations*, Journal of Computational Physics, 179 (2002), pp.593-621.
- [15] Y. XING AND C.-W. SHU, *High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations*, Journal of Computational Physics, 208 (2005), pp.206-227.
- [16] Y. XING AND C.-W. SHU, *High order well-balanced finite difference WENO schemes for a class of hyperbolic systems with source terms*, Journal of Scientific Computing, to appear.
- [17] Y. XING AND C.-W. SHU, *High order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms*, Journal of Computational Physics, to appear.
- [18] Y. XING AND C.-W. SHU, *A new approach of high order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms*, Communications in Computational Physics, 1 (2006), pp.100-134.
- [19] J.G. ZHOU, D.M. CAUSON, C.G. MINGHAM AND D.M. INGRAM, *The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations*, Journal of Computational Physics, 168 (2001), pp.1-25.

Recent developments in the theory of homogenization for fully nonlinear first and second-order pde in random environments*

PANAGIOTIS E. SOUGANIDIS

Department of Mathematics
University of Texas at Austin
Austin, Texas, USA

Introduction

In this note I outline several recent developments in the theory of homogenization for fully nonlinear first and second-order partial differential equations in stationary ergodic media. The general problem is the almost sure (for short a.s.) behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the solution u^ε of equations of the general form

$$\begin{cases} F\left(D^2u^\varepsilon, \varepsilon D^2u^\varepsilon, Du^\varepsilon, u^\varepsilon, x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = 0 & \text{in } U, \\ u^\varepsilon = g & \text{on } \partial U, \end{cases} \quad (1)$$

where F and g satisfy all the necessary assumptions for (1) to have, for each $\varepsilon > 0$ and $\omega \in \Omega$, the underlying probability space, a unique viscosity solution $u^\varepsilon(\cdot, \omega) \in C(\bar{U})$, and, in addition,

F is stationary with respect to (y, ω) , where y denotes the fast variable x/ε , and the underlying measure preserving transformation

$$\tau_y : \Omega \rightarrow \Omega \text{ is ergodic.}$$

Recall that a stochastic process is stationary, if its distribution as a random variable is independent of the location. A measure preserving transformation is ergodic, if all translation invariant subsets of Ω have probability either zero or one.

Stationary ergodic media is rather general. The classical periodic and almost periodic settings can be thought of as special cases. The general

*Partially supported by the National Science Foundation.

setting, however, includes other configurations like random checkerboards with arbitrarily small or large tiles.

The goal is to show that there exists an effective first- or second-order (depending on the particular form of F in (1)) nonlinearity \bar{F} such that, if $\bar{u} \in C(\bar{U})$ solves

$$\begin{cases} \bar{F}(D^2\bar{u}, D\bar{u}, \bar{u}, x) = 0 & \text{in } U, \\ \bar{u} = g & \text{on } \partial U, \end{cases}$$

then, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and a.s. in ω , $u_\varepsilon(\cdot, \omega) \rightarrow \bar{u}$ in $C(\bar{U})$.

The homogenization results concerning (1) have direct applications to the theories of front propagation, large deviations of diffusion processes and percolation, all in stationary ergodic random media.

There is an extensive literature about homogenization in the periodic setting for equations like (1) and their generalizations. Most of the results are based on the fact that it is possible to solve an associated macroscopic problem, which is set in the periodic cell and is, hence, known as the cell problem. In the almost periodic and random settings the macroscopic problem is set in the whole space. The inherited lack of compactness then creates several problems. Indeed to guarantee the uniqueness of the effective \bar{F} , it is necessary for the solutions of the macroscopic problem to be, depending on the particular problem, strictly sub- either linear or quadratic at infinity. This is in general not possible. In the almost periodic case this difficulty can be overcome using the fact that such a setting is essentially compact. Exact solutions of the macroscopic problems can be replaced by approximate ones. The situation is, however, quite different in the general random setting. In general, it is not possible to solve either exactly or approximately the macroscopic problem. To overcome this very serious difficulty, it is necessary to develop and follow a different strategy which makes use of the ergodic theorem and its nonlinear version (the sub-additive ergodic theorem).

Papanicolaou and Varadhan [PV1], [PV2] and Kozlov [K], Zhikov [4], and Yurinskii [Y1], [Y2] (see also [JKO]) were the first to consider the problem of homogenizing linear, uniformly elliptic/parabolic operators. The first nonlinear result in the variational setting was obtained by Dal Maso and Modica [DM]. The homogenization of fully nonlinear, convex, first-order (Hamilton-Jacobi) equations was considered by the author in [So1] and Rezakhanlou and Tarver [RT]. Lions and the author [LS3] studied the homogenization of, possibly degenerate, “viscous” Hamilton-Jacobi equations. Kosygina, Rezakhanlou and Varadhan [KRV] studied the same problem but in the uniformly elliptic/parabolic setting. Lions and the author showed in [LS1] and [LS3] that the associated macroscopic problems do not have, in general, solutions. The homogenization of fully nonlinear, uniformly elliptic equations was studied by Caffarelli, Souganidis, and Wang [CSW]. Finally, recently Caffarelli and the author [CS] obtained uniform error estimates for the homogenization of uniformly elliptic equations provided the media is strongly mixing.

This note is organized as follows: In Section 1, I review briefly the basic nonlinear homogenization theory in the periodic and almost periodic settings and discuss the main differences with and difficulties for the random settings. In Section 2, I present the main results, but, to keep the presentation short, I only discuss some simple cases. In Section 3, I discuss some applications. Several open problems are mentioned in Section 4.

1 The periodic/almost periodic homogenization

Consider for simplicity the problem

$$u^\varepsilon + H\left(Du^\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}\right) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

where $H \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ and $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ satisfy the usual assumptions in the theory of viscosity solution (see [CrIL]) and

H is coercive, i.e. $H(p, y) \rightarrow +\infty$ as $|p| \rightarrow \infty$ uniformly in y .

A formal expansion of the form

$$u^\varepsilon(x) = \bar{u}(x) + \varepsilon v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2)$$

leads to the problem

$$\bar{u} + H\left(D\bar{u} + Dv, \frac{x}{\varepsilon}\right) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

The goal is to find v such that the above equation becomes independent of x/ε . Since $D_x \bar{u}$ may be arbitrary, this leads to the following macroscopic problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For each } p \in \mathbb{R}^N \text{ find a unique constant } \bar{H}(p) \text{ such that there exists} \\ v \in C(\mathbb{R}^N) \text{ satisfying } |y|^{-1}v(y) \rightarrow 0 \text{ as } |y| \rightarrow \infty, \text{ and solving} \\ H(p + Dv, y) = \bar{H}(p) \text{ in } \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

The macroscopic problem can be thought heuristically as a nonlinear eigenvalue problem with $\bar{H}(p)$ the eigenvalue and v the eigenvector.

The strictly sublinear growth condition on v , which is necessary in order to guarantee the uniqueness of the constant $\bar{H}(p)$ is, of course, no issue in the periodic setting, since v turns out to be periodic. It is, however, a problem in the almost periodic/random cases, where, if v exists, Dv turns out to be almost periodic/stationary gradient with mean 0. It follows that v has the correct growth at infinity but is not necessarily almost periodic/stationary.

To illustrate this point it is instructive to review how one finds such \bar{H} and v . The first step is to consider an approximation of the problem. The most commonly used is

$$\alpha v_\alpha + H(p + Dv_\alpha, y) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

which admits a unique solution $v_\alpha \in BUC(\mathbb{R}^N)$, which has the same self-averaging properties as the media. Elementary considerations and the coercivity of H yield immediately the bounds

$$\sup_{\alpha > 0} (\alpha \|v_\alpha\| + \|Dv_\alpha\|) < \infty . \quad (2)$$

Consider next the function

$$\hat{v}_\alpha(y) = v_\alpha(y) - v_\alpha(0),$$

which solves the problem

$$\alpha \hat{v}_{\alpha_n} + H(Dv_{\alpha_n} + p, y) = -\alpha v_{\alpha_n}(0) \text{ in } \mathbb{R}^N .$$

The bounds above and yield that

$$\sup_{\alpha > 0} [(1 + |y|)^{-1} \hat{v}_\alpha + \|D\hat{v}_\alpha\|] < \infty .$$

It follows that, along subsequences $\alpha_n \rightarrow 0$, $\hat{v}_{\alpha_n} \rightarrow \hat{v}$ in $C(\mathbb{R}^N)$ and $-\alpha_n v_{\alpha_n}(0) \rightarrow \lambda$. The stability properties of the viscosity solutions imply that \hat{v} solves

$$H(D\hat{v} + p, y) = \lambda \text{ in } \mathbb{R}^N .$$

If \hat{v} is strictly sublinear at infinity – recall that v is periodic if H is periodic in y and, hence, \hat{v}_α is bounded – implies that there exists a unique such constant $\lambda = \bar{H}(p)$.

Once the cell problem is solved, the actual homogenization result is proved using the so-called perturbed test function method which was developed in the context of viscosity solutions by Evans in [E1], [E2].

As already mentioned earlier, once the periodicity assumption is removed, things can become rather different. Indeed, consider the macroscopic problem

$$|v'| = 2 - \cos y - \cos(\alpha y) + \bar{H}(0) ,$$

with α irrational. Elementary considerations imply that, if there exists a solution, $\bar{H}(0) = 0$.

The key property of this example is that the right hand side is strictly positive except for $y = 0$. The theory of viscosity solutions, however, yields that if

$$|v'| = f$$

with $f > 0$ for $|x| \geq R$, then v must be monotone in $|x| \geq R$.

In the case at hand, this observation yields that

$$v(y) = v(0) \pm \sin |y| \pm \frac{\sin \alpha |y|}{\alpha} \pm 2|y| ,$$

and, clearly,

$$|y|^{-1} v(y) \rightarrow \pm 2 .$$

In spite of this difficulty, in the almost periodic setting it is possible to use the perturbed test function method by replacing exact correctors by approximate ones (see [I], [LS3]). Their existence is equivalent to showing that, as $\alpha \rightarrow 0$,

$$\alpha v_\alpha \rightarrow -\bar{H}(p) \text{ uniformly in } \mathbb{R}^N .$$

Such a uniform limit does not hold, however, in the random case, as it is shown by the examples in [LS1], [LS3].

2 The results for random homogenization

The first problem is the viscous-Hamilton-Jacobi equation

$$-\varepsilon \operatorname{tr} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) D^2 u_\varepsilon + H\left(Du_\varepsilon, x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) + u_\varepsilon = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N$$

where the symmetric $N \times N$ matrix A and the Hamiltonian H are stationary ergodic and in addition

A is degenerate elliptic and H is coercive and convex.

Since A is assumed to be degenerate elliptic, the next theorem yields as a special case the homogenization of Hamilton-Jacobi equations of the form

$$H\left(Du_\varepsilon, x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) + u_\varepsilon = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N .$$

The main result is

Theorem 1 *There exists $\bar{H} \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ coercive and convex such that, if \bar{u} is the solution of $\bar{H}(D\bar{u}, x) + \bar{u} = 0$ in \mathbb{R}^N , then, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and a.s. in ω , $u_\varepsilon(\cdot, \omega) \rightarrow \bar{u}$ in $C(\mathbb{R}^N)$. Moreover,*

$$\bar{H}(p, x) = \inf \sup \left[-\varepsilon \operatorname{tr} A(y, \omega) D^2 \phi + H(D\phi + p, y, x, \omega) \right],$$

where the sup is taken over \mathbb{R}^N and the inf is taken over all Lipschitz continuous $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ such that $D\phi$ is stationary and has mean zero.

The proof of the theorem is based strongly on the (stochastic) control interpretation of the problem, which is available in view of the convexity assumption on H , and a judicious use of the (sub-additive) ergodic theorem. When A is uniformly elliptic, it is possible to obtain another formula for \bar{H} and use only the ergodic theorem. (see [KRV]). It should be noted that convexity plays absolutely no role in the periodic/almost periodic settings. What happens without convexity in the random setting is an open problem.

Consider next the problem

$$F\left(D^2 u_\varepsilon, Du_\varepsilon, x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N$$

where

F is stationary ergodic and uniformly elliptic.

The main result is

Theorem 2 *There exists \bar{F} uniformly elliptic $\bar{F} \in C(S^N \times \bar{U})$ such that if $\bar{u} \in C(S^N, \bar{U})$ is the solution of $\bar{F}(D^2\bar{u}, x) = 0$ in U and $\bar{u} = g$ on ∂U , then, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and a.s. in ω , $u_\varepsilon(\cdot, \omega) \rightarrow \bar{u}$ in $C(\bar{U})$. If F is strongly mixing with algebraic rate, then*

$$\|u_\varepsilon - \bar{u}\|_{C(\bar{U})} = O(\varepsilon^{-1/\varepsilon})$$

The proof of Theorem 2 is completely different than the one of Theorem 5. It is based on identifying all the level sets of \bar{F} , i.e. for each level $c \in \mathbb{R}$, all the symmetric $N \times N$ matrices Q such that $\bar{F}(Q) \leq c$ or $\bar{F}(Q) \geq c$. This is accomplished using the obstacle problem with quadratical obstacles and studying the ergodic properties of the contact set.

3 Applications

The first application concerns motion of interfaces in random media. A typical problem is the evolution of the boundary Γ_t of an open subset Ω_t of \mathbb{R}^N with velocity, in the direction of the normal vector n , given by

$$V = -\varepsilon \delta \operatorname{tr} Dn + v \left(n, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Using the level set formulation for generalized front propagation the problem reduces to the study of the a.s. behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the solution $u^\varepsilon(\cdot, \omega)$ of the corresponding level set pde

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \varepsilon \delta \operatorname{tr}(I - \widehat{D}u^\varepsilon \otimes \widehat{D}u^\varepsilon) D^2 u^\varepsilon + v \left(\widehat{D}u^\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}, \omega \right) |Du^\varepsilon| = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon = u_0 & \text{on } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \quad (3)$$

where $\Omega_0 = \{u_0 > 0\}$ and, for $p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\hat{p} = |p|^{-1}p$.

There is no known asymptotic result in the random case for (3) if $\delta \neq 0$. The reason is that, in view of the dependence on the gradient, the results of [LS3] do not apply here. The behavior of (3) for $\delta > 0$ in the periodic/almost periodic setting was analyzed by Lions and the author in [LS3]. More recently, Cardaliaguet, Lions and Souganidis [CaLS] looked at special cases of (3) and studied in detail what happens when the assumptions of [LS3] are not satisfied.

The only known result in the random case obtained in [So1], [LS1] is

Theorem 3 *Let $\delta = 0$. Assume that the map $p \mapsto v(\hat{p}, y)|p|$ is convex and $|v| \geq v_0 > 0$. There exists a convex $\bar{H} \in C(\mathbb{R}^N)$ such that, if $u \in UC(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$ is the unique solution of $\bar{u}_t + \bar{H}(D\bar{u}) = 0$ in $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ with $\bar{u} = u_0$ on $\mathbb{R}^N \times \{0\}$, then, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and a.s. in ω , $u^\varepsilon(\cdot, \omega) \rightarrow \bar{u}$ in $C(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$. In particular, as $\varepsilon \rightarrow 0$, and a.s. in ω , $\Gamma_t^\varepsilon \rightarrow \bar{\Gamma}_t$ in the Hausdorff metric, where $\bar{\Gamma}_t$ is moving with normal velocity $V = -\bar{H}(n)$.*

The next example is about large deviations of diffusion processes in random environments. This is a very general topic, which cannot be discussed in any

generality here. Instead I present a special case. Giving any references is beyond the scope of this note.

Consider the diffusion process $(X_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ which evolves according to the sde

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = b\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}, \omega\right) + \sqrt{2\varepsilon}\Sigma\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}, \omega\right) dB_t & (t > 0), \\ X_0^\varepsilon = x, \end{cases}$$

where $(B_t)_{t \geq 0}$ is a standard M -dimensional Brownian motion on a different probability space (Ω_0, F_0, P_0) , b is a Lipschitz continuous stationary ergodic vector field and Σ is a Lipschitz continuous and stationary ergodic $N \times M$ matrix.

The media is modeled by the stationary ergodic potential $V : \mathbb{R}^N \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ and the behavior of the diffusion is governed by the weighted probability

$$Q_{t,\omega}^\varepsilon(d\omega_0) = S_{t,\omega}^{-1} \exp\left\{-\varepsilon^{-1} \int_0^t V\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}, \omega\right)\right\} P_0(d\omega_0),$$

where $S_{t,\omega}$ is a normalizing factor.

To formulate a typical large deviations result it is necessary to consider, for $v_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$, the initial value problem

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon - \varepsilon \operatorname{tr}(\Sigma \Sigma^T)\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) D^2 v^\varepsilon + H(Du^\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}, \omega) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ v^\varepsilon = v_0 & \text{on } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases}$$

where, for $(p, y, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \Omega$,

$$H(p, y, \omega) = \operatorname{tr}((\Sigma \Sigma^T)(y, \omega) p \otimes p) - b(y, \omega) \cdot p - V(y, \omega). \quad (4)$$

Theorem 1 applied to this equation yields the existence of $\bar{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ such that, if $\bar{v} \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$ solves $\bar{v}_t + \bar{H}(D\bar{v}) = 0$ in $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ with $\bar{v} = v_0$ on \mathbb{R}^N , then, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and a.s. in ω , $v^\varepsilon \rightarrow \bar{v}$ in $C(\mathbb{R}^N)$.

As a consequence the following large deviation principle holds.

Theorem 4 *Let \bar{L} be the convex dual of the effective Hamiltonian \bar{H} corresponding to (4). For any Borel subset A of \mathbb{R}^N with interior A^0 and a.s. in ω ,*

$$\begin{aligned} -t \inf_{A^0} \bar{L}(t^{-1}(x - y)) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log Q_{t,\omega}(X_t^\varepsilon \in A) \\ &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log Q_{t,\omega}(X_t^\varepsilon \in A) \leq -t \inf_{y \in A} [\bar{L}(t^{-1}(x - y)).] \end{aligned}$$

The last application presented here is related to combustion and the propagation of fronts arising as asymptotic limits of reaction-diffusion equations in a random environment. The particular problem of interest is the a.s. asymptotics, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the solution u^ε of the KPP-type equation

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - L^\varepsilon u^\varepsilon = \frac{f(u^\varepsilon, \frac{x}{\varepsilon}, \omega)}{\varepsilon} & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u^\varepsilon = g & \text{on } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases}$$

Here L^ε is a general second order uniformly elliptic operator

$$L^\varepsilon v = -\varepsilon \operatorname{tr} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) D^2 v + b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \cdot Dv ,$$

with the Lipschitz continuous degenerate elliptic $N \times N$ symmetric matrix A and the Lipschitz continuous vector field b stationary.

The nonlinearity f is assumed to be of KPP-type, i.e.,

$$\begin{cases} f(0, y, \omega) = f(1, y, \omega) = 0 \text{ and } f(u, y, \omega) > 0 \text{ if } u \in (0, 1) , \text{ and} \\ f(u, y, \omega) \leq c(y, \omega)u \text{ with } c(y, \omega) = f_u(0, y, \omega) . \end{cases}$$

The result is:

Theorem 5 *There exists \bar{H} such that, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and a.s. in ω , locally uniformly in $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ and exponentially fast,*

$$u^\varepsilon(x, t, \omega) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{in } \operatorname{int}\{\bar{v} = 0\} , \\ 0 & \text{in } \{\bar{v} > 0\} , \end{cases}$$

where \bar{v} is the unique viscosity solution of

$$\begin{cases} \min[\bar{v}_t + \bar{H}(D\bar{v}, x), \bar{v}] = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) , \\ \bar{v} = \begin{cases} 0 & \text{in } G , \\ +\infty & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \bar{G} . \end{cases} \end{cases}$$

4 Open problems

There are several open problems. Among them are the role convexity is necessary for homogenization of (viscous) Hamilton-Jacobi equations, the homogenization of quasilinear “viscous” Hamilton-Jacobi equations with gradient dependent A , a problem which is important to study mean curvature in random environments, the existence of correctors in the general uniformly elliptic cases, the study of boundary value problems with oscillating Neumann boundary conditions, a problem which is, in general, open even in the periodic setting, the free boundary problems in random media, etc. homogenization of degenerate second order equations,..

References

- [CaLS] P. Cardaliaguet, P. -L. Lions and P. E. Souganidis, in preparation.
 [CS] L. A. Caffarelli and P.E. Souganidis, in preparation.

- [CSW] L.A. Caffarelli, P.E. Souganidis and L. Wang, *Stochastic homogenization for fully nonlinear, second-order partial differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 3, 319-361.
- [CrIL] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.
- [DM] G. Dal Maso and L. Modica, *Nonlinear stochastic homogenization and ergodic theory*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 28-42.
- [E1] L.C. Evans, *The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE*. Proc. Roy. Soc. Edinb. A **111** (1989), 359-375.
- [E2] L.C. Evans, *Periodic homogenization of certain fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **120A** (1992), 245-265.
- [I] H. Ishii, *Homogenization of the Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equations*, Stoch. Analysis, Control, Optimization and Applications, 305-324. Systems and Control Foundations and Applications, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [JKO] V.V. Jikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functions*, Springer Verlag (1991).
- [KRV] E. Kosygina, F. Rezakhanlou and S.R.S. Varadhan, *Stochastic homogenization for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Comm. Pure Appl. Math., in press.
- [K] S.M. Kozlov, *The method of averaging and walk in inhomogeneous environments*, Russian Math. Surveys **40** (1985), 73-145.
- [LS1] P.-L. Lions and P.E. Souganidis, *Correctors for the homogenization of Hamilton-Jacobi equations in a stationary ergodic setting*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), no. 10, 1501-1524.
- [LS2] P.-L. Lions and P.E. Souganidis, *Homogenization of degenerate second-order PDE in periodic and almost periodic environments and applications*. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **22** (2005), no. 5, 667-677.
- [LS3] P.-L. Lions and P.E. Souganidis, *Homogenization for "viscous" Hamilton-Jacobi equations in stationary, ergodic media*. Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 1-3, 335-376.
- [PV1] G. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan, *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients*, Proceed. Colloq. on Random Fields, Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory, J. Fritz, J.L. Lebaritz, D. Szasz (editors), Colloquia Mathematica Societ. Janos Bolyai **10** (1979), 835-873.

- [PV2] G. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan, *Diffusion with random coefficients*, Essays in Statistics and Probability (P.R. Krishnaiah, ed.), North Holland Publishing Company, 1981.
- [RT] F. Rezakhanlou and J. Tarver, *Homogenization for stochastic Hamilton-Jacobi equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **151** (2000), 277–309.
- [So1] P. E. Souganidis, *Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi equations and some applications*, Asympt. Anal. **20** (1999), 1–11.
- [Y1] V. V. Yurinskii, *On the homogenization of boundary value problems with random coefficients*, Sibir. Matem. Zh. **21** (3) (1980), 209–223 (English transl.: Siber. Math. J. **21** (1981), 470–482).
- [Y2] V. V. Yurinskii, *On the homogenization of non-divergent second order equations with random coefficients*, Sibir. Matem. Zh. **23** (2) (1982), 176–188. (English transl.: Siber. Math. J. **23** (1982), 276–287).
- [Z] V. V. Zhikov, *Asymptotic problems related to a second-order parabolic equation in nondivergence form with randomly homogeneous coefficients. (Russian)* Differentsialnye Uravneniya 29 (1993), no. 5, 859–869, 919; translation in Differential Equations 29 (1993), no. 5, 735–744.

Sesión monográfica de
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Coordinadores: JUAN LUIS VÁZQUEZ, ARTURO DE PABLO

Participantes:
XAVIER CABRÉ
ANÍBAL RODRÍGUEZ-BERNAL
JULIO D. ROSSI

Regularity of radial extremal solutions of semilinear elliptic equations*

XAVIER CABRÉ

ICREA and Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Matemàtica Aplicada 1, Barcelona, Spain

xavier.cabre@upc.edu

1 Introduction

This note reports on a recent work of Cabré and Capella [6] concerning a special class of radial solutions of semilinear elliptic equations. It is the class of semi-stable solutions, which includes local minimizers, minimal solutions, extremal solutions, and also certain solutions found between a sub and a supersolution.

Consider the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a smooth bounded domain, and $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is locally Lipschitz. Given a weak solution (a notion described below, in next section) u of (1), consider the quadratic form

$$Q_u(\varphi) := \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 - g'(u)\varphi^2, \quad (2)$$

with φ a C^∞ function with compact support in Ω . Note that Q_u corresponds to the second variation of the energy associated to (1).

We say that u is semi-stable if $Q_u(\varphi) \geq 0$ for all such φ . If u is bounded, this is equivalent to the nonnegativeness of the first eigenvalue in Ω of the linearized problem $-\Delta - g'(u)$ of (1) at u .

In [6] we establish sharp pointwise, L^q , and $W^{k,q}$ estimates for semi-stable radial solutions. One of our results is the following (below, in Theorem 5 we state further estimates).

*Supported by grant BFM2002-04613-C03-01

Theorem 1 ([6]) *Let $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be locally Lipschitz and $u \in H_0^1(B_1)$ be a semi-stable radially decreasing weak solution of (1) with $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^n$ (the unit ball).*

If $n \leq 9$, then $u \in L^\infty(B_1)$. In addition, if $g \geq 0$ and $n \leq 9$, then $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)}$ for some constant C_n depending only on n .

The theorem holds for every locally Lipschitz nonlinearity, and hence the result goes beyond the usual regularity given by the Sobolev critical exponent. What is used here to gain regularity is the semi-stability property of the weak solution u (together with the assumption that u is radial and $u \in H_0^1$). The theorem does not hold for unstable solutions. In addition, the condition $n \leq 9$ is optimal. A similar result in the nonradial case is still open. See next section and [6] for more details on all these comments.

The precise semi-stability hypothesis of Theorem 1 is that $Q_u(\varphi) \geq 0$ for all C^∞ function φ with compact support in $B_1 \setminus \{0\}$. Since a priori u could be unbounded at the origin, this guarantees that $Q_u(\varphi)$ is well defined.

The class of *semi-stable solutions* of (1) in general Ω contains the following three interesting types of solutions (see [6] for more details):

- *Local minimizers of the energy.* A local minimizer is a function that minimizes the energy in a $C_0^1(\Omega)$ neighborhood around it (i.e., a minimizer under every small enough C^1 perturbation vanishing on $\partial\Omega$). In the radial case, to include weak solutions possibly unbounded at the origin, we consider local minimizers under small perturbations with compact support in $B_1 \setminus \{0\}$; see Definition 1.2 and Theorem 1.3 of [6] for more details on this.

- *Absolute minimizers between a subsolution and a supersolution.* Given a subsolution \underline{u} and a supersolution \bar{u} of (1) with $\underline{u} < \bar{u}$, there exists at least one absolute minimizer u of the energy in the convex set of functions lying between \underline{u} and \bar{u} . By the strong maximum principle, such function u is a solution of (1). One also has that u is a semi-stable solution (see Remark 1.11 of [6]).

Here, note that u could be identically equal to \bar{u} , for instance. In such case, u is a one-sided minimizer of the energy (but not necessarily a local minimizer as in the previous example). Since $\underline{u} < u \equiv \bar{u}$, for $\varphi \leq 0$ the perturbed function $u + \varepsilon\varphi$ lies between \underline{u} and \bar{u} . By minimality, we deduce $Q_u(\varphi) \geq 0$ for $\varphi \leq 0$. Then, decomposing every φ into its positive and negative parts, one concludes $Q_u(\varphi) \geq 0$ for all φ —that is, the semi-stability of u .

- *Minimal and extremal solutions.* As we will see, this is indeed a subclass of the previous class formed by absolute minimizers between a subsolution and a supersolution. Minimal and extremal solutions motivated our work and we describe them next (see [4] for a more detailed survey on this topic). We put emphasis on the regularity of the extremal solution, both in general domains and in the radial case. As we will see below, [6] gives optimal regularity results for radial extremal solutions.

2 Minimal and extremal solutions

Consider the semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3_\lambda)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a smooth bounded domain, $n \geq 2$, $\lambda \geq 0$, and the nonlinearity $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$f \text{ is } C^1, \text{ increasing and convex, } f(0) > 0, \text{ and } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty. \quad (4)$$

Since $f > 0$, we consider nonnegative solutions of (3_λ) . The cases $f(u) = e^u$ and $f(u) = (1+u)^p$, with $p > 1$, are classical examples of such nonlinearities.

It is well known that there exists a parameter λ^* with $0 < \lambda^* < \infty$, called the extremal parameter, such that if $0 \leq \lambda < \lambda^*$ then (3_λ) has a minimal classical solution u_λ . On the other hand, if $\lambda > \lambda^*$ then (3_λ) has no classical solution. Here, classical means bounded, while minimal means smallest.

The set $\{u_\lambda ; 0 \leq \lambda < \lambda^*\}$ forms a branch of solutions increasing in λ . Moreover, every solution u_λ is *stable*, in the sense that the first Dirichlet eigenvalue of the linearized problem at u_λ is positive:

$$\mu_1\{-\Delta - \lambda f'(u_\lambda); \Omega\} > 0.$$

In particular, for the quadratic form associated to the linearized problem we have $Q_{u_\lambda}(\varphi) \geq 0$ for all $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Recall that Q_{u_λ} is given by (2) with $g'(u)$ replaced here by $\lambda f'(u_\lambda)$. This condition, that above we have called semi-stability, is equivalent to $\mu_1 \geq 0$, where μ_1 is the first eigenvalue of the linearized problem as above.

The existence of the branch $\{u_\lambda ; 0 \leq \lambda < \lambda^*\}$ can be proved using the Implicit Function Theorem (starting from $\lambda = 0$). The solution u_λ may also be obtained by the monotone iteration procedure, with $0 < \lambda < \lambda^*$ fixed, starting from $u \equiv 0$ (note that $u \equiv 0$ is a strict subsolution of the problem). This is the reason why u_λ is the minimal solution, i.e., it is smaller than every other solution or supersolution of (3_λ) .

As a consequence, u_λ must coincide with the absolute minimizer of the energy in the closed convex set of functions lying between 0 (a strict subsolution) and u_λ (since there is no other solution smaller than u_λ). In particular, by the discussion in Section 1 on this type of minimizers, u_λ must be a semi-stable solution—something that we already knew, but that here is seen as a consequence of being the minimal or smallest solution.

The increasing limit of u_λ as $\lambda \uparrow \lambda^*$ is called the *extremal solution* u^* . It is proved in [2] that u^* is a weak solution of (3_λ) for $\lambda = \lambda^*$ in the following sense. We say that u is a weak solution of (3_λ) if $u \in L^1(\Omega)$, $f(u)\delta \in L^1(\Omega)$, and $-\int_\Omega u \Delta \zeta = \int_\Omega \lambda f(u)\zeta$ for all $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ with $\zeta = 0$ on $\partial\Omega$, where $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ denotes the distance to the boundary of Ω .

The extremal solution u^* is semi-stable (this simply follows by monotone convergence from the semi-stability of u_λ for $\lambda < \lambda^*$). u^* may be classical or singular depending on each problem. For instance, when $f(u) = e^u$ we have:

Theorem 2 ([8, 10, 9]) *Let u^* be the extremal solution of (3_λ) .*

- (i) *If $f(u) = e^u$ and $n \leq 9$, then $u^* \in L^\infty(\Omega)$ (i.e., u^* is classical in every Ω).*
- (ii) *If $\Omega = B_1$, $f(u) = e^u$, and $n \geq 10$, then $u^* = \log(1/|x|^2)$ and $\lambda^* = 2(n - 2)$.*

There is an analogous result for $f(u) = (1 + u)^p$. In this case, the explicit radial solution is given by $|x|^{-2/(p-1)} - 1$ and coincides with the extremal solution u^* in $\Omega = B_1$ for some values of n and p (see [3, 6] for more details).

Part (i) of Theorem 2 was proven by Crandall and Rabinowitz [8] and by Mignot and Puel [10]. The proof uses the semi-stability of the minimal solutions, as follows. One takes $\varphi = e^{\alpha u_\lambda} - 1$ in the semi-stability condition $Q_{u_\lambda}(\varphi) \geq 0$. One then uses that u_λ is a solution of the problem. This leads to an $L^1(\Omega)$ bound for $e^{\beta u_\lambda}$, uniform in λ , for some exponents β . That is, $-\Delta u_\lambda$ is uniformly bounded in $L^\beta(\Omega)$ and, hence, u_λ is uniformly bounded in $W^{2,\beta}(\Omega)$. If $n \leq 9$, the exponent β turns out to be bigger than $n/2$ and, therefore, we have a uniform $L^\infty(\Omega)$ bound for u_λ .

Part (ii) of the theorem had been proved by Joseph and Lundgren [9] in their exhaustive study of the radial case. More recently, Brezis and Vázquez [3] have introduced a simple approach to this question, based on the following characterization of singular extremal solutions by their semi-stability property:

Theorem 3 ([3]) *Let $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \notin L^\infty(\Omega)$, be an unbounded semi-stable weak solution of (3_λ) for some $\lambda > 0$. Then, $\lambda = \lambda^*$ and $u = u^*$.*

The idea behind the theorem is that, for each $\lambda > 0$, (3_λ) has at most one semi-stable solution — a consequence of the convexity of f .

Following [3], we can deduce part (ii) of Theorem 2 from Theorem 3. Indeed, let $\Omega = B_1$ and $\bar{u} = \log(1/|x|^2)$. A direct computation shows that this function is a solution of (3_λ) for $\lambda = \bar{\lambda} = 2(n - 2)$. The linearized operator at \bar{u} is given by

$$L\varphi = -\Delta\varphi - 2(n - 2)e^{\bar{u}}\varphi = -\Delta\varphi - \frac{2(n - 2)}{|x|^2} \varphi.$$

If $n \geq 10$ then the first eigenvalue of L in B_1 satisfies $\mu_1\{L; B_1\} \geq 0$. This is a consequence of *Hardy’s inequality*:

$$\frac{(n - 2)^2}{4} \int_{B_1} \frac{\varphi^2}{|x|^2} \leq \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2 \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_1),$$

and the fact that $(n - 2)^2/4 \geq 2(n - 2)$ if $n \geq 10$. Applying Theorem 3 to $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ we deduce part (ii) of Theorem 2.

Theorem 2 is a precise result on the boundedness of u^* when $f(u) = e^u$. However, to establish regularity of u^* for a general f satisfying (4) — a question

raised by Brezis and Vázquez [3]— is a much harder task. The best known results in general domains and for general nonlinearities satisfying (4) are due to Nedev [11, 12]:

Theorem 4 ([11, 12]) *Let u^* be the extremal solution of (3_λ) .*

- (i) *If $n \leq 3$, then $u^* \in L^\infty(\Omega)$ (for every Ω).*
- (ii) *If $n \leq 5$, then $u^* \in H_0^1(\Omega)$ (for every Ω).*
- (iii) *For every dimension n , if Ω is strictly convex then $u^* \in H_0^1(\Omega)$.*

The proof of this theorem uses a very refined version of the method of [8, 10] described above in relation with Theorem 2.

There are still many questions to be answered in the case of general Ω and f . For instance, it is not known if an extremal solution may be singular in dimensions $4 \leq n \leq 9$, for some domain and nonlinearity.

However, the radial case $\Omega = B_1$ has been recently settled by the author and Capella [6]. The result establishes optimal regularity results for general f . To state it, we define exponents q_k for $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ by

$$\begin{cases} \frac{1}{q_k} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n-1}}{n} + \frac{k-2}{n} & \text{for } n \geq 10 \\ q_k = +\infty & \text{for } n \leq 9. \end{cases} \quad (5)$$

Note that all the exponents are well defined and satisfy $2 < q_k \leq +\infty$. In the same way as Theorem 4, the following result holds for every f satisfying (4):

Theorem 5 ([6]) *Let $\Omega = B_1$ and u^* be the extremal solution of (3_λ) .*

- (i) *If $n \leq 9$, then $u^* \in L^\infty(B_1)$.*
- (ii) *If $n = 10$, then $u^*(|x|) \leq C \log(1/|x|)$ in B_1 for some constant C .*
- (iii) *If $n \geq 11$, then*

$$u^*(|x|) \leq C|x|^{-n/2+\sqrt{n-1}+2}\sqrt{\log(1/|x|)} \quad \text{in } B_1 \quad (6)$$

for some constant C . In particular, $u^* \in L^q(B_1)$ for every $q < q_0$. Moreover, for every $n \geq 11$ there exists $p_n > 1$ such that $u^* \notin L^{q_0}(B_1)$ when $f(u) = (1+u)^{p_n}$.

(iv) $u^* \in W^{k,q}(B_1)$ for every $k \in \{1, 2, 3\}$ and $q < q_k$. In particular, $u^* \in H^3(B_1)$ for every n . Moreover, for all $n \geq 10$ and $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$|\partial^k u^*(|x|)| \leq C|x|^{-n/2+\sqrt{n-1}+2-k}(1 + \sqrt{\log(1/|x|)}) \quad \text{in } B_1$$

for some constant C . Here $\partial^k u^*$ denotes the k -th derivative of the radial function u^* .

Theorem 2, which deals with $f(u) = e^u$, shows the optimality of (i) and (ii) in Theorem 5, including the logarithmic pointwise bound of part (ii). The L^q regularity stated in part (iii) ($q < q_0$) is also optimal. This is shown considering $f(u) = (1+u)^{p_n}$ (for an explicit p_n), in which case $u^*(|x|) = |x|^{-n/2+\sqrt{n-1}+2} - 1$. This function differs from the pointwise power

bound (6) for the factor $\sqrt{\log(1/|x|)}$. It is an *open problem* to know if this logarithmic factor in (6) can be removed. The exponents q_k in the Sobolev estimates of part (iv) are optimal. This follows immediately from the optimality of q_0 and the fact that all q_k are related by optimal Sobolev embeddings.

The proof of Theorem 5 was inspired by the proof of Simons theorem on the nonexistence of singular minimal cones in \mathbb{R}^n for $n \leq 7$. The key idea is to take $\varphi = (r^{-\beta} - 1)u_r$, where $r = |x|$, and compute $Q_{u^*}((r^{-\beta} - 1)u_r)$ in the semi-stability property satisfied by u^* . The nonnegativeness of Q_{u^*} leads to an L^2 bound for $u_r r^{-\alpha}$, with α depending on the dimension n . This is the key point in the proof. A similar method was employed in [5] to study stability properties of radial solutions in all of \mathbb{R}^n .

Theorem 5 has been extended in [7] to equations involving the p -Laplacian and having general semilinear reaction terms. Previously, Boccardo, Escobedo and Peral [1] had extended Theorem 2 on the exponential nonlinearity to the p -Laplacian case in general domains.

References

- [1] BOCCARDO, L., ESCOBEDO, M., PERAL, I.: A Dirichlet problem involving critical exponents. *Nonlinear Anal., Theory, Meth. & Appl.*, **24**, 1639–1648 (1995).
- [2] BREZIS, H., CAZENAVE, T., MARTEL, Y., RAMIANDRISOA, A.: Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited. *Ad. Diff. Eq.*, **1**, 73–90 (1996).
- [3] BREZIS, H., VÁZQUEZ, J.L.: Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. *Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid*, **10**, 443–469 (1997).
- [4] CABRÉ, X.: Extremal solutions and instantaneous complete blow-up for elliptic and parabolic problems. Preprint (updated 2005), <http://www.ma1.upc.edu/~cabre/>
- [5] CABRÉ, X., CAPELLA, A.: On the stability of radial solutions of semilinear elliptic equations in all of \mathbb{R}^n . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**, 769–774 (2004).
- [6] CABRÉ, X., CAPELLA, A.: Regularity of radial minimizers and extremal solutions of semilinear elliptic equations. Preprint, 2005, <http://www.ma1.upc.edu/~cabre/>
- [7] CABRÉ, X., CAPELLA, A., SANCHÓN, M.: Regularity of radial minimizers and semi-stable solutions of semilinear problems involving the p -Laplacian. Preprint, 2005.
- [8] CRANDALL, M.G., RABINOWITZ, P.H.: Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **58**, 207–218 (1975).

- [9] JOSEPH, D.D., LUNDGREN, T.S.: Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **49**, 241–269 (1973).
- [10] MIGNOT, F., PUEL, J.-P.: Sur une classe de problèmes non linéaires avec nonlinéarité positive, croissante, convexe. *Comm. P.D.E.*, **5**, 791–836 (1980).
- [11] NEDEV, G.: Regularity of the extremal solution of semilinear elliptic equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **330**, 997–1002 (2000).
- [12] NEDEV, G.: Extremal solutions of semilinear elliptic equations. Preprint, 2001.

Asymptotic behavior of positive solutions of nonautonomous reaction–diffusion equations *

ANÍBAL RODRÍGUEZ-BERNAL AND ALEJANDRO VIDAL-LÓPEZ

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

1 The problem

We study non autonomous parabolic equations of the form

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x, u) & \text{in } \Omega, \quad t > s \in \mathbb{R} \\ u = 0, & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \\ u(s) = u_0 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

where $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, and $f(t, x, 0) \geq 0$. A typical example is the logistic nonlinearity:

$$f(t, x, u) = m(t, x)u - n(t, x)u^\rho \quad (2)$$

with $n(t, x) \geq 0$, $\rho > 1$. For (1), the initial data is in $C(\overline{\Omega})$ and the solution is denoted by $u_f(t, s, x, u_0)$, which we assume defined for all $t > s$.

2 Previous results

Some previous results are available for (1). First, for the autonomous case: $f = f(x, u)$, the well known results of [1], assert that

Theorem 1 (Brezis, Oswald)

$$\frac{f(x, u)}{u} \text{ is non-increasing in } u \geq 0. \quad (3)$$

Then there exists **at most** a positive solution of the elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

*Partially supported by Project BFM2003–03810

Also, we have

Theorem 2 (Brezis, Oswald) *Assume for $0 \leq u \leq \delta$, $f(x, u) \geq -C_\delta u$*

$$f(\cdot, u) \in L^\infty(\Omega), \quad f(x, u) \leq C(u + 1)$$

and let $a_0(x) = \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u}$ and $a_\infty(x) = \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u}$. Assume

$$\lambda_1(-\Delta - a_0) < 0 < \lambda_1(-\Delta - a_\infty).$$

Then there exist at least a positive solution of the elliptic problem.

From here, the following can be obtained

Corollary 3 *Under the assumptions above, then there exists a unique equilibrium, $u_E \geq 0$ which is **globally asymptotically stable** for positive solutions. Hence, for every $0 \leq u_0 \in X$,*

$$u_f(t, u_0) \rightarrow u_E \quad \text{in } X, \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Now, for the periodic case, that is $f(t+T, x, u) = f(t, x, u)$, for given $t_0 \in \mathbb{R}$ one can use the **Poincaré** map

$$P : X \rightarrow X, \quad P(u_0) = u_f(t_0 + T, t_0, \cdot, u_0)$$

which inherits strong compactness and positivity properties.

In fact, quoting [2], if

$$\frac{f(t, x, u)}{u} \quad \text{is **non-increasing** in } u \geq 0 \tag{4}$$

then P has a **unique** positive globally attractive fixed point. Hence, for every $0 \leq u_0 \in X, s \in \mathbb{R}$

$$\left(u_f(t, s, u_0) - u_P(t) \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$u_P(t)$ is T -periodic.

Finally, for the almost periodic case denote $H(f) = cl\{f_\tau(\cdot, \cdot, \cdot), \tau \in \mathbb{R}\}$ which is **compact** where $f_\tau(t, x, u) = f(t + \tau, x, u)$, is the time shift. Now for $g \in H(f)$ let $u_g(t, x, u_0)$ be the solution of

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(t, x, u) & \text{in } \Omega, \quad t > 0 \\ u = 0, & \text{in } \Gamma = \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \geq 0. \end{cases}$$

and consider the **semigroup** $S(t) : X \times H(f) \rightarrow X \times H(f)$

$$S(t)(u_0, g) = (u_g(t, \cdot, u_0), g_t) \quad t \geq 0$$

which is denoted **skew product flow**. Then, from [5], if (4) holds, then S has a unique positive globally attractive fixed point. Hence, for every $0 \leq u_0 \in X, s \in \mathbb{R}$

$$\left(u_f(t, s, u_0) - u_{AP}(t) \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

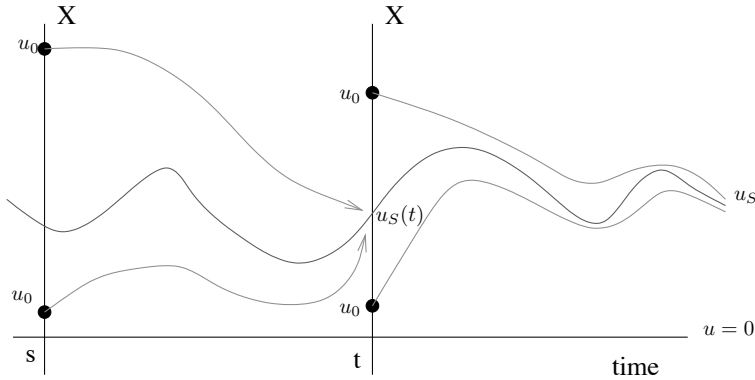
and $u_{AP}(t)$ is almost periodic.

3 The general non-autonomous case

When addressing the general nonautonomous case, i.e. with no specified behavior in time, one must keep track of both the initial data and the initial state.

Also, the concept of convergence used before, must be changed to the so called pullback attraction, which amounts to say that, at present time, we look at the states that are the result of a long term evolution of some state, and that started long time ago in the past. In other words, the state ω pullback attracts the state u_0 if $\lim_{s \rightarrow -\infty} u_f(t, s, \cdot, u_0) = \omega$. The collection of such states ω is the pullback attractor at time t and the collection in t is the pullback attractor of (1).

Our main result then asserts the existence of a special complete positive solution



At each time the state $u_S(t)$ is the important one because it is the pullback attractor, but also u_S attracts forwards.

A first result with restrictions can be found in [3], which asserts that such solution exists provided

$$f(t, x, u) = \lambda u - n(x, t)u^\rho, \quad \lambda > \lambda_1^D(\Omega)$$

$$0 < a_0 \leq n(x, t) \leq A_0, \quad \text{with} \quad A_0 \leq \rho a_0.$$

Hence, we remove here the last restriction and consider much more general nonlinear terms.

4 Uniqueness

Observe that uniqueness of positive complete solutions for (1) fails since in the autonomous case if there exists a positive equilibria: u_E and a connection from 0 to u_E , then there are two complete positive trajectories.

Hence, uniqueness is proved for complete bounded nondegenerate solution, CBNDS, that is for solutions satisfying, for some $\varphi_0, \varphi_1 \in C_0^1(\bar{\Omega})$ and for $t \ll -1$,

$$0 < \varphi_0 \leq u(t) \leq \varphi_1.$$

Proposition 4 *Assume (4) and $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$ are CBNDS at $-\infty$. If*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (u_2(t) - u_1(t)) = 0 \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

then $u_1(t) = u_2(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$.

Assume then

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (u_2(t) - u_1(t)) \neq 0 \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

and write $q_i(x, t) := \frac{f(t, x, u_i(x, t))}{u_i(x, t)}$, then $q_1(x, t) \geq q_2(x, t)$ and the equation for $u_2(t)$ can be written as

$$(u_2)_t - \Delta u_2 = q_2(x, t)u_2 = (q_1(x, t) - P(x, t))u_2$$

where $P(x, t) = (q_1 - q_2)(x, t) \geq 0$. Now the result follows from the next result that implies that sustained perturbations destroy CBNDS.

Proposition 5 *Assume $q(x, t) \geq q_0(x)$ for all $t \leq t_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ and $q_0 \in L^p(\Omega)$ for some $p > N/2$, and assume*

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = q(x, t)z, & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

has a CBNDS at $-\infty$. Then

i) If $P \geq 0$ and for some set of positive measure $A \subset \Omega$ and some $\alpha > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow -\infty} P(x, t) \geq \alpha > 0 \quad \text{a.e. } x \in A$$

then the perturbed problem

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + P(x, t)v = q(x, t)v, & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

does not have a CBNDS at $-\infty$.

ii) If $P(x, t) \geq \varphi_0(x)$ for some positive function in Ω , which may vanish on $\partial\Omega$, then $v = 0$ is the unique complete nonnegative and bounded at $-\infty$ solution.

This contradicts the existence of $u_2(t)$

5 Forward behavior

We are going to prove

Theorem 6 *Assume (4). If $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$ are BND at ∞ , solutions, then*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(x, t) - u_1(x, t)) = 0 \quad \text{uniformly in } x \in \Omega.$$

We first prove

Proposition 7

i) Assume there exist a bounded solution $0 \leq u(t)$, for $t > s$. Then all solutions are bounded for $t > s$. In particular, either all positive solutions are bounded or unbounded for $t > s$.

ii) Assume the solution in i) is such that $u(t) \rightarrow 0$ in $L^\infty(\Omega)$ as $t \rightarrow \infty$. Then all solutions converge to zero uniformly in Ω as $t \rightarrow \infty$.

iii) Assume for some $s \in \mathbb{R}$ there exists a ND solution at ∞ , u . Then all nontrivial solutions are ND at ∞ .

With this,

Proposition 8 *Assume $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$ are BND at ∞ . If*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(t) - u_1(t)) = 0 \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(t) - u_1(t)) = 0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega)$$

Hence, assume

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_2(t) - u_1(t)) \neq 0 \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Again $q_i(x, t) := \frac{f(t, x, u_i(x, t))}{u_i(x, t)}$, then $q_1(x, t) \geq q_2(x, t)$ and the equation for $u_2(t)$ can be written as

$$(u_2)_t - \Delta u_2 = q_2(x, t)u_2 = (q_1(x, t) - P(x, t))u_2$$

where $P(x, t) = (q_1 - q_2)(x, t) \geq 0$. The following results shows then that sustained perturbations destroy BND solutions.

Proposition 9 *Assume $q(x, t) \geq q_0(x)$ for all $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ and $q_0 \in L^p(\Omega)$ for some $p > N/2$, and (5) has a BND solution at ∞ . Then*

i) If $P \geq 0$ and for some set of positive measure $A \subset \Omega$ and some $\alpha > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P(x, t) \geq \alpha > 0 \quad \text{a.e. } x \in A$$

then the perturbed problem (6) does not have ND solutions at ∞ .

ii) If $P(x, t) \geq \varphi_0(x)$ for some positive function in Ω , which may vanish on $\partial\Omega$, then all solutions satisfy

$$v(t) \rightarrow 0 \quad \text{uniformly in } \Omega, \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

This contradicts the existence of $u_2(t)$

6 Summary for logistic equations

As the existence of complete positive solutions of (1) follows from [6, 4], in summary, a simplified set of assumptions for for logistic equations is the following, see [6]

Theorem 10 For (2), assume $n(x, t) \geq a_0 > 0$ in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $m \in L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\Omega))$ with $p > N$ and for $t \ll -1$

$$m(x, t) \geq M(x) \quad n(x, t) \leq N(x)$$

such that

$$f_0(x) = M(x)u - N(x)u^p \leq f(t, x, u)$$

is of “Brezis-Oswald” type.

Then there exists a unique CBPND trajectory $0 \leq u_S \in C_b(\mathbb{R}, C_0(\overline{\Omega}))$.

Also, the results in [6, 4] imply that this solution attracts in the pullback sense.

References

- [1] H. BRÉZIS AND L. OSWALD. Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 10:55–64, 1986.
- [2] P. HESS. *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*, volume 247 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1991.
- [3] J.A. LANGA AND A. SUÁREZ. Pullback permanence for non-autonomous partial differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2002(72):1–20, 2002.
- [4] J. C. ROBINSON, A. RODRÍGUEZ BERNAL, AND A. VIDAL-LÓPEZ. Pullback attractors and extremal complete trajectories for non-autonomous reaction-diffusion problems. Submitted.
- [5] WENXIAN SHEN AND YINGFEI YI. Convergence in almost periodic Fisher and Kolmogorov models. *J. Math. Biol.*, 37(1):84–102, 1998.
- [6] A. VIDAL-LÓPEZ. *Soluciones extremales para problemas de evolución no lineales y aplicaciones*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2005.

The Neumann problem for the ∞ -Laplacian and the Monge-Kantorovich mass transfer problem for measures supported on surfaces*

JULIO D. ROSSI

Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)
on leave from Departamento de Matemática, FCEyN UBA,
Buenos Aires, Argentina

jrossi@dm.uba.ar

Abstract

In this note we review some recent results concerning the natural Neumann boundary condition for the ∞ -Laplacian. We study the limit as $p \rightarrow \infty$ of solutions of $-\Delta_p u_p = 0$ in a domain Ω with $|Du_p|^{p-2} \partial u_p / \partial \nu = g$ on $\partial\Omega$. We obtain a natural minimization problem that is verified by a limit point of $\{u_p\}$ and a limit problem that is satisfied in the viscosity sense. It turns out that the limit variational problem is related to the Monge-Kantorovich mass transfer problems when the measures are supported on $\partial\Omega$. Also we indicate an Steklov like eigenvalue problem that appears as the limit of the usual Steklov eigenvalue problem for the p -Laplacian as $p \rightarrow \infty$.

Key words: *Quasilinear elliptic equations, Neumann boundary conditions.*

AMS subject classifications: *35J65, 35J50, 35J55*

In this note we review some recent results obtained in collaboration with J. Garcia-Azorero, J.J. Manfredi and I. Peral in [8] and [9]. We study the natural Neumann boundary conditions that appear when one considers the ∞ -Laplacian in a smooth bounded domain as limit of the Neumann problem for the p -Laplacian as $p \rightarrow \infty$. This problem is related to the Monge-Kantorovich mass transfer problem when the involved measures are supported on the boundary of the domain.

Let $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$ be the p -Laplacian. The ∞ -Laplacian is the limit operator $\Delta_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \Delta_p$ given by

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

*Supported by Fundacion Antorchas, CONICET and ANPCyT PICT 05009

in the viscosity sense. This operator appears naturally when one considers absolutely minimizing Lipschitz extensions of a boundary function f ; see [2], [3], and [11]. A fundamental result of Jensen [11] establishes that the Dirichlet problem for Δ_∞ is well posed in the viscosity sense.

When considering the Neumann problem, boundary conditions that involve the outer normal derivative, $\partial u/\partial \nu$ have been addressed from the point of view of viscosity solutions for fully nonlinear equations in [4] and [10]. In these references it is proved that there exist viscosity solutions and comparison principles between them when appropriate hypothesis are satisfied. In particular strict monotonicity is needed, a property that does not hold in our case of interest.

We study the Neumann problem for the ∞ -Laplacian obtained as the limit as $p \rightarrow \infty$ of the problems

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{in } \Omega, \\ |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Here Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^N with smooth boundary and $\frac{\partial}{\partial \nu}$ is the outer normal derivative. The boundary data g is a continuous function that necessarily verifies the compatibility condition $\int_{\partial\Omega} g = 0$, otherwise there is no solution to (1). Imposing the normalization $\int_\Omega u = 0$ there exists a unique solution to problem (1) that we denote by u_p . This solution can also be obtained by a variational principle. In fact, we can write

$$\int_{\partial\Omega} u_p g = \max \left\{ \int_{\partial\Omega} wg : w \in W^{1,p}(\Omega), \int_\Omega w = 0, \int_\Omega |Dw|^p \leq 1 \right\}.$$

Our first result states that there exist limit points of u_p as $p \rightarrow \infty$ and that they are maximizers of a variational problem that is a natural limit of these variational problems. Observe that for $q > N$ the set $\{u_p\}_{p>q}$ is bounded in $C^{1-p/q}(\overline{\Omega})$.

Theorem 1 *Let v_∞ be a uniform limit of a subsequence $\{u_{p_i}\}$, $p_i \rightarrow \infty$, then v_∞ is a solution to the maximization problem*

$$\int_{\partial\Omega} v_\infty g = \max \left\{ \int_{\partial\Omega} wg : w \in W^{1,\infty}(\Omega), \int_\Omega w = 0, \|Dw\|_\infty \leq 1 \right\}. \tag{2}$$

An equivalent dual statement is the minimization problem

$$\|Dv_\infty\|_\infty = \min \left\{ \|Dw\|_\infty : w \in W^{1,\infty}(\Omega), \int_\Omega w = 0, \int_{\partial\Omega} wg \geq 1 \right\}. \tag{3}$$

The maximization problem (2) is also obtained by applying the Kantorovich optimality principle to a mass transfer problem for the measures $\mu^+ = g^+ \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial\Omega$ and $\mu^- = g^- \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial\Omega$ that are concentrated on $\partial\Omega$. The mass transfer compatibility condition $\mu^+(\partial\Omega) = \mu^-(\partial\Omega)$ holds since g has

zero average on $\partial\Omega$. The maximizers of (2) are called maximal Kantorovich potentials [1].

L.C. Evans and W. Gangbo in [6] have considered mass transfer optimization problems between absolutely continuous measures that appear as limits of p -Laplacian problems. A very general approach is discussed in [5], where a problem related to but different from ours is discussed (see Remark 4.3 in [5]).

Our next results discusses the equation that v_∞ satisfies in the viscosity sense.

Theorem 2 *A limit v_∞ is a solution of*

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0 & \text{in } \Omega, \\ B(x, u, Du) = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

in the viscosity sense. Here

$$B(x, u, Du) \equiv \begin{cases} \min \{ |Du| - 1, \frac{\partial u}{\partial \nu} \} & \text{if } g(x) > 0, \\ \max \{ 1 - |Du|, \frac{\partial u}{\partial \nu} \} & \text{if } g(x) < 0, \\ H(|Du|) \frac{\partial u}{\partial \nu} & \text{if } g(x) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{if } x \in \{g(x) = 0\}^o, \end{cases}$$

and $H(a)$ is given by

$$H(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \geq 1, \\ 0 & \text{if } 0 \leq a < 1. \end{cases}$$

Remark that there is no uniqueness of viscosity solutions of (4), see [8]. Nevertheless we can say something about uniqueness under some favorable geometric assumptions on g and Ω . The proof of uniqueness is based on some tools from [6]. To state our uniqueness result let us describe the required geometrical hypothesis on the boundary data. Let $\partial\Omega_+ = \text{supp } g^+$ and $\partial\Omega_- = \text{supp } g^-$. For a given v_∞ a maximizer in (2) following [6] we define the transport set as

$$T(v_\infty) = \left\{ \begin{array}{l} z \in \overline{\Omega} : \exists x \in \partial\Omega_+, y \in \partial\Omega_-, \quad v_\infty(z) = v_\infty(x) - |x - z| \\ \text{and } v_\infty(z) = v_\infty(y) + |y - z| \end{array} \right\}.$$

Observe that this set T is closed. We have the following property

Proposition 3 *Suppose that Ω is a convex domain. Let v_∞ be a maximizer of (2) with $\Delta_\infty v_\infty = 0$, then $|Dv_\infty(x)| = 1$, for a.e. $x \in T(v_\infty)$.*

Define a transport ray by $R_x = \{z \mid |v_\infty(x) - v_\infty(z)| = |x - z|\}$. Notice that two transport rays cannot intersect in Ω unless they are identical. Indeed, assume $z \in T$ then there exist $x, y \in \overline{\Omega}$ such that $v_\infty(x) - v_\infty(z) = |x - z|$ and $v_\infty(z) - v_\infty(y) = |z - y|$, then $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| = v_\infty(x) - v_\infty(y)$. If x, y and z are not colinear we contradict the Lipschitz condition verified by v_∞ .

Our geometric hypothesis for uniqueness is then

$$\partial\Omega \subset T(v_\infty).$$

We have:

Theorem 4 *Assume that we have a convex domain Ω with connected boundary and a boundary datum g on $\partial\Omega$ such that every maximizer v_∞ with $\Delta_\infty v_\infty = 0$ verifies $\partial\Omega \subset T(v_\infty)$, then there exists a unique infinite harmonic solution, u_∞ to (2). Hence, the limit $\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = u_\infty$, uniformly in Ω exists.*

Remark 1 *Observe that if $\{g = 0\}$ has empty interior on the boundary then the uniqueness of the limit holds since for every v_∞ we get $\partial\Omega \subset T(v_\infty)$.*

To illustrate our results we present some examples. In an interval $\Omega = (-L, L)$ with $g(L) = -g(-L) > 0$ the limit of the solutions of (1), u_p , turns out to be $u_\infty(x) = x$. It is easy to check that this function is indeed the unique solution of the maximization problem (2) and of the problem (4).

This example can be easily generalized to the case where Ω is an annulus, $\Omega = \{r_1 < |x| < r_2\}$, and the function g is a positive constant g_1 on $|x| = r_1$ and a negative constant g_2 on $|x| = r_2$ with the constraint $\int_{\partial\Omega} g = \int_{|x|=r_1} g + \int_{|x|=r_2} g = 0$. The solutions u_p of (1) in the annulus converge uniformly as $p \rightarrow \infty$ to a cone $u_\infty(x) = C - |x|$. However one can modify the function g on $|x| = r_2$ in such a way it does not change its sign and that the cone does not maximize (2). Hence, there is no uniqueness for (4) even for non-vanishing boundary data.

An example of a domain and boundary data such that uniqueness of the limit holds is a disk in \mathbb{R}^2 , $D = \{|(x, y)| < 1\}$ with $g(x, y) > 0$ for $x > 0$ and $g(x, y) < 0$ for $x < 0$ with $\int_{\partial D} g = 0$.

We end this note by analyzing an eigenvalue problem. Eigenvalues of $-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u$ with Dirichlet boundary conditions, $u = 0$ on $\partial\Omega$, have been extensively studied since [7]. The limit as $p \rightarrow \infty$ was studied in [12]. Our last aim is to analyze the limit as $p \rightarrow \infty$ for the Steklov eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{in } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda|u|^{p-2}u & \text{on } \partial\Omega, . \end{cases} \tag{5}$$

Theorem 5 *For the first eigenvalue of (5) we have,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{1,p}^{1/p} = \lambda_{1,\infty} = 0,$$

with eigenfunction given by $u_{1,\infty} = 1$.

For the second eigenvalue, it holds

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{2,p}^{1/p} = \lambda_{2,\infty} = \frac{2}{\text{diam}(\Omega)}.$$

Moreover, given $u_{2,p}$ eigenfunctions of (5) of $\lambda_{2,p}$ normalized by $\|u_{2,p}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = 1$, there exists a sequence $p_i \rightarrow \infty$ such that $u_{2,p_i} \rightarrow u_{2,\infty}$, in $C^\alpha(\overline{\Omega})$. The limit $u_{2,\infty}$ is a solution of

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Lambda(x, u, \nabla u) = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

in the viscosity sense, where

$$\Lambda(x, u, \nabla u) \equiv \begin{cases} \min \left\{ |\nabla u| - \lambda_{2,\infty}|u|, \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} & \text{if } u > 0, \\ \max \left\{ \lambda_{2,\infty}|u| - |\nabla u|, \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} & \text{if } u < 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & \text{if } u = 0. \end{cases}$$

For the k -th eigenvalue we have that if $\lambda_{k,p}$ is the k -th variational eigenvalue of (5) with eigenfunction $u_{k,p}$ normalized by $\|u_{k,p}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = 1$, then for every sequence $p_i \rightarrow \infty$ there exists a subsequence such that

$$\lim_{p_i \rightarrow \infty} \lambda_{k,p_i}^{1/p_i} = \lambda_{*,\infty}$$

and $u_{k,p_i} \rightarrow u_{*,\infty}$ in $C^\alpha(\bar{\Omega})$, where $u_{*,\infty}$ and $\lambda_{*,\infty}$ is a solution of (6).

References

- [1] L. AMBROSIO, *Lecture Notes on Optimal Transport Problems*, CVGMT preprint server.
- [2] G. ARONSSON, *Extensions of functions satisfying Lipschitz conditions*. Ark. Math., 6 (1967), 551-561.
- [3] G. ARONSSON, M.G. CRANDALL AND P. JUUTINEN, *A tour of the theory of absolutely minimizing functions*. Bull. Amer. Math. Soc., 41 (2004), 439-505.
- [4] G. BARLES, *Fully nonlinear Neumann type conditions for second-order elliptic and parabolic equations*. J. Differential Equations, 106 (1993), 90-106.
- [5] G. BOUCHITTE, G. BUTTAZZO AND L. DE PASQUALE. *A p -Laplacian approximation for some mass optimization problems*. Preprint.
- [6] L.C. EVANS AND W. GANGBO, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*. Mem. Amer. Math. Soc., 137 (1999), no. 653.
- [7] J. GARCÍA-AZORERO AND I. PERAL, *Existence and non-uniqueness for the p -Laplacian: nonlinear eigenvalues*. Comm. Partial Differential Equations, 12 (1987), 1389-1430.
- [8] J. GARCÍA-AZORERO, J. J. MANFREDI, I. PERAL AND J. D. ROSSI, *The Neumann problem for the ∞ -Laplacian and the Monge-Kantorovich mass transfer problem*. Preprint.
- [9] J. GARCÍA-AZORERO, J. J. MANFREDI, I. PERAL AND J. D. ROSSI, *Steklov eigenvalues for the ∞ -Laplacian*. To appear in Rend. Lincei Mat. Appl.

- [10] H. ISHII AND P. L. LIONS, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*. J. Differential Equations, 83 (1990), 26-78.
- [11] R. JENSEN, *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*. Arch. Rational Mech. Anal. 123 (1993), 51-74.
- [12] P. JUUTINEN, P. LINDQVIST AND J. J. MANFREDI, *The ∞ -eigenvalue problem*. Arch. Rational Mech. Anal., 148 (1999), 89-105.

Sesión monográfica de
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Coordinador: RAFAEL ORTEGA

Participantes:
RAFAEL OBAYA
JOAQUIM PUIG
SUSANA TERRACINI

Minimales casi-periódicos y casi-automórficos en sistemas cooperativos no autónomos*

S. NOVO Y R. OBYA

Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid

`sylnov@wmatem.eis.uva.es`, `rafoba@wmatem.eis.uva.es`

Resumen

En esta nota se estudia el comportamiento dinámico de las soluciones recurrentes de sistemas cooperativos casi-periódicos. En particular, se analiza la existencia de minimales casi-automórficos para el flujo triangular monótono inducido por dichos sistemas. Bajo hipótesis adecuadas de convexidad dichos minimales resultan ser hiperbólicos y casi-periódicos.

Palabras clave: *Flujos monótonos, dinámica casi-periódica, dinámica casi-automórfica, minimal hiperbólico.*

Clasificación por materias AMS: *37C65, 37C60, 37B55*

1 Introducción y preliminares

Es bien conocido que el comportamiento de las soluciones no caóticas de sistemas de ecuaciones diferenciales casi-periódicas puede ser mucho más complicado que el propio comportamiento dinámico de los datos casi-periódicos del sistema. La aparición de minimales casi-automórficos que no son casi-periódicos permite dar una explicación razonable de este fenómeno.

En esta nota se consideran flujos triangulares monótonos inducidos por familias de ecuaciones diferenciales ordinarias casi-periódicas de tipo cooperativo, para estudiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones acotadas. Se revisan resultados recientes que garantizan la aparición de minimales que son extensión casi-automórfica del flujo casi-periódico de la base. Existen ejemplos en la literatura que muestran que dichos minimales no son necesariamente casi-periódicos. Con hipótesis adicionales de estabilidad, concavidad o convexidad se demuestra que son copia de la base y por tanto, casi-periódicos.

*Parcialmente subvencionado por la Junta de Castilla y León, VA024/03 y el Ministerio de Educación y Ciencia, MTM2005-02144

Un flujo continuo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ sobre un espacio métrico compacto Ω se define mediante una aplicación continua $\sigma : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$, $(t, \omega) \mapsto \sigma(t, \omega)$ que verifica $\sigma_0 = \text{id}$ y $\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s$, donde σ_t representa la sección en tiempo t de la aplicación flujo, es decir, $\sigma_t(\omega) = \sigma(t, \omega)$ para todos $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$.

El conjunto $\{\sigma(t, \omega) \mid t \in \mathbb{R}\}$ recibe el nombre de *órbita* o *trayectoria* del punto ω . Un subconjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ es σ -invariante si $\sigma_t(\Omega_1) = \Omega_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un subconjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ es *minimal* si es compacto, σ -invariante y no posee ningún otro subconjunto propio compacto y σ -invariante. Un flujo continuo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es *recurrente* o *minimal* cuando Ω es minimal.

Sea d una métrica en Ω . El flujo $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es *casi-periódico* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ son tales que $d(\omega_1, \omega_2) < \delta$, entonces $d(\sigma_t(\omega_1), \sigma_t(\omega_2)) < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Las propiedades básicas de flujos casi-periódicos pueden encontrarse en Ellis [2] y Sacker y Sell [9].

Si (Y, Ψ, \mathbb{R}) es otro flujo continuo, un *homomorfismo de flujos* entre (Y, Ψ, \mathbb{R}) y $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es una aplicación continua $f : Y \rightarrow \Omega$ que respeta las trayectorias, es decir, $f(\Psi_t(y)) = \sigma_t(f(y))$ para todo $y \in Y$ y $t \in \mathbb{R}$.

Sea $\pi : (Y, \Psi, \mathbb{R}) \rightarrow (\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un homomorfismo de flujos sobreyectivo y supongamos que (Y, Ψ, \mathbb{R}) es minimal. Se dice que (Y, Ψ, \mathbb{R}) es una *copia* de $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ si $\text{card}(\pi^{-1}(\omega)) = 1$ para cada $\omega \in \Omega$ y que es una *extensión casi-automórfica* de $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ si existe un punto $\omega \in \Omega$ tal que $\text{card}(\pi^{-1}(\omega)) = 1$. Un flujo minimal (Y, Ψ, \mathbb{R}) es *casi-automórfico* si es una extensión casi-automórfica de un flujo minimal casi-periódico $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ (véase Veech [10]).

2 Dinámicas casi-periódica y casi-automórfica en ecuaciones escalares convexas y coercitivas

En esta sección se estudia la aparición de dinámica casi-periódica o casi-automórfica en el caso escalar, convexo y coercitivo. Suponemos que $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ es un flujo minimal casi-periódico y denotamos $\omega \cdot t = \sigma(t, \omega)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$. Sean

- $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua,
- $g \in C^1(\mathbb{R})$ estrictamente convexa y coercitiva, i.e. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la familia de ecuaciones diferenciales escalares

$$x' = g(x) + p(\omega \cdot t) + \alpha, \quad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

que induce un flujo local triangular en $\Omega \times \mathbb{R}$

$$\tau_\alpha : U \subset \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}, \quad (t, \omega, x_0) \mapsto (\omega \cdot t, x(t, \omega, x_0, \alpha)),$$

donde $x(t, \omega, x_0, \alpha)$ es la solución de (1), evaluada a lo largo de la trayectoria de ω , con condición inicial x_0 y t pertenece al intervalo maximal de definición. Consideramos el conjunto de soluciones acotadas

$$B_\alpha = \left\{ (\omega, x_0) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t, \omega, x_0, \alpha)| < \infty \right\}.$$

En el caso de que $B_\alpha \neq \emptyset$, se comprueba que B_α es un compacto τ_α -invariante y la aplicación τ_α define un flujo global en B_α . Para dichos valores de α se definen

$$x_1(\omega, \alpha) = \inf\{x \mid (\omega, x) \in B_\alpha\} \quad \text{y} \quad x_2(\omega, \alpha) = \sup\{x \mid (\omega, x) \in B_\alpha\}.$$

El siguiente teorema, demostrado en Novo *et al.* [7], estudia la estructura del conjunto de soluciones acotadas en función del parámetro α .

Teorema 1 *Sea $J = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid B_\alpha \neq \emptyset \text{ y contiene dos minimales hiperbólicos}\}$. Para cada $\alpha \in J$ se tiene que $B_\alpha = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid x_1(\omega, \alpha) \leq x \leq x_2(\omega, \alpha)\}$. Sea $\alpha^* = \sup J$. Entonces*

- (i) $J = (-\infty, \alpha^*)$ y $B_\alpha = \emptyset$ para cada $\alpha > \alpha^*$.
- (ii) Si $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha^*$ entonces $x_1(\omega, \alpha_1) < x_1(\omega, \alpha_2)$ y $x_2(\omega, \alpha_2) < x_2(\omega, \alpha_1)$ con lo que $B_{\alpha_2} \subset B_{\alpha_1}$.
- (iii) Si $\alpha < \alpha^*$ las aplicaciones $\omega \mapsto x_i(\omega, \alpha)$, $i = 1, 2$ son continuas.
- (iii) Las aplicaciones $\omega \mapsto x_i(\omega, \alpha^*) = \lim_{\alpha \uparrow \alpha^*} x_i(\omega, \alpha)$, $i = 1, 2$ son semicontinuas. $B_{\alpha^*} = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid x_1(\omega, \alpha^*) \leq x \leq x_2(\omega, \alpha^*)\} \neq \emptyset$ y existe un subconjunto residual σ -invariante $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para cada $\omega \in \Omega_0$.

Cuando $\alpha < \alpha^*$ las tapas superior e inferior de B_α son minimales casi-periódicos hiperbólicos. La existencia de un minimal casi-automórfico y no casi-periódico sólo es posible para $\alpha = \alpha^*$. La estructura topológica y ergódica del conjunto B_{α^*} queda descrita en el siguiente teorema también probado en [7].

Teorema 2 *Sea α^* el valor obtenido en el Teorema 1. Existe un único conjunto minimal $M_{\alpha^*} \subset B_{\alpha^*}$, que no es hiperbólico. Se da uno de los siguientes casos:*

- (c.1) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces $B_{\alpha^*} = M_{\alpha^*}$ es copia de la base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ y por tanto, casi-periódico;
- (c.2) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Entonces M_{α^*} es un minimal casi-automórfico que es casi-periódico si y sólo si es una copia de la base;
- (c.3) $x_1(\omega, \alpha^*) = x_2(\omega, \alpha^*)$ sobre un conjunto de medida nula. Entonces M_{α^*} es un minimal casi-automórfico que no es casi-periódico.

El caso (c.1) aparece cuando la base es periódica. Minimales en los casos (c.2) y (c.3) pueden construirse a partir de los ejemplos descritos por Johnson [4], Millionščikov [5] y Vinograd [11].

3 Dinámicas casi-periódica y casi-automórfica en sistemas cooperativos no autónomos

Los resultados de la sección anterior dependen fuertemente del carácter escalar de la ecuación y por consiguiente monótono del flujo asociado. En esta sección se

consideran flujos monótonos inducidos por sistemas cooperativos de ecuaciones casi-periódicas, y se demuestra que los métodos basados en semi-equilibrios semicontinuos proporcionan minimales casi-automórficos. Estos resultados son también válidos para flujos monótonos generados por ecuaciones funcionales casi-periódicas con retardo finito.

Sea $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ un flujo minimal y casi-periódico. Se considera la familia de sistemas cooperativos

$$\mathbf{z}' = f(\omega \cdot t, \mathbf{z}), \quad \omega \in \Omega, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

con $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\omega, \mathbf{z}) \geq 0$ para cada $i \neq j$, $\omega \in \Omega$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Esta familia induce un flujo local triangular y monótono

$$\tau: U \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad (t, \omega, \mathbf{z}_0) \mapsto (\omega \cdot t, \mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{z}_0)),$$

donde $\mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{z}_0)$ es la solución de (2) con condición inicial \mathbf{z}_0 . Por consiguiente,

$$\mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{x}) <_r \mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{y}) \quad \text{siempre que} \quad \mathbf{x} <_r \mathbf{y}, t \geq 0 \text{ y } \omega \in \Omega,$$

para $<_r$ cualquiera de las relaciones de orden parcial $\leq, < \text{ o } \ll$ de \mathbb{R}^n .

Definición 1 Sea $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación tal que $\mathbf{z}(t, \omega, a(\omega))$ está definido para todo $t \geq 0$. Se dice que a es un *equilibrio* si $a(\omega \cdot t) = \mathbf{z}(t, \omega, a(\omega))$, un *super-equilibrio* si $a(\omega \cdot t) \geq \mathbf{z}(t, \omega, a(\omega))$ y un *sub-equilibrio* si $a(\omega \cdot t) \leq \mathbf{z}(t, \omega, a(\omega))$ para todo $t \geq 0$ y $\omega \in \Omega$. Se dice que un super-equilibrio (resp. sub-equilibrio) es *fuerte* si existe un tiempo $t_0 > 0$ tal que $a(\omega \cdot t_0) \gg \mathbf{z}(t_0, \omega, a(\omega))$ (resp. $a(\omega \cdot t_0) \ll \mathbf{z}(t_0, \omega, a(\omega))$) para todo $\omega \in \Omega$.

Definición 2 Se dice que un super-equilibrio (resp. sub-equilibrio) a es *semicontinuo* si la clausura de $\{a(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ es un compacto y el subconjunto $C_a = \{(\omega, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \leq a(\omega)\}$ (resp. $C_a = \{(\omega, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \geq a(\omega)\}$) es cerrado en $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Un equilibrio es *semicontinuo* en cualquiera de esos casos.

Teorema 3 Sea $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un super-equilibrio (resp. sub-equilibrio) semicontinuo tal que la clausura de $\{\mathbf{z}(t, \omega, a(\omega)) \mid t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ es un compacto Γ de \mathbb{R}^n . Entonces

- (i) Existe un equilibrio semicontinuo $c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $c(\omega) \in \Gamma \forall \omega \in \Omega$.
- (ii) (K, τ, \mathbb{R}) es una extensión casi-automórfica de la base $(\Omega, \sigma, \mathbb{R})$ donde $K = \text{cls}_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \{(\omega_0 \cdot t, c(\omega_0 \cdot t)) \mid t \geq 0\}$ y ω_0 es un punto de continuidad de c .

Si imponemos que la función f sea convexa en \mathbf{z} obtenemos que el flujo también es convexo en \mathbf{z} , es decir, $\mathbf{z}(t, \omega, \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda \mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{x}) + (1 - \lambda) \mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{y})$ para $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, $t \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ y $\omega \in \Omega$. En este caso, la existencia de un super-equilibrio semicontinuo fuerte proporciona un atractor que es una copia de la base. Este resultado se prueba en Novo *et al.* [6], así como el teorema anterior.

Teorema 4 Sea $a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un super-equilibrio semicontinuo fuerte tal que la clausura de $\{\mathbf{z}(t, \omega, a(\omega)) \mid t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ es un compacto de \mathbb{R}^n . Sean c y K el equilibrio y la extensión casi-automófica obtenidos en el Teorema 3. Entonces

- (i) $c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y $c(\omega) \ll a(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$;
- (ii) $K = \{(\omega, c(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$ es un minimal hiperbólico y
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t, \omega, \mathbf{x}) - c(\omega \cdot t)\| = 0$ para cada $(\omega, \mathbf{x}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \leq a(\omega)$.

Se obtienen resultados similares en Chueshov [1], Jiang y Zhao [3] y Novo *et al.* [8] cuando se sustituye el carácter fuerte del super-equilibrio por la convexidad fuerte de la función f o por condiciones que hagan que el flujo sea fuertemente monótono.

Referencias

- [1] I.D. CHUESHOV, *Monotone Random Systems. Theory and Applications*, Lecture Notes in Math. **1779**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [2] R. ELLIS. *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, New York 1969.
- [3] J. JIANG X.-Q. ZHAO. Convergence in monotone and uniformly stable skew-product semiflows with applications, aparecerá en *J. Reine Angew. Math.*
- [4] R. JOHNSON. A linear, almost periodic equation with an almost automorphic solution, *Proc. Am. Math. Soc.* **82** (1981), 199–205.
- [5] V.M. MILLIONŠČIKOV. Proof of the existence of irregular systems of linear differential equations with almost periodic coefficients, *Differ. Equ.* **4** (1968), 391–396.
- [6] S. NOVO, C. NÚÑEZ Y R. OBAYA. Almost automorphic and almost periodic dynamics for quasimonotone non-autonomous functional differential equations, *J. Dynam. Differential Equations* **17** (3) (2005), 589–619.
- [7] S. NOVO, R. OBAYA Y A.M. SANZ. Almost periodic and almost automorphic dynamics for scalar convex differential equations, *Israel J. Math.* **144** (2004), 157–189.
- [8] S. NOVO, R. OBAYA Y A.M. SANZ. Attractor minimal sets for cooperative and strongly convex delay differential equations, *J. Differential Equations*, **208** (1) (2005), 86–123.
- [9] R.J. SACKER Y G.R. SELL. *Lifting properties in skew-products flows with applications to differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc. **190**, Amer. Math. Soc., Providence 1977.

- [10] W.A. VEECH. *Topological dynamics*, Bull. A.M.S. **83** (1977), 775–830.
- [11] R.E. VINOGRAD. A problem suggested by N. P. Erugin, *Diff. Urav.* **11** No. 4 (1975), 632–638.

Resultados no perturbativos en dinámica cuasiperiódica lineal*

JOAQUIM PUIG

Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain

joaquim.puig@upc.edu

Resumen

En esta charla discutiremos algunos resultados recientes en dinámica cuasiperiódica, centrándonos en problemas de linealización alrededor de trayectorias cuasiperiódicas en sistemas dinámicos discretos, conservativos y bidimensionales. En concreto trataremos del rango de validez de determinados resultados perturbativos de linealización alrededor de curvas invariantes cuasiperiódicas dependiendo de las propiedades diofánticas de la frecuencia de la trayectoria.

1 Estabilidad lineal de trayectorias cuasiperiódicas

Uno de los problemas más relevantes en los sistemas dinámicos hamiltonianos es el de la estabilidad, de gran relevancia en cuestiones de mecánica celeste, aceleradores de partículas y sistemas mecánicos en general. Cuando el hamiltoniano es integrable las trayectorias son, salvo casos extremos, estables y se disponen en variedades invariantes, difeomorfas a toros, cuya dinámica es cuasiperiódica con varias frecuencias linealmente independientes. La persistencia de la mayoría de estas trayectorias bajo perturbaciones generales y suficientemente pequeñas y regulares del hamiltoniano, problema estudiado ya por Poincaré, fue demostrada mediante la teoría KAM a partir de los años 50 del pasado siglo. Cuando uno intenta describir el espacio de fase alrededor de estas trayectorias o determinar cual es el rango de validez de estos resultados perturbativos, nos vemos encaminados a estudiar la linealización del sistema

*Este trabajo ha sido financiado por el programa "Juan de la Cierva" del MEC y, en parte, por las ayudas DGICYT BFM2000-805, BFM2003-09504-C02-01 y CIRIT 2001 SGR-70

dinámico alrededor de trayectorias cuasiperiódicas, es decir, sistemas lineales que dependan cuasiperiódicamente del tiempo.

En esta charla tomaremos como punto de partida la *aplicación estándar* o *aplicación de Chirikov*, que es el siguiente sistema dinámico en $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} & (\text{mod})2\pi \\ y_{n+1} = y_n - \kappa \text{sen}(x_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Este es un modelo muy usual en el estudio de difeomorfismos que preserven área del toro. El parámetro κ es un parámetro perturbativo, puesto que para $\kappa = 0$ el sistema es integrable y todas las trayectorias son cuasiperiódicas y situadas sobre las *curvas invariantes* $y = y_0$. Cuando $\kappa > 0$ es suficientemente pequeño, una cantidad relativamente grande de estas trayectorias cuasiperiódicas persiste (aunque el sistema ya no sea integrable) y se disponen sobre curvas invariantes analíticas. Es decir, tenemos órbitas de la forma

$$(x_n, y_n) = \Phi(2\pi\omega n) = (\varphi_1(2\pi\omega n), \varphi_2(2\pi\omega n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $\Phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ es analítica real y ω es la frecuencia de la trayectoria cuasiperiódica (que coincide con y_0 en el caso de $\kappa = 0$). La linealización alrededor de esta trayectoria viene dada por sus ecuaciones variacionales de primer orden

$$v_{n+1} = DF(x_n)v_n = \begin{pmatrix} 1 - \kappa \cos(x_n) & 1 \\ -\kappa \cos(x_n) & 1 \end{pmatrix} v_n \quad (2)$$

que dependen cuasiperiódicamente de n . Si escribimos $A(\theta) = DF(\Phi(\theta))$, entonces podemos ver (2) como un elemento de la siguiente familia de “*skew-products*” o *sistemas triangulares* cuasiperiódicos

$$v_{n+1} = A(\theta_n)v_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega$$

que es un sistema dinámico lineal en el espacio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$. Dado su carácter lineal, podemos estudiar la dinámica globalmente mediante el siguiente “*skew-product*”

$$X_{n+1} = A(\theta_n)X_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \quad (3)$$

definido en $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ puesto que todas las matrices $A(\theta)$ tienen determinante uno (al ser F conservativa). Nos interesará clasificar dinámicamente estos sistemas. Para ello es conveniente introducir el *cociclo cuasiperiódico* correspondiente al “*skew-product*” (3),

$$(A, \omega) : \begin{matrix} SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T} & \longrightarrow & SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{T} \\ (X, \theta) & \longmapsto & (A(\theta)X, \theta + 2\pi\omega), \end{matrix}$$

las iteraciones del cual generan (3),

$$(X_n, \theta_n) = (A, \omega)^n (X_0, \theta_0).$$

$$w_{n+1} = \begin{pmatrix} a - V(\theta_n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \quad (4)$$

para $V(\theta) = \kappa \cos(\varphi_1(\theta))$ y $a = 0$. El correspondiente cociclo, que denotaremos por $(A_{a,V}, \omega)$ lo llamaremos *cociclo cuasiperiódico de Schrödinger*. La razón del nombre viene de que, de hecho, es equivalente a la siguiente ecuación en diferencias lineales de segundo orden

$$x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \theta)x_n = a, \quad n \in \mathbb{Z}$$

que es la ecuación de valores propios de la familia de *operadores cuasiperiódicos de Schrödinger* (discretos y unidimensionales en este caso)

$$(H_{V,\omega,\theta}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} + V(2\pi\omega n + \theta)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Estos operadores, que en $l^2(\mathbb{Z})$ están *acotados* y son *autoadjuntos*, aparecen en diversos campos de la matemática física.

2 Reducibilidad y propiedades espectrales

La matriz de Floquet (mejor dicho, su espectro) determina cuando las soluciones un “skew-product” son estables o inestables. El problema es que el sistema tiene que ser reducible, cosa que no sucede en general. Sin embargo podemos recuperar parcialmente el crecimiento exponencial a través del *exponente de Lyapunov promediado*

$$\beta(a, V, \omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \|A_{a,V}(2\pi(N-1)\omega + \theta) \cdots A_{a,V}(2\pi\omega + \theta)\| d\theta$$

que existe, por ergodicidad y subaditividad, si $a \in \mathbb{R}$, V es continua y ω irracional. Diremos que un cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ es *hiperbólico* si $\beta(a, V, \omega) > 0$. Si, además, el cociclo es conjugado a un cociclo diagonal e hiperbólico, aunque no necesariamente constante, entonces diremos que es *uniformemente hiperbólico*. En caso contrario, que es *no uniformemente hiperbólico*.

Para distinguir entre hiperbolicidad uniforme y no uniforme podemos usar la formulación espectral. En efecto, Johnson [Joh82] demostró, en un caso mucho más general, que si V es continua y ω irracional entonces la hiperbolicidad uniforme de un cociclo de Schrödinger $(A_{a,V}, \omega)$ es equivalente a que a no esté en el espectro del operador $H_{V,\omega,\theta}$ (que es independiente de θ y denotamos por $\sigma(V, \omega)$). Si además V es analítica real y ω suficientemente lejano a irracional (más precisamente diofántico, como introduciremos más adelante), entonces lo anterior es equivalente a que $(A_{a,V}, \omega)$ sea reducible a coeficientes constantes con matriz de Floquet hiperbólica.

Así pues, podemos clasificar la dinámica de un cociclo cuasiperiódico de Schrödinger, supongamos que analítico y con frecuencia diofántica, “a grosso modo”. Si $\beta(a, V, \omega) = 0$ el cociclo no es hiperbólico: en caso que sea reducible a coeficientes constantes la matriz de Floquet no será hiperbólica

(y a necesariamente estará en el espectro). Si $\beta(a, V, \omega) > 0$ el cociclo será uniformemente hiperbólico si a está en la resolvente (en cuyo caso habrá reducibilidad a coeficientes constantes) o no uniformemente si a está en el espectro (en cuyo caso el cociclo no es reducible). Por ejemplo, en el caso del operador “Almost Mathieu” con $V(\theta) = b \cos \theta$ se dan los tres casos posibles, tal y como se indica en la Figura 1.

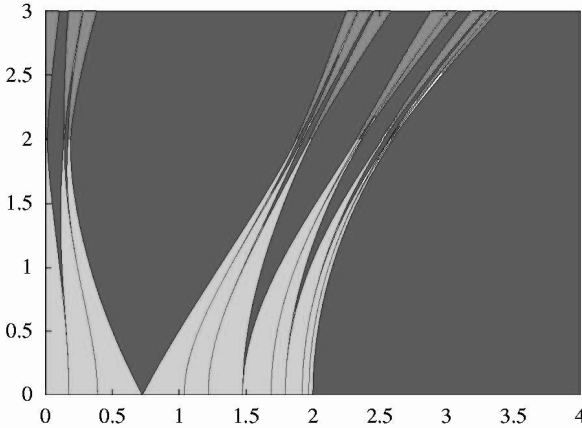


Figura 1: Diferentes comportamientos dinámicos en el caso del cociclo “Almost Mathieu”, dado por $V(\theta) = b \cos \theta$ en el espacio de parámetros (a, b) con $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. En verde, $\beta(a, V, \omega) = 0$ (a en el espectro), en azul cociclo uniformemente hiperbólico ($\beta(a, V, \omega) > 0$ y a en la resolvente) y en rojo el cociclo no uniformemente hiperbólico ($\beta(a, V, \omega) > 0$ y a en el espectro)

A partir de ahora nos vamos a centrar en potenciales V analíticos reales, es decir, fijaremos un $\rho > 0$ y consideraremos el espacio $C_\rho^a(\mathbb{T})$ de funciones en \mathbb{T} con extensión analítica a la banda $|\Im \theta| < \rho$ con la norma

$$|V|_\rho := \sup_{|\Im \theta| < \rho} |V(\theta)| < \infty.$$

Supondremos también que ω es *diofántico*, $\omega \in DC(c, \tau)$, para ciertas constantes $c > 0$ y $\tau > 1$, a saber que las siguientes desigualdades se cumplen para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ no nulo,

$$|\text{sen } 2\pi k\omega| > \frac{c}{|k|^\tau}.$$

Bajo estas dos hipótesis, el enfoque KAM clásico (como se encuentra en Dinaburg & Sinai [DS75] o Jorba & Simó [JS96]) proporciona un $\varepsilon_K = \varepsilon_K(\rho, c, \tau) > 0$ de manera que si $|V|_\rho < \varepsilon_K$ entonces el cociclo $(A_{a, V}, \omega)$ es analíticamente reducible a coeficientes constantes (de ahora en adelante simplemente reducible) para un conjunto de valores de a de medida grande (a medida que $|V|_\rho \rightarrow 0$, dependiendo de c y τ).

Una de las desventajas del método KAM clásico, basado en transformaciones cercanas a la identidad, es que no permite obtener reducibilidad en la resolvente, aunque ya sabemos que ahí debe haber reducibilidad (por otros métodos más geométricos). Moser & Pöschel [MP84] idearon un método para tratar estos casos “resonantes”. Eliasson [Eli92], usando este método, consiguió demostrar que si $|V|_\rho < \varepsilon_E$, donde $\varepsilon_E = \varepsilon_E(c, \tau, \rho) > 0$, entonces el cociclo es reducible para casi todos (en sentido Lebesgue) los valores de a . Este es un resultado “semi-perturbativo”, puesto que ε_K depende de c y τ , pero, independientemente de estas constantes, el conjunto de los a para los que tenemos reducibilidad es de medida total en \mathbb{R} . El resultado es también válido para potenciales V en \mathbb{T}^d y da una caracterización del conjunto de valores de a “reducibles”.

Sorprendentemente, para potenciales en \mathbb{T} , es posible dar una versión no perturbativa de este resultado de Eliasson. El primer paso en este sentido lo dieron Bourgain & Jitomirskaya [BJ02] que demostraron que existe un $\varepsilon_N(\rho) > 0$ para el cual el exponente de Lyapunov es cero en el espectro si $|V|_\rho < \varepsilon_N$ y ω es irracional. Analizando la demostración, podemos demostrar el siguiente resultado no perturbativo (véase Avila & Krikorian [AK03] para una versión un poco más restrictiva):

Teorema 1 ([Pui05]) *Sea $\rho > 0$. Entonces existe un $\varepsilon_N(\rho) > 0$ tal que*

1. *Si $|V|_\rho < \varepsilon_N$, el cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ es reducible para casi todos los valores de a .*
2. *Para un elemento genérico de $\{V \in C_\rho^a(\mathbb{T}); |V|_\rho < \varepsilon_N\}$, con la topología $|\cdot|_\rho$, el espectro $\sigma(V, \omega)$ es un conjunto de Cantor.*
3. *Si $|V|_\rho < \varepsilon_N$ y $\sigma(V, \omega)$ es un conjunto de Cantor, el cociclo $(A_{a,V}, \omega)$ no es (continuamente) reducible a coeficientes constantes para a en un conjunto G_δ -residual de $\sigma(V, \omega)$.*

Este resultado, combinando adecuadamente (i), (ii) y (iii), nos da una descripción cualitativa de la reducibilidad para “skew-products” de Schrödinger cuasiperiódicos con potenciales analíticos reales en $|V|_\rho < \varepsilon_N$ y frecuencia diofántica. La reducibilidad es un fenómeno “abundante” en medida para los a , aunque no topológicamente, puesto que siempre que el espectro sea en conjunto de Cantor (cosa “habitual” en este contexto, como afirma (ii)) no habrá reducibilidad para un conjunto genérico de a 's en el espectro. A parte de estos resultados genéricos, también es posible demostrar espectro de Cantor en algunos ejemplos concretos, como por ejemplo en el operador “Almost Mathieu” [Pui04].

Referencias

- [AK03] A. AVILA AND R. KRIKORIAN. Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles. *To appear in Annals of Mathematics*, 2003.

- [BJ02] J. BOURGAIN AND S. JITOMIRSKAYA. Absolutely continuous spectrum for 1D quasiperiodic operators. *Invent. Math.*, 148(3):453–463, 2002.
- [DS75] E.I. DINABURG AND Y.G. SINAI. The one-dimensional Schrödinger equation with quasi-periodic potential. *Funkt. Anal. i. Priloz.*, 9:8–21, 1975.
- [Eli92] L.H. ELIASSON. Floquet solutions for the one-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 146:447–482, 1992.
- [Joh82] R. JOHNSON. The recurrent Hill’s equation. *J. Diff. Eq.*, 46:165–193, 1982.
- [JS96] À. JORBA AND C. SIMÓ. On quasi-periodic perturbations of elliptic equilibrium points. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6):1704–1737, 1996.
- [MP84] J. MOSER AND J. PÖSCHEL. An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials. *Comment. Math. Helvetici*, 59:39–85, 1984.
- [Pui04] J. PUIG. Cantor spectrum for the Almost Mathieu operator. *Comm. Math. Phys.*, 244(2):297 – 309, 2004.
- [Pui05] J. PUIG. A nonperturbative Eliasson’s reducibility theorem. *Preprint*, 2005.

Collisions and symmetries in the periodic N-body problem

SUSANNA TERRACINI

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, University of
Milano–Bicocca, Milano (Italy)

susanna.terracini@unimib.it

Abstract

What follows is the extended abstract of a talk the author gave at the CEDYA '05 and is based on the results contained in the papers:

[FeT]FERRARIO, D. L., AND TERRACINI, S. *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem* Inv. Math, (2004)

[BFT]V. BARUTELLO, FERRARIO D.L., TERRACINI S. , *Symmetry groups of the planar three-body problems and action-minimizing trajectories*, (2004), submitted

[Fer]FERRARIO, D.L., *Symmetry groups and non-planar collisionless action-minimizing solutions of the three-body problem in three-dimensional space* (2004), to appear on Arch. Rat. Mech. Anal.

Key words: *Symmetric periodic orbits, 3-body problem, collisions, minimizers of the Lagrangian action.*

AMS subject classifications: *70F10*

1 Introduction

Among all periodic solutions of the planar 3-body problem, the relative equilibrium motions – the equilateral Lagrange and the collinear Euler-Moulton solutions – are definitely the simplest and most known. They are both endowed with an evident symmetry ($SO(2)$ and $O(2)$ respectively), that is, they are equivariant with respect to the symmetry group of dimension 1 acting as $SO(2)$ (resp. $O(2)$) on the time circle and on the plane, and trivially on the set of indexes $\{1, 2, 3\}$. In fact, they are minimizers of the Lagrangian action functional in the space of all loops having their same symmetry group. Hence,

G -equivariant minimizers for the action functional (given a symmetry group G) can be thought as the natural generalization of relative equilibrium motions.

Let us consider n point particles with masses m_1, m_2, \dots, m_n and positions $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, with $d \geq 2$.

We denote by \mathcal{X} the space of configurations with center of mass in 0, and by $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$ the set of collision-free configurations. On the configuration space we define the homogeneous (Newton) potential of degree $-\alpha < 0$:

$$U(x) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha}.$$

Relative equilibria correspond to configuration (termed central) which are critical for the restriction of the potential U to the ellipsoid $I = 1$ where I denotes the moment of inertia:

$$I(x) = \sum_i m_i |x_i|^2.$$

On collisions ($x_i = x_j$ for some $i \neq j$) the potential $U = +\infty$. A major part of our analysis can be extended to logarithmic potentials. We are interested in (relative) periodic (such that $\forall t : x(t + T) = x(t)$) solutions to the system of differential equations:

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

We associate with the equation the Lagrangian integrand

$$L(x, \dot{x}) = L = K + U = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha}$$

and the action functional:

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

We seek periodic solutions as critical points of the actions functional on the Sobolev space of T -periodic trajectories: $\Lambda = H^1(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ or, to be more precise, of the action constrained on suitable linear subspaces $\Lambda_0 \subset \Lambda$. A major difficulty arises from the fact that the action functional \mathcal{A} does not satisfy the Palais-Smale condition on Λ : indeed sequences of almost-critical points may diverge. Furthermore, as the potential U is singular on collisions, minimizers or other critical points can *a priori* be collision trajectories.

2 Symmetry groups and equivariant orbits

Let G be a finite group with:

- an orthogonal representation of dimension $2\tau : G \rightarrow O(2)$ (on cyclic time $\mathbb{T} \cong S^1$).

- an orthogonal representation (on the euclidean space \mathbb{R}^d) $\rho: G \rightarrow O(d)$
- and an homomorphism on the symmetric group on n elements ($\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$) $\sigma: G \rightarrow \Sigma_n$

Then G acts on time (translation and reversal) \mathbb{T} via τ , acts on the configuration space \mathcal{X} via ρ and σ and finally we have an action on the space of trajectories:




$$\forall i = 1 \dots n : (gx)_i = \rho(g)x_{\sigma(g)^{-1}(i)}.$$

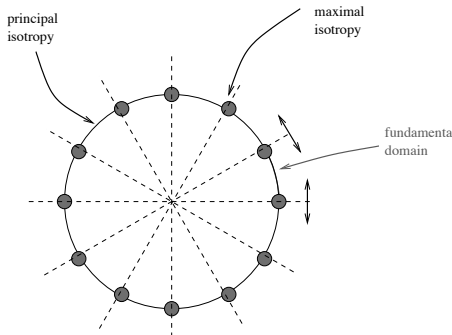
Definition 1 Consider the linear subspace $\Lambda_0 = \Lambda^G \subset \Lambda$ of periodic trajectories in Λ which are **equivariant** with respect to the G -action:

$$\forall g \in G : x(gt) = (gx)(t).$$

2.1 Cyclic and dihedral actions

Consider the normal subgroup $\ker \tau \triangleleft G$ and the quotient $\bar{G} = G/\ker \tau$. Since \bar{G} acts effectively on \mathbb{T} , it is either a *cyclic* group or a *dihedral* group.

- If the group \bar{G} acts trivially on the orientation of \mathbb{T} , then \bar{G} is cyclic and we say that the action of G on Λ is of *cyclic type*. 
- If the group \bar{G} consists of a single reflection on \mathbb{T} , then we say that action of G on Λ is of *brake type*. 
- Otherwise, we say that the action of G on Λ is of *dihedral type*. 



Let \mathbb{I} be the *fundamental domain* (for a dihedral type), ora any interval having lenght $2\pi/|\bar{G}|$ (for a cyclic type). Then the G -equivariant minmization corresponds to minimize the action over all paths $x: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{X}^{\ker \tau}$ subject to the boundary conditions $x(0) \in \mathcal{X}^{H_0}$ and $x(1) \in \mathcal{X}^{H_1}$, where H_0 and H_1 are the maximal isotropy subgroups of the boundary of \mathbb{I} .

2.2 Coercivity

Let \mathcal{A}^G be the restriction to Λ^G of the action functional \mathcal{A} .

Proposition 1 [FeT] The action functional \mathcal{A}^G is coercive in Λ^G if and only if $\mathcal{X}^G = 0$. Consequently, if $\mathcal{X}^G = 0$ then a minimizer of \mathcal{A}^G in Λ^G exists.

3 The rotating circle property

For a group H acting orthogonally on \mathbb{R}^d , a circle $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^d$ (with center in 0) is termed *rotating under H* if \mathbb{S} is *invariant* under H (that is, for every $g \in H$ $g\mathbb{S} = \mathbb{S}$) and for every $g \in H$ the restriction $g|_{\mathbb{S}}: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ is a *rotation* (the identity is meant as a rotation of angle 0).

Let $i \in \mathbf{n}$ be an index and $H \subset G$ a subgroup. A circle $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^d = V$ (with center in 0) is termed *rotating for i under H* if \mathbb{S} is *rotating under H* and

$$\mathbb{S} \subset V^{H_i} \subset V = \mathbb{R}^d,$$

where $H_i \subset H$ denotes the *isotropy subgroup* of the index i in H relative to the action of H on the index set \mathbf{n} induced by restriction (that is, the isotropy $H_i = \{g \in H \mid gi = i\}$).

Definition 2 [FeT] *A group G acts with the rotating circle property if for every \mathbb{T} -isotropy subgroup $G_t \subset G$ and for at least $n - 1$ indexes $i \in \mathbf{n}$ there exists in \mathbb{R}^d a rotating circle \mathbb{S} under G_t for i .*

If the action has the rotating circle property, then for every $g \in G$ the linear map $1 - g$ sends the rotating circle into another circle (thus we can use an averaging method introduced by C. Marchal). In most of the known examples the property is fulfilled.

3.1 Theorems with the RCP

Theorem 2 [FeT] *Consider a finite group K acting on Λ with the rotating circle property. Then a minimizer of the K -equivariant fixed-ends (Bolza) problem is free of collisions.*

Corollary 3 [FeT] *For every $\alpha > 0$, minimizers of the fixed-ends (Bolza) problem are free of interior collisions.*

Corollary 4 [FeT] *If the action of G on Λ is of cyclic type and $\ker \tau$ has the rotating circle property then any local minimizer of \mathcal{A}^G in Λ^G is collisionless.*

Corollary 5 [FeT] *If the action of G on Λ is of cyclic type and $\ker \tau = 1$ is trivial then any local minimizer of \mathcal{A}^G in Λ^G is collisionless.*

Theorem 6 [FeT] *Consider a finite group G acting on Λ so that every maximal \mathbb{T} -isotropy subgroup of G either has the rotating circle property or acts trivially on the index set \mathbf{n} . Then any local minimizer of \mathcal{A}^G yields a collision-free periodic solution of the Newton equations for the n -body problem in \mathbb{R}^d .*

4 The 3–body problem

In the three body problem we can give the complete picture of outcome of the equivariant minimization procedure. First we can ensure that minimizers are always collisionless.

Theorem 7 [BFT] *Let G a symmetry group of the Lagrangian in the 3-body problem (in a rotating frame or not). If G is not bound to collision (i.e. every equivariant loop has collisions), then any (possible) local minimizer is collisionless.*

A symmetry group G of the Lagrangian functional \mathcal{A} is called

- bound to collisions if all G -equivariant loops actually have collisions,
- fully uncoercive if for every possible rotation vector ω the action functional \mathcal{A}_ω^G in the frame rotating around ω with angular speed $|\omega|$ is not coercive in the space of G -equivariant loops (that is, its global minimum escapes to infinity);
- homographic if all G -equivariant loops are constant up to orthogonal motions and rescaling.
- The *core* of the group G is the subgroup of all the elements which do not move the time $t \in \mathbb{T}$.

If, for every angular velocity, G is a symmetry group for the Lagrangian functional in the rotating frame, then we will say that G is of type R. This is a fundamental property for symmetry groups. In fact, if G is *not* of type R, it turns out that the angular momentum of all G -equivariant trajectories vanishes.

4.1 The classification of planar symmetry groups for 3-body

Theorem 8 [BFT] *Let G be a symmetry group of the Lagrangian action functional in the planar 3-body problem. Then, up to a change of rotating frame, G is either bound to collisions, fully uncoercive, homographic, or conjugated to one of the symmetry groups listed in table 1 (RCS stands for Rotating Circle Property and HGM for Homographic Global Minimizer).*

4.2 Space three–body problem

Ferrario was able to give a complete answer to the classification problem for the three-body problem in the space and at the same time to determine and describe properties of the resulting minimizers.

Theorem 9 [Fer] *Symmetry groups not bound to collisions, not fully uncoercive and not homographic are, up to a change of rotating frame, either the three-dimensional extensions of planar groups (if trivial core) listed in table below or the vertical isosceles triangle (if non-trivial core).*

Table 1: Planar symmetry groups with trivial core

<i>Name</i>	$ G $	<i>type R</i>	<i>action type</i>	<i>trans. dec.</i>	RCP	HGM
Trivial	1	yes		1 + 1 + 1	yes	yes
Line	2	yes	brake	1 + 1 + 1	(no)	no
2-1-choreography	2	yes	cyclic	2 + 1	yes	no
Isosceles	2	yes	brake	2 + 1	no	yes
Hill	4	yes	dihedral	2 + 1	no	no
3-choreography	3	yes	cyclic	3	yes	yes
Lagrange	6	yes	dihedral	3	no	yes
C_6	6	no	cyclic	3	yes	no
D_6	6	no	dihedral	3	yes	no
D_{12}	12	no	dihedral	3	no	no

Table 2: Space extensions of planar symmetry groups with trivial core

<i>Name</i>	<i>Extensions</i>
Trivial	C_1^-
Line	$L_2^{+,-}, L_2^{-,+}$
Isosceles	$H_2^{+,-}, H_2^{-,+}$
Hill	$H_4^{+,-}, H_4^{-,+}$
3-choreography	C_3^+, C_3^-
Lagrange	$L_6^{+,+}, L_6^{+,-}, L_6^{-,+}$
D_6	$D_6^{+,-}, D_6^{-,+}$
D_{12}	$D_{12}^{-,+}$

Sesión monográfica de
SISTEMAS DINÁMICOS

Coordinadores: JAUME LLIBRE, ARMENGOL GASULL

Participantes:
ANTONIO ALGABA
ERNEST FONTICH
VÍCTOR JIMÉNEZ
EDUARDO LIZ

Formas normales y el problema del centro*

A. ALGABA Y C. GARCÍA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Huelva

algaba@uhu.es, cristoba@uhu.es

Resumen

Estas notas tratan sobre la caracterización del problema del centro desde el punto de vista de la forma normal. Más concretamente, en una primera parte se tratará sobre la contribución de la forma normal al problema del centro en los casos ya resueltos, esto nos permitirá plantearnos de forma natural una serie de problemas que parcialmente abordaremos en la segunda parte.

Palabras clave: *Formas normales, centro, isocronía.*

Clasificación por materias AMS:

1 Formas normales

La teoría de forma normales consiste en realizar cambios de variables con objeto de obtener formas canónicas (o formas normales) que nos permitan estudiar de forma más cómoda la dinámica del campo inicial, a través del análisis de la dinámica del campo transformado. En definitiva trata de eliminar del campo inicial aquellos términos que no son importantes para la dinámica.

El análisis de la forma normal consta de dos partes bien diferenciadas. Una primera parte que es *algebraica o formal* y que en la actualidad se puede decir, después de los trabajos de Poincaré, Dulac, Takens, Belitskii, Baidier, Sanders..., que está bien estructurada teóricamente en el caso de la conjugación (sólo se permiten cambios de variables en las variables de estado), no así en la equivalencia u orbital equivalencia (también se permiten cambios en el tiempo)

El siguiente resultado generaliza a los obtenidos por los anteriores autores, (ver [6]):

*Este trabajo esta parcialmente financiado por el *Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional I+D+I* cofinanciado con fondos FEDER, en el marco del proyecto MTM2004-04066 y por la *Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía* (FQM-276)

Teorema 1 (*Poincaré-Dulac; Takens; Belitskii*) Dado el sistema $\dot{x} = \mathcal{X}(x)$, $\mathcal{X}(0) = 0$, \mathcal{X} es analítica en el origen ($\mathcal{X} \in C^\omega$ -local), con $(\mathcal{X}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \dots)$, existe Φ difeomorfismo C^∞ -local (Φ es una función C^∞ en un entorno del origen) tal que $(\Phi_*\mathcal{X})(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + h(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x})$, con $h(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x})$, $[A^T, h] = 0$ y τ es flat en $\mathbf{0}$

La segunda parte de la forma normal es *funcional*, trata de manejar los términos flats que quedan después de aplicar la primera parte, y este problema sólo está resuelto en algunos casos particulares y en todos ellos la parte lineal del campo en el origen es **no** nula, la contribución principal en esta línea es debida a Poincaré, Siegel, Bruno, Zoladek,...

Un resultado que incluye a modo de generalización a los resultados anteriores es (ver [7]):

Teorema 2 (*Bruno 71*) Sea \mathcal{X} un campo vectorial C^ω -local con $\mathcal{X}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \dots$ y sea $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ con λ_i autovalor de A . Si

- i) Λ cumple la **condición** ω , es decir, $\left(\sum_k \left| \frac{\log \omega_k}{2^k} \right| < \infty\right)$, donde $\omega_k = \min_{i=1, \dots, n} \{|\langle \Lambda, Q \rangle - \lambda_i| : Q \in \mathbb{N}^n, \|Q\| = k\}$
- ii) Una forma normal de Poincaré-Dulac de \mathcal{X} (contiene términos resonantes) tiene la forma:

$$\widehat{\mathcal{X}}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{Condición A}) \quad \text{con } \Psi(\mathbf{x}) \text{ serie formal.}$$

Entonces existe una transformación normalizante analítica en el origen que lleva \mathcal{X} a una forma normal.

2 Problema del centro

En cuanto al problema del centro para campos analíticos (ver [5]), un problema previo es el de la monodromía, es decir, saber si las órbitas giran alrededor del equilibrio (campos monodrómicos) o existen algunas órbitas que entran o salen con pendiente definida en el equilibrio (campos con direcciones de entradas). Este problema está resuelto por Andreev (ver [4]) en el caso nilpotente y por Medvedeva (ver [11]) en el caso general. Una vez que el campo es monodrómico el problema del centro (de la estabilidad) consiste en determinar si es centro (todas las órbitas alrededor del equilibrio son cerradas) o bien es foco (todas las órbitas giran alrededor del equilibrio tendiendo a él, cuando $t \rightarrow +\infty$ o $t \rightarrow -\infty$ y siendo el ángulo polar continuo sobre ellas no acotado). Es conocido que los campos que pueden ser centros, son salvo transformaciones afines, de los tipos:

$$(\text{N.D.}) \begin{cases} \dot{x} &= -y + P(x, y) \\ \dot{y} &= x + Q(x, y) \end{cases} \quad (\text{C.N.}) \begin{cases} \dot{x} &= y + P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{cases}$$

$$(\text{D.}) \begin{cases} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{cases}$$

3 Caso no degenerado

Para el caso no degenerado el método más competitivo para caracterizar centros es el método de Poincaré-Lyapunov, que se puede considerar como un método de forma normal reducido a campos escalares.

3.1 Método de Poincaré-Lyapunov

Dado el campo no degenerado (**N.D.**), el método trata de encontrar una integral primera formal F para (**N.D.**), es decir, $\dot{F} = 0$ ($\sum_{k,j} \nabla F_k \cdot \mathbf{X}_j = 0$), donde F_k y X_j son las componentes homogéneas de F y \mathcal{X} , respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{F} = 0 &\equiv \sum_{k=2}^{\infty} \left(\nabla F_k \cdot \mathbf{X}_1 + \sum_{j+i=k} \nabla F_j \cdot \mathbf{X}_i \right) = 0, \\ &\equiv [\nabla F_k \cdot \mathbf{X}_1 + \nabla F_{k-1} \cdot \mathbf{X}_2 + \cdots + \nabla F_2 \cdot \mathbf{X}_{k-1} = 0] \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

esto nos lleva a definir los operadores:

$$\begin{aligned} \ell_k &: \mathcal{P}_k \longrightarrow \mathcal{P}_k \\ &F_k \rightarrow \nabla F_k \cdot (-y, x)^t = \{h, F_k\} \text{ (paréntesis de Poisson)}. \end{aligned}$$

donde $h = x^2 + y^2$ y los corrangos se pueden elegir semidefinidos positivos, siendo:

$$\text{Cor}(\ell_{2k}) = \langle (x^2 + y^2)^k \rangle = \langle h^k \rangle, \quad \text{Cor}(\ell_{2k+1}) = \{0\}$$

Por tanto, es posible elegir $F_1, F_2, \dots, (F)$ tal que $\dot{F} = \sum_{k \geq 1} V_k (x^2 + y^2)^k$.

El carácter definido positivo de \dot{F} nos define la estabilidad del origen.

Teniendo en cuenta que estos campo (**N.D.**) tienen una aplicación de Poincaré analítica, considerando como sección transversal el eje positivo de abscisa y con coordenadas el radio polar, deducimos que no pueden existir focos de orden infinito (determinados por los términos flats). Por tanto, el campo tiene un foco de orden finito o tiene un centro. Esto nos permite llegar al siguiente resultado sin tener que demostrar la convergencia.

Teorema 3 (Poincaré-Lyapunov) (**N.D.**) es centro $\Leftrightarrow V_k = 0, \forall k \geq 1$

Es importante apuntar que tanto Poincaré para el caso polinomial como Lyapunov para el caso analítico estaban interesados en estudiar la integrabilidad analítica del campo y para ello necesitaban estudiar la convergencia. Sin embargo para el problema del centro no necesitamos el segundo paso de la forma normal.

El método descrito tiene un inconveniente. No tiene información sobre el tiempo, es decir, no nos permite analizar la función periodo del posible centro. Por ello incorporamos un método de forma normal en el caso vectorial.

3.2 Método de la forma normal

Aplicando el teorema de Belitskii al campo **(N.D.)** obtenemos que es *formalmente* conjugado (en general esta transformación es divergente) a
$$\begin{cases} \dot{r} = a_3 r^3 + a_5 r^5 + \dots \\ \dot{\theta} = 1 + \beta_2 r^2 + \beta_4 r^4 + \dots \end{cases}$$
 expresado en coordenadas polares. Una aplicación de Poincaré, considerando como sección transversal $\Sigma \equiv \{\theta = 0\}$ y con coordenadas sobre Σ el radio polar, es analítica y se puede expresar por

$$\mathcal{J}^{2M+1}(P(r)) = r + \sum_{k=1}^M \alpha a_{2k+1} r^{2k+1} (1 + \mathcal{O}(r))$$

donde $\alpha > 0$ y $M \geq 1$ y por tanto se sigue que el campo **(N.D.)** es centro si y sólo si $a_{2k+1} = 0 \forall k \geq 1$.

Con objeto de estudiar la integrabilidad analítica necesitamos asegurar que la transformación normalizante es convergente. Aplicando el teorema de Bruno al caso centro, en el caso foco en general no hay convergencia, se obtiene

Teorema 4 *Si **(N.D.)** es centro entonces*

- a) **(N.D.)** es \mathcal{C}^ω -conjug
$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 + \beta_2 r^2 + \beta_4 r^4 + \dots \end{cases}$$
- b) **(N.D.)** es \mathcal{C}^ω -equiv
$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Por tanto se sigue de este teorema que la existencia del centro no degenerado es equivalente a la existencia de una integral primera analítica. Este fué el resultado obtenido por Poincaré y Lyapunov (ver [13], [10]).

Es más se ha demostrado que si el campo **(N.D.)** tiene una integral primera formal entonces tiene también una integral primera analítica.

Para el estudio de la función periodo de estos centros y la posible isocronía (ver [2], [9], [14]) y referencias en ellos.

4 Caso nilpotente

En el caso nilpotente el problema de la monodromía fue resuelto por Andreev (ver [4]), y la imposibilidad de isocronía de sus centros por Villarini (ver [16]). En general los únicos centros que pueden ser isócronos son los campos **(N.D.)**.

El método de Poincaré-Lyapunov tal y como fué descrito en la sección anterior no se puede aplicar. No podemos elegir corrangos de los operadores ℓ_k , ahora con $\mathcal{X}_1 = (y, 0)^t$, que sean semidefinidos positivos, y por tanto no podemos conocer el signo de la función \dot{F} en un entorno del origen.

Por lo que respecta al método de la forma normal se puede demostrar que si **(C.N.)** es monodrómico, entonces es formalmente equivalente al campo

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x) \\ \dot{y} = -x^{2n-1}, \end{cases} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A(x) = A_n x^n + \dots$$

Ahora bien usando coordenadas polares casihomogéneas se puede demostrar que existe una aplicación de Poincaré analítica y por tanto se llega al siguiente resultado

Teorema 5 (*Sadovskii, 76*) (C.N.) centro si y sólo si $A(-x) = A(x)$.

Obsérvese que para demostrar que estos campos son centros, no necesitamos resultados de convergencia de la transformación a forma normal.

Una aplicación de Poincaré para estos campos monodrómicos la contruye Moussu (ver [12]) y viene expresada, en función del radio polar generalizado, mediante

$$\mathcal{J}^{2M+1}(P(\rho)) - \rho = \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^M \alpha_k A_{2k+1} \rho^{2k+1} (1 + \mathcal{O}(\rho)).$$

Asímismo el mismo autor basado en trabajos sobre formas normales de Takens (ver [17]) da el primer paso de cara a estudiar la integrabilidad analítica de los centros nilpotentes analíticos obteniendo

Teorema 6 (*Moussu, 82*), (*Takens, 74*)

(C.N.) centro si y sólo si (C.N.) es \mathcal{C}^∞ -local equivalente a
$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x^2) \\ \dot{y} = -x^{2n-1}. \end{cases}$$

Además demuestra que existen centros nilpotentes analíticos que **no** tienen integral primera analítica a diferencia de los centros no degenerados.

El paso definitivo en el estudio de la convergencia de la transformación normalizante lo dan Strozyna y Zoladek (ver [18]) demostrando que la transformación normalizante se puede elegir analítica

Teorema 7 (*Strozyna-Zoladek, 00*)

(C.N.) centro si y sólo si (C.N.) es \mathcal{C}^ω local equivalente a
$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x^2) \\ \dot{y} = -x^{2n-1}. \end{cases}$$

Además, (C.N.) es analíticamente integrable si y sólo si $A \equiv 0$.

5 Caso degenerado

Una vez en este punto y siguiendo un paralelismo con los casos no degenerado y nilpotente, es natural plantearse algunos problemas para el conjunto de campos monodrómicos con una cara compacta en su diagrama de Newton (ver [8]), los casos anteriormente analizados están en este conjunto.

- 1) Caracterizar la forma normal formal de dichos campos.
- 2) Caracterizar el problema del centro para los campos en forma normal.
- 3) Analizar la integrabilidad formal a través de la integrabilidad de los campos en forma normal.
- 4) Estudiar la convergencia de la transformación normalizante.

En las siguientes líneas esbozamos las ideas principales que nos llevan a resolver el problema 1) y dar algunos resultados parciales del problema 2) en el caso de una singularidad particular .

Sea el campo monodrómico cuya única cara compacta del diagrama de Newton es del tipo $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$ y grado r .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{r+1}(\mathbf{x}) + \dots \quad (1)$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ es equilibrio aislado; $h \in \mathcal{P}_{r+|\mathbf{t}|}^{\mathbf{t}}$, (Hamiltoniano principal), $\mathbf{F}_{r+|\mathbf{t}|} \in \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{t}}$, $k \geq 1$.

Aplicando el cambio $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{q}_k(\mathbf{y})$ con $\mathbf{q}_k \in \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}}$, (polinomios vectoriales casihomogéneos de grado k y tipo \mathbf{t}) y $dt = (1 - \mu_k(\mathbf{x}))dT$, con $\mu_k \in \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$, (polinomios escalares casihomogéneos de grado k y tipo \mathbf{t}) resulta:

$$\mathbf{y}' = \frac{d\mathbf{y}}{dT} = \mathbf{X}_h(\mathbf{y}) + \mathbf{G}_{r+1}(\mathbf{y}) + \dots \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{G}_{r+j} = \mathbf{F}_{r+j}, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \mathbf{G}_{r+k} = \mathbf{F}_{r+k} - \mu_k \mathbf{X}_h - [\mathbf{q}_k, \mathbf{X}_h].$$

Se puede elegir (\mathbf{q}_k, μ_k) tal que $\mathbf{G}_{r+k} \in \text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k})$ siendo $\mathcal{L}_{r+k} : \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \times \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \rightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{t}}$ dado por $\mathcal{L}_{r+k}(\mathbf{q}_k, \mu_k) = \mu_k \mathbf{X}_h + [\mathbf{q}_k, \mathbf{X}_h]$.

Definiendo además los operadores $\mathbf{L}_{r+k} : \mathcal{Q}_k^{\mathbf{t}} \rightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{t}}$, $M_{r+k} : \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}} \rightarrow \mathcal{Q}_{r+k}^{\mathbf{t}}$ dados por $\mathbf{L}_{r+k}(\mathbf{q}_k) = [\mathbf{q}_k, \mathbf{X}_h]$ y $M_{r+k}(\mu_k) = \mu_k \mathbf{X}_h$,

Es claro que se cumple $\text{Range}(\mathcal{L}_{r+k}) = \text{Range}(\mathbf{L}_{r+k}) + \text{Range}(M_{r+k})$.

Con objeto de reducir el conjunto de los cambios temporales, consideramos el operador $\ell_k : \mathcal{P}_{k-r}^{\mathbf{t}} \rightarrow \mathcal{P}_k^{\mathbf{t}}$ definido como $\ell_k(\mu_{k-r}) = \nabla \mu_{k-r} \cdot \mathbf{X}_h = \{h, \mu_{k-r}\}$, (paréntesis de Poisson). Se obtiene (ver [3])

Proposición 8 $\text{Range}(\mathcal{L}_{r+k}) = M_{r+k}(\text{Cor}(\ell_k)) + \text{Range}(\mathbf{L}_{r+k})$.

La proposición anterior nos da una importante simplificación en los cambios del tiempo, sólo hay que considerar aquellos que están en el $\text{Cor}(\ell_k)$.

Siguiendo ahora las siguientes pautas:

a) Descomposición *conservativa-disipativa* \equiv *divergencia nula- divergencia total*, $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{h_{k+|\mathbf{t}|}}(\mathbf{x}) + \mu_k \mathbf{D}_0$, donde $\mathbf{D}_0 = (t_1 x, t_2 y)^{\mathbf{t}}$, es el campo de Euler asociado a h .

b) Ciclicidad de los $\text{Cor}(\ell_k)$.

c) Cálculo de $\text{Cor}(\mathcal{L}_{r+k})$ en función de los operadores ℓ_k .

Obtenemos el siguiente resultado (ver [1])

Teorema 9 *El sistema (1) es equivalente a:*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \mathbf{X}_h(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I} - \{0\}} \mathbf{X}_{\alpha_i}(\mathbf{x}) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \beta_j(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 + \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i^{(l)}(\mathbf{x}) h^{l+1} \mathbf{D}_0 + \sum_{j \in \mathcal{K}} \delta_j^{(l)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}_0 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathcal{I} = \{0 \leq i < r + |\mathbf{t}| / \mathcal{P}_{i-r}^{\mathbf{t}} = \{0\}\}$, $\mathcal{J} = \{j \in \mathcal{I} / j > r\}$, $\mathcal{K} = \{0 \leq k < r + |\mathbf{t}| / k \notin \mathcal{I}\}$, $\delta_j^{(l)}, \beta_j \in \text{Cor}(\ell_j)$, $\gamma_i^{(l)} \in \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+i})$, $\alpha_i \in \text{Cor}(\ell_{r+|\mathbf{t}|+i}) - \{\mu h / \mu \in \mathcal{P}_i^{\mathbf{t}}\}$ y $\mathbf{D}_0 = (t_1 x, t_2 y)^t$ (campo de Euler asociado a h).

Aplicando el resultado anterior a la singularidad $(y^3, -x^5)^t$ obtenemos la siguiente forma normal equivalente a orden infinito.

Teorema 10 Sea $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^3 \\ -x^5 \end{pmatrix} + \dots$ es formalmente equivalente a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^3 \\ -x^5 \end{pmatrix} + \left(\alpha_8^{(1)} x^4 + \alpha_8^{(2)} x y^2 \right) \mathbf{D}_0 + \beta_9 x^3 y \begin{pmatrix} x \\ -2y \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \left[\alpha_{12l+9} x^3 y h^l \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+10} x^2 y^2 h^l \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+11} x y^3 h^l \mathbf{D}_0 + \right. \\ &\left(\alpha_{12l+12}^{(1)} h^{l+1} + \alpha_{12l+12}^{(2)} x^3 y^2 h^l \right) \mathbf{D}_0 + \left(\alpha_{12l+14}^{(1)} x h^{l+1} + \right. \\ &\left. \alpha_{12l+14}^{(2)} x^4 y^2 h^l \right) \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+15} y h^{l+1} \mathbf{D}_0 + \alpha_{12l+16} x^2 h^{l+1} \mathbf{D}_0 + \\ &\alpha_{12l+17} x y h^{l+1} \mathbf{D}_0 + \left(\alpha_{12l+18}^{(1)} x^3 h^{l+1} + \alpha_{12l+18}^{(2)} y^2 h^{l+1} \right) \mathbf{D}_0 + \\ &\left. \alpha_{12l+19} x^2 y h^{l+1} \mathbf{D}_0 + \left(\alpha_{12l+20}^{(1)} x^4 h^{l+1} + \alpha_{12l+20}^{(2)} x y^2 h^{l+1} \right) \mathbf{D}_0 \right] \end{aligned}$$

Este resultado permite construir los primeros términos del desarrollo de una aplicación de Poincaré

$$P(\rho) = \rho + \alpha_8^{(1)} \rho^2 + \alpha_{10} \rho^4 + \alpha_{12}^{(1)} \rho^6 + \alpha_{14}^{(2)} \rho^8 + (A\alpha_{16} + B\alpha_8^{(2)} \alpha_{15}) \rho^{11} + \dots, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

y con ello obtener condiciones necesarias de centro, y la ciclicidad de los focos para familias particulares.

Referencias

- [1] A. ALGABA AND C. GARCÍA. Quasihomogeneous normal form with conservative principal part. *in preparation*.
- [2] A. ALGABA, E. FREIRE AND E. GAMERO. Isochronicity via normal form. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 1:133-156, 2000.
- [3] A. ALGABA, E. FREIRE, E. GAMERO AND C. GARCÍA. Quasihomogeneous normal forms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 150:193-216, 2003.
- [4] A.F. ANDREEV. Investigation of the behavior of the integral curves of a systems of two differential equations in neighbourhood of a singular point. *Traslation of AMS*, 8: 183-207, 1958.

- [5] V. ARNOLD AND Y. ILYASHENKO. *Enciclopedia Math. Sci. Dynamical System 1*. Springer Verlag, 1988.
- [6] G.R. BELITSKII. Smooth Equivalence of Germs of Vector Fields with a Single Zero Eigenvalue or a Par of Purely Imaginary Eigenvalues. *Funct. Anal. Appl.*, 20 (4): 1986.
- [7] A. BRUNO. Analytic form of differential equations I. *Trans. Moscow Math. Sci.*, 25: 119–262, 1971.
- [8] F. DUMORTIER. *Local study of planar vector fields: Singularities and their unfoldings*. Structures in Dynamics, Finite Dimensional Deterministic Studies. (H.W. Broer et. al. eds.), Stud. Math. Phys. 2, North-Holland, 161-241, 1991.
- [9] E. FREIRE, A. GASULL AND A. GUILLAMON. First derivate of the period function with applications. *Journal of Differential Equations*, 204:139-162, 2004.
- [10] A.M. LYAPUNOV. *Stability of motion*. volume 30 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York-London, 1966.
- [11] N.B. MEDVEDEVA. A Monodromic Criterion for a Singular Point of a Vector Field on the Plane. *St. Peterbourg Math. J.*, volume 13, 2:253–268, 2002.
- [12] R. MOUSSU. Symetrie et forme normale des centres et foyers degeneres. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2: 241–251, 1982.
- [13] H. POINCARÉ. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. J. Math. Pures et Appl. , 2-7: 375–422, 1981.
- [14] M. SABATINI. Characteizing isochronous centers by Lie brackets. *Diff. Eq. Dyn. Sys.*, 5:91-99, 1997.
- [15] A.P. SADOVSKII. Problem of distinguishing a center and a focus for a system with Nonvanishing linear part. *Differential Equations*, 874–880, (1976)
- [16] M. VILLARINI. Regularity properties of the period function near a centre of a planar vector field. *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, Vol 18, 2: 787–803, 1992.
- [17] F. TAKENS. Normal forms for certain singularities of vector fields. *Ann. Inst. Fourier*, 23: 163–195, 1974.
- [18] E. STROZYNA, H. ZOLADEK. The analytic and formal normal form for the nilpotent singularity. *Journal of Differential Equations*, 179: 479–537, 2000.

Conjuntos ω -límite para flujos analíticos en el plano *

V. JIMÉNEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

vjimenez@um.es

Resumen

Esta nota es un avance de los resultados principales de [17]. En ella se caracterizan topológicamente los conjuntos ω -límite de los flujos asociados a sistemas de ecuaciones analíticos y polinomiales en el plano.

Palabras clave: *Ciclo límite, conjunto ω -límite, flujo asociado a un sistema de ecuaciones, sistemas de ecuaciones analíticos, sistemas de ecuaciones polinomiales.*

Clasificación por materias AMS: *34C05, 34C07, 37C10.*

1 Introducción

El enfoque teórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias sufrió una verdadera revolución a finales del siglo XIX como consecuencia del artículo “Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle” publicado por Henri Poincaré entre 1881 y 1886 [21], [22], [23], [24]. Este trabajo fue el punto de partida de lo que se ha dado en llamar teoría de los sistemas dinámicos.

Cuando Poincaré empezó a interesarse por el estudio de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales la tendencia imperante era la de construir funciones soluciones de una ecuación usando desarrollos en serie para describirlas cerca de los puntos singulares de la misma. El tratamiento de Poincaré de las ecuaciones prima los aspectos cualitativos sobre los cuantitativos: es el comportamiento a largo plazo de las soluciones, más que encontrar su expresión precisa, lo que realmente importa. Como contrapartida se procura aprehender la naturaleza global de todas las soluciones, y no sólo aquellas próximas a los puntos singulares. Este enfoque del problema exige introducir nuevas herramientas geométricas, e incluso probabilísticas, que complementen a las analíticas ya disponibles.

*Este trabajo ha sido financiado en parte por la Fundación Séneca (Comunidad Autónoma de la Región de Murcia), proyecto 00684/PI/04, y el Ministerio de Educación y Ciencia y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional, proyecto MTM2005-03868.

Posiblemente la aportación fundamental de Poincaré a la teoría de las ecuaciones diferenciales (así se afirma, por ejemplo, en [1]) es el resultado que informalmente enunciamos a continuación:

Teorema 1 (Poincaré [23]) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función analítica. Si $z(t)$ es una solución acotada de la ecuación $z' = f(z)$ que no acaba en un punto singular, entonces es o bien una solución periódica o bien converge a una solución periódica cuando el tiempo tiende a infinito.*

Hemos de resaltar que cuando usamos la palabra “analítica” nos referimos a funciones analíticas reales, es decir, a funciones que admiten en todos los puntos desarrollos locales en series de potencias en las variables x e y , no a funciones holomorfas.

Este teorema fue generalizado 16 años después por Ivar Bendixson a a una familia mucho más general de funciones:

Teorema 2 (Bendixson [4]) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 . Si $z(t)$ es una solución acotada de la ecuación $z' = f(z)$ que no acaba en un punto singular, entonces es o bien una solución periódica o bien converge a una solución periódica cuando el tiempo tiende a infinito.*

Ésta es la formulación habitual del célebre teorema de Poincaré-Bendixson, punto de partida de toda una rama teórica de los sistemas dinámicos cuyo objetivo es la descripción, tanto geométrica como dinámica, del conjunto de puntos de acumulación de las soluciones de una ecuación dada.

En este ámbito una línea de trabajo particularmente fructífera ha permitido debilitar todavía más las condiciones sobre f . Antes de entrar en detalles necesitamos la definición abstracta de sistema dinámico, que ya estaba implícita en una obra de Birkhoff de 1927 [5] y fue formulada explícita e independiente por Markov (1931) y Whitney (1932).

Definición 1 (Markov [19], Whitney [26],[27]) *Sean X un espacio topológico y $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ una aplicación continua. Llamamos a (X, Φ) un sistema dinámico (continuo) si*

- (i) $\Phi(0, z) = z$ para todo $z \in X$,
- (ii) $\Phi(t + s, z) = \Phi(t, \Phi(s, z))$ para todo $z \in X$ y $t, s \in \mathbb{R}$.

Llamamos *flujo* a la aplicación Φ y *espacio de fases* al espacio X . Para cada $x \in X$, llamamos a la curva $\Phi(\mathbb{R} \times \{z\})$ (y a veces, impropriamente, a su parametrización $\Phi_z(t) = \Phi(t, z)$) la *órbita* de z . Cuando la órbita de un punto z está formada sólo por dicho punto se dice que z es *singular*. Si existe un número $T > 0$ tal que $\Phi(T, z) = z$ y $z \notin \Phi((0, T) \times \{z\})$ se dice que la órbita de z es *periódica*. Nótese que toda órbita periódica es una *circunferencia (topológica)*, esto es, un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unidad $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Si $z \in X$ entonces los conjuntos de puntos límite de $\Phi_z(t)$ cuando t tiende a $-\infty$ y ∞ se denominan, respectivamente, el

conjunto α -límite y el *conjunto ω -límite* de z (o de la órbita de z) por el flujo Φ y se denotan como $\alpha_\Phi(z)$ y $\omega_\Phi(z)$.

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación suficientemente regular, es bien sabido que para cada $z_0 \in \mathbb{R}^2$ existe una única solución (maximal) $\Phi_{z_0}(t) = z(t)$ de la ecuación $z' = f(z)$ de manera que $z(0) = z_0$. Puede ocurrir (por ejemplo si f es lineal) que todas las soluciones Φ_z estén definidas sobre \mathbb{R} . Cuando esto sucede y definimos $\Phi(t, z) = \Phi_z(t)$, obtenemos un flujo Φ que hereda las propiedades de diferenciabilidad de f . Recíprocamente, si Φ es un flujo diferenciable sobre \mathbb{R}^2 y definimos $f(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, z)$, entonces, para cada $z_0 \in \mathbb{R}^2$, $\Phi_{z_0}(t) = \Phi(t, z_0)$ es la solución $z(t)$ de $z' = f(z)$ que satisface la condición $z(0) = z_0$. A primera vista podríamos tener problemas para definir un flujo partiendo de las soluciones de una ecuación $z' = f(z)$ que no estén definidas sobre todo \mathbb{R} pero la dificultad es sólo aparente, pues se puede reemplazar la ecuación de partida por otra con las mismas órbitas (es decir, el mismo conjunto de gráficas soluciones), idénticamente orientadas por el tiempo, y cuyas soluciones toman valores en toda la recta real.

Mientras que toda ecuación diferencial autónoma puede reinterpretarse como un flujo, el recíproco no es claro pues no hay una manera obvia de traducir un flujo no diferenciable a una ecuación. Por tanto, en primera instancia, la teoría de flujos es más rica que la de ecuaciones. En los años sesenta, aprovechando trabajos previos de Whitney [28], Bohr y Frenkel [6] y Bebutov [3], Hajek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson a todos los flujos continuos en el plano. Así pues, formulado en terminología moderna, el teorema de Poincaré-Bendixson quedaría como sigue:

Teorema 3 (Hajek [12], [13], [14]) *Sean $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un flujo continuo y $z \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que la semiórbita $\Phi_z([0, \infty))$ es acotada y que $\omega_\Phi(z)$ no tiene puntos singulares. Entonces $\omega_\Phi(z)$ es una órbita periódica.*

Este teorema, como otros que se enunciarán más adelante, admite una versión análoga para conjuntos α -límite, que omitiremos.

Merece la pena resaltar que en 1986 Gutiérrez publicó el interesante artículo [11] en el que, entre otras cosas, se prueba que todo flujo continuo en \mathbb{R}^2 es equivalente a uno de clase C^∞ . “Equivalente” significa que existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que lleva órbitas a órbitas y además preserva las orientaciones que el flujo induce en ellas. Esto implica que las teorías de flujos continuos y de clase C^∞ son esencialmente coincidentes: por ejemplo, uno podría deducir el teorema 3 a partir de la versión clásica de Bendixson (pero no de la de Poincaré, pues el teorema de Gutiérrez no proporciona conjugaciones con flujos analíticos; veremos enseguida que en este caso las cosas son muy diferentes).

El teorema de Poincaré-Bendixson nos dice como son los conjuntos ω -límite de ciertos tipos de órbitas, y lo hace desde dos puntos de vista, el dinámico (son órbitas periódicas) y el topológico (son circunferencias). De acuerdo con éste último, que es el que nos interesará, la cuestión de caracterizar topológicamente los posibles conjuntos ω -límite de los flujos continuos planos, sin restricción

alguna sobre las órbitas que los generan ni los puntos que contiene, se antoja completamente natural. Vinograd halló la respuesta en 1952. Ligeramente reformulada, es la siguiente ($\mathbb{R}_\infty^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ denota la compactificación por un punto de \mathbb{R}^2):

Teorema 4 (Vinograd [25]) *Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto ω -límite para un cierto punto $z \in \mathbb{R}^2$ y un cierto flujo continuo (o, equivalentemente, de clase C^∞) Φ si y sólo si $\Omega = \mathbb{R}^2 \cap \text{Bd } O$ para una cierta región simplemente conexa O de \mathbb{R}_∞^2 .*

Este resultado deja de ser válido para los flujos generados por ecuaciones $z = f'(z)$ en los que la función f es analítica. De hecho desde los tiempos de Poincaré y Bendixson era más o menos conocido que en este caso (bajo las hipótesis adicionales de acotación y número finito de puntos singulares) los ω -límites sólo pueden ser puntos, circunferencias o policiclos. Un *policiclo* es un conjunto finito de puntos singulares (posiblemente repetidos) y un conjunto finito de órbitas no singulares (sin repeticiones), que conectan los puntos singulares en un cierto orden: la órbita no singular j -ésima conecta (según la orientación prescrita por el flujo) los puntos singulares j -ésimo y $j + 1$ -ésimo. Conviene subrayar que ha sido necesario esperar a los relativamente recientes y muy profundos trabajos de Andronov *et al.* [2], Dumortier [8], Ilyashenko [16] y Écalle [9] (éstos dos últimos volverán enseguida a ser mencionados) para disponer de herramientas que permitan una demostración rigurosa de dicha afirmación.

La falta de dichas herramientas justifica en parte que un problema tan natural como el de la caracterización topológica de los conjuntos ω -límites de flujos analíticos planos haya permanecido sin abordar hasta la fecha, pero además hay una razón histórica de peso que hizo discurrir la investigación de los flujos analíticos, en particular los generados por funciones polinomiales, por derroteros bastante distintos. En 1900 Hilbert presentó su famosa lista de problemas en el II Congreso Internacional de Matemáticas de París. En concreto, la segunda parte del problema decimosexto consiste en probar que el número de ciclos límites (órbitas periódicas aisladas) de un sistema de ecuaciones polinomiales de grado a lo sumo k no puede superar una cota $H(k)$ que sólo depende de k .

A pesar de la enorme esfuerzo que se ha invertido en su resolución, el tiempo ha demostrado la extrema dificultad del problema decimosexto de Hilbert y a día de hoy permanece abierto. El avance más sustancial ha consistido en probar que todo sistema polinomial tiene un número finito de ciclos límite. Es corriente referirse a este resultado como teorema de Dulac, pues éste publicó una supuesta demostración en 1923 [7]. Sin embargo Ilyashenko demostró en 1982 que el argumento de Dulac tiene un error crítico [15] y no fue hasta comienzos de los noventa cuando el propio Ilyashenko [16] y Écalle [9] proporcionaron de manera independiente pruebas correctas del teorema. Es preciso advertir de la extrema dificultad de estos trabajos, inaccesibles incluso para la mayoría de los especialistas en la materia.

Recientemente Llibre y Rodríguez probaron que el recíproco del teorema de Dulac también es cierto, en el sentido de que toda posible configuración topológica de ciclos límite es realizada por algún sistema polinomial [18]. Peralta-Salas dio una construcción alternativa en [20].

Vemos pues que en los últimos tiempos se ha ido desarrollando una potente maquinaria, que permitiría abordar con buenas perspectivas de éxito el problema de la caracterización topológica de los conjuntos ω -límite de flujos generados por ecuaciones analíticas y polinomiales. Así lo han hecho J. Llibre y el autor de esta nota en [17]. A continuación enunciamos los resultados obtenidos, remitiendo a [17] para las demostraciones. En [17] se caracterizan asimismo los conjuntos ω -límite para flujos analíticos en la esfera y el plano proyectivo, pero por simplicidad de la exposición hemos preferido restringirnos a \mathbb{R}^2 .

2 Formulación de los resultados

En lo que sigue usamos la notación $\omega_f(z)$ para referirnos al conjunto ω -límite de z por el flujo asociado a la ecuación $z' = f(z)$. Como es habitual, decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es un *arco* (respectivamente, un *disco*) si es homeomorfo a $[0, 1]$ (respectivamente, a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$).

Definición 2 Decimos que $A \subset \mathbb{R}^2$ es un cactus si es conexo y existen discos $\{D_i\}_{i=1}^n$ tales que:

- (i) $A = \bigcup_{i=1}^n D_i$;
- (ii) si $i \neq j$ entonces D_i y D_j tienen a lo sumo un punto en común;
- (iii) si $C \subset A$ es una circunferencia entonces existe i tal que $C \subset D_i$.

Definición 3 Decimos que $A \subset \mathbb{R}^2$ es un semiplano si tanto A como $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Int } A$ son homeomorfos a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.

Definición 4 Decimos que $A \subset \mathbb{R}^2$ es una cadena si existen discos $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ tales que:

- (i) $A = \bigcup_{i=1}^\infty D_i$;
- (ii) si $|i - j| = 1$ entonces D_i y D_j se intersecan exactamente en un punto; en los demás casos D_i y D_j son disjuntos;
- (iii) los discos D_i tienden a infinito cuando $i \rightarrow \infty$, es decir, cada subconjunto acotado de \mathbb{R}^2 se interseca con a lo sumo un número finito de discos D_i .

Teorema 5 Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función analítica y $z \in \mathbb{R}^2$ y denotemos $\Omega = \omega_f(z)$. Entonces $\Omega = \text{Bd } A$, siendo A uno de los conjuntos siguientes:

- (a) el conjunto vacío;

- (b) un único punto;
- (c) un cactus;
- (d) la unión de una circunferencia C y un número finito de cactus disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales está incluido en el disco delimitado por la circunferencia C y se interseca con C exactamente en un punto;
- (e) la unión de una cantidad numerable (finita o infinita) de cactus, semiplanos y cadenas, disjuntos dos a dos (con la excepción de que cada cactus puede intersectarse con un único semiplano o cadena, exactamente en un punto); además, cada subconjunto acotado de \mathbb{R}^2 se interseca con a lo sumo un número finito de dichos cactus, semiplanos y cadenas.

Recíprocamente, si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto como los anteriormente descritos y $\Omega = \text{Bd } A$, entonces existen una función analítica $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $h(\Omega)$ es el conjunto ω -límite de una de las órbitas de $z' = f(z)$.

Nota 1 Puede probarse que la parte directa del teorema 5 es de hecho cierta para cualquier flujo continuo siempre que Ω contenga un número finito de órbitas.

Teorema 6 Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función polinomial y $z \in \mathbb{R}^2$ y denotemos $\Omega = \omega_f(z)$. Entonces $\Omega = \text{Bd } A$, siendo A uno de los conjuntos siguientes:

- (a) el conjunto vacío;
- (b) un único punto;
- (c) un cactus;
- (d) la unión de una circunferencia C y un número finito de cactus disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales está incluido en el disco delimitado por la circunferencia C y se interseca con C exactamente en un punto;
- (e) la unión de una cantidad finita de cactus, semiplanos y cadenas, disjuntos dos a dos (con la excepción de que cada cactus puede intersectarse con un único semiplano o cadena, exactamente en un punto).

Recíprocamente, si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto como los anteriormente descritos y $\Omega = \text{Bd } A$, entonces existen una función polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $h(\Omega)$ es el conjunto ω -límite de una de las órbitas de $z' = f(z)$.

Referencias

- [1] D. AUBIN Y A. DAHAN DALMEDICO. Writing the history of dynamical systems and chaos: longue durée and revolution, disciplines and cultures. *Historia Math.*, 29:273–339, 2002.

- [2] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON Y A. G. MAĀER. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. Halsted Press, New York-Toronto, 1973.
- [3] M. V. BEBUTOV. Sur la représentation des trajectoires d'un système dynamique sur un système de droites parallèles. *Bull. Math. Univ. Moscou*, 2:1–22, 1939.
- [4] I. BENDIXSON. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math.*, 24:1–88, 1901.
- [5] G. D. BIRKHOFF. *Dynamical systems*. American Mathematical Society, Providence, 1966 (reimpresión de la edición de 1927).
- [6] H. BOHR Y W. FENCHEL. Ein Satz über stabile Bewegungen in der Ebene. *Danske Vid. Selsk*, 14:1–15, 1936.
- [7] H. DULAC. Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math. France*, 51:45–188, 1923.
- [8] F. DUMORTIER. Singularities of vector fields on the plane. *J. Differential Equations*, 23:53–106, 1977.
- [9] J. ÉCALLE. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Hermann, Paris, 1992.
- [10] F. G. GASCÓN Y D. PERALTA-SALAS. Attractors and symmetries of vector fields: the inverse problem. *Geom. Dedicata* (en prensa).
- [11] C. GUTIÉRREZ. Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6:17–44, 1986.
- [12] O. HÁJEK. Sections of dynamical systems in E^2 . *Czechoslovak Math. J.*, 15:205–211, 1965.
- [13] O. HÁJEK. Structure of dynamical systems. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 6:53–72, 1965.
- [14] O. HÁJEK. *Dynamical systems in the plane*. Academic Press, London, 1968.
- [15] YU. S. IL'YASHENKO. Singular points and limit cycles of differential equations in the real and complex plane (en ruso). Preprint NIVTS AN SSSR, Pushchino, 38, 1982.
- [16] YU. S. IL'YASHENKO. *Finiteness theorems for limit cycles*. American Mathematical Society, Providence, 1991.
- [17] V. JIMÉNEZ LÓPEZ Y J. LLIBRE. A topological characterization of the ω -limit set of analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane. Preprint, 2005.

- [18] J. LLIBRE Y G. RODRÍGUEZ. Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields. *J. Differential Equations*, 198:374–380, 2004.
- [19] A. A. MARKOV. Sur une propriété générale des ensembles minimaux de M. Birkhoff. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 193:823–825, 1931.
- [20] D. PERALTA-SALAS. Note on a paper of J. Llibre and G. Rodríguez concerning algebraic limit cycles. *J. Differential Equations* (en prensa).
- [21] H. POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle I. *J. Math. Pures Appl.*, sér. 3(7):375–422, 1881.
- [22] H. POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle II. *J. Math. Pures Appl.*, sér. 3(8):251–286, 1882.
- [23] H. POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle III. *J. Math. Pures Appl.*, sér. 4(1):167–244, 1885.
- [24] H. POINCARÉ. Sur les courbes définies par une équation différentielle IV. *J. Math. Pures Appl.*, sér 4(2):151–217, 1886.
- [25] R. È. VINOGRAD. On the limit behavior of an unbounded integral curve (en ruso). *Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap.* 155, Mat. 5:94–136, 1952.
- [26] H. WHITNEY. Regular families of curves I. *Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A.*, 18:275–278, 1932.
- [27] H. WHITNEY. Regular families of curves II. *Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A.*, 18:340–342, 1932.
- [28] H. WHITNEY. Regular families of curves. *Ann. of Math. (2)*, 34:244–270, 1933.

Un puente entre las ecuaciones diferenciales con retardo y los sistemas dinámicos discretos*

EDUARDO LIZ

Departamento de Matemática Aplicada II,
E.T.S.E. Telecomunicación, Campus Marcosende,
Universidade de Vigo

eliz@dma.uvigo.es

Resumen

La ecuación diferencial ordinaria $x'(t) = -x(t) + f(x(t))$ y la ecuación en diferencias con argumento continuo $x(t) = f(x(t-1))$ se pueden considerar como los casos límite de una familia de ecuaciones diferenciales con retardo. Además, bajo ciertas condiciones sobre la función f , se puede observar una transición suave entre la dinámica de ambas, utilizando el retardo como parámetro de bifurcación.

Palabras clave: *Ecuaciones diferenciales con retardo, sistemas dinámicos discretos, soluciones periódicas, estabilidad global.*

Clasificación por materias AMS: *34K13, 34K20, 34K26, 37E05.*

1 Introducción

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) + x(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y la ecuación en diferencias con argumento continuo obtenida sustituyendo $x'(t)$ por el operador en diferencias $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$, es decir,

$$x(t) = f(x(t-1)), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

La dinámica de la ecuación (2) está determinada por la de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, \quad (3)$$

*Parcialmente subvencionado por el M.E.C. y FEDER, mediante el proyecto MTM2004-06652-C03-02

donde $x_n = x(n)$, $n = 0, 1, \dots$ (ver, por ejemplo, [2]).

Las formulaciones (1) y (3) corresponden a sendos modelos matemáticos, el primero de ellos continuo y el segundo discreto. En ambos casos los estados de equilibrio vienen dados por las soluciones de la ecuación $f(c) = c$. Una de las hipótesis que impondremos a f en esta nota es la de *feed-back* negativo ($xf(x) < 0$ para todo $x \neq 0$), lo que, junto con la continuidad de f , implica que el único equilibrio es $c = 0$. Bajo esta condición, el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1) es muy simple: todas las soluciones convergen a cero. Sin embargo, la dinámica de (3) es más complicada; en particular, ninguna solución puede converger a cero si $|f'(0)| > 1$.

El objetivo de esta nota es explicar, en una situación sencilla, cómo las ecuaciones (1) y (2) se pueden considerar como los casos límite de una familia de ecuaciones diferenciales con retardo, de modo que la transición entre las dinámicas de ambas ecuaciones se puede analizar tomando el retardo como parámetro de bifurcación. Para ello consideremos la familia de ecuaciones

$$x'(t) = -x(t) + f(x(t-r)), \quad (4)$$

donde $r > 0$ es un parámetro de retardo. Obviamente, (4) se reduce a la ecuación ordinaria (1) en el caso límite $r = 0$. Por otra parte, el cambio de escala en la variable temporal $t \mapsto rt$ transforma la ecuación (4) en

$$\varepsilon x'(t) = -x(t) + f(x(t-1)), \quad (5)$$

donde $\varepsilon = 1/r$. De este modo se puede ver la ecuación en diferencias con argumento continuo (2) como el caso límite de (4) cuando $r \rightarrow \infty$ (lo que corresponde a $\varepsilon = 0$ en (5)).

2 Resultados principales

En nuestros resultados utilizaremos las siguientes hipótesis sobre f :

- (H1) (Continuidad y acotación): f es continua y está acotada inferiormente.
- (H2) (*Feed-back* negativo): $xf(x) < 0$ para todo $x \neq 0$.
- (H3) (Monotonía): f es de clase C^1 y $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (H4) (Derivada Schwarziana negativa): f es de clase C^3 y $(Sf)(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

es la derivada Schwarziana de f .

La ecuación (4) con f verificando las condiciones (H1)-(H4) aparece como modelo en distintos fenómenos en campos como la biología, fisiología y

economía. Un ejemplo célebre es el modelo en *hematopoiesis* (producción de células sanguíneas) propuesto por Mackey y Glass en [5]:

$$x'(t) = -\delta x(t) + \frac{p}{1 + [x(t-r)]^n}, \quad \delta, p, r > 0, n > 1. \tag{6}$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma (4), con $f(0) = 0$, tras un cambio de variable (ver [4]).

No es difícil probar que, bajo las hipótesis (H1)-(H4), el sistema discreto definido por (3) tiene una dinámica relativamente simple: el único punto fijo es un atractor global si $|f'(0)| \leq 1$, mientras que si $|f'(0)| > 1$ existe un ciclo de período dos $\{a, b\}$ (es decir, $f(a) = b, f(b) = a, a < b$) que atrae todas las soluciones distintas de la trivial. Este 2-ciclo da lugar a una solución periódica de (2) conocida con el nombre de “onda cuadrada”.

El siguiente resultado, debido a Ivanov y Sharkovsky, prueba que la estabilidad global del equilibrio se mantiene para la ecuación diferencial con retardo (4), independientemente del valor de $r > 0$.

Teorema 1 [2, Teorema 2.2] *Supongamos que f es continua y 0 es un atractor global de (3), es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces todas las soluciones de (4) convergen a cero.*

A continuación examinamos qué sucede cuando el equilibrio de (3) pierde su estabilidad, es decir, cuando $|f'(0)| > 1$. En este caso, el equilibrio $x = 0$ sigue siendo un atractor global para la ecuación diferencial ordinaria (1). La estabilidad asintótica local del equilibrio se mantiene para la ecuación con retraso (4) para valores suficientemente pequeños de r ; en concreto, para cada valor de $|f'(0)| > 1$, existe un valor crítico $r_0 = r_0(f'(0))$ de tal forma que $x = 0$ es asintóticamente estable para $r < r_0$ e inestable para $r > r_0$. En $r = r_0$ tiene lugar una bifurcación de Hopf (ver, por ejemplo, [1]) y por tanto existe una rama (local) de soluciones periódicas de (4) desde $(r, x) = (r_0, 0)$. El valor crítico es

$$r_0 = b_0 / \sqrt{(f'(0))^2 - 1}, \tag{7}$$

donde b_0 es la única solución en $(\pi/2, \pi)$ de la ecuación $\cos(b_0) = (f'(0))^{-1}$.

Mallet-Paret y Nussbaum prueban en [6] que en realidad existe una bifurcación global desde $(r_0, 0)$, que da lugar a un continuo de soluciones periódicas de la ecuación (4) cuya forma se aproxima a la de la onda cuadrada definida por el 2-ciclo $\{a, b\}$ cuando $r \rightarrow \infty$. El siguiente resultado es una consecuencia de los teoremas 2.1-2.3 de [6].

Teorema 2 [6] *Supongamos que f verifica (H1)-(H4) y $|f'(0)| > 1$. Entonces para cada $r > r_0$ la ecuación (4) tiene una solución periódica $x_r(t)$ que se aproxima a una onda cuadrada $p(t)$ definida por el 2-ciclo globalmente atractor de (3) del siguiente modo: dado $\delta > 0$ existen $\tilde{r} > 0$ y $K > 0$ tales que si $r > \tilde{r}$ entonces $|x_r(t) - p(t)| \leq \delta$ en $[K/r, z_1 - K/r] \cup [z_1 + K/r, z_2]$, donde $0, z_1, z_2$ son tres ceros consecutivos de x_r (la solución es z_2 -periódica). Además, la convergencia es muy regular, en el sentido de que cada solución periódica x_r tiene sólo dos intervalos de monotonía en cada período.*

Este teorema establece que las soluciones periódicas que “nacen” en la bifurcación de Hopf se transforman “suavemente” en una onda cuadrada de la ecuación en diferencias (2). Basándonos en los resultados de [4, 7], creemos que se puede describir mejor la transición entre la dinámica de la ecuación ordinaria (1) y la de la ecuación en diferencias (2). Recordemos que para definir un problema de valor inicial para la ecuación con retardo (4) necesitamos conocer los valores en $[-r, 0]$, por lo que se considera el espacio de fases C de las funciones continuas definidas en $[-r, 0]$.

Conjetura 3 *Supongamos que f verifica (H1)-(H4) y sea r_0 el valor definido en (7). Entonces:*

1. *El equilibrio $x = 0$ es globalmente atractor para la ecuación (4) siempre que sea asintóticamente estable, es decir, si $|f'(0)| \leq 1$ o si $|f'(0)| > 1$ y $r < r_0$.*
2. *Cuando $|f'(0)| > 1$ y $r > r_0$ existe una solución periódica de (4) que atrae todas las soluciones correspondientes a condiciones iniciales en un abierto denso de C y cuya forma se aproxima a la onda cuadrada de (2) definida por el 2-ciclo globalmente atractor de f .*

La primera parte de la Conjetura 3 fue formulada en [4], donde se prueba que, para cada valor de $|f'(0)| > 1$, la estabilidad global del equilibrio se mantiene para $r < r_1(|f'(0)|)$, donde

$$r_1(a) = -\ln \left[a \ln \left(\frac{a^2 + a}{a^2 + 1} \right) \right], \quad a = |f'(0)|. \quad (8)$$

Los valores r_0 y r_1 , dados por (7) y (8) respectivamente, están muy próximos (ver [4]), lo que representa un apoyo a la veracidad de la primera parte de la conjetura.

Para terminar, es interesante indicar que de los resultados obtenidos por Krisztin en [3] se deduce que la Conjetura 3 es cierta si sustituimos (H4) por la siguiente condición (que desafortunadamente no se verifica para los ejemplos conocidos modelados por la ecuación (4)):

(H5) $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y la función $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = xf'(x)/f(x)$ es estrictamente decreciente.

Referencias

- [1] J. K. HALE Y S. M. VERDUYN LUNEL. *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1993.
- [2] A. IVANOV Y A. N. SHAROVSKY. *Oscillations in singularly perturbed delay equations*. Dynamics Reported (New Series), 1:164–224, 1992.

- [3] T. KRISZTIN. *Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback*. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 6'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ., 15:1–12, 2000.
- [4] E. LIZ, V. TKACHENKO Y S. TROFIMCHUK. *A global stability criterion for scalar functional differential equations*. SIAM J. Math. Anal., 35:596–622, 2003.
- [5] M. C. MACKEY Y L. GLASS. *Oscillation and chaos in physiological control systems*. Science, 197:287–289, 1977.
- [6] J. MALLET-PARET Y R. NUSSBAUM. *A differential-delay equation arising in optics and physiology*. SIAM J. Math. Anal., 20:249–292, 1989.
- [7] H.-O. WALTHER. *The 2-dimensional attractor of $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$* . Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. 544, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

Sesión monográfica de
TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

Coordinador: GUILLERMO LÓPEZ LAGOMASINO

Participantes:

MANUEL BELLO

ANDREI MARTÍNEZ FINKELSHTEIN

XAVIER TOLSA

Teoría de aproximación

GUILLERMO LÓPEZ LAGOMASINO

Departamento de Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

1 Presentación

Este artículo resume el contenido de las tres conferencias de la sesión monográfica dedicada a la Teoría de Aproximación que se me encargó organizar en el marco del CEDYA2005. A la hora de seleccionar los temas y ponentes me guíé por los siguientes principios: que los temas fuesen de actualidad y perspectiva tanto en métodos como en áreas de aplicación y que los ponentes fuesen matemáticos jóvenes españoles que en mi opinión destacan por sus contribuciones en sus áreas de trabajo. En orden alfabético los ponentes fueron Manuel Bello Hernández, Andrei Martínez Finkelshtein y Xavier Tolsa. En ese mismo orden sus ponencias versaron sobre ortogonalidad múltiple y la aproximación racional simultánea, problemas de frontera en la teoría de polinomios ortogonales, y capacidad analítica continua y la aproximación racional uniforme.

Estas notas fueron elaboradas con la activa participación de Andrei, Manuel y Xavier. Mi aportación se limitó a esta breve presentación y la unificación del estilo y el formato de las distintas secciones para ajustarlos a las normas establecidas. Cada sección resume una de las tres ponencias y su contenido corresponde a lo que los propios autores propusieron. En la unificación debo lamentar la pérdida de parte del material por razones de espacio. De esto me hago entero responsable. A solicitud mía, las charlas fueron orientadas a dar una visión general del tema para una audiencia no especializada sin entrar en detalles técnicos ni insistir en las aportaciones personales de los conferenciantes.

2 Ortogonalidad múltiple y la aproximación simultánea

Sean $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ y $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ un vector de medidas complejas con soporte compacto en \mathbb{C} ; un polinomio $Q_{\mathbf{n}}$, $Q_{\mathbf{n}} \neq 0$, de grado $\leq |\mathbf{n}|$ es multi-ortogonal (PMO) respecto a $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ para el multi-índice \mathbf{n} si

$$\int \zeta^j Q_{\mathbf{n}}(\zeta) d\mu_k(\zeta) = 0, \quad j = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Tal polinomio existe ya que las $|\mathbf{n}| + 1$ ecuaciones anteriores determinan un sistema li-neal homogéneo en sus $|\mathbf{n}|$ coeficientes. En general, no hay un único PMO, pero queda determinado completamente, por ejemplo, si exigimos que sea mónico y de grado mínimo.

Para abreviar citaremos principalmente monografías o artículos que resumen el tema en los que se puede encontrar referencias a los trabajos originales.

2.1 Aproximantes de Hermite-Padé

Los PMO aparecen en la aproximación racional simultánea de funciones analíticas como los denominadores de los aproximantes Hermite-Padé (AHP) asociados a un sistema de funciones de Markov. Sea $\hat{\mu}_j(z) = \int (z-x)^{-1} d\mu_j(x)$ la función de Markov asociada a μ_j , ella es analítica en un entorno de infinito; como $\hat{\mu}(\infty) = 0$, si $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}$ es un polinomio de grado $\leq |\mathbf{n}|$, el término principal del desarrollo de Laurent en el infinito de $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z)$ es un polinomio, $P_{\mathbf{n},j}$, de grado $\leq |\mathbf{n}| - 1$. Más exactamente, $P_{\mathbf{n},j}(z) = \int (\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z) - \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x))/(z-x) d\mu_j(x)$; por tanto, $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} \int x^k \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x) d\mu_j(x)$. De modo que $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \mathcal{O}(z^{-(n_j+1)})$ si y sólo si $\tilde{Q}_{\mathbf{n}} = Q_{\mathbf{n}}$ satisface (1); en otras palabras, (1) es equivalente a $Q_{\mathbf{n}} \neq 0$, de grado $\leq |\mathbf{n}|$, $\text{grad}(P_{\mathbf{n},j}) \leq |\mathbf{n}| - 1$, y

$$Q_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right). \quad (2)$$

El vector $(P_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n}}, \dots, P_{\mathbf{n},m}/Q_{\mathbf{n}})$ es el AHP para $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_m)$ asociado al multi-índice \mathbf{n} . A los AHP se les llaman también aproximantes simultáneos. Teniendo presente la fórmula para el resto $\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z)/Q_{\mathbf{n}}(z) = 1/Q_{\mathbf{n}}(z) \int Q_{\mathbf{n}}(z)/(z-x) d\mu_j(x)$, para estudiar la convergencia de los aproximantes Hermite-Padé es útil conocer la ubicación de los de ceros de $Q_{\mathbf{n}}$ y su comportamiento asintótico ([3], [9]; a los resultados sobre asintótica nos referiremos más adelante). En muchos casos es posible probar convergencia, incluso geométrica, de los AHP; esto hace que sean utilizados en la teoría de números; precisamente la aparición de ellos se dió en este contexto al demostrar Hermite la trascendencia de “e” ([9]); él construyó aproximantes racionales simultáneos para funciones exponenciales. Más recientemente, la demostración de Apery de la irracionalidad de $\zeta(3)$ se hizo más transparente al utilizar aproximantes simultáneos a funciones de Markov para las medidas en $[-1, 1]$ cuyos pesos son $1, -\log x, \log^2 x$ ([5]); otra aplicación interesante a la teoría de números es la medida de la trascendencia del número π que hace Sorokin al estudiar el crecimiento de unas sumas con coeficientes racionales donde intervienen potencias de π ([10]).

2.2 Multi-ortogonalidad y ecuaciones diferenciales

La relación entre multi-ortogonalidad y ecuaciones diferenciales se revela al considerar medidas cuyos pesos w satisfacen la ecuación de Pearson

$$(\Phi w)' + \Psi w = 0, \quad (3)$$

donde Φ y Ψ son polinomios tales que $\text{grad}(\Phi) \geq 0$, $\text{grad}(\Psi) \geq 1$. Sea Γ una curva o arco de Jordan, tal que $\Delta_\Gamma \Phi w P = 0$, para todo polinomio P , donde Δ_Γ representa el operador diferencia en los extremos de la curva Γ ; un par (w, Γ) que satisface las condiciones anteriores tiene asociado el funcional generador de momentos dado por $\int_\Gamma z^k dw(z)$. En el caso semi-clásico, $S = \max\{\text{grad}(\Phi) - 2, \text{grad}(\Psi) - 1\} \geq 1$, existen $S + 1$ curvas Γ_j (únicas homotópicamente), que determinan funcionales generadores de momentos linealmente independientes. En tal caso, para cada multi-índice existe $Q_{\mathbf{n}}$ tal que

$$\int_{\Gamma_j} z^k Q_{\mathbf{n}}(z) w(z) dz = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1.$$

Observar que aunque el peso es el mismo, cambian las curvas de integración. Para va-rios tipos de pesos se ha demostrado que los correspondientes PMO satisfacen relaciones diferenciales. Por ejemplo, si $\Phi(z) = z^2(z - a)$, $w(z) = z^{\alpha_0}(z - a)^{\alpha_1} e^{\gamma/z}$ y los multi-índices son de la forma (n, \dots, n) , se ha probado que se cumple la fórmula de Rodrigues $Q_{\mathbf{n}}(z) = \frac{1}{w(z)} D^n(\Phi^n(z)w(z))$, donde $D = \frac{d}{dz}$. Dichos polinomios satisfacen la ecuación

$$\Phi^2(z)y''' - 2\Psi(z)\Phi(z)y'' + A_1(z; n)y' + A_2(z; n)y = 0,$$

donde A_1, A_2 son polinomios expresables en función de Φ, Ψ y sus derivadas (ver [2], [12]).

2.3 Teoría de operadores, sistemas de Angelesco y Nikishin

Un concepto clave al estudiar los PMO es el de normalidad; un multi-índice \mathbf{n} se dice normal para un vector de medidas si el correspondiente PMO tiene grado exactamente $|\mathbf{n}|$. Si todos los multi-índices son normales, entonces el sistema de medidas (o de las correspondientes funciones de Markov) es perfecto. Como ejemplo de sistemas perfectos tenemos a los sistemas de Angelesco que están formados por funciones de Markov asociadas a medidas positivas con soporte incluidos en intervalos disjuntos del eje real $\{\Delta_j\}_{j=1}^m$; la normalidad sigue del hecho de que cada PMO respecto al multi-índice \mathbf{n} tiene exactamente n_j ceros en Δ_j , para cada j , $1 \leq j \leq m$. Los PMO para sistemas de Angelesco han sido ampliamente estudiados: Gonchar y Rakhmanov [9] probaron la convergencia de los AHP, describiendo la velocidad de convergencia en términos de la solución de cierto problema extremal de teoría de potencial vectorial; Aptekarev [1] estudió la asintótica fuerte (o de Szegő) de tales polinomios.

Otros sistemas muy estudiados son los de Nikishin que se definen recursivamente; sea σ_j una medida positiva con soporte compacto incluido en un intervalo Δ_j del eje real, $j = 1, \dots, m$; para cada $j = 1, \dots, m - 1$, se supone que $\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \emptyset$; sea

$$d\mu_1 = d\sigma_1, \quad d\mu_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\sigma}_2 d\sigma_1, \dots, \quad d\mu_m = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle \rangle;$$

$(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_m)$ es el sistema de Nikishin asociado a $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Todas las medidas μ_1, \dots, μ_m son absolutamente continuas respecto a la medida σ_1 y su soporte

coincide con el de esta, en este sentido los sistemas de Nikishin representan un ejemplo opuesto a los de Angelesco.

Para los sistemas de Nikishin se ha demostrado que los multi-índices en

$$I = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots\}$$

son normales [1]. Para $m = 2$ ([9]) y $m = 3$ (Fidalgo-López) se ha probado que estos sistemas son perfectos. La convergencia de los correspondientes AHP para dos funciones fue demostrado por Nikishin [9] y para el caso general por Bustamante-López [6]. Aptekarev [1] ha obtenido la asintótica fuerte de los correspondientes PMO. Usando grafos planos Gonchar-Rakhmanov-Sorokin [8] definen unos sistemas (llamados mixtos) de funciones que tienen por casos extremos los sistemas de Nikishin y Angelesco.

Cada multi-índice en I está completamente determinado por su módulo (podemos escribir $Q_{|\mathbf{n}|} = Q_{\mathbf{n}}$); así, si ellos son normales para un sistema de medidas (por ejemplo, los casos de sistemas de Nikishin o Angelesco), utilizando la definición de ortogonalidad se obtiene

$$x Q_{|\mathbf{n}|}(x) = Q_{|\mathbf{n}|+1}(x) + a_{|\mathbf{n}|,|\mathbf{n}|} Q_{|\mathbf{n}|}(x) + \dots + a_{|\mathbf{n}|,|\mathbf{n}|-m} Q_{|\mathbf{n}|-m}(x), \quad |\mathbf{n}| = 0, 1, \dots \tag{4}$$

$Q_{-m}(x) = \dots = Q_{-1}(x) = 0, Q_0(x) = 1$. De aquí se sigue que los ceros $\{\lambda_{n+1,k} : k = 1, \dots, n + 1\}$ de Q_{n+1} son valores propios de

$$A_n := \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m+1,1} & a_{m+2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

y los correspondientes vectores propios son $(Q_0(\lambda_{n+1,k}), Q_1(\lambda_{n+1,k}), \dots, Q_n(\lambda_{n+1,k}))^t$. De ese modo los PMO juegan un papel esencial al estudiar el espectro del operador matricial no simétrico generado por (4). Recientemente, Aptekarev-López-Rocha obtuvieron la asintótica del cociente de PMO para sistemas de Nikishin asumiendo que $\sigma'_j > 0$ en casi todo punto de Δ_j respecto a la medida de Lebesgue. Para PMO asociados a sistemas de Angelesco y Nikishin, Aptekarev-Kalyagine-López-Rocha probaron la propiedad de entrelazamiento de ceros y para sistemas de Nikishin, usando la asintótica del cociente, estudiaron el comportamiento asintótico de $\{a_{n,k}\}$ asumiendo la referida condición para las derivadas de las medidas.

2.4 Polinomios ortogonales respecto a medidas variantes

La técnica básica para obtener todos los resultados asintóticos mencionados anteriormente es la utilización de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes. Veamos como ellos aparecen en la AHP de sistemas de Angelesco.

Como ya dijimos, las relaciones de ortogonalidad implican que Q_n tiene n_j ceros en cada intervalo Δ_j , $1 \leq j \leq m$; si denotamos por q_{n_j} el polinomio mónico de grado n_j que tiene esos ceros, tendremos $Q_n(z) = \prod_{k=1}^m q_{n_k}(z)$. Por tanto, podemos escribir

$$\int q_{n_k}(\zeta) \zeta^j \left(\prod_{j \neq k} q_{n_j}(\zeta) d\mu_k(\zeta) \right) = 0, \quad j = 0, \dots, n_k - 1,$$

de modo que cada q_{n_k} satisface relaciones de ortogonalidad respecto a $\prod_{j \neq k} q_{n_j}(\zeta) d\mu_k(\zeta)$ que varía según cambia q_{n_k} .

A modo de ejemplo citamos un resultado de Gonchar-Rakhmanov [7], extendido por Stahl-Totik [11], que da la asintótica de la raíz n -ésima para polinomios ortogonales respecto a medidas variantes.

Sea μ una medida positiva cuyo soporte $\text{sop}(\mu)$ está contenido en el eje real y $\{\ell_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ . Se dice que μ es regular si $\lim_n |\ell_n(z)|^{1/n} = \exp g(z; \infty)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$ donde $g(z; \infty)$ denota la función de Green con singularidad en ∞ respecto a $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$.

Theorem 1 Sean $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, μ una medida positiva y regular con $\text{sop}(\mu) = \Delta$, S_n polinomios mónicos de grado n y

$$\int S_n(t) t^k \phi_n(t) d\mu(t) = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Si $\lim_n \frac{1}{2n} \log \frac{1}{|\phi_n|} = v$ uniformemente en Δ , y v es una función real en Δ , entonces

$$\nu_{S_n} \xrightarrow{*} \nu, \quad \lim_n \left(\int |S_n|^2 \phi_n d\mu \right)^{1/2n} = e^{-w},$$

donde $\nu_{S_n} = \frac{1}{n} \sum_{S_n(x)=0} \delta_x$ es la medida contadora de ceros de S_n y ν es la única medida que resuelve el problema de equilibrio

$$V^\nu(x) + v(x) \begin{cases} = w, & x \in \text{sop}(\nu), \\ \geq w, & x \in \Delta, \end{cases} \quad (5)$$

donde $V^\nu(z) = -\int \log |z - x| d\nu(x)$ es el potencial logarítmico asociado a ν . De estas relaciones se deduce que $\lim_n |S_n(z)|^{1/n} = e^{-V^\nu(z)}$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Delta$.

López y colaboradores han obtenido resultados sobre asintótica fuerte y relativa de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes que juegan un papel importante para probar la asintótica de PMO para sistemas de Angelesco y Nikishin.

2.5 Aproximantes de Frobenius-Padé

A continuación veremos como aparecen los PMO en los aproximantes de Frobenius-Padé para sistemas de Angelesco y la descripción de la convergencia en términos de la solución de un problema de equilibrio de potencial logarítmico vectorial.

Restringiremos nuestra atención al caso de dos medidas; sean $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ un sistema de Angelesco con medidas cuyos soportes están incluidos en intervalos disjuntos $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ y sea σ una medida soportada en el intervalo $[c, d]$ disjunto con los intervalos anteriores. Denotemos por $\{\varphi_n\}$ la sucesión de polinomios ortonormales asociada a σ . Dada $f \in L_1(\sigma)$ sus coeficientes de Fourier con respecto al sistema anterior son $c_n(f) = \int f \varphi_n d\sigma$. Los aproximantes simultáneos de Frobenius-Padé de $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ para el multi-índice (n_1, n_2) respecto a la medida σ es el vector de fracciones racionales $(P_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},2}/Q_{\mathbf{n}})$ tales que: $Q_{\mathbf{n}} \neq 0, \text{grad}(Q_{\mathbf{n}}) \leq |\mathbf{n}|, \text{grad}(P_{\mathbf{n},1}) \leq |\mathbf{n}| - 1, \text{grad}(P_{\mathbf{n},2}) \leq |\mathbf{n}| - 1$ y

$$c_k(Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\mathbf{n}| + n_j, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

donde $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$. Es decir, los aproximantes simultáneos de Frobenius-Padé recuperan desarrollos de Fourier en el sentido Padé. También hemos estudiado fracciones que recuperan desarrollos de Fourier directamente (los aproximantes no-lineales de Fourier-Padé, ver [4]).

Los aproximantes simultáneos de Frobenius-Padé existen porque el sistema de ecuaciones (6) es lineal y homogéneo con $3|\mathbf{n}| + 2$ ecuaciones en los $3|\mathbf{n}| + 1$ coeficientes de $Q_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},1}, P_{\mathbf{n},2}$. Veremos que dichos aproximantes son únicos porque los denominadores tienen grado exactamente $|\mathbf{n}|$. En efecto, de (6) deducimos

$$\int (Q_{\mathbf{n}}(x)\hat{\mu}_j(x) - P_{\mathbf{n},j}(x))\varphi_k(x) d\sigma(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\mathbf{n}| + n_j, \quad j = 1, 2, \tag{7}$$

que por las técnicas usuales de ortogonalidad nos lleva a que $Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j}$ tiene al menos $|\mathbf{n}| + n_j$ ceros en (c, d) . Sea $W_{\mathbf{n},j}$ el polinomio mónico que se anula en $|\mathbf{n}| + n_j$ de estos ceros; por tanto, $(Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j})/W_{\mathbf{n},j}$ es analítica en un abierto que contiene a $[c, d]$; si Γ es un contorno cerrado que contiene en su interior a $[c, d]$ y en su exterior están los intervalos $[a_i, b_i]$. Aplicando los teoremas de Cauchy y Fubini tenemos que para todo $k = 0, \dots, n_j - 1$,

$$\int_{\Gamma} \zeta^k \frac{Q_{\mathbf{n}}(\zeta)\hat{\mu}_j(\zeta) - P_{\mathbf{n},j}(\zeta)}{W_{\mathbf{n},j}(\zeta)} d\zeta = 0 \Leftrightarrow \int x^k Q_{\mathbf{n}}(x) \frac{d\mu_j(x)}{W_{\mathbf{n},j}(x)} = 0. \tag{8}$$

Es decir, $Q_{\mathbf{n}}$ satisface relaciones de multi-ortogonalidad variantes! Y de ahí obtenemos que $Q_{\mathbf{n}}$ tiene n_j ceros simples en el intervalo $[a_j, b_j]$ para cada $j = 1, 2$. Asumimos en lo que sigue que $Q_{\mathbf{n}}$ es el PMO respecto a las medidas $d\mu_1/W_{\mathbf{n},1}, d\mu_2/W_{\mathbf{n},2}$ y $Q_{\mathbf{n}} = q_{\mathbf{n},1}q_{\mathbf{n},2}$, donde $q_{\mathbf{n},j}$ es el polinomio mónico de grado n_j que se anula en los ceros de $Q_{\mathbf{n}}$ en $[a_j, b_j]$. Así, $q_{\mathbf{n},1}$ es el polinomio mónico de grado n_1 que cumple

$$\int x^k q_{\mathbf{n},1}(x) \frac{q_{\mathbf{n},2}d\mu_j(x)}{W_{\mathbf{n},j}(x)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \tag{9}$$

y para $q_{\mathbf{n},2}$ tenemos una relación análoga.

Por otra parte, de la relación (8) obtenemos que $Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j}$ tiene exactamente $|\mathbf{n}| + n_j$ ceros en (c, d) ; además, $Q_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \frac{W_{\mathbf{n},j}(z)}{q_{\mathbf{n},j}(z)} \int \frac{Q_{\mathbf{n}}(x)q_{\mathbf{n},j}(x)}{z-x} \frac{d\mu_j(x)}{W_{\mathbf{n},j}(x)}$, $j = 1, 2$, y de (7) deducimos

$$\int z^k \frac{W_{\mathbf{n},j}(z)}{q_{\mathbf{n},j}(z)} \int \frac{Q_{\mathbf{n}}(x)q_{\mathbf{n},j}(x)}{z-x} \frac{d\mu_2(x)}{W_{\mathbf{n},j}(x)} d\sigma(z) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\mathbf{n}| + n_j, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^2$ tal que $\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} n_i/|\mathbf{n}| = p_i, i = 1, 2$. Sea $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que las sucesiones de medidas contadores asociadas a los polinomios $q_{\mathbf{n},1}, q_{\mathbf{n},2}, W_{\mathbf{n},2}$ y $W_{\mathbf{n},1}$ tengan límite débil $\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2$, respectivamente. Supongamos que μ_1, μ_2 y σ son medidas regulares. Combinando (9), (10) y el Teorema 1 obtenemos un sistema de cuatro relaciones extremales que relacionan los potenciales logarítmicos $V^{\nu_1}, V^{\nu_2}, V^{\lambda_1}, V^{\lambda_2}$ correspondientes a estas medidas. A saber:

$$\begin{aligned} 2p_1^2 V^{\nu_1}(z) + p_1 p_2 V^{\nu_2}(z) - p_1(1 + p_1) V^{\lambda_1}(z) &= \alpha_1, \quad z \in \text{supp}(\nu_1), \\ p_1 p_2 V^{\nu_1}(z) + 2p_2^2 V^{\nu_2}(z) - p_2(1 + p_2) V^{\lambda_2}(z) &= \alpha_2, \quad z \in \text{supp}(\nu_2), \\ -p_1(1 + p_1) V^{\nu_1}(z) + 2(1 + p_1)^2 V^{\lambda_1}(z) &= \alpha_3, \quad z \in \text{supp}(\lambda_1), \\ -p_2(1 + p_2) V^{\nu_2}(z) + 2(1 + p_2)^2 V^{\lambda_2}(z) &= \alpha_4, \quad z \in \text{supp}(\lambda_2) \end{aligned}$$

donde α_1 y α_2 denotan el ínfimo en $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ de las partes izquierdas de las relaciones respectivas mientras que α_3 y α_4 los ínfimos de las relaciones correspondientes en $[c, d]$. Como la matriz del sistema anterior es simétrica y definida positiva, el problema tiene solución única, de donde se deduce la convergencia débil de las medidas contadoras y consecuentemente para la sucesión $\{|Q_{\mathbf{n}}|^{1/|\mathbf{n}|}\}, \mathbf{n} \in \Lambda$. La demostración de este resultado para el caso general de sistemas de Angelesco de m funciones aparece en [4].

3 Problemas de frontera en la teoría de polinomios ortogonales

Los problemas de frontera o de Riemann-Hilbert para funciones analíticas han resultado ser una herramienta fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales, estando en la base de técnicas tan fundamentales como el scattering inverso y otros. A partir de los trabajos de Fokas, Its y Kitaev en los años '90 estos métodos han empezado a jugar un papel preponderante en la teoría de polinomios ortogonales. Este es un breve e informal resumen de las técnicas de Riemann-Hilbert y del papel de puente que las mismas juegan entre la teoría de sistemas integrables, la teoría moderna de funciones especiales, y los polinomios ortogonales.

3.1 Problemas de frontera clásicos para funciones analíticas

Supongamos que γ es una curva o contorno (o unión de los mismos) en el plano complejo \mathbb{C} ; buscando simplicidad y en aras de una visión global del

problema vamos a imponer en lo adelante tantas hipótesis sobre los objetos con que operamos como sean necesarias. En particular, vamos a suponer que γ es suave a trozos, denotando por γ° el conjunto de sus puntos regulares, es decir, aquellos que no sean extremos de un arco o puntos de intersección. Si fijamos una orientación arbitraria de γ , entonces dada una función f analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, vamos a denotar en lo adelante por f_+ y f_- los valores de frontera de f por la izquierda y por la derecha en γ , respectivamente (si estos existen).

Si sobre γ tenemos definida una función compleja v , entonces su *integral tipo Cauchy* es

$$\mathcal{C}(v)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{v(t)}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \quad (11)$$

Si v es, digamos, Hölder a trozos, entonces $\mathcal{C}(v)$ es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, que posee valores de frontera continuos en γ° . Uno de los teoremas fundamentales en la teoría de valores de frontera para funciones analíticas es el de *Sokhotsky-Plemelj* (ver por ejemplo [13]) que afirma que si $f = \mathcal{C}(v)$ entonces

$$f_+(t) - f_-(t) = v(t), \quad t \in \gamma^\circ.$$

O sea, podemos recuperar el valor del integrando en (11) como el “salto” (aditivo) de la integral tipo Cauchy a través de γ . En otras palabras, si dados γ y v como antes, queremos encontrar una función f que sea holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ y cuyos valores de frontera satisfagan la siguiente condición de *salto aditivo*,

$$f_+(t) = f_-(t) + v(t), \quad t \in \gamma^\circ,$$

entonces una posible solución es $\mathcal{C}(v)$. Obviamente, la solución no es única: $\mathcal{C}(v) + g$, donde g es entera, tiene el mismo salto a través de γ . Para lograr la unicidad debemos imponer algunas condiciones adicionales sobre f , tal como que $f(\infty) = 0$, y describir su comportamiento en los puntos irregulares $\gamma \setminus \gamma^\circ$.

Un problema de *salto multiplicativo* (o de *Riemann-Hilbert* homogéneo) es el de encontrar una función f que sea holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, cuyos valores de frontera satisfagan

$$f_+(t) = f_-(t)v(t), \quad t \in \gamma^\circ,$$

unido a la condición asintótica $f(z) = 1 + \mathcal{O}(1/z)$, $z \rightarrow \infty$. En determinadas ocasiones (por ejemplo, si γ es un contorno de Jordan y v es real y positiva sobre el mismo) el problema multiplicativo se puede reducir al aditivo tomando logaritmos:

$$\begin{aligned} (\log f)_+(t) &= (\log f)_-(t) + \log v(t), \quad t \in \gamma^\circ, \\ \log f(z) &= \mathcal{O}(1/z), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

siendo una posible solución

$$f(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\log v(t)}{t-z} dt \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

La situación se complica si en vez de considerar funciones escalares pasamos al caso matricial: dada una función $V : \gamma \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ encontrar una función $F : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ holomorfa (es decir, todos sus elementos son funciones holomorfas), cuyos valores de frontera satisfagan

$$F_+(t) = F_-(t)V(t), \quad t \in \gamma^o, \tag{12}$$

$$F(z) = I + \mathcal{O}(1/z), \quad z \rightarrow \infty, \tag{13}$$

donde I es la matriz identidad. La no conmutatividad del problema es esencial. De hecho, la mera existencia de su solución no es nada trivial y ha sido estudiada exhaustivamente por Gohberg, Krein y colaboradores. Por ejemplo, la fórmula

$$F(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\log V(t)}{t-z} dt \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$$

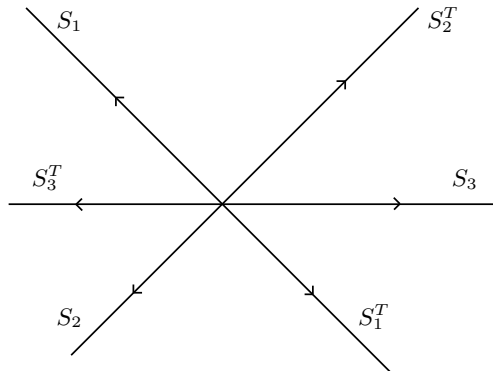
es válida sólo en el caso abeliano, cuando

$$[V(z), V(w)] \stackrel{\text{def}}{=} V(z)V(w) - V(w)V(z) = 0 \quad \text{para todo } z, w \in \gamma.$$

El problema matricial (12)–(13) aparece de forma natural en varios problemas del análisis. Por limitaciones de espacio veamos sólo un ejemplo. Las ecuaciones diferenciales de Painlevé fueron descubiertas a inicios del siglo XX por Painlevé, Gambier y sus colaboradores, que clasificaron todas las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$ con f racional en y, y' , tales que sus soluciones no poseen puntos de ramificación dependientes de las constantes de integración. De los 50 casos hallados por Painlevé y sus colegas, 6 no se reducían a ecuaciones más simples ni podían ser resueltas por medio de funciones especiales conocidas. Éstas ecuaciones se conocen como *ecuaciones diferenciales de Painlevé*, y sus soluciones son los *trascendentes de Painlevé*. Aunque éstos fueron descubiertos a partir de razones teóricas, estas ecuaciones han encontrado aplicación fundamental en la mecánica estadística, física del plasma, ondas no lineales, gravedad cuántica, óptica no lineal, etc.

Un ejemplo de ecuación de Painlevé II es (una versión “no lineal” de la ecuación de Airy)

$$u_{xx} = 2u^3 + xu, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$



Como se ha dicho antes, no podemos esperar poder escribir las soluciones explícitamente, en términos de funciones especiales conocidas. Necesitamos un procedimiento alternativo para su solución, que fue hallado en los años '90 por Flaschka y Newell. Tome tres parámetros complejos s_1 , s_2 y s_3 y defina tres matrices $S = S_i$, con

$$S_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

La única restricción que debemos imponer sobre los parámetros es

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0.$$

Con las tres matrices anteriores, asociadas a 6 rayos en el plano \mathbb{C} tal y como se muestra en la figura (y que denotaremos genéricamente por S), vamos a construir una matriz de salto

$$V_x(z) = e^{-i(4z^3/3+xz)\sigma_3} S e^{i(4z^3/3+xz)\sigma_3},$$

donde para abreviar usamos la notación

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad a^{\sigma_3} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Observe que la matriz V_x depende de un parámetro real x . Ahora podemos resolver el problema (12)–(13) para F con γ dada por la unión de los 6 rayos y la matriz de salto V_x . La solución F satisface entonces

$$F_x(z) = I + \frac{M(x)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Flaschka y Newell [18] probaron que podemos recuperar la solución de la ecuación (14) a partir del elemento (1,2) de la matriz M : $u(x) = 2i M_{12}(x)$.

3.2 Problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales

Vamos a considerar la situación más simple (en cierto sentido) cuando tenemos un peso positivo e integrable w sobre \mathbb{R} , con todos los momentos

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n w(x) dx < +\infty,$$

de modo que existen polinomios ortogonales mónicos $P_n(x) = x^n + \dots$, $n \geq 0$, que satisfacen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) P_m(x) w(x) dx = h_n \delta_{mn}, \quad h_n > 0. \quad (16)$$

Estos polinomios poseen propiedades muy notables y bien conocidas. Por ejemplo, los P_n satisfacen una relación de recurrencia a tres términos y sus ceros son reales y simples.

Vamos a considerar el problema de encontrar una función $Y : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ que sea holomorfa y satisfaga

$$Y_+(t) = Y_-(t) \begin{pmatrix} 1 & w(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$Y(z) = [I + \mathcal{O}(1/z)] \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Teorema [19]: *existen $\kappa_n > 0$ tales que*

$$Y(z) = \begin{pmatrix} P_n(z) & \mathcal{C}(P_n w)(z) \\ \kappa_{n-1} P_{n-1}(z) & \kappa_{n-1} \mathcal{C}(P_{n-1} w)(z) \end{pmatrix}$$

es la única solución de (17)–(18).

La demostración es elemental y sólo usa dos hechos fundamentales del análisis complejo: la fórmula de Sokhotsky-Plemelj y el teorema de Liouville (¿se atreve el lector probarlo?).

Una de las ventajas de la caracterización por medio del problema de RH es que ella puede extenderse a otros esquemas de ortogonalidad, esta vez no estándar, tales como la ortogonalidad sobre la circunferencia unidad [21], la ortogonalidad discreta [14] (es decir, donde la integral en (16) se sustituye por una suma), la ortogonalidad múltiple [23], matricial y otras. La consecuencia fundamental de este enfoque ha sido un importante cambio de paradigma: *en todos los casos el objeto primario deja de ser la ortogonalidad y su lugar ocupa el problema de frontera.*

Para ilustrarlo, veamos el caso del peso de ortogonalidad

$$w(x) = e^{-NV(x)}, \quad V(x) = \frac{tx^2}{2} + \frac{gx^4}{4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

donde $g, N > 0$ y $t < 0$ son parámetros. Vamos a deducir algunas propiedades de los polinomios ortogonales mónicos P_n correspondientes usando la filosofía

$$\boxed{\text{Problema de RH}} \Rightarrow \boxed{\text{Par de Lax}} \Rightarrow \boxed{\text{Ecuación de compatibilidad}}$$

utilizada comúnmente en la investigación de sistemas integrables de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

Partimos nuevamente del problema de Riemann-Hilbert (17)–(18), introduciendo una notación para el siguiente término del desarrollo asintótico de Y en el infinito: $Y = Y_n : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es holomorfa y tal que

$$Y_{n,+}(x) = Y_{n,-}(x) J(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$Y_n(z) z^{-n\sigma_3} = I + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Para obtener la primera mitad del par de Lax observe que J no depende de n , por lo que $R_n(z) = Y_n Y_{n-1}^{-1}$ es una función matricial entera. Por (21),

$$R_n(z) = \begin{pmatrix} z - a_{n-1} + a_n & -b_{n-1} \\ d_n & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

y por el teorema de Liouville,

$$R_n(z) = \begin{pmatrix} z - a_{n-1} + a_n & -b_{n-1} \\ d_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $Y_n(z) = R_n(z)Y_{n-1}(z)$. Si escribimos esta expresión elemento a elemento llegamos a

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) + \alpha_n P_{n-1}(z),$$

donde α_n se expresa explícitamente en función de a_n , b_n y d_n . Esto no es otra cosa que la conocida relación de recurrencia a tres términos que satisfacen los polinomios P_n .

Para la segunda mitad del par de Lax nos fijamos en el segundo parámetro del problema, la variable continua x . Sin embargo, el salto original J en (20) depende de x , por lo que necesitamos hacer una transformación adicional, definiendo $T_n(z) = w^{-\sigma_n/2} Y_n(z) w^{\sigma_n/2}$ (recuerde la notación (15)). Ahora T_n tiene el salto

$$T_{n,+}(x) = T_{n,-}(x) J_T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad J_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que no depende de x , y podemos derivar en ambos miembros de la igualdad, obteniendo que

$$T_{n,+}(x) = T_{n,-}(x) J_T, \quad \text{y} \quad T'_{n,+}(x) = T'_{n,-}(x) J_T,$$

de donde nuevamente $U_n = T'_n T_n^{-1}$ es entera; la fórmula $T'_n = U_n(z) T_n$ implica una ecuación diferencial para los P_n .

Resumiendo, hemos obtenido un sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} T_n = \tilde{R}_n(z) T_{n-1} \\ T'_n = U_n(z) T_n \end{cases}$$

para la matriz T_n , que por tanto debe cumplir condiciones de compatibilidad para la existencia de solución. Es fácil ver que éstas son

$$\tilde{R}'_n = U_n \tilde{R}_n - \tilde{R}_n U_{n-1},$$

que escritas elemento a elemento implican la siguiente ecuación no lineal en los coeficientes

$$n = N \alpha_n (t + g(\alpha_{n-1} + \alpha_n + \alpha_{n+1})), \quad n \geq 1, \quad (22)$$

conocida por los físicos como la *ecuación de cuerda discreta* y por los especialistas en polinomios ortogonales, como la *ecuación de Freud*. De hecho, esta ecuación es clasificada como una ecuación de Painlevé discreta, y su análisis asintótico directo cuando n ó $N \rightarrow \infty$ es muy complicado. Sin embargo, si nos atenemos al nuevo paradigma de Riemann-Hilbert, en vez de estudiar esta recurrencia, deberíamos centrarnos en el problema de frontera (20)–(21) y en su evolución, y al final sacar conclusiones sobre las soluciones α_n . En esto consiste el método de descenso más rápido no lineal descubierto por Deift y Zhou (ver por ejemplo [16], así como la monografía [17]).

3.3 Asintótica de polinomios ortogonales

Queremos estudiar la asintótica de los polinomios ortogonales P_n o de algunas de las magnitudes relevantes asociadas (α_n , etc.). La idea fundamental del método de Deift y Zhou se puede resumir de la siguiente forma:

Partiendo del problema de Reimann-Hilbert (17)–(18) lleve a cabo transformaciones *explícitas e inversibles*

$$Y \rightarrow \dots \rightarrow S$$

tales que al final $S(\infty) \approx I$, los saltos de S sean $\approx I$, y concluya que $S \approx I$ en todo el plano complejo. Entonces deshaga las transformaciones anteriores y vea qué ha obtenido para Y .

Obviamente esta idea tiene que ser complementada con una serie de “trucos técnicos” muy sofisticados. Observe el punto de partida, el problema (17)–(18); uno de los primeros objetivos es “normalizar” el comportamiento en el infinito, redefiniendo la matriz Y . El ingrediente principal de la transformación que necesitamos es la *medida de equilibrio* ν que satisface condiciones tipo (5) con campo externo $v(x) = NV(x)/(2n)$. Armados de esta medida definimos la función $G(z) = \exp(-n \int \log(t-x) d\nu(t))$ y hacemos

$$T(z) \stackrel{\text{def}}{=} k_n^{-\sigma_n/2} Y(z) G(z)^{\sigma_3}.$$

Entonces T es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = I$, y sobre $\text{supp}(\mu_n)$,

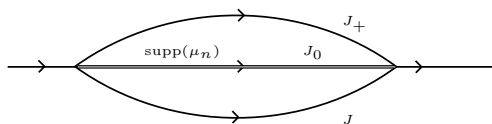
$$T_+(x) = T_-(x) \begin{pmatrix} g^n(x) & 1 \\ 0 & g^{-n}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } |g_n| = 1.$$

Hemos logrado el primero objetivo, normalizar el problema en el infinito. El precio que hemos pagado es un comportamiento altamente oscilatorio de la matriz de salto sobre el soporte de μ_n (algo que no debe sorprender mucho, pues recuerde que es el lugar donde residen los ceros de P_n). Para librarnos de estas oscilaciones realizamos una segunda transformación, consistente en una factorización analítica de la matriz de salto, de la forma

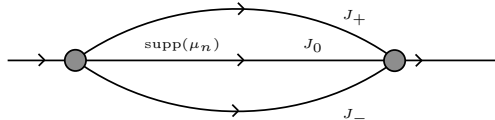
$$\begin{pmatrix} g^n(x) & 1 \\ 0 & g^{-n}(x) \end{pmatrix} = J_- J_0 J_+, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $J_- \approx I$ en $\Im z < 0$ y $J_+ \approx I$ en $\Im z > 0$.

Podemos interpretar el salto a través de $\text{supp}(\mu_n)$ como combinación de tres saltos, tal y como se indica en la figura, donde sólo el salto a través de $\text{supp}(\mu_n)$ es relevante y explícitamente soluble (y cuya solución es el “modelo” exterior que denotaremos por $N(z)$).



La matriz TN^{-1} es $\approx I$ en el ∞ y tiene saltos $\approx I$ en todas partes, excepto en los entornos de los extremos del soporte de μ_n , pequeños discos que aparecen en la figura siguiente.



En esos entornos necesitamos construir “modelos locales” L que tengan los mismos saltos que T y se ajusten a N en la frontera de los discos. La solución (técnicamente complicada) se escribe en términos de funciones especiales. Cuáles exactamente depende del comportamiento local del peso de ortogonalidad w .

Como paso final, definimos

$$S = \begin{cases} TN^{-1}, & \text{lejos de los extremos de } \text{supp}(\mu_n), \\ TL^{-1}, & \text{cerca de los extremos de } \text{supp}(\mu_n). \end{cases}$$

Entonces $S(z) \approx I$, $z \rightarrow \infty$ y tiene saltos $\approx I$ en todas partes. La conclusión (que siempre debe ser justificada cuidadosamente) es que $S \approx I$ *uniformemente* en \mathbb{C} . Queda “despejar” la matriz original Y y mirar qué resultado hemos obtenido, digamos, para el polinomio $P_n = Y_{11}$.

Para terminar, volvamos al ejemplo del peso de ortogonalidad (19) que en la sección anterior nos permitió deducir la ecuación de Freud (22). ¿Cuál es el comportamiento asintótico de los coeficientes de recurrencia α_n cuando $n \rightarrow \infty$ conjuntamente con el parámetro N , de tal modo que $n/N \rightarrow \lambda$? Bleher e Its [15], usando el método recién descrito, probaron que existe un valor crítico $\lambda_c = t^2/(4g)$ donde el comportamiento de $\{\alpha_n\}$ tiene una bifurcación. Si $n/N \rightarrow \lambda_c$, el comportamiento de los α_n se describe por... ¡una solución particular (llamada solución de Hastings-McLeod) de la ecuación Painlevé II (14)!

Resumiendo, los problemas de frontera, tanto discretos como continuos, juegan un papel fundamental en la teoría de los polinomios ortogonales. La versión discreta está íntimamente ligada con la recurrencia a tres términos, característica de dichos polinomios, y con la teoría espectral de operadores, mientras que el problema continuo en su versión matricial sirve de base para las potentes técnicas de Riemann-Hilbert, que se encuentran actualmente en pleno desarrollo, y que, es de esperar, darán importantes frutos en un futuro inmediato.

4 Capacidad analítica continua y aproximación racional uniforme

La capacidad analítica continua de un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ se define como

$$\alpha(E) = \sup |f'(\infty)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones continuas en \mathbb{C} , analíticas en $\mathbb{C} \setminus E$ que satisfacen $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$. Para un conjunto general F tomamos $\alpha(F) = \sup\{\alpha(E) : E \subset F, E \text{ compacto}\}$.

Si en el supremo anterior renunciamos a la continuidad de f en \mathbb{C} (o sea solo pedimos que f sea analítica en $\mathbb{C} \setminus E$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus E$), obtenemos la capacidad analítica γ del compacto E . Para F general se toma $\gamma(F) = \sup\{\gamma(E) : E \subset F, E \text{ compacto}\}$.

La noción de capacidad analítica continua fué introducida por Erokhin y Vitushkin (véase [37]) en los 1950's con vista a estudiar problemas de aproximación racional uniforme en subconjuntos compactos del plano complejo. Vitushkin probó que la capacidad analítica continua juega un papel central en este tipo de problemas.

Por otra parte, la capacidad analítica γ fué introducida por Ahlfors en los años 1940's [24] para el estudio del llamado problema de Painlevé, es decir, el problema de caracterizar geoméricamente los conjuntos de singularidades evitables de funciones analíticas acotadas. Recordamos que un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ se dice que es evitable para funciones analíticas acotadas si para cualquier conjunto abierto Ω que contiene a E toda función analítica y acotada en $\Omega \setminus E$ tiene extensión analítica a Ω .

Como α resulta más útil que γ para problemas de aproximación racional uniforme, nos centraremos en la capacidad analítica continua. No obstante, el lector debe ser consciente que una buena comprensión de la capacidad α no es factible sin un previo estudio de γ .

4.1 Propiedades básicas de la capacidad analítica continua

Debe tenerse presente que la capacidad analítica continua mide el tamaño de un conjunto "en relación con funciones analíticas continuas y acotadas". Una consecuencia directa de la definición es que

$$E \subset F \Rightarrow \alpha(E) \leq \alpha(F).$$

Más aún, es fácil verificar que α es invariante por traslación:

$$\alpha(z + E) = \alpha(E) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Con respecto a las dilataciones se tiene

$$\alpha(\lambda E) = |\lambda| \alpha(E) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Además, si E es un abierto y conexo, entonces

$$\text{diam}(E)/4 \leq \alpha(E) \leq \text{diam}(E).$$

La segunda desigualdad (que se cumple para cualquier conjunto compacto E) es consecuencia del hecho que la capacidad analítica continua de un disco coincide con su radio y la primera del teorema 1/4 de Koebe (ver, por ejemplo, [27, Chapter VIII] para más detalles).

4.2 Relación con la medida de Hausdorff

La relación entre la medida de Hausdorff y la capacidad analítica continua es la siguiente:

- Si $\dim_H(E) > 1$ (aquí \dim_H representa la dimensión de Hausdorff), entonces $\alpha(E) > 0$. Esto es consecuencia directa del Lema de Frostman.
- Si $\mathcal{H}^1(E) < \infty$, donde \mathcal{H}^1 es medida de Hausdorff unidimensional, o longitud, entonces $\alpha(E) = 0$. En particular, se deduce que si $\dim_H(E) < 1$, entonces $\alpha(E) = 0$.

De las afirmaciones anteriores resulta que la dimensión 1 es crítica en relación con la capacidad analítica continua. Más aún, surge una pregunta natural: es cierto que $\alpha(E) > 0$ si y solo si $\dim(E) > 1$ (o quizás si y solo si $\mathcal{H}^1(E) = \infty$)? Vitushkin demostró que la respuesta es negativa. Resulta que la caracterización de α no es sólo cuestión del tamaño del conjunto E , sino también de la forma de E . En particular, la rectificabilidad juega un papel importante en la comprensión de α , y aún más en el caso de γ . Para ilustrar este hecho reseñamos el siguiente resultado debido a Guy David [25] relativo a la capacidad analítica γ (aunque está más relacionado con el problema de Painlevé que con la aproximación racional):

Theorem 2 *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un compacto con $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Entonces $\gamma(E) = 0$ si y solo si E es puramente no rectificable; o sea, que intersecta a una curva rectificable a lo sumo en un conjunto de longitud zero.*

Este resultado, conocido anteriormente como conjetura de Vitushkin, resuelve el problema de Painleve para conjuntos de longitud finita ya que un conjunto E es evitable para funciones analíticas acotadas si y solo si $\gamma(E) = 0$. Para ser más precisos, subrayamos que la parte “si” del teorema no es de David. De hecho se sigue del teorema de Calderón sobre la acotación L^2 de la transformada de Cauchy sobre grafos de clase Lipschitz con constante de Lipschitz pequeña. La parte “solo si” del teorema, que es más difícil, es la probada por David. Vea también [31] y [29] para algunas contribuciones iniciales.

4.3 Teorema de Vitushkin sobre aproximación racional uniforme

Debemos introducir cierta terminología adicional relativa a la aproximación racional uniforme. Dado un compacto $E \subset \mathbb{C}$ mediante $R(E)$ denotamos el álgebra de las funciones complejas en E que son límite uniforme en E de funciones analíticas en una vecindad de E (o sea, cada función es analítica en una vecindad de E). Recuérdese que el teorema de Runge implica que una función está en $R(E)$ si y solo si es límite uniforme de funciones racionales con polos fuera de E .

Por $A(E)$ denotamos el álgebra de aquellas funciones complejas que son continuas en E y analíticas en el interior E° de E . Obviamente, tenemos que

$R(E) \subset A(E)$. Estamos interesados en obtener criterios que permitan decidir cuándo $A(E)$ coincide con $R(E)$. Equivalentemente, cuándo una función que es analítica en E° y continua en E puede ser aproximada mediante funciones analíticas en una vecindad de E . Por ejemplo, si $\mathbb{C} \setminus E$ es conexo, el teorema de Mergelyan afirma que $A(E) = R(E)$.

El siguiente teorema de Vitushkin es la solución del problema descrito anteriormente.

Theorem 3 *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $R(E) = A(E)$.
- (b) $\alpha(\Delta \setminus E^\circ) = \alpha(\Delta \setminus E)$ para todo disco abierto Δ .
- (c) Existe una constante C tal que $\alpha(\Delta \setminus E^\circ) \leq C \alpha(\Delta \setminus E)$ para todo disco Δ .

Como se mencionó anteriormente, este resultado da un criterio preciso para decidir cuando $A(E) = R(E)$. Su mayor inconveniente, al menos cuando Vitushkin lo demostró, era la ausencia de una caracterización métrica/geométrica de α . Por ejemplo, hasta hace poco estuvo abierta la pregunta de si α es semiaditiva como función de conjuntos; o sea, si

$$\alpha(E \cup F) \leq C(\alpha(E) + \alpha(F)),$$

para conjuntos compactos $E, F \subset \mathbb{C}$, donde C es una constante absoluta. Se demostró que una respuesta afirmativa a esta cuestión implicaría la así llamada "conjetura de la frontera interior" (ver [38, Conjecture 2]).

La frontera interior de E , que se denota mediante $\partial_i E$, es el conjunto de puntos frontera que no pertenecen a la frontera de ninguna de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus E$. La conjetura de la frontera interior afirma que si $\alpha(\partial_i E) = 0$, entonces debe ser cierto que $R(E) = A(E)$. En el caso particular en que $\dim_H(\partial_i E) < 1$ (que a su vez implica $\alpha(\partial_i E) = 0$) Davie y Øksendal [26] demostraron que la conjetura es cierta; o sea, $R(E) = A(E)$.

4.4 Caracterización de α en términos de la curvatura y la transformada de Cauchy

4.4.1 La transformada de Cauchy y la curvatura de medidas

Dada una medida finita y compleja de Radon ν en \mathbb{C} , la transformada de Cauchy de ν es

$$C\nu(z) = \int \frac{1}{\xi - z} d\nu(\xi).$$

Aunque la integral anterior es absolutamente convergente casi dondequiera con respecto a la medida de Lebesgue, en general no tiene sentido para $z \in \text{supp}(\nu)$.

Esta es la razón por la que se considera la *transformada de Cauchy truncada* de ν , que se define mediante

$$\mathcal{C}_\varepsilon \nu(z) = \int_{|\xi-z|>\varepsilon} \frac{1}{\xi-z} d\nu(\xi),$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$.

Dada una medida positiva de Radon μ y una función f medible en \mathbb{C} , denotamos

$$\mathcal{C}_\mu f(z) := \mathcal{C}(f d\mu)(z)$$

para $z \notin \text{supp}(f)$, y

$$\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon} f(z) := \mathcal{C}_\varepsilon(f d\mu)(z)$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que \mathcal{C}_μ está acotada en $L^2(\mu)$ si los operadores $\mathcal{C}_{\mu,\varepsilon}$ están acotados en $L^2(\mu)$ uniformemente con respecto a $\varepsilon > 0$.

Decimos que μ tiene crecimiento lineal si existe alguna constante a C tal que $\mu(B(z,r)) \leq Cr$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$. La densidad lineal de μ en $x \in \mathbb{C}$ es (caso de que exista)

$$\Theta_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r}.$$

Dados tres puntos distintos dos a dos $x, y, z \in \mathbb{C}$, su *curvatura Menger* es

$$c(x, y, z) = \frac{1}{R(x, y, z)},$$

donde $R(x, y, z)$ es el radio de la circunferencia que pasa por x, y, z (con $R(x, y, z) = \infty$, $c(x, y, z) = 0$ si x, y, z están en una misma recta). Si dos de estos puntos coinciden hacemos $c(x, y, z) = 0$. Para una medida de Radon μ , definimos la *curvatura de μ* mediante

$$c^2(\mu) = \iiint c(x, y, z)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z). \tag{23}$$

La noción de curvatura de una medida fué introducida por Melnikov [32] al estudiar la versión discreta de la capacidad analítica. Es una de las ideas responsable de los grandes avances recientes en relación con la capacidad analítica. La noción de curvatura está conectada con la transformada de Cauchy por el siguiente resultado debido a Melnikov y Verdera [33].

Proposition 4 *Sea μ una medida de Radon en \mathbb{C} de crecimiento lineal. Tenemos*

$$\|\mathcal{C}_\varepsilon \mu\|_{L^2(\mu)}^2 = \frac{1}{6} c_\varepsilon^2(\mu) + O(\mu(\mathbb{C})), \tag{24}$$

donde $|O(\mu(\mathbb{C}))| \leq C\mu(\mathbb{C})$.

En esta proposición $c_\varepsilon^2(\mu)$ representa la versión ε -truncada de $c^2(\mu)$ (definida como en la parte derecha de (23) pero con la integral triple sobre $\{x, y, z \in \mathbb{C} : |x-y|, |y-z|, |x-z| > \varepsilon\}$).

La identidad (24) sorprende pues relaciona una noción analítica (la transformada de Cauchy de una medida) con una métrico-geométrica (la curvatura). Más aún, la noción de curvatura está relacionada con la de rectificabilidad (ver [29]), y existe una conexión fuerte con los coeficientes β que aparecen en el teorema de vendedor viajante de P. Jones [28].

4.4.2 Resultados principales

El siguiente teorema demostrado en in [36] da una caracterización de α in terminos de la curvatura de medidas de densidad cero y también en términos de estimados de Cauchy.

Theorem 5 *Para todo compacto $E \subset \mathbb{C}$, tenemos*

$$\begin{aligned} \alpha(E) &\approx \sup\{\mu(E) : \text{supp}(\mu) \subset E, \Theta_\mu(x) = 0 \forall x \in E, c^2(\mu) \leq \mu(E)\} \\ &\approx \sup\{\mu(E) : \text{supp}(\mu) \subset E, \Theta_\mu(x) = 0, \|\mathcal{C}\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)} \leq 1\}, \end{aligned} \quad (25)$$

con constantes absolutas.

La notación $A \approx B$ significa que A es comparable con B ; es decir, existe una constante absoluta positiva tal que $C^{-1}A \leq B \leq CA$. Por otra parte, $\|\mathcal{C}_\mu\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)}$ denota la norma $L^2(\mu)$ de la transformada de Cauchy; o sea, $\|\mathcal{C}_\mu\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\mathcal{C}_{\mu, \varepsilon}\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)}$.

Mencionamos que la demostración de este resultado usa herramientas de la teoría de Calderón-Zygmund con medidas no doblantes (en particular, requiere del así llamado teorema $T(b)$ de Nazarov, Treil and Volberg [34]), así como ideas de la teoría de potencial y teoría geométrica de medidas. Véase también [30] para el caso particular pero importante de conjuntos de Cantor.

Como el último término de (25) es semiaditivo (con constante 1), deducimos que α es numerablemente semiaditiva:

Theorem 6 *Sean $E_i, i \geq 1$ conjuntos de Borel en \mathbb{C} . Entonces*

$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E_i),$$

donde C es una constante absoluta.

Para resultados concernientes a la capacidad analítica γ , vea [35].

Como se mencionó anteriormente, la semiaditividad de α implica la conjetura de la frontera interior:

Theorem 7 (Conjetura de la frontera interior) *Si $\alpha(\partial_i E) = 0$, entonces $R(E) = A(E)$.*

References

- [1] A.I. APTEKAREV. *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 99 (1998) 423–447.
- [2] A.I. APTEKAREV, F. MARCELLÁN, I.A. ROCHA. *Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi- Bessel polynomials*. J. Approx. Theory 90 (1997) 117–146.
- [3] A. APTEKAREV, H. STAHL, *Asymptotics of Hermite-Padé polynomials*. in: A. Gonchar, E.B. Saff (Eds.), Progress in Approximation Theory, vol. 19, Springer Ser. Comput. Math. Springer, Berlin, 1992, pp. 127–167.
- [4] M. BELLO, G. LÓPEZ, J. MÍNGUEZ. *Fourier-Padé approximants for Angelesco systems*. Preprint (2005); math. CA/0510611.
- [5] F. BEUKERS. *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* . Bull. London Math. Soc. 11(33) (1978) 268–272.
- [6] J. BUSTAMANTE, G. LÓPEZ. *Hermite-Padé approximation to a Nikishin type system of analytic functions*,. Russian Ac. Sci. Sb. Math. 77 (1994) 367–384.
- [7] A.A. GONCHAR, E.A. RAKHMANOV. *The equilibrium measure and distribution of zeros of extremal polynomials*. Math. USSR-Sb. 53 (1986), 119–130.
- [8] A.A. GONCHAR, E.A. RAKHMANOV, V.N. SOROKIN. *On Hermite-Padé approximants for systems of functions of Markov type*. Sbornik Math. 188 (1997), 671–696
- [9] E.M. NIKISHIN, V.N. SOROKIN. *Rational approximations and orthogonality*. Transl. of Math. Monographs Vol. **92**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.
- [10] V.N. SOROKIN. *A transcendence measure for π^2* Sbornik Math. 187 (1986) 1819–1852.
- [11] H. STAHL, V. TOTIK. *General orthogonal polynomials*. Enc. Math. Vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
- [12] W. VAN ASSCHE, E. COUSSEMENT. *Some semiclassical multiple orthogonal polynomials*. J. Comp. Appl. Math. 127 (2001) 317–347.
- [13] M.J. ABLOWITZ, A.S. FOKAS. *Complex Variables. Introduction and Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2003.
- [14] J. BAIK, T. KRIECHERBAUER, K.T.R. MCLAUGHLIN, P. D. MILLER. *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a general class of discrete weights and universality results for associated ensembles: announcement of results*. Int. Math. Res. Not., 15 (2003), 821–858.

- [15] P. BLEHER, A.R. ITS. *Double scaling limit in the random matrix model: the Riemann-Hilbert approach*. Comm. Pure Appl. Math., 56 (2003), 433–516.
- [16] P. DEIFT, T. KRIECHERBAUER, K.T.R. MCLAUGHLIN, S. VENAKIDES, X. ZHOU. *A Riemann-Hilbert approach to asymptotic questions for orthogonal polynomials*. In Proceedings of the Fifth International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and their Applications (Patras, 1999), volume 133, pages 47–63, 2001.
- [17] P.A. DEIFT. *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [18] H. FLASCHKA, A.C. NEWELL. *Monodromy- and spectrum-preserving deformations. I*. Comm. Math. Phys., 76 (1980), 65–116.
- [19] A.S. FOKAS, A.R. ITS, A.V. KITAEV. *The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity*. Comm. Math. Phys., 147 (1992), 395–430.
- [20] A.R. ITS. *The Riemann-Hilbert problem and integrable systems*. Notices Amer. Math. Soc., 50 (2003), 1389–1400.
- [21] A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, K.T.R. MCLAUGHLIN, E. B. SAFF. *Szegő orthogonal polynomials with respect to an analytic weight: canonical representation and strong asymptotics*. Constr. Approx., 2005. in press.
- [22] E.B. SAFF, V. TOTIK. *Logarithmic Potentials with External Fields*, volume 316 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [23] W. VAN ASSCHE, J.S. GERONIMO, A.B.J. KUIJLAARS. *Riemann-Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials*. In Special functions 2000: current perspective and future directions (Tempe, AZ), volume 30 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 23–59. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [24] L. AHLFORS, *Bounded analytic functions*, Duke Math. J. 14 (1947), 1-11.
- [25] G. DAVID. *Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity*. Revista Mat. Iberoamericana 14(2) (1998), 369-479.
- [26] A.M. DAVIE, B. ØKSENDAL. *Analytic capacity and differentiability properties of finely harmonic functions*. Acta Math. 149 (1982), 127-152.
- [27] T. GAMELIN, *Uniform Algebras*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1969.
- [28] P.W. JONES, *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, Invent. Math. 102 (1990), 1–15.

- [29] J.C. LÉGER, *Menger curvature and rectifiability*, Ann. of Math. 149 (1999), 831–869.
- [30] J. MATEU, X. TOLSA, J. VERDERA, *The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local $T(b)$ -Theorem*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 19–28.
- [31] P. MATTILA, M.S. MELNIKOV, J. VERDERA, *The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability*, Ann. of Math. (2) 144 (1996), 127–136.
- [32] M.S. MELNIKOV. *Analytic capacity: discrete approach and curvature of a measure*. Sbornik: Mathematics 186 (1995), 827–846.
- [33] M.S. MELNIKOV, J. VERDERA. *A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs*. Internat. Math. Res. Notices (1995), 325–331.
- [34] F. NAZAROV, S. TREIL, A. VOLBERG. *How to prove Vitushkin’s conjecture by pulling ourselves up by the hair*. Preprint (2000).
- [35] X. TOLSA, *Painlevé’s problem and the semiadditivity of analytic capacity*, Acta Math. 190 (2003), 105–149.
- [36] X. TOLSA, *The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture*, American J. Math. 126 (2004), 523–567.
- [37] A.G. VITUSHKIN, *The analytic capacity of sets in problems of approximation theory*. Russian Math. Surveys 22 (1967), 139–200.
- [38] A.G. VITUSHKIN, M.S. MELNIKOV. , *Analytic capacity and rational approximation*, Linear and complex analysis, Problem book, Lecture Notes in Math. 1403, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Sesión monográfica de
**COMPLEJIDAD: MECÁNICA ESTADÍSTICA
Y CIENCIA NO LINEAL**

Coordinador: ÁNGEL SÁNCHEZ SÁNCHEZ

Participantes:
YAMIR MORENO
JOSÉ M. SANCHO
CARLOS PARÉS
VÍCTOR M. PÉREZ GARCÍA

Complejidad: Mecánica Estadística y Ciencia No Lineal

ANGEL SÁNCHEZ

Grupo Interdisciplinar de Sistemas Complejos
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos
Universidad de Zaragoza

`anxo@math.uc3m.es`

Resumen

En este artículo se hace una presentación desde un punto de vista personal del campo de investigación “Complejidad: Mecánica Estadística y Ciencia No Lineal” correspondiente a la sesión celebrada durante el CEDYA 2005, discutiendo especialmente su contexto y su relevancia para la comunidad española de Matemática Aplicada.

Palabras clave: *Sistemas complejos, mecánica estadística, ciencia no lineal*

Clasificación por materias AMS: *34-xx, 35-xx, 37-xx, 60-xx, 62-xx, 65-xx, 76-xx, 82-xx, 91-xx, 92-xx*

1 Introducción

Cuando el Comité Científico del CEDYA 2005, celebrado el pasado septiembre en la Universidad Carlos III de Madrid, decidió incluir una sesión monográfica sobre “Complejidad” y me encargó el llevarla a cabo, me sentí, obviamente, honrado y halagado, pero sobre todo, me sentí abrumado. ¿Cómo podía intentar dar una idea de la investigación que se hace bajo el nombre de “Complejidad” o “Sistemas Complejos” en tres o cuatro charlas y dos horas de tiempo? Sin embargo, la sesión resultó muy interesante e inspiradora (¡qué voy a decir yo!), fundamentalmente gracias a los conferenciantes que tomaron parte en ella. Con todo y ello, los asistentes a la sesión se llevaron inevitablemente una impresión parcial del campo de la “Complejidad” (o cuatro impresiones parciales, claro). Por tanto, lo que pretendo en este artículo es dar mi visión de la investigación sobre los sistemas complejos, tanto para aquellos que no pudieron

asistir a la sesión, como por completar aspectos que no tuvieron cabida en ella. Obviamente, cuando digo mi visión, quiero dejar claro que es personal, subjetiva y fuertemente influida por mi propia actividad. Aún así, espero al menos excitar la curiosidad de los lectores sobre estos temas e interesarlos en esta línea de investigación, tan ligada a las Matemáticas y donde los matemáticos, no sólo, pero en particular los matemáticos aplicados, tenemos mucho que aportar.

2 ¿Qué son los sistemas complejos?

El nombre “Complejidad”, al menos en este trabajo¹, se refiere al estudio de los sistemas complejos: La Ciencia de la Complejidad es un nuevo campo que *estudia los comportamientos emergentes* en los sistemas con gran número de partes, componentes o agentes, es decir, los comportamientos y fenómenos colectivos que aparecen debido a la interacción y que no son predecibles ni entendibles a partir de los individuales. Los sistemas sociales, formados en buena medida por personas, el cerebro, formado por neuronas, las moléculas, formadas por átomos, el tiempo atmosférico, formado por flujos de aire y agua, son buenos ejemplos de sistemas complejos. Esta disciplina tiene un carácter horizontal intrínseco que toca todas las ramas tradicionales de la Ciencia, así como a la Ingeniería, la Gestión o la Medicina, centrándose en las cuestiones sobre las partes, el todo y sus relaciones. Hay tres aspectos interrelacionados básicos involucrados: el estudio de cómo las interacciones dan lugar a los patrones de comportamiento, el diseño de nuevos métodos de describir y analizar sistemas complejos, y el proceso de formación de tales sistemas.

Siendo un poco más formales, podemos decir que un sistema complejo está constituido por muchas partes, iguales o distintas, que generalmente se comportan de manera no lineal, y que están acopladas, lineal o no linealmente. Un sistema tal puede ser discreto, como en el caso de los autómatas celulares y las ecuaciones en diferencias, o puede ser continuo, como en un sistema de ecuaciones diferenciales o una ecuación en derivadas parciales. Es el hecho de su no linealidad intrínseca lo que hace que los sistemas complejos sean algo más que la suma de sus partes, es decir, que su comportamiento sea impredecible desde una perspectiva puramente reduccionista, como ya hemos dicho. En ese sentido, la investigación sobre sistemas complejos solapa sustancialmente con la que se realiza sobre dinámica no lineal, pero los sistemas complejos son diferentes en el sentido de que incluyen un número no pequeño de partes dinámicas que interactúan entre sí.

La Ciencia de la Complejidad está recibiendo más y más atención desde distintos sectores interdisciplinarios (véase en [2] un listado exhaustivo e interactivo de las aplicaciones de la Complejidad), y en particular en el contexto europeo. En este sentido, cabe mencionar la convocatoria específica del Programa NEST (New and Emerging Science and Technology, nuevo en el

¹En principio, no debemos confundir “complejidad” con “complejidad computacional”. Ésta es una disciplina bien definida cuyo objetivo es el análisis del esfuerzo computacional que requiere resolver un problema. Sin embargo, no son campos totalmente disjuntos. Un libro muy interesante al respecto es [1].

6° Programa Marco y que podría desembocar en el European Research Council en el 7°) sobre “Tackling Complexity” (con su edición más reciente abierta hasta el 15 de febrero de 2006, y con sus actividades coordinadas a través de la Acción GIACS [3]). Por otro lado, la existencia de instituciones como el Santa Fe Institute for Complex Systems [4], totalmente privadas y apoyadas por empresas que van desde la informática (Intel, Sun) a la banca (Credit Suisse First Boston) pasando por los automóviles (Ford, Toyota) o la tecnología (Lockheed Martin) indica la gran relevancia que la Ciencia de la Complejidad está adquiriendo en el esquema de I+D+i a nivel mundial.

3 Origen y bases de la Complejidad

Se suele asignar el papel de “primera piedra” de la Ciencia de la Complejidad al artículo *More is different* [5], del premio Nobel de Física Phil Anderson, cuyo título se refiere precisamente al concepto de “emergencia” que mencioné en la sección anterior, y sobre el que volveré más abajo. No voy a discutir el papel inspirador y pionero de este artículo, antes al contrario, me parece una lectura muy interesante, pero yo creo que la Complejidad no surge como un campo con personalidad propia en los noventa. ¿Por qué? Por un lado, por que es en los noventa cuando los ordenadores, la capacidad de cálculo, se hace accesible a cualquiera, y sin disponer de esta herramienta el estudio de los sistemas complejos es punto menos que imposible; y por otro, porque en esa década se comenzó a entender, particularmente en la comunidad de Física Estadística y No Lineal, que los objetos en interacción de los que se ocupa la Mecánica Estadística no tienen porque ser partículas, sino que pueden ser prácticamente lo que uno quiera. Y eso convirtió a la Mecánica Estadística, que tenía más o menos un siglo por entonces, en una de las herramientas básicas de la Complejidad. Hablemos un poco de ella.

La Mecánica Estadística es originalmente la aplicación de la Estadística, con su bagaje matemático para tratar con poblaciones grandes, a la Mecánica, que se ocupa del movimiento de partículas u objetos sujetos a una fuerza [6]. Sus pioneros fueron J. Willard Gibbs y Ludwig Boltzmann, a finales del siglo XIX. Básicamente, la Mecánica Estadística proporciona un marco para relacionar las propiedades microscópicas de, por ejemplo, átomos o moléculas individuales con las propiedades macroscópicas de los materiales. Así, su aplicación original fue en física, donde se utiliza entre otras cosas para fundamentar la Termodinámica. Sin embargo, el concepto es mucho más general y trasciende esta aplicación física, ya que no necesita aplicarse a átomos o moléculas sino que describe cualquier colectividad de objetos cuya dinámica individual e interacciones mutuas son conocidas. Es decir: a los sistemas complejos. La Mecánica Estadística es el marco matemático ideal para describir esos sistemas que, como hemos dicho, constan de muchos componentes acoplados. Y en esos componentes, a veces en ellos, a veces en su acoplamiento, es donde entra la no linealidad, el otro aspecto fundamental de la Complejidad.

Decía el gran matemático Stanislaw Ulam que llamar “no lineal” a una

ciencia es como referirse a la zoología como el estudio de los animales no humanos. No puedo estar más de acuerdo, ya que muy pocas cosas de las que nos rodean son lineales. En Matemáticas tenemos muy claro lo que quiere decir “no lineal”, por ejemplo si hablamos de sistemas dinámicos no lineales. Pero el nombre “Ciencia No Lineal” pretende ser más amplio (véase la reciente y monumental enciclopedia compilada por Alwyn Scott [7]). Simplificando drásticamente y sin pretender ser exhaustivo, podríamos decir que la ciencia no lineal comprende cuatro paradigmas básicos: el caos determinista, las estructuras coherentes, la formación, competición y selección de patrones, y la dinámica adaptativa o evolutiva. El impacto de esos paradigmas se puede entender en términos de su relevancia interdisciplinar. El caos aparece, por ejemplo, en la actividad eléctrica de sistemas biológicos, en la transición de un fluido a la turbulencia, y en el movimiento de planetas. Las estructuras coherentes describen tanto la gran mancha roja de Júpiter como los tsunamis o los sistemas de comunicación óptica. Nos encontramos problemas relacionados con patrones en fenómenos tan distintos como la recuperación de petróleo, las interacciones láser-plasma o la morfogénesis. Y por último, la dinámica evolutiva nos habla de cosas como la evolución biológica, las redes neuronales o la vida artificial. Creo que estos ejemplos dejarán claro la imposibilidad de una definición formal de Ciencia No Lineal, pero también que está llamada a ser una herramienta básica en el estudio de los sistemas complejos. Vuelven además sobre otra observación recurrente: la Complejidad es un campo eminentemente interdisciplinar. De esto hablaremos en la siguiente sección.

4 La Complejidad como ciencia interdisciplinar

De la discusión precedente sobre el origen y las bases de la Complejidad podría concluirse que es, simplemente, una rama de la física, a la que se le ha puesto nombre y ha cuajado². Nada más lejos de la realidad. Como muestra el esquema de la figura 1, el estudio de los fenómenos emergentes rompe las fronteras tradicionales entre campos de la ciencia. Como dice Anderson [5], muchas veces los objetos elementales pertenecen a una ciencia (p.ej., la química) y los emergentes a otra (p.ej., la biología). Y lo mismo ocurre con los métodos de la complejidad: suelen caer en el espacio interdisciplinar. A este respecto, citaré a Maxi San Miguel [10]:

Donde aparece la interdisciplinariedad es precisamente en el salto entre dos niveles de la estructura jerárquica de la Ciencia, y/o en el espacio no colonizado entre dos disciplinas bien establecidas, y/o en la creación de nuevos campos del saber. [...] La

²Como el diálogo de la película *Monstruos S.A.* (Peter Docter, 2001):

— Sulley: Mike, ésa no es la puerta de Boo.

— Mike: ¿Boo? ¿Qué es Boo?

— Sulley: Es... cómo he decidido llamarla. ¿Algún problema?

— Mike: Sulley, no deberías ponerle nombre. En cuanto le pones un nombre, empiezas a encariñarte con ello. Así que deja esa cosa dónde estaba.

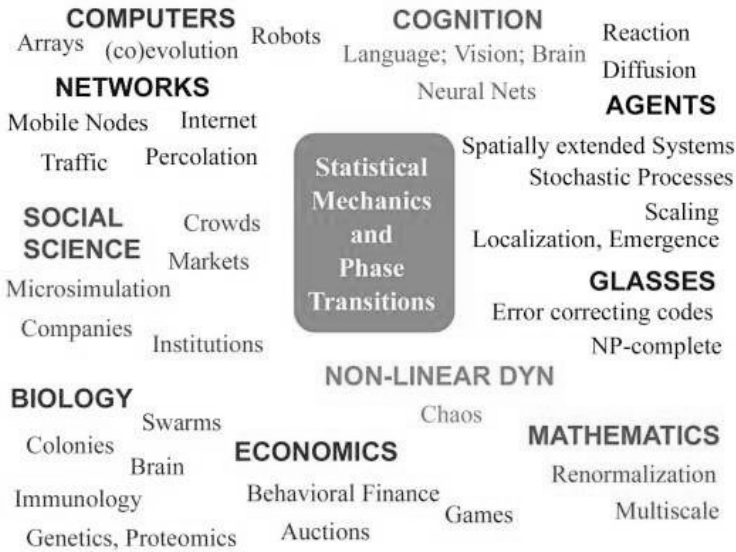


Figura 1: Esquema de la Complejidad y de sus campos vecinos, tomado de [8]. Hay una versión mucho más detallada y elaborada en [9].

investigación interdisciplinar no se refiere pues a un carácter pluri o multidisciplinar que implica una simple superposición de expertos o especialistas en campos diversos que ofrecen sus técnicas para la solución de un problema. Por el contrario, se refiere a la voluntad decidida de cruzar fronteras entre campos establecidos y de forzar la imaginación para transferir conceptos de unos campos a otros, partiendo de que la constatación de que el estudio a través de esas fronteras es fuente de grandes progresos del conocimiento.

En todo caso, y más allá de la discusión, frustrante por irresoluble e inútil, sobre si la Complejidad es Física, Matemáticas, Filosofía o Botánica, las Matemáticas en general y la Matemática aplicada en particular tienen mucho que decir en el estudio de la Complejidad, y mucho terreno donde investigar, aportar, y enriquecerse [11]. Recordemos el paradigma tradicional del modelado en Matemática Aplicada: de acuerdo al texto clásico de Lin y Segel [12] el procedimiento de modelado matemático pasa por tres fases: *formulación*, o traducción del problema científico a términos matemáticos; *análisis*, o solución matemática del modelo, e *interpretación y verificación* de la solución en términos del problema original. Esto es precisamente el *modus operandi* de la investigación en sistemas complejos, como veremos en los ejemplos que discutiremos más abajo. Por otro lado, el primer (y anhelado) Plan Nacional de Matemáticas [13] nos recuerda, en su epígrafe sobre Matemática Aplicada y Computacional:

En esta área confluyen una investigación de carácter más teórica en

la que se analizan cuestiones tales como la existencia, unicidad y propiedades cualitativas de soluciones, con los métodos asintóticos y perturbativos propios de la Física y de la Ingeniería que permiten frecuentemente predecir propiedades cualitativas de los modelos. Todas estas técnicas confluyen en temas de gran importancia por sus aplicaciones tales como la dinámica no lineal, el caos y la complejidad.

Y es que ciertamente, la Complejidad ofrece grandes oportunidades para hacer y aplicar matemáticas. Por ejemplo, como dice Steven Strogatz [14], se echa en falta algo conceptualmente equivalente al Cálculo, una manera de ver las consecuencias de la multitud de interacciones que definen un sistema complejo. Asimismo, dada la importancia de los acoplamientos entre partes del sistema, la teoría de grafos es un hervidero de actividad reciente a este respecto. ¿Y qué decir de las ecuaciones, tanto diferenciales como parciales, en diferencias o difero-diferenciales? Por no hablar, por ejemplo, de las propiedades espectrales de operadores, cruciales para tratar con transiciones de fase. O de la formalización pendiente de técnicas de simulación numérica basadas en agentes, o de la teoría de control, o de técnicas de homogeneización, o de... Prácticamente, cualquier rama de la matemática tiene algo que aportar a esta disciplina en formación. Y además, la interacción con el ordenador abre un mundo de posibilidades, ya que, en palabras de Norman Zabusky [15], uno de los descubridores de las soluciones tipo solitón de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, “con el uso juicioso de los ordenadores podemos penetrar en nuevas áreas y descubrir conexiones entre campos diversos de las matemáticas que escaparon a nuestros predecesores.”

5 Algunos ejemplos

Pero basta ya de generalidades y, digamos, palabrería. Mostrad cómo, dicen. Pues qué mejor ejemplo que los que se presentaron en la Sesión sobre Complejidad de CEDYA 2005.

Redes complejas

Por empezar hablando de algo tan importante para un sistema complejo como es la red de conexiones entre sus partes, centrémonos en el tema de “redes complejas” (léase grafos complejos). El interés sobre este asunto se originó a finales de los años 90, con el re-descubrimiento [16] de las llamadas redes de pequeño mundo. Este nombre se refiere a la observación de que bastan muy pocos pasos para ir de una persona a otra pasando por sus conocidos³. Cuando se

³Un ejemplo muy matemático de esta idea es el llamado número de Erdős, el número de colaboradores que ligan a Paul Erdős con cada uno a través de coautores. El propio Erdős tiene número 0; sus coautores tienen número 1; los coautores de éstos tienen número 2, y así sucesivamente. El número de Erdős promedio es 5, el máximo conocido es 13, y casi toda la población estudiada tiene número de Erdős entre 0 y 8. El mío es 4, y se puede averiguar fácilmente el de cualquiera utilizando MathSciNet. Véase <http://www.oakland.edu/enp/>.

empezaron a aplicar conceptos similares a redes tan importantes como “la” red, internet, se desató el boom: se trabaja sobre distribuciones de grados, *clustering*, correlaciones, modelos de grafos aleatorios, modelos de crecimiento de redes, conexión preferencial, procesos dinámicos sobre redes, . . . Un mundo (una buena referencia reciente es [17]).

En este sentido, Yamir Moreno, del Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos, Universidad de Zaragoza, presentó un interesante trabajo sobre el problema del recubrimiento. Un gran número de problemas en redes de comunicación requieren una distribución de recursos óptima y eficiente tanto para el almacenamiento y distribución de la información como para la respuesta ante fallos o ataques. Formalmente el problema del recubrimiento consiste en encontrar cual es el menor subconjunto de elementos de una red (nodos) tal que cualquier miembro de ésta disponga de un elemento de este subconjunto a una distancia menor que una dada. En la sesión, Yamir presentó un método heurístico para hallar soluciones casi óptimas al problema del recubrimiento en redes reales con correlaciones, y mostró su importancia a la hora de analizar procesos de difusión de virus mediante un modelo epidemiológico tipo S.I.R., así como en posibles estrategias de inmunización.

Simulación de choques en sistemas de aguas someras

Si el ejemplo anterior correspondía a uno de los temas más recientes dentro de la Complejidad, el trabajo que nos presentó Carlos Parés, de la Universidad de Málaga es más clásico, y tiene que ver con el paradigma de las estructuras coherentes mencionado más arriba: las discontinuidades que se generan en algunos sistemas de leyes de conservación y sus generalizaciones ⁴. Estas discontinuidades se corresponden con fenómenos observables en la práctica que involucran variaciones abruptas de alguna de las magnitudes físicas del medio cuya evolución se desea simular: éste es el caso de la explosión sónica que genera un movimiento que supera la velocidad del sonido. Asimismo, este tipo de variaciones abruptas puede ser observado fácilmente en la superficie libre del agua en movimiento: basta pensar en el frente que se forma tras la ruptura de una presa o al alcanzar la costa un tsunami. Como ingrediente adicional que “complejifica” el problema a estudiar, en fluidos estratificados este tipo de fenómenos no solo aparece en la superficie libre: también son observables variaciones abruptas de la interfaz que separa dos capas consecutivas de agua de diferente densidad. Es el caso del Estrecho de Gibraltar: las medidas obtenidas en campañas oceanográficas registran variaciones súbitas de la interfaz que separa las aguas de naturaleza mediterránea y atlántica, cuyas amplitudes pueden ser superiores a 100 metros. Obviamente, dada la importancia de este tipo de fenómenos, que Carlos ilustró con la riada tóxica de Aznalcóllar o las corrientes de marea del Estrecho, es necesario que los esquemas numéricos a utilizar sean capaces de aproximar correctamente la formación y propagación de dichas discontinuidades. Estamos así ante un problema de muchas escalas,

⁴La conferencia plenaria de Marco Fontelos en CEDYA 2005 sobre singularidades en interfaces fluidas es un ejemplo hasta cierto punto relacionado. Más información en [18].

característico de la Complejidad. Estos trabajos se encuentran estupendamente presentados y con referencias en [19].

El corazón como un sistema complejo

Y siguiendo con las aplicaciones o ejemplos de interés obvio, Víctor Pérez García, de la Universidad de Castilla-La Mancha nos introdujo en el difícil mundo del modelado del corazón (aunque yo originalmente le contacté para que hablara de solitones en condensados de Bose-Einstein, otro sistema complejo muy de actualidad en el que también es un experto [20]). En este caso, su trabajo nos ponía ante la situación habitual a la hora de modelar un sistema complejo para intentar entenderlo: ¿Qué es lo importante? ¿Qué puedo eliminar? De hecho, ésta es muchas veces la razón por la cual en otros campos, pienso como un buen ejemplo en la Biología, se desprecia olímpicamente la aportación de la Complejidad, con el argumento de que o se incluye todo en el modelo, o el modelo no sirve para nada por poco realista. Con un *case study* tan importante como el corazón, Víctor nos mostró que no es así: tras una necesaria introducción general a la electrofisiología cardiaca, expuso los problemas que surgen en el modelado mediante ecuaciones ordinarias a nivel de célula y en derivadas parciales a nivel de propagación en fibras y tejido. Al igual que en el caso anterior, la aparición de múltiples escalas y objetos a modelar conlleva problemas en la simulación, para lo cual se construyen métodos numéricos adaptados a las especificidades de los modelos y la geometría compleja del problema. Encontramos también otras características de muchos trabajos en Complejidad, como es el que se describen flujos en medios inherentemente discretos (formados por células) con ecuaciones continuas (en derivadas parciales) observando el sistema a una escala muy grande (comparada con la de la célula). Finalmente, es interesante notar que cuando se aplica el modelo al estudio de la fibrilación ventricular, estamos de nuevo ante el paradigma de las estructuras coherentes, pero acompañado por el de formación de patrones.

Ecuaciones diferenciales estocásticas en derivadas parciales

Otro ingrediente fundamental de muchos sistemas complejos es un cierto grado de aleatoriedad o ruido. Este aspecto fue cubierto en la sesión por José M. Sancho, de la Universitat de Barcelona, que resumió desde el punto de vista de las aplicaciones lo que se viene haciendo en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. Las más sencillas aparecen de forma natural al introducir un ruido blanco gaussiano aditivo (que en Mecánica Estadística se interpreta como el efecto de un baño térmico a una temperatura dada) en la ecuación de difusión. Aunque esta ecuación parezca muy simple da lugar a comportamientos interesantes y típicos de los sistemas complejos, como la aparición de leyes de escala, la universalidad, etc. Desde el punto de vista matemático, hay que decir que muchos estudios discuten la consistencia de tales ecuaciones en dimensión espacial mayor que uno, pese a lo cual se vienen utilizando, sobre todo en Física y Química, obteniéndose predicciones analíticas

y numéricas coincidentes con observaciones en los sistemas reales que pretenden modelar. Por otro lado, pese a que intuitivamente esperamos que la aleatoriedad sea un efecto destructivo, desordenador, hay muchos fenómenos no triviales que aparecen en estos sistemas como el orden inducido por ruido o la resonancia estocástica, por ejemplo. Otro interesante problema matemático es la relevancia de la interpretación que se utilice (Itô o Stratonovič) dentro de este contexto. Una buena referencia para ampliar esta reseña necesariamente telegráfica es [21].

6 Características de los sistemas complejos

Habiendo definido en la sección 2 lo que son los sistemas complejos, y con los ejemplos que acabamos de presentar, estamos en condiciones de profundizar un poco más en el concepto. Para ello, resumiré algunas de las características que se suelen observar en los sistemas complejos.

Más sobre emergencia. Al definir los sistemas complejos, hablamos de la emergencia como su principal característica, entendiéndola como que el comportamiento del todo es distinto del de las partes. Sin embargo, este concepto es mucho más profundo y tiene muchas sutilezas, y habría que tratarlo con detalle. Una buena referencia para ello es [22], donde se clasifica la emergencia en cuatro tipos distintos, que a su vez tienen subclases, atendiendo sobre todo a la existencia y la forma de realimentación entre los componentes del sistema y el comportamiento emergente. Es claro que esta discusión excede con mucho el propósito de este trabajo, pero no quiero dejar de mencionar a modo de ilustración que en Sociología se trabaja mucho con el concepto “emergencia de segundo orden”, que tiene que ver con el efecto del comportamiento emergente sobre las partes del sistema (como las normas de las que se dota una sociedad y el efecto de esas normas sobre la propia red social).

Transiciones de fase. Además de la emergencia, una característica presente en la mayoría de los sistemas complejos es la existencia de transiciones de fase. Este concepto físico se aplica de manera generalizada a cualquier situación en la cual un pequeño cambio de los parámetros de control de un sistema lleva a un cambio cualitativo del comportamiento del sistema como un todo. Un ejemplo familiar es, sin ir más lejos, la congelación del agua; otro es la aparición de superconductividad (resistencia eléctrica cero) por debajo de cierta temperatura en muchos materiales. Debo aclarar, en cualquier caso, que el parámetro de control que cambia no tiene por qué ser la temperatura, y puede ser cualquier otra cosa: en un sistema físico podría ser un campo externo aplicado, en un sistema químico podría ser la concentración de determinado compuesto, en una economía pueden ser los tipos de interés... Por otra parte, este fenómeno no es independiente del comportamiento emergente, y de hecho muchas veces se refiere a cambios precisamente en dicho comportamiento.

Universalidad y leyes de escala. Una de las propiedades más curiosas de los sistemas complejos es que presentan un alto grado de universalidad: su comportamiento, y en particular sus transiciones de fase, dependen muy poco de los detalles del sistema, y sólo cosas como la dimensionalidad del sistema o el alcance de las interacciones entre partes son realmente relevantes. Esta propiedad se estudia formalmente con una herramienta matemática llamada el grupo de renormalización (que es en realidad un semigrupo) y va asociada a la existencia de leyes de escala en el sistema [23]. Estas leyes de escala describen la manera en que las magnitudes que caracterizan al sistema se comportan cerca de una transición de fase, punto en el que típicamente el sistema presenta un estado auto-semejante, con ausencia de escalas de longitud características.

Jerarquía. Por último, hay que decir que los sistemas complejos pueden presentar más de un nivel de complejidad. Es decir: podemos tener ciertos componentes acoplados que dan lugar a un comportamiento emergente determinado a una escala, escala a la que esos comportamientos emergentes se acoplan a su vez para originar algo “super-emergente”, y así sucesivamente. Aquí es paradigmática la biología, con la jerarquía de niveles molécula-célula-tejido-órgano-organismo-grupo-especie, pero hay otros campos y problemas donde hay muchos niveles de interacción en juego.

7 Algunos campos de aplicación

El espacio de este artículo es muy insuficiente para describir las aplicaciones de la Complejidad. Uno puede hacerse una idea, además de por la generalidad de la definición de sistema complejo, por las indicaciones de la figura 1. Pero dejar así la cuestión me resulta muy insatisfactorio, y aún a riesgo de no ser exhaustivo y de dar la impresión de que la Complejidad sólo tiene que ver con unos pocos campos, quiero mencionar explícitamente algunos.

Física. Como ya hemos dicho, de la Física partieron las ideas originadoras de la Complejidad, y parece un poco de perogrullo el que la Complejidad se aplique en Física. En realidad esto no es así, porque estas ideas están llegando a campos de la Física donde eran unas perfectas desconocidas, campos que van de la Nanotecnología a la Computación Cuántica pasando por la Astronomía. Quizá uno de los retos más importantes hoy en Física es el estudio de sistemas desordenados, que casi siempre son sistemas complejos formados por partes heterogéneas. Por cierto, éste es un problema en el que se necesitan nuevas matemáticas con urgencia ⁵. No hay que decir que avances significativos en esta cuestión serían de inmediato interés para los demás campos, donde generalmente la aproximación de suponer que las partes son iguales es muy pobre.

⁵Por ejemplo, hay un teorema bastante general [24] que identifica una clase de sistemas que no pueden tener transiciones de fase. Sería muy importante disponer de una condición necesaria y suficiente para las transiciones de fase, así como el generalizar estos resultados a sistemas inhomogéneos.

Economía. No creo que tenga que hacer un gran esfuerzo para convencer al lector de que la Economía es un sistema complejo. Muy complejo. Tampoco parece extraño que lo que gustaría a cualquier economista sea resolver el problema micro-macro: cómo se explica la Macroeconomía desde la Microeconomía, igual que la Termodinámica es explicada por la Mecánica Estadística. Aparte de esta pregunta muy general, hay mucho interés hoy en día en modelar los mercados financieros como sistemas complejos, para intentar comprender su funcionamiento (y sacar partido de él, obviamente). Los problemas de gestión de las grandes empresas globalizadas son otra aplicación directa de la Complejidad. Un libro pionero sobre Complejidad en Economía es [25].

Sociología. Las redes sociales son uno de los arquetipos que más se utilizan últimamente para justificar la interdisciplinariedad de la Complejidad, y realmente es así. Cómo se forman, que consecuencias conllevan, cómo dan lugar al establecimiento de normas e instituciones, cómo se ven afectadas por esas normas, qué tienen que ver con la cultura y su evolución son preguntas que están hoy en día en el ambiente de la sociología, y hay mucho trabajo por hacer. Otros problemas interesantes en el campo son la formación de opiniones y consenso, la dinámica electoral o la segregación de poblaciones (asunto en el que ya trabajó el último premio nobel de Economía, Thomas Schelling, desde la perspectiva de los sistemas complejos pero anticipándose a ella [26]). En la zona fronteriza entre la Economía y la Sociología están cuestiones como los problemas de tráfico que también son modelos arquetípicos de sistemas complejos. No puedo resistirme a decir que hace casi diez años ya publiqué un trabajo hablando de “Física Social” y usando el tráfico como ejemplo [27]. De todas maneras, la palabra “Sociofísica” ya había sido utilizada por Serge Galam en los años setenta (en los noventa se introdujo también la “Econofísica”).

Biología. Ya he hablado de la Biología como ciencia en la que la jerarquía de niveles de complejidad es muy intrincada. Para presentar algunos ejemplos concretos aquí, y dejándome prácticamente todos en el tintero, puedo referirme a sistemas tales como el sistema inmunológico, que funciona como un bloque (de manera emergente) a partir de las células y proteínas involucradas en él; al cerebro; a las bandadas de peces o de pájaros; a las redes de regulación genéticas o proteómicas; a las redes ecológicas, o a la cooperación en poblaciones bacterianas. El problema más citado en este contexto es el del plegamiento de proteínas: intentar predecir de que forma se va a estructurar en el espacio una secuencia lineal dada de aminoácidos. Por otro lado, me parece particularmente destacable el que técnicas de modelado y simulación de problemas ecológicos complejos estén siendo transferidas a otros campos, véase por ejemplo [28].

8 Conclusión

Después de este rápido viaje por la Complejidad, ¿qué queda por decir? Todo, claro está. Como decía al principio, mi objetivo fundamental es interesar al lector por estos temas, y en particular transmitir a la comunidad de Matemática Aplicada las oportunidades que a mi juicio se le presentan en este campo que se puede calificar muy apropiadamente de “emergente”. En este sentido, un aspecto que me resulta muy atractivo y del que no he hablado explícitamente es el de los sistemas complejos adaptativos: sistemas complejos con el ingrediente añadido de la evolución para adaptarse, bien al ambiente, bien al comportamiento global del sistema, bien a ambos. Esta es una clase de sistemas que aparece en cualquier campo, y ciertamente varios de los mencionados en el apartado anterior corresponden a esta categoría. Su estudio involucra muchas Matemáticas clásicas, desde los sistemas Lotka-Volterra a la teoría de juegos evolutiva, y muchas por hacer, como se describe en [29]. Habría muchas otras cosas que discutir y que me dejo, pero que creo que el lector es sobradamente capaz de descubrir por su cuenta. Una introducción divulgativa extensa es [30], y un punto de partida más especializado puede ser uno de los pocos libros que conozco que tratan específicamente de los sistemas complejos, [31]. En cualquier caso, gracias por haberme acompañado hasta aquí, y para terminar este pequeño ensayo sobre la Complejidad, nada mejor que citar al dibujante y político gallego Castelao. Una de las frases de sus dibujos en el álbum “Nós” se aplica estupendamente al espíritu con el que hay que seguir construyendo la Complejidad (y muchas otras cosas): “Non lle poñades chatas á obra namentras non estea rematada. O que pense que vai mal que traballe nela; hai sitio para todos⁶.”

Agradecimientos

Agradezco al Comité Científico de CEDYA 2005 la oportunidad de organizar la sesión monográfica sobre Complejidad, a José A. Carrillo, José A. Cuesta (con el que además he discutido este manuscrito), Alberto Ibort y Enrique Zuazua sus opiniones y comentarios durante la preparación de la sesión, y a Yamir Moreno, Carlos Parés, Víctor Pérez-García y José M. Sancho el haber tomado parte en ella. Gracias también a la Dirección del Boletín de SĒMA por ofrecerme este marco para presentar mis ideas sobre Complejidad. Asimismo, agradezco muy especialmente a todas las personas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid que participaron en la organización de CEDYA 2005 su extraordinario trabajo.

Este artículo está dedicado a la memoria de Carlos Pérez García, del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, y presidente fundador del Grupo Especializado de Física Estadística y No Lineal de la Real Sociedad Española de Física. Un gran amigo con el que ya no tendré el

⁶No le saquéis defectos a la obra mientras no esté terminada. El que piense que va mal que trabaje en ella; hay sitio para todos.

placer de aprender sobre Complejidad ni de discrepar en muchas cosas, un gran amigo que se ha ido demasiado pronto.

Referencias

- [1] G. W. FLAKE. *The Computational Beauty of Nature*. M.I.T. Press, 1998.
- [2] <http://www.cs.huji.ac.il/~etom/maptree/?complexity+uses>.
- [3] El sitio web se está poniendo en marcha: <http://www.giacs.org>.
- [4] <http://www.santafe.edu>.
- [5] P. W. ANDERSON. More is different. *Science* 177:393–396, 1972.
- [6] Hay una infinidad de libros sobre Mecánica Estadística, pero uno reciente, relativamente sencillo y muy autocontenido es el del físico matemático D. C. Mattis. *Statistical Mechanics Made Simple*. World Scientific, 2003.
- [7] A. SCOTT, EDITOR. *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Taylor and Francis, 2005.
- [8] S. SOLOMON Y E. SHIR. Complexity; a science at 30. *Europhys. News* 34(2):54-57, 2003.
- [9] <http://complexity.cogniview.com/MapIndex.html>
- [10] M. SAN MIGUEL. Interdisciplinarietà: Comentarios desde la perspectiva de un físico. *El papel social de la ciencia en baleares: Un homenaje a Javier Benedí*. Eds. C. Duarte y F. Grases, Universitat Illes Balears, 235-250, 2003.
- [11] A título de curiosidad, en la página web <http://gisc.uc3m.es/~anxo/math.html> voy compilando una lista de centros de Matemáticas donde se trabaja en estos campos.
- [12] C. C. LIN Y L. SEGEL. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. SIAM Classics in Applied Mathematics vol. 1, 1998.
- [13] Plan Nacional de I+D+i, vol. II, Áreas Prioritarias. http://wwwn.mec.es/ciencia/plan_idi/files/Plan_Nacional_Vol_II.pdf, p. 201.
- [14] S. STROGATZ. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion, 2003.
- [15] N. ZABUSKY. Computational synergetics and mathematical innovation. *J. Comput. Phys.* 43:195, 1981.
- [16] D. WATTS Y S. STROGATZ. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* 393:440-442, 1998.

- [17] M. E. J. NEWMAN. The structure and function of complex networks. *SIAM Review* 45:167-256, 2003.
- [18] M. A. FONTELOS. Formación de singularidades y problemas de frontera libre en mecánica de fluidos. *Boletín SēMA* 30:143-166, 2004.
- [19] <http://www.damflow.com>.
- [20] G. D. MONTESINOS Y VÍCTOR M. PÉREZ-GARCÍA. Solitones estabilizados. *Revista Española de Física* 18(3):57-60, 2004.
- [21] J. GARCÍA-OJALVO Y J. M. SANCHO. *Noise in Spatially Extended Systems*. Springer Institute for Nonlinear Science Series, 1998.
- [22] J. FROMM. Types and forms of emergence. <http://arxiv.org/abs/nlin.A0/0506028>, 2005.
- [23] G. I. BARENBLATT. *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1996.
- [24] J. A. CUESTA Y A. SÁNCHEZ. General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions. *J. Stat. Phys.* 115:869–893, 2004.
- [25] P. W. ANDERSON, K. J. ARROW Y D. PINES, EDITORES. *The Economy as an Evolving Complex System*. Addison-Wesley, 1988.
- [26] T. C. SCHELLING. *Micromotives and Macrobehavior*. W. W. Norton and Co., 1978.
- [27] A. SÁNCHEZ. Un ejemplo de Física Social: Física del tráfico. *Revista Española de Física* 10(4):16–25, 1996.
- [28] V. GRIMM *et al.* Pattern-oriented modeling of agent based complex systems: Lessons from ecology. *Science*, 310:987–991, 2005.
- [29] S. A. LEVIN. Complex adaptive systems: Exploring the known, the unknown and the unknowable. *Bull. Am. Math. Soc.* 40:3–19, 2002.
- [30] M. A. WALDROP. *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*. Simon & Schuster, 1992.
- [31] Y. BAR-YAM. *Dynamics of Complex Systems*. Addison-Wesley, 1997. Se puede descargar de <http://necsi.org/faculty/bar-yam.html>.

Sesión monográfica de
ÁLGEBRA LINEAL NUMÉRICA

Coordinador: FROILÁN MARTÍNEZ DOPICO

Participantes:
ILSE C.F. IPSEN
JUAN M. MOLERA
JUAN M. PEÑA

Mathematical properties and analysis of Google's PageRank

ILSE C.F. IPSEN, REBECCA S. WILLS

Department of Mathematics, North Carolina State University,
Raleigh, USA

ipsen@ncsu.edu, rmwills@ncsu.edu

Abstract

To determine the order in which to display web pages, the search engine Google computes the *PageRank* vector, whose entries are the PageRanks of the web pages. The PageRank vector is the stationary distribution of a stochastic matrix, the *Google matrix*. The Google matrix in turn is a convex combination of two stochastic matrices: one matrix represents the link structure of the web graph and a second, rank-one matrix, mimics the random behaviour of web surfers and can also be used to combat web spamming. As a consequence, PageRank depends mainly the link structure of the web graph, but not on the contents of the web pages. We analyze the sensitivity of PageRank to changes in the Google matrix, including addition and deletion of links in the web graph.

Due to the proliferation of web pages, the dimension of the Google matrix most likely exceeds ten billion. One of the simplest and most storage-efficient methods for computing PageRank is the power method. We present error bounds for the iterates of the power method and for their residuals.

Key words: *Markov matrix, stochastic matrix, stationary distribution, power method, perturbation bounds*

AMS subject classifications: *15A51, 65C40, 65F15, 65F50, 65F10*

1 Introduction

How does the search engine Google determine the order in which to display web pages? The major ingredient in determining this order is the PageRank vector, which assigns a score to a every web page. Web pages with high scores are displayed first, and web pages with low scores are displayed later. The PageRank of a web page is based on the link structure of the web graph and

does not depend on the content of web pages. The importance of PageRank is emphasized in one of Google's web pages [1]:

The heart of our software is PageRankTM, a system for ranking web pages developed by our founders Larry Page and Sergey Brin at Stanford University. And while we have dozens of engineers working to improve every aspect of Google on a daily basis, PageRank continues to provide the basis for all of our web search tools.

The PageRank vector is the stationary distribution of a stochastic matrix, called the Google matrix. In §2 we describe the Google matrix and define the PageRank vector. The sensitivity of PageRank to changes in the Google matrix is analyzed in §3, and the power method for computing PageRank is presented in §4.

2 PageRank and the Google Matrix

The link structure of the web graph can be represented mathematically as a matrix H [9]. Suppose web page i has $l_i > 0$ outlinks. If page i contains a link to another page $j \neq i$, then $H_{ij} = 1/l_i$, otherwise, $H_{ij} = 0$. Matrix element H_{ij} represents the likelihood that a surfer follows the link from page i to page j . If web page i has no outlinks then row i of H is zero. Such as web page, called a *dangling node*, can be a pdf file or a page whose links have not yet been crawled.

To transform H into a stochastic matrix¹ S , one can fill every row corresponding to a dangling node with a vector w^T . That is, $S \equiv H + dw^T$, where $d_i = 1$ if page i has no outlinks, and $d_i = 0$ otherwise; and w is a column vector with $w \geq 0$ and $\|w\|_1 = 1$. A popular choice is to set to $1/n$ every element in the dangling node rows, where n is the number of nodes in the web graph; in other words $w = \frac{1}{n}\mathbf{1}$, where $\mathbf{1}$ is the column vector of all ones.

The Google matrix is defined as a convex combination of S and a rank-one matrix, i.e.

$$G \equiv \alpha S + (1 - \alpha)\mathbf{1}v^T, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad v \geq 0, \quad \|v\|_1 = 1.$$

The *damping factor* α , originally set to .85, models the possibility that a web surfer jumps from one web page to the next without necessarily following a link [3]. The *personalization vector* v can be used to combat link spamming [7].

The matrix G is row stochastic and, in general, reducible. However it has a distinct dominant eigenvalue. To see this, denote the eigenvalues of S by $\lambda_1(S) = 1$ and $\lambda_i(S)$, $i \geq 2$, where $|\lambda_i(S)| \leq 1$. The eigenvalues of G are 1 and $\alpha\lambda_i(S)$, $i \geq 2$ [5]. Due to the uniqueness of the dominant eigenvalue, the stationary distribution π of G is unique. Therefore the *PageRank* vector is defined as the stationary distribution π of G ,

$$\pi^T G = \pi^T, \quad \pi \geq 0, \quad \|\pi\|_1 = 1.$$

¹A real square matrix is stochastic if all its elements lie between 0 and 1, and the elements in each row sum to 1.

The i th entry of π is the PageRank for web page i .

3 Sensitivity of PageRank

We show that the sensitivity of the PageRank vector to changes in the matrix S , in the personalization vector v and in the damping factor α is governed by the damping factor α ; and that PageRank can be considered insensitive to changes in G .

Perturbation theory for stationary distributions of Markov chains is well understood, see for instance [4]. The results presented here exploit the particular structure of the Google matrix. Several of these have already appeared in the literature, but our proofs are rigorous and simple [8]. The proofs make use of the fact that the eigenvector problem $\pi^T G = \pi^T$, $\|\pi\|_1 = 1$ is mathematically equivalent to a system of linear equations whose coefficient matrix is a strictly row diagonally dominant M-matrix [2]

$$\pi^T (I - \alpha S) = (1 - \alpha) v^T,$$

as well as to a linear system whose right-hand side does not depend on α ,

$$\pi^T (I - \alpha(S - \mathbf{1}v^T)) = v^T.$$

The equivalence of the eigenvector problem and the linear systems follows from $\|\pi\|_1 = \pi^T \mathbf{1} = 1$.

3.1 Changes in the Matrix S

The sensitivity of the PageRank vector π to changes in S depends on a condition number that is bounded by $\alpha/(1 - \alpha)$.

Specifically, let $S + E$ be a stochastic matrix, and set

$$\tilde{G} \equiv \alpha(S + E) + (1 - \alpha)\mathbf{1}v^T.$$

The perturbed PageRank vector is $\tilde{\pi}$, where $\tilde{\pi}^T \tilde{G} = \tilde{\pi}^T$, $\tilde{\pi} \geq 0$, and $\|\tilde{\pi}\|_1 = 1$. We obtain for the absolute error in $\tilde{\pi}$,

$$\tilde{\pi}^T - \pi^T = \alpha \tilde{\pi}^T E (I - \alpha S)^{-1}, \quad \|\tilde{\pi} - \pi\|_1 \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|E\|_\infty.$$

For the original damping factor $\alpha = .85$ $\alpha/(1 - \alpha) \approx 5.7$. Even for larger damping factors, the sensitivity is still low: If $\alpha = .99$ then $\alpha/(1 - \alpha) = 99$.

3.2 Changes in the Damping Factor α

The sensitivity of the PageRank vector π to changes in the damping factor α depends on a condition number that is bounded by $2/(1 - \alpha)$.

Specifically, let $0 \leq \alpha + \mu < 1$ be a perturbed damping factor, and set $\tilde{G} \equiv (\alpha + \mu)S + (1 - (\alpha + \mu))\mathbf{1}v^T$. The perturbed PageRank vector is $\tilde{\pi}$, where $\tilde{\pi}^T \tilde{G} = \tilde{\pi}^T$, $\tilde{\pi} \geq 0$, and $\|\tilde{\pi}\|_1 = 1$. The error in $\tilde{\pi}$ can be bounded by

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_1 \leq \frac{2}{1 - \alpha} |\mu|.$$

The condition number bound $2/(1 - \alpha)$ is an increasing function in α . Comparing this bound to the bounds for condition number $\alpha/(1 - \alpha)$ in §3.1 shows that π is slightly more sensitive to changes in the parameter α than to changes in the matrix S . For the original damping factor $\alpha = .85$, the condition number is $2/(1 - \alpha) \approx 13.4$. For $\alpha = .99$, we get $2/(1 - \alpha) = 200$.

3.3 Changes in the Personalization Vector v

The PageRank vector π is perfectly conditioned with regard to changes in the personalization vector v .

Specifically, let $v + f$ be the perturbed personalization vector with $v + f \geq 0$ and $\|v + f\|_1 = 1$; and set $\tilde{G} \equiv \alpha S + (1 - \alpha)\mathbf{1}(v + f)^T$. The perturbed PageRank vector is $\tilde{\pi}$, where $\tilde{\pi}^T \tilde{G} = \tilde{\pi}^T$, $\tilde{\pi} \geq 0$, and $\|\tilde{\pi}\|_1 = 1$. The error bound for $\tilde{\pi}$ contains a condition number that is bounded by one,

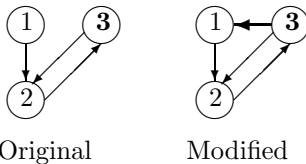
$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_1 \leq \|f\|_1.$$

3.4 Addition of Inlinks

Adding an inlink to a web page increases its PageRank. Specifically, if a link is added from webpage j to web page $l \neq j$ and if web page j does not have a link to itself then the PageRank of page l increases, i.e. $\tilde{\pi}_l > \pi_l$.

3.5 Addition of Outlinks

Adding an outlink to a web page can decrease the PageRank. In the following example of a web graph with 3 web pages we add an outlink from page 3 to page 1:



The PageRanks for web page 3 before and after addition of the link are

$$\pi_3 = \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3(1 + \alpha)} > \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3(1 + \alpha + \alpha^2/2)} = \tilde{\pi}_3.$$

Hence, adding an outlink from page 3 to page 1 decreases the PageRank for page 3 from π_3 to $\tilde{\pi}_3$.

Although adding an outlink may decrease the PageRank of an individual web page, we can still bound the total change in the entire PageRank vector. If outlinks are added to and/or deleted from web page j then the new PageRank vector $\tilde{\pi}$ differs from the old one by

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_1 \leq \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \tilde{\pi}_j.$$

Thus adding and deleting outlinks does not change the entire PageRank vector significantly, provided the new PageRank of page j is not too large.

4 Computing PageRank

The definition of PageRank $\pi^T G = \pi^T$ implies that π is a left eigenvector of G associated with the dominant eigenvalue 1. The simplest way to compute π is to apply the power method to G [9].

Pick $x^{(0)} > 0$, $\|x^{(0)}\|_1 = 1$, $k = -1$
 Repeat $k = k + 1$, $[x^{(k+1)}]^T = [x^{(k)}]^T G$
 until $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \tau$

The difference of successive iterates in the stopping criterion is just the residual, $[x^{(k+1)}]^T - [x^{(k)}]^T = [x^{(k)}]^T G - [x^{(k)}]^T$. The norm can be the one-, two-, or infinity-norm. The parameter τ often lies between 10^{-8} and 10^{-4} .

Although the matrix $G = \alpha S + (1 - \alpha)\mathbf{1}v^T$ is dense, matrix multiplication with G can be performed in a sparse manner by exploiting that $S = H + dw^T$, see §2. Thus matrix vector multiplication of G with a vector $x \geq 0$, $\|x\|_1 = 1$ amounts to:

$$x^T G = \alpha x^T H + (\alpha x^T d)w^T + (1 - \alpha)v^T.$$

This is a sparse multiplication with H , followed by adding multiples of the vectors w^T and v^T . The term $x^T d$ is obtained by adding of all components of x corresponding to dangling nodes. The cost of matrix vector multiplication with G is proportional to the number of non-zeros in H , i.e. the number of links in the web graph.

From the expressions for the eigenvalues of G in §2 follows that the power method converges (in exact arithmetic), with an asymptotic convergence rate bounded by α . This is also reflected in the error bounds for the iterates of the power method and their residuals,

$$\|x^{(k)} - \pi\|_{1,\infty} \leq 2\alpha^k, \quad \|[x^{(k)}]^T G - [x^{(k)}]^T\|_{1,\infty} \leq 2\alpha^k.$$

Another way to compute PageRank is as the solution to the linear system $\pi^T(I - \alpha S) = (1 - \alpha)v^T$, see §3, via stationary iterative methods (such as the Jacobi method) or Krylov subspace methods (such as BiCGSTAB), see for instance [6].

References

- [1] <http://www.google.com/technology/index.html>.
- [2] A. ARASU, J. NOVAK, AND J. TOMKINS, A. AND TOMLIN, *PageRank computation and the structure of the web: Experiments and algorithms*, in Proc. Eleventh International World Wide Web Conference (WWW2002), ACM Press, 2002.
- [3] S. BRIN AND L. PAGE, *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine*, Comput. Networks and ISDN Systems, 30 (1998), pp. 107–17.
- [4] G. E. CHO AND C. D. MEYER, *Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain*, Linear Algebra Appl., 335 (2001), pp. 137–150.
- [5] L. ELDEN, *The eigenvalues of the Google matrix*, Tech. Rep. LiTH-MAT-R-04-01, Department of Mathematics, Linköping University, Sweden, December 2003.
- [6] D. GLEICH, L. ZHUKOV, AND P. BERKHIN, *Fast parallel PageRank: A linear system approach*, tech. rep., Yahoo!, 2004.
- [7] Z. GYÖNGYI, H. GARCIA-MOLINA, AND J. PEDERSEN, *Combating web spam with TrustRank*, in Proc. 30th International Conference on Very Large Databases, Morgan Kaufmann, 2004, pp. 576–587.
- [8] I. C. F. IPSEN, *Numerical analysis of PageRank*. In preparation.
- [9] L. PAGE, S. BRIN, R. MOTWANI, AND T. WINOGRAD, *The PageRank citation ranking: Bringing order to the web*, tech. rep., Stanford Digital Library Technologies Project, 1998.

High relative accuracy algorithms for the symmetric eigenproblem*

JUAN MANUEL MOLERA MOLERA

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

`molera@math.uc3m.es`

Abstract

In this talk we will review the basic facts and results in the field of high relative accuracy. We will see which algorithms and for which classes of matrices give high relative accuracy. In particular we present an algorithm [Dopico, Molera & Moro, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2003] that delivers high relative accuracy for the largest class of symmetric, definite and indefinite, matrices known so far. The algorithm is divided in two stages: the first one computes a SVD with high relative accuracy, and the second one obtains eigenvalues and eigenvectors from singular values and vectors. Using the SVD as a first stage is responsible both for the wide applicability of the algorithm and for being able to use only orthogonal transformations.

Key words: *Symmetric eigenproblem, singular value decomposition, high relative accuracy.*

AMS subject classifications: *65F15, 65G50, 15A18*

1 Introduction

An *orthogonal spectral decomposition* of a real symmetric n by n matrix A is a factorization $A = Q \Lambda Q^T$, where $Q = [q_1, \dots, q_n]$ is real orthogonal and $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n]$ is diagonal. Eigenvalues, $\hat{\lambda}_i$, and eigenvectors, \hat{q}_i , computed numerically with conventional methods, like QR, divide-and-conquer or bisection with inverse iteration have high *absolute* accuracy, i.e, they satisfy

$$|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| = O(\epsilon) \max_j |\lambda_j|, \quad (1)$$

*Research supported by spanish grant BFM2003-00223 of M.E.C.

for the eigenvalues, and

$$\Theta(q_i, \hat{q}_i) = \frac{O(\epsilon)}{\frac{\min_{j \neq i} |\lambda_i - \lambda_j|}{\max_j |\lambda_j|}}, \quad (2)$$

for the eigenvectors, being ϵ the unit roundoff of the finite arithmetic employed and $\Theta(q_i, \hat{q}_i)$ the acute angle between vectors q_i and \hat{q}_i . Thus, a conventional algorithm in general only guarantees correct digits in the eigenvalues with large enough magnitudes but may provide approximations for the small eigenvalues with no correct significant digits, or even with the wrong sign. Moreover, if there are two or more small eigenvalues, their eigenvectors may be computed very inaccurately, even when the eigenvalues are well-separated in the relative sense (e.g. $\lambda_i = 10^{-15}$ and $\lambda_j = 10^{-16}$ if $\lambda_1 = 1$).

High relative accuracy algorithms guarantee that computed eigenvalues have some correct digits, even if the eigenvalues have widely varying magnitudes. It is of interest to compute the tiniest eigenvalues with several correct digits because in some cases those are the ones that have physical meaning. The goal is to compute eigenvalues and eigenvectors with errors

$$|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| = O(\epsilon)|\lambda_i|, \quad (3)$$

instead of (1), and

$$\Theta(q_i, \hat{q}_i) = \frac{O(\epsilon)}{\text{relgap}(\lambda_i)}, \quad (4)$$

instead of (2)¹. The quantity $\text{relgap}(\lambda_i) = \min \left\{ \min_{j \neq i} \frac{|\lambda_j - \lambda_i|}{|\lambda_i|}, 1 \right\}$ is the eigenvalue relative gap.

High relative accuracy has been a very active area of research in the last fifteen years (see [3] and references therein for an overview). It is known that in general it is not possible to get (3) and (4) for an arbitrary matrix. At present, high relative accuracy can only be reached for certain classes of *symmetric* matrices. These are identified through a twofold approach. First it is necessary to determine classes of matrices and perturbations that allow high relative accuracy. In particular, a lot of work has been done in multiplicative perturbation theory (see [7] and references therein for a full review) and it is known that algorithms with small multiplicative backward errors will produce HRA. Second, algorithms that can use and exploit this special perturbation theory are to be reviewed. Some of them will be reviewed in this work.

It happens that the quest for high relative accuracy in the symmetric eigenproblem is closely related to the high relative accuracy problem in the computation of singular values and vectors. Then we will devote section 2 to the SVD, and section 3 to the symmetric eigenvalue problem.

¹For the sake of brevity in the rest of this work I will only speak of eigenvalues and singular values. There are equivalent results for eigenvectors and singular vectors.

2 High Relative Accuracy and the Singular Value Decomposition

For a symmetric matrix the eigenvalue and the SVD problems are very closely related. HRA was first proven in 1990 for the SVD of bidiagonal matrices by Demmel and Kahan, by using zero a modified QR-type algorithm. Later on, Fernando and Parlett introduced a new algorithm (dqds, it is called) that also delivers HRA for the SVD problem. After that HRA has been proved for special classes: (Scaled) Cauchy, (Polynomial) Vandermonde, (Diag. Dominant) M-matrices, TN, ... (see [3] for a complete list of references). In 1999 Demmel, Gu, Eisenstat, Slapničar, Veselić, Drmač [3] proposed a unified algorithmic and theoretical approach for many High Relative Accuracy SVD computations. It was established that the necessary and sufficient condition for a matrix to have a High Relative Accuracy SVD was that it had a Rank Revealing Decomposition (RRD) with small forward errors (see Theorem 1 below). Given $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$, of rank r , $A = XDY^*$ is a RRD if $D \in \mathbb{C}^{r \times r}$ is diagonal and nonsingular, and $X \in \mathbb{C}^{m \times r}$ and $Y \in \mathbb{C}^{n \times r}$ are well conditioned matrices of full column rank². The important thing it is that this condition can be checked using a finite computation (as GECP). Furthermore, they provided algorithms to implement it and were able to classify many classes of matrices allowing HRA SVD. The proposed algorithm has two steps

1. Compute an RRD $A = XDY^T$.
2. Compute SVD of the RRD $XDY^T = U\Sigma V^T$ (using a Jacobi-type algorithm).

Their main result establishes that for any matrices such that an accurate enough RRD can be obtained HRA SVD will be possible.

Theorem 1 *If the RRD factors, $A = XDY^* \approx \widehat{X}\widehat{D}\widehat{Y}^*$, are computed with the forward errors:*

$$|D_{ii} - \widehat{D}_{ii}| = O(\epsilon)|D_{ii}|, \quad \|X - \widehat{X}\| = O(\epsilon)\|X\|, \quad \|Y - \widehat{Y}\| = O(\epsilon)\|Y\|,$$

where ϵ is the unit roundoff, then the above algorithm compute SVD with high relative accuracy, i.e.,

$$|\widehat{\sigma}_i - \sigma_i| \leq O(\max\{\kappa(X), \kappa(Y)\}\epsilon)|\sigma_i|$$

3 HRA Algorithms for the symmetric eigenproblem

In terms of results and difficulty the high relative accuracy problem for the symmetric eigenvalue problem it is divided naturally in two cases: definite and indefinite matrices.

²The reduced SVD is an example of RRD.

3.1 Positive definite matrices

The positive definite eigenproblem was the first to be treated from the point of view of getting HRA by a factorization+Jacobi rotations [4]. For matrices with good scaling properties HRA was proven by a two step algorithm:

1. Compute a Cholesky decomposition $A = LL^T$
2. Compute SVD of L using right-Jacobi: $LG_1G_2 \cdots G_p = U\Sigma$

The eigenvalues are $\Lambda = \Sigma^2$ and $Q = U$ the eigenvectors. It was proved that it is possible to get HRA for the class of positive definite matrices that are well scaled by its diagonal.

Theorem 2

Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be symmetric positive definite, then the eigenvalues $\{\widehat{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ computed by previous Algorithm satisfy $|\widehat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq O(\epsilon)\kappa(B)|\lambda_i|$, with $B = S^{-1}AS^{-1}$ and $S = \text{diag}[A_{11}^{1/2}, \dots, A_{nn}^{1/2}]$.

3.2 Indefinite symmetric matrices

The indefinite case is more complicated than the positive definite one. The first eigenproblem for which HRA was proved to be achievable was for scaled diagonally dominant matrices in 1990 [1]. A special technique was used: bisection plus inverse iteration. However, for the general case a similar approach (RRD + SVD) as in the positive definite case is possible though there are some important differences.

At present there are two available algorithms that can obtain HRA for different classes of matrices:

- J-orthogonal hyperbolic algorithm by Veselić and Slapničar (1992)[9, 8]
- SVD +signs algorithm by Dopico, Molera and Moro (2003)[5]

They are similar in that both use the two step approach: Factorization + SVD (using Jacobi-type rotations). Both have computational cost higher than usual algorithms, though still $O(n^3)$ if the factorization step is $O(n^3)$. However they differ in the approach to the problem of the signs, and though they deliver similar (high relative) accuracy, the range of applicability and the bounds they get for the errors are different.

3.2.1 J-orthogonal algorithm

The two main steps of the J-orthogonal algorithm are

1. Compute $A = GJG^T$
2. Apply the implicit J-orthogonal Jacobi method to the pair (G, J) :

$$GH_1H_2 \cdots H_p = G_{p+1} = U\Delta \quad \text{with} \quad H_k^T JH_k = J$$

The eigenvalues are $\Lambda = \Delta^2 J$ and the eigenvectors $U = G_{p+1}\Delta^{-1}$ with $G_{k+1} = G_k H_k$, $k = 1 : p$, $G_1 = G$.

The first step is a variation of the symmetric RRD $A = XDX^T$ Bunch-Parlett factorization [2], and the second step uses hyperbolic (J-orthogonal) implicit SVD Jacobi on GJG^T .

There are some objections to this method. First symmetric RRDs are less understood and more difficult to deal with than non-symmetric RRDs (GECP). Second, hyperbolic rotations have more arithmetic and its numeric properties are worse than orthogonal rotations (they do not preserve norms). Besides the routines that implement them are not included in state-of-the art software (LAPACK, for example). The accuracy result of this algorithm is

Theorem 3 *Let A be symmetric with $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ its eigenvalues and a symmetric High Relative Accuracy RRD given $A = XDX^T = GJG^T$ given. Let $\{\widehat{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ be the eigenvalues computed by Step 2 of the J-Orthogonal Algorithm. Then*

$$\frac{|\widehat{\lambda}_i - \lambda_i|}{|\lambda_i|} \leq O(\epsilon) \left[\kappa(X) + \max_{k=1:p+1} \kappa(G_k S_k^{-1}) \right]$$

where $G_k S_k^{-1}$ has columns of norm-2 equal to one.

The class of matrices for which HRA is achievable depend on the scaling properties of the polar factor of the matrix A and also in the growth of the condition numbers of the intermediate matrices G_k .

3.3 Algorithm SVD with signs: SSVD

The other algorithm that computes eigenvalues and eigenvectors with HRA is based in two ideas:

1. Use the work and results in HRA in the computation of the SVD.
2. The singular values of a symmetric matrix are the absolute values of the eigenvalues.

The main improvements of this algorithm are that it can be used in the broadest class of matrices (any matrix for which a HRA SVD exists) yet and the use of orthogonal rotations in the SVD step.

The two main steps of this algorithm are:

1. Compute an SVD of $A = U\Sigma V^T$.
2. Compute e-values, e-vectors from SVD.

The first step can be thought as having two steps if the SVD is computed with the algorithm in section 2. In the second step the eigenvalues and eigenvectors are obtained from singular values and vectors. It is easy to show how this is done in the case where all singular values are different.

Let $A = A^T = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with, $i = 1, \dots, n$, $\Sigma = \text{diag}[\sigma_i]$, $U = [u_i]$, $V = [v_i]$ with $v_i^T u_j = 0$ for $i \neq j$. The sign of the eigenvalues is obtained through the relation $V^T A V = V^T U \Sigma = \text{diag}[(v_i^T u_i) \sigma_i]$ and the eigenvectors are just the right (or the left) singular vectors $Q = V$. The presence of clusters of singular values (numerically probable) can be handled in a similar way.

The accuracy of this algorithm is stated as follows

Theorem 4 *Let A be symmetric with $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ its eigenvalues and an RRD with small forward errors given $A = XDY^T$. Then the computed eigenvalues $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ by the SSVD algorithm satisfy*

$$|\hat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq O(\epsilon) \max(\kappa(X), \kappa(Y)) |\lambda_i|.$$

One problem that can be present in some cases is the accuracy of the eigenvectors. In principle it is affected by the singular value relative gap, intrinsic in the singular vector computation. However, in most cases it can be fixed.

4 Conclusions

A lot of progress has been made in the field of High Relative Accuracy, specially for the SVD but also for the eigenvalue problem. The positive definite eigenproblem is well understood. Some more work has to be done in the indefinite eigenproblem. Though it is possible that the new release of LAPACK will have an HRA eigensolver available, specially when a very fast HRA Jacobi routine it is going to be included [6].

References

- [1] J. BARLOW AND J. DEMMEL, *Computing accurate eigensystems of scaled diagonally dominant matrices*, SIAM J. Numer. Anal., 27 (1990), pp. 762-791.
- [2] J. R. BUNCH AND B. N. PARLETT, *Direct methods for solving symmetric indefinite systems of linear equations*, SIAM J. Numer. Anal., 8 (1971), pp. 639-655.
- [3] J. DEMMEL, M. GU, S. EISENSTAT, I. SLAPNIČAR, K. VESELIĆ AND Z. DRMAČ, *Computing the singular value decomposition with high relative accuracy*, Linear Algebra Appl. 299 (1999), pp. 21-80.
- [4] J. DEMMEL AND K. VESELIĆ, *Jacobi's method is more accurate than QR*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 13 (1992), pp. 1204-1245.
- [5] F. M. DOPICO, J. M. MOLERA AND J. MORO, *An orthogonal high relative accuracy algorithm for the symmetric eigenproblem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 25 (2003) pp. 301-351.
- [6] Z. DRMAČ, *A posteriori computation of the singular vectors in a preconditioned Jacobi SVD algorithm*, IMA J. Numer. Anal., 19 (1999), pp. 191-213.
- [7] I. IPSEN, *Relative perturbation results for matrix eigenvalues and singular values*, Acta Numerica, (1998), pp. 151-201.

- [8] I. SLAPNIČAR, *Accurate Symmetric Eigenreduction by a Jacobi Method*, PhD Thesis, Fachbereich Mathematik Fernuniversität, Gesamthochschule Hagen, Germany, 1992.
- [9] K. VESELIĆ AND I. SLAPNIČAR, *Floating-point perturbations of Hermitian matrices*, *Linear Algebra Appl.*, 195 (1993), pp. 81-116.

Positivity, stability and accuracy*

J.M. PEÑA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

`jmpena@unizar.es`

Abstract

We discuss some nice stability properties associated with classes of matrices related to positivity, such as M -matrices and totally positive matrices.

Key words: *Stability, growth factor, conditioning, accuracy, M -matrices, totally positive matrices, real eigenvalues.*

AMS subject classifications: *65F05, 65F15, 65F35, 15A18*

1 Introduction

Let us introduce two important classes of matrices related to positivity and for which we shall present some stability results. A nonsingular matrix A is an M -matrix if it has positive diagonal entries, non-positive off-diagonal entries and A^{-1} is nonnegative. M -matrices have very important applications, for instance, in iterative methods in numerical analysis, in the analysis of dynamical systems, in economics and in mathematical programming. Totally positive matrices are matrices with all their minors nonnegative, and they have been applied in many fields, including Approximation Theory, Statistics, Combinatorics and Computer Aided Geometric Design. Backward stability for these matrices of Gaussian elimination without row exchanges was proved by de Boor and Pinkus in [3], a classical antecedent in this field (see [9]). See [1] for backward stability when applying Neville elimination, an alternative elimination procedure with advantageous properties for totally positive matrices.

We present recent results providing stable tests, stable pivoting strategies for solving linear systems (in sections 2 and 3) and accurate procedures for calculating the singular values (in Section 4). Section 2 deals with conditioning, related to the forward errors, and Section 3 deals with the growth factor, related to the backward errors. Localization of the eigenvalues of real matrices is also considered (in Section 5).

*Research partially supported the Spanish Research Grant BFM2003-03510.

2 Bounds for the Skeel condition number

Gaussian elimination (GE) with a given pivoting strategy, for nonsingular matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, consists of a succession of at most $n - 1$ major steps resulting in a sequence of matrices as follows:

$$A = A^{(1)} \longrightarrow \tilde{A}^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} \longrightarrow \tilde{A}^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{(n)} = \tilde{A}^{(n)} = U, \quad (1)$$

where $A^{(t)} = (a_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$ has zeros below its main diagonal in the first $t - 1$ columns. The matrix $\tilde{A}^{(t)} = (\tilde{a}_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$ is obtained from the matrix $A^{(t)}$ by reordering the rows and/or columns $t, t + 1, \dots, n$ of $A^{(t)}$ according to the given pivoting strategy and satisfying $\tilde{a}_{tt}^{(t)} \neq 0$. To obtain $A^{(t+1)}$ from $\tilde{A}^{(t)}$ we produce zeros in column t below the *pivot element* $\tilde{a}_{tt}^{(t)}$ by subtracting multiples of row t from the rows beneath it. If P and/or Q are permutation matrices such that the Gaussian elimination of $B = PAQ$ can be performed without row exchanges, then the first row of $\tilde{A}^{(t)}[t, \dots, n]$ coincides with the first row of $B^{(t)}[t, \dots, n]$, and the other rows coincide up to the order. If $B = P^T A P$, we say that we have performed *symmetric pivoting*.

The traditional condition number of a matrix A with respect to the norm $\|\cdot\|_\infty$ is given by $\kappa(A) := \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Given a matrix $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, we shall denote by $|B|$ the matrix of absolute values of the entries of B . The Skeel condition number (cf. [22]) of a matrix A is defined as $\text{Cond}(A) = \||A^{-1}||A|\|_\infty$. Let us mention two nice properties of $\text{Cond}(A)$. The Skeel condition number of a matrix A is less than or equal to $\kappa(A)$ and it can be much smaller. In contrast with $\kappa(A)$, $\text{Cond}(A)$ is invariant under row scaling.

Let us recall that a matrix with the same zero pattern as a permutation matrix is called a *generalized permutation matrix*. These matrices are precisely the matrices with minimal Skeel condition number:

Proposition 1 *A matrix satisfies $\text{Cond}(A) = 1$ if and only if A is a generalized permutation matrix.*

Proof. Clearly, any generalized permutation matrix A satisfies $\text{Cond}(A) = 1$. For the converse, let us assume that $\text{Cond}(A) = 1$. Then

$$1 = \||A^{-1}||A|\|_\infty$$

and, since $|A^{-1}||A| \geq |A^{-1}A| = I$, we deduce that the previous inequality must be an equality. Then we can conclude that $|A^{-1}|, |A|$ are two nonnegative matrices and $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. Hence $|A|$ is a nonnegative matrix with nonnegative inverse and then it is well known that it is a generalized permutation matrix. So, the same property is inherited by A . \square

It can be established an analogy between the normwise condition number $\kappa(A)$ and the classical condition number of a basis, on one hand, and the (componentwise) Skeel condition number $\text{Cond}(A)$ and the condition number for the evaluation of a function introduced in [7], as shown in [11]. The result

on the optimally stable bases of univariate nonnegative functions with respect to this condition number appears in [14].

If we consider a triangular matrix T with diagonal dominance by rows, we can get the following result which corresponds to Theorem 2.1 of [12]: $\text{Cond}(T) \leq 2n - 1$. If the diagonal dominance of the $n \times n$ upper triangular matrix $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ is strict, we even can find a bound for the Skeel condition number which is independent of n , as has been shown in Corollary 3.3 of [15]: $\text{Cond}(U) \leq \frac{1}{2^p - 1}$, where $p := \min_{1 \leq i \leq n} \{ |u_{ii}| / \sum_{j=i}^n |u_{ij}| \}$. If A is a nonsingular $n \times n$ M -matrix, in [12] we provided a symmetric pivoting strategy (which can be implemented in $O(n^2)$ elementary operations) leading to an upper triangular matrix U which is strictly diagonally dominant by rows and we can apply the previous formula, which is a bound independent of n . In addition to the influence of $\text{Cond}(U)$ in forward error of Gauss elimination we can also mention its influence on backward error of Gauss-Jordan elimination (see [16]).

3 Bounds for the growth factor

The growth factor is an indicator of stability of Gaussian elimination. The classical growth factor of an $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ is the number

$$\rho_n^W(A) := \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}$$

In p. 398 of [2], Amodio and Mazzia have introduced the growth factor

$$\rho_n(A) := \frac{\max_k \|A^{(k)}\|_\infty}{\|A\|_\infty}.$$

and have shown its nice behaviour for error analysis of Gaussian elimination.

In contrast with the well known bound $\rho_n^W(A) \leq 2^{n-1}$ when partial pivoting is applied to a nonsingular $n \times n$ matrix, we cannot obtain a similar bound for $\rho_n^W(A)$ when we apply a scaled partial pivoting strategy. However, if we consider the growth factor $\rho_n(A)$ and apply either partial pivoting (see Theorem 5.1 of [2]) or the scaled partial pivoting strategy for the norm $\|\cdot\|_1$ (see Corollary 4.2 of [15]), then we get in both cases $\rho_n(A) \leq 2^{n-1}$. Recently, tests with optimal growth factor for checking the Routh-Hurwitz conditions and the total positivity of a matrix have been derived in [19], and a test with small growth factor to check of a given nonsingular matrix is an M -matrix is provided in [18].

4 Accurate computations

Given an algebraic expression defined by additions, subtractions, multiplications and divisions and assuming that each initial real datum is known to high relative accuracy, then it is well known that the algebraic expression can be computed accurately if it is defined by sums of numbers of the same sign, products and quotients (cf. p. 52 of [4]). In other words, the only forbidden operation is true

subtraction, due to possible cancellation in leading digits. Moreover, in (well-implemented) floating point arithmetic high relative accuracy is also preserved even when we perform true subtractions when the operands are original (and so, exact) data (cf. p. 53 of [4]).

Accurate computations with totally positive matrices or M -matrices can be seen in [5], [6], [8], [10] and [20]. In particular, accurate computations of LDU -factorizations of a nonsingular M -matrix diagonally dominant by rows were derived in [5] and [20], providing rank revealing decompositions. A *rank revealing decomposition* of a matrix A is defined in [4] as a decomposition $A = XDY^T$, where X, Y are well conditioned and D is a diagonal matrix. In that paper it is shown that if we can compute an accurate rank revealing decomposition then we also can compute (with an algorithm presented there) an accurate singular value decomposition.

5 Inclusion and exclusion intervals for the real eigenvalues

Another class of matrices with positive principal minors has been used in [13] to obtain inclusion intervals (called \bar{B} -intervals) for the real parts of the eigenvalues of a real matrix. An exclusion interval for the real eigenvalue was derived in [21]. As shown in [17] and [21], analogously to the property that Gerschgorin disks provide a sharper information when the matrix resembles to a diagonally dominant matrix (see [23]), the (inclusion) \bar{B} -intervals and the exclusion interval provide a sharper information when the off-diagonal entries decrease their dispersion.

References

- [1] P. ALONSO, M. GASCA AND J. M. PEÑA. Backward error analysis of Neville elimination. *Appl. Numer. Math.*, 23:193–204, 1997.
- [2] P. AMODIO AND F. MAZZIA. A new approach to backward error analysis of LU factorization, *BIT*, 39:385–402, 1999.
- [3] C. DE BOOR AND A. PINKUS. Backward error analysis for totally positive linear systems. *Numer. Math.*, 27:485–490, 1977.
- [4] J. DEMMEL, M. GU, S. EISENSTAT, I. SLAPNICAR, K. VESELIC AND Z. DRMAC. Computing the singular value decomposition with high relative accuracy. *Linear Algebra Appl.*, 299:21–80, 1999.
- [5] J. DEMMEL AND P. KOEV. Accurate SVDs of weakly diagonally dominant M -matrices. *Numer. Math.*, 98:99–104, 2004.
- [6] J. DEMMEL AND P. KOEV. The accurate and efficient solution of a totally positive generalized Vandermonde linear system. To appear in *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*

- [7] R. T. FAROUKI AND V. T. RAJAN. On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. *Comput. Aided Geom. Design*, 4:191–216, 1987.
- [8] M. GASCA AND J. M. PEÑA. Characterizations and decompositions of almost strictly totally positive matrices. To appear in *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*.
- [9] N. J. HIGHAM. *Accuracy and stability of numerical algorithms* (second ed.). SIAM, Philadelphia, 2002.
- [10] P. KOEV. Accurate eigenvalues and SVDs of totally nonnegative matrices. To appear in *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*
- [11] T. LYCHE AND J. M. PEÑA. Optimally stable multivariate bases. *Adv. Comput. Math.*, 20:49–159, 2004.
- [12] J. M. PEÑA. Pivoting strategies leading to diagonal dominance by rows, *Numer. Math.*, 81 (1998), pp. 293–304.
- [13] J. M. PEÑA. A class of P-matrices with applications to the localization of the eigenvalues of a real matrix. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 22:1027–1037, 2001.
- [14] J. M. PEÑA. On the optimal stability of bases of univariate functions. *Numer. Math.*, 91:305–318, 2002.
- [15] J.M. PEÑA. Scaled pivots and scaled partial pivoting strategies. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41:1022–1031, 2003.
- [16] J.M. PEÑA. Simultaneous backward stability of Gauss and Gauss-Jordan elimination, *Numer. Linear Alg. Appl.*, 10:317–321, 2003.
- [17] J.M. PEÑA. On an alternative to Gerschgorin circles and ovals of Cassini. *Numer. Math.*, 95:337–345, 2003.
- [18] J.M. PEÑA, A stable test to check if a matrix is a nonsingular M -matrix *Math. Comp.*, 73:1385–1392, 2004.
- [19] J.M. PEÑA. Characterizations and stable tests for the Routh-Hurwitz conditions and total positivity *Linear Alg. Appl.*, 393:319–332, 2004.
- [20] J.M. PEÑA. LDU decompositions with L and U well conditioned. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 18:198–208, 2004.
- [21] J.M. PEÑA. Inclusion and exclusion intervals for the real eigenvalues of positive matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 26:908–917, 2005.
- [22] R. D. SKEEL. Scaling for numerical stability in Gaussian elimination. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 26:494–526, 1979.
- [23] R. S. VARGA. *Geršgorin and his circles*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

Sesión monográfica de
MÉTODOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

Coordinadora: ROSA DONAT

Participantes:
MIGUEL BERTALMÍO
CARLOS GARCÍA-CERVERA
PEDRO VELARDE

Contrast invariant inpainting with a 3rd order PDE

M. BERTALMIÓ

Departament de Tecnologia, Universitat Pompeu Fabra

marcelo.bertalmio@upf.edu

Abstract

PDE-based image inpainting has become a very active area of research after the pioneering works of Masnou and Morel [9], Bertalmío et al. [3] and Ballester et al. [1]. In this paper we take a different approach, inspired by the excellent work of Caselles et al. [4]. We view the inpainting problem as a particular case of image interpolation in which we intend to propagate level lines. Expressing this in terms of local neighborhoods and using a Taylor expansion we derive a third order PDE that performs inpainting. This PDE is *optimal* in the sense that it is the most accurate third order PDE which can ensure continuation of level lines. It is also contrast invariant. This is a novel PDE, which both in its accuracy and contrast invariance outperforms the approaches cited above.

1 INTRODUCTION

The modification of images in a way that is non-detectable for an observer who does not know the original image is called *retouching* or *inpainting*. Mainly three groups of works can be found in the literature related to digital inpainting. The first one deals with the restoration of films, the second one is related to texture synthesis, and the third one is related to what we would call geometric inpainting. This article proposes a method to perform geometric inpainting, so let us comment on this latter category. For an extensive survey on inpainting, see [11].

A pioneering contribution in the recovery of plane image geometry is due to D. Mumford, M. Nitzberg and T. Shiota [10], where the authors proposed an energy functional to segment a scene which took into account the depth of the objects in the scene and the energy of the occluded boundaries between T -junctions. They assumed that the completion curves should be as short as possible and should respect the *principle of good continuation* [7].

Inspired by the Elastica functional, Masnou and Morel [9, 8] proposed a variational formulation for the recovery of the missing parts of a grey level two-dimensional image and they referred to this interpolation process as *disocclusion*, since the missing parts can be considered as occlusions hiding the part of the image we want to recover. Their algorithm performs filling-in by joining with geodesic curves the points of the isophotes arriving at the boundary of the region to be inpainted.

Mumford's work on the Elastica Model and Masnou and Morel's contribution inspired Bertalmío, Sapiro, Caselles and Ballester [3] to propose an edge propagation PDE for the *Image Inpainting* formulation. Replicating basic art conservators techniques, a third order PDE propagates the level lines arriving at the missing region, and the completion tends to respect the *principle of good continuation*. Bertalmío, Bertozzi and Sapiro [2] showed the connection of this equation with Navier-Stokes equations, as well as a parallel among Image Processing and Fluid Dynamics quantities. On the other hand, Ballester, Bertalmío, Caselles, Sapiro and Verdera [1] introduced a relaxation of the Elastica functional which then can be minimized with a system of coupled PDE's: this is the first variational approach to the inpainting problem that complies with the *principle of good continuation* and is topologically independent.

1.1 Our contribution

The geometric inpainting methods just mentioned present some shortcomings that we intend to overcome. The *disocclusion* algorithm of Masnou [8] may connect boundary points with straight lines, thus not complying with the *principle of good continuation*. The *image inpainting* algorithm of Bertalmío et al. [3] is not contrast invariant, as it was pointed out by Chan et al. [5]. Chan et al. [5] propose a third order contrast invariant PDE for inpainting, with two competing terms in two orthogonal directions. The weights for these terms must be set manually, and they affect the *good continuation* of level lines. The *variational filling-in* of Ballester et al. [1] is not contrast invariant either, although contrast invariance is *imposed* in the implementation by decomposing each gray-level image into 256 binary images, one per level set, processing these binary images separately, and finally compositing these 256 results. Also from the standpoint of mathematical formality, these algorithms lack in some respects. *Disocclusion* and *variational filling-in* come from approximations or relaxations of the Elastica functional, required since the functional is not lower semicontinuous, while the *image inpainting* equation intends to replicate the manual procedures of art conservators and its mathematical formality is an open question.

Our contribution in this article is the following. We reformulate the inpainting problem as a particular case of image interpolation in which we intend to propagate level lines. Expressing this in terms of local neighborhoods and using a Taylor expansion we derive a third order PDE that performs inpainting. This PDE is *optimal* in the sense that it is the most accurate

third order PDE which can ensure *good continuation* of level lines. It is also contrast invariant. This is a novel PDE, which both in its accuracy and contrast invariance outperforms the approaches cited above.

2 Proposed approach

An image is usually modeled as a function I defined in a bounded domain $D \subseteq \mathbb{R}^2$ with values in \mathbb{R}^k ($k = 1$ for grey level images, or $k = 3$ for color images). For simplicity, we shall consider only the case of grey level images. The inpainting problem can be formulated generically in the following way. Given a subset Ω of the image domain D in which the values for I are not defined (the image *gap* that we wish to inpaint), we must determine values for I inside Ω which match the boundary conditions at $\partial\Omega$.

2.1 Inpainting as Interpolation

Inspired by the remarkable work by Caselles et al. [4] we will begin by reformulating the inpainting problem as a case of interpolation. Assume that the gap Ω contains only one pixel, x_0 . There are many possible criteria to choose the value $I(x_0)$ to fill the gap, let's recall from the introduction to [4] one of the simplest ones: *select $I(x_0)$ as the average of its level-line neighbors*. Then

$$I(x_0) = \frac{1}{2}(I(x_0 + hD^\perp I) + I(x_0 - hD^\perp I)), \quad (1)$$

with $D^\perp I$ the (counter-clockwise) 90 degree rotation of DI , the gradient of I (and therefore the level-line direction.) Expanding $I(x_0 + hD^\perp I)$ in a Taylor series:

$$\begin{aligned} I(x_0 + hD^\perp I) &= I(x_0) + \frac{h^2}{2}D^2I(D^\perp I, D^\perp I) + \\ &+ \frac{h^3}{6}D^3I(D^\perp I, D^\perp I, D^\perp I) + O(h^4), \end{aligned} \quad (2)$$

where we have omitted the pixel coordinate x_0 of I for simplicity, we have omitted the term for h because it is identically zero: $hD^\perp I \cdot DI \equiv 0$, and we have used the notation:

$$\begin{aligned} D^2I(D^\perp I, D^\perp I) &= I_y^2 I_{xx} - 2I_x I_y I_{xy} + I_x^2 I_{yy}, \\ D^3I(D^\perp I, D^\perp I, D^\perp I) &= I_y^2 (-I_y I_{xxx} + 3I_x I_{xxy}) + \\ &+ I_x^2 (-I_x I_{yyy} + 3I_y I_{yyx}). \end{aligned} \quad (3)$$

Averaging equation (2) with the similar equation we get when expanding $I(x_0 - hD^\perp I)$ we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I(x_0 + hD^\perp I) + I(x_0 - hD^\perp I)) &= I(x_0) + \\ \frac{h^2}{2}D^2I(D^\perp I, D^\perp I) &+ O(h^4). \end{aligned} \quad (4)$$

Truncating this series and comparing with eq.(1), we obtain the following interpolation equation:

$$D^2I(D^\perp I, D^\perp I) = 0. \quad (5)$$

A very important observation:

$$D^2I(D^\perp I, D^\perp I) = \kappa(I)|DI|^3, \tag{6}$$

where $\kappa(I)$ is the Euclidean curvature of the level line of I at the pixel location x_0 . Therefore, this type of interpolation may be achieved as the steady state of the second order PDE

$$I_t = \kappa(I)|\nabla I|, \tag{7}$$

the equation for Total Variation minimization [13] and Perona and Malik’s anisotropic diffusion [12]. One may use this equation to perform inpainting [5], but since the steady state is $\kappa = 0$ all the interpolated level lines will have zero curvature and therefore they will be straight lines. This is an important limitation, stemming from the fact that eq.(7) is a second order PDE. It has been proven that in order to match not only gray value but also level line angle at the boundary $\partial\Omega$ we need a PDE of at least third order [2].

In order to find an interpolation procedure that yields a third order PDE, we propose the following criteria, extending the ideas presented above: *select $DI(x_0)$ as the average of its level-line neighbors.* That is, now we are interpolating the *gradient* along the level lines, instead of the gray level. Since interpolation of gray levels yielded a second order PDE, we expect that interpolation of the gradient yields a third order PDE. This criteria may be formulated as

$$DI(x_0) = \frac{1}{2}(DI(x_0 + hD^\perp I) + DI(x_0 - hD^\perp I)), \tag{8}$$

which implies

$$\begin{aligned} I_x(x_0) &= \frac{1}{2}[I_x(x_0 + hD^\perp I) + I_x(x_0 - hD^\perp I)], \\ I_y(x_0) &= \frac{1}{2}[I_y(x_0 + hD^\perp I) + I_y(x_0 - hD^\perp I)]. \end{aligned} \tag{9}$$

The expansion for $I_x(x_0 + hD^\perp I)$ is:

$$\begin{aligned} I_x(x_0 + hD^\perp I) &= I_x(x_0) + hD^\perp I \cdot DI_x + \\ &+ \frac{h^2}{2}(I_y^2 I_{xxx} - 2I_x I_y I_{xxy} + I_x^2 I_{yyx}) + O(h^3). \end{aligned} \tag{10}$$

Expanding I_y , letting $h \rightarrow 0$, truncating the series and averaging we obtain:

$$\begin{aligned} &-I_y[I_x(x_0 + hD^\perp I) + I_x(x_0 - hD^\perp I)] + \\ &+ I_x[I_y(x_0 + hD^\perp I) + I_y(x_0 - hD^\perp I)] = \\ &= h^2 D^3 I(D^\perp I, D^\perp I, D^\perp I). \end{aligned} \tag{11}$$

Substituting eq.(9) in (11) we get

$$D^3 I(D^\perp I, D^\perp I, D^\perp I) = 0. \tag{12}$$

Equation (12) is a novel PDE that we introduce in this paper to perform contrast invariant inpainting. It is also the third order PDE that best approximates the *principle of good continuation*. We will comment on these aspects next.

2.2 Properties of our proposed equation

We started our derivation by imposing continuity of the gradient, with eq.(8). Therefore the solution to equation (12) will have continuous DI , in particular across the gap boundary $\partial\Omega$ (along each level line.) This implies that $D^\perp I$, the direction of the level line, will also be continuous, i.e., the interpolated level lines will bend smoothly and not have any *kinks*. In other words, our proposed equation satisfies the *principle of good continuation*, as intended. Let us now show why this equation is the third order PDE that best satisfies this principle.

Let us now pose the inpainting problem as a case of interpolation in which we want to propagate inside Ω the level lines arriving at $\partial\Omega$ but *keeping the direction of the lines*. We may require constancy of the level lines direction in the following way:

$$I(x_0 + hD^\perp I) - I(x_0 - hD^\perp I) = 0. \quad (13)$$

Letting $h \rightarrow 0$, expanding in a Taylor series and truncating after the fourth order term, we get the same third order equation as before:

$$D^3 I(D^\perp I, D^\perp I, D^\perp I) = 0. \quad (14)$$

The left hand side is the term of the expansion corresponding to h^3 , the first term that is not identically zero (since the term for h is identically zero, and the terms for even powers h^2 and h^4 cancel out when subtracting.) Any third order PDE other than eq.(14) will *not* cancel this first term of the expansion of eq.(13). Therefore any other third order PDE will approximate eq.(13) with a higher error than eq.(14). In this sense is that we say that our proposed PDE is *optimal*.

It may be a bit surprising to arrive at the same equation by a seemingly different path, but in fact eqs.(13) and (8) both imply the same: that the direction of each level line should be continuous along that level line (i.e., that as a curve the level line should have no singularities.) This is another way to phrase the *principle of good continuation*.

Another very interesting property is the following:

$$D^3 I(D^\perp I, D^\perp I, D^\perp I) = D(\kappa|DI|^3) \cdot D^\perp I. \quad (15)$$

This implies that solving our equation (12) amounts to propagating the quantity $\kappa|DI|^3$ along the level lines of the image. So our equation is quite similar to the *image inpainting* equation $D(\Delta I) \cdot D^\perp I$, where the quantity propagated along the level lines was the Laplacian, ΔI .

In practice we solve eq.(12) by finding the steady state solution of

$$I_t = \frac{I_y^2(-I_y I_{xxx} + 3I_x I_{xxy}) + I_x^2(-I_x I_{yyy} + 3I_y I_{yyx})}{(I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (16)$$

Equation (16) is also contrast invariant: if for an initial image I we obtain a solution S , then for a contrast modified initial image $g(I)$ we obtain the

solution $g(S)$, for $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ any non-decreasing function. This is an important property for any geometric inpainting algorithm, since it guarantees that the inpainting result depends only on the geometry of the initial image I and not on its particular contrast.

2.3 Examples

We have implemented eq. (16) using the finite differences scheme of Mc Cormack [6]. Figure 1 shows the image I to inpaint (left), the inpainted result $S(I)$ obtained with our equation (middle left), a contrast corrected version of I , call it $g(I)$ (middle right), and the corresponding result $S(g(I))$. Notice that since Ω is not simply connected (i.e. it has holes) the method proposed in [9] would not work for this example. Also, since I spans all the gray values from 0 to 255, the method proposed in [1] would require the full decomposition of I into 256 binary images and the subsequent resolution of their equation for each of the images, which is computationally quite expensive.

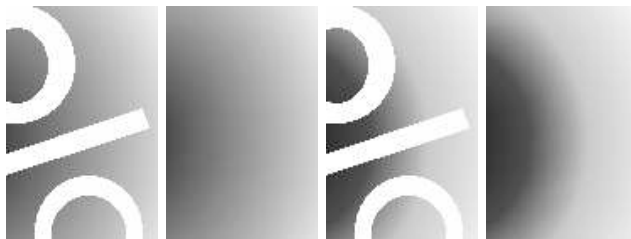


Figure 1: Image I to inpaint (left), our inpainted result $S(I)$ (middle left), $g(I)$ (middle right), $S(g(I))$ (right).

3 CONCLUSION AND FUTURE WORK

We have introduced a third order PDE to perform geometric inpainting on images. This PDE is *optimal* in the sense that it is the most accurate third order PDE which can ensure continuation of level lines. It is also contrast invariant. This is a novel PDE, which both in its accuracy and contrast invariance outperforms previous related approaches in the area. We are currently studying the mathematical properties of this equation regarding existence and uniqueness of solutions and its numerical implementation.

4 ACKNOWLEDGMENTS

This work is dedicated to Serrana Cabrera and Lucas Bertalmío. Many thanks to Vicent Caselles and Guillermo Sapiro for their help and suggestions. This work was partially supported by RACINE European Commission Project, Ramón y Cajal Program and PNPGE (BFM2003-02125).

References

- [1] C. Ballester, M. Bertalmío, V. Caselles, G. Sapiro, and J. Verdera. Filling-in by Joint Interpolation of Vector Fields and Grey Levels. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10:1200–1211, 2001.
- [2] M. Bertalmío, A. Bertozzi, and G. Sapiro. Navier-Stokes, fluid-dynamics, and image and video inpainting. In *Proc. of IEEE-CVPR*, pages 355–362, 2001.
- [3] M. Bertalmío, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester. Image inpainting. In *Proc. SIGGRAPH 00, ACM*, pages 417–424, 2000.
- [4] V. Caselles, J.M. Morel, and C. Sbert. An Axiomatic Approach to Image Interpolation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7:376–386, 1998.
- [5] T. Chan and J. Shen. Morphologically invariant PDE Inpaintings. Technical report, University of California Los Angeles CAM Report, 2001.
- [6] J. Hoffman. *Numerical methods for engineers and scientists*. Mc Graw Hill, 1992.
- [7] G. Kanizsa. *Gramática de la Visión*. Paidós, 1986.
- [8] S. Masnou. Disocclusion: a Variational Approach using Level Lines. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11:68–76, 2002.
- [9] S. Masnou and J.M. Morel. Level Lines Based Disocclusion. In *Proc. 5th IEEE International Conference on Image Processing*, pages 259–263, Chicago, Illinois, 1998.
- [10] M. Nitzberg, D. Mumford, and T. Shiota. *Filtering, Segmentation, and Depth*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [11] N. Paragios, Y. Chen, and O. Faugeras, editors. *Mathematical models in computer vision: the handbook*, chapter PDE-based image and surface inpainting. Springer, 2005.
- [12] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:629–639, 1990.
- [13] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.

Advances in numerical Micromagnetics: Spin-polarized transport

C.J. GARCÍA-CERVERA¹ AND X.-P. WANG²

cgarci@math.ucsb.edu; mawang@ust.hk

Abstract

We consider a model for spin-polarized transport that couples the Landau-Lifshitz-Gilbert equation describing the dynamics of the magnetization with a diffusion equation describing the spin accumulation. The diffusion equation has bounded, discontinuous coefficients. We describe an unconditionally stable method for the coupled system based on a fractional step for the spin equation, and the Gauss-Seidel Projection Method for micromagnetics simulations.

Key words: *Landau-Lifshitz, Micromagnetics, spin-polarized transport*
AMS subject classifications: *65M06; 65Z05; 35Q60.*

1 Introduction

For decades, ferromagnetic materials have been used for the storage of information in hard drives and magnetic tapes. The discovery of Giant Magneto-Resistance has opened new possibilities for the design of non-volatile magnetic storage devices, such as magnetic memories, or MRAMs. In an MRAM, layered structures consisting of two or more ferromagnetic films separated by a layer of nonmagnetic material are connected in an electronic circuit forming a grid (see fig. 1). Each multilayer represents one bit of information, and it has two possible states, identified as 0 and 1.

Traditionally, the magnetization is switched between state 0 and state 1 using a magnetic field generated by flowing currents along the data lines (see fig. 1). The magnetic field generated in this way has long range, and therefore it is difficult to achieve large bit densities. A new mechanism for magnetization reversal based on spin polarized transport was predicted by Slonczewski [1] and Berger [2], and has been the the object of much research in the physics community in the past few years (see [3] for a review). In this new approach, a current flows perpendicular to the multilayer. The electron spin is polarized in layer FM1. When the electrons reach layer FM2, the spin exerts an additional torque on the underlying magnetization.

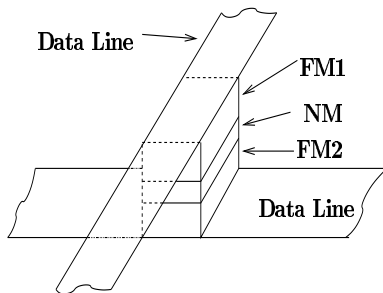


Figure 1: Schematic of a multilayer composed of two ferromagnetic layers (FM1 and FM2) separated by a non-magnetic layer (NM). Currents flow both along the data lines and perpendicular to the layers in the reading/writing process.

In the model introduced by Slonczewski [1], both interfacial effects and spin diffusion are neglected. These effects have been found to be important in magneto resistance experiments with a current perpendicular to the multilayer planes [4]. Recently a new model for the relaxation of the coupled system spin-magnetization has appeared in the literature [5]. This model includes spatial variations in both spin and magnetization, and does not assume a priori that the magnetization is pinned in one of the layers. In [6] and [7], García-Cervera and Wang have generalized the model described in [5] to three dimensions.

In this article we consider a magnetic multilayer consisting of two ferromagnetic films FM1 and FM2, of thickness d_1 and d_2 , respectively, separated by a non-magnetic interlayer NM of thickness d_0 (see Fig. 1). The multilayer occupies the volume $\Omega = \text{FM1} \cup \text{NM} \cup \text{FM2}$. The spin accumulation \mathbf{s} is defined on Ω and the magnetization \mathbf{M} is defined on the two magnetic layers $\Sigma = \text{FM1} \cup \text{FM2}$. We will assume that the boundaries of Ω and Σ are smooth.

The dynamics of the coupled system for the spin and the magnetization are described by the system of equations

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J}_s - \frac{2D_0(\mathbf{x})}{\lambda_{sf}^2} \mathbf{s} - \frac{2D_0(\mathbf{x})}{M_s \lambda_J^2} \mathbf{s} \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times (\mathcal{H} + \mathbf{J}_s) + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (2)$$

\mathbf{J}_s is the spin current, $D_0(\mathbf{x})$ is the diffusion coefficient, λ_{sf} is the spin-flip characteristic length, λ_J is the interaction length scale [5], and $|\mathbf{M}| = M_s$ is constant below the Curie temperature. The spin current is

$$\mathbf{J}_s = \frac{\beta \mu_B}{e M_s} \mathbf{M} \otimes \mathbf{J}_e - 2D_0(\mathbf{x}) \left[\nabla \mathbf{s} - \frac{\beta \beta'}{M_s^2} \mathbf{M} \otimes (\nabla \mathbf{s} \cdot \mathbf{M}) \right], \quad (3)$$

where \mathbf{J}_e is the applied electric current, $\mu_B = 9.2741 \times 10^{-24} \text{Am}^2$ is the Bohr magneton, $e = -1.602 \times 10^{-19} \text{As}$ is the charge of the electron, and $0 < \beta, \beta' < 1$ are the spin-polarization parameters of the two layers,

Equation (2) is the Landau-Lifshitz-Gilbert equation [8, 9], and describes the relaxation process of the magnetization inside Σ . The first term on the right hand side in (2) is the gyromagnetic term, and γ is the gyromagnetic ratio. The second term on the right hand side is the Gilbert damping, and $\alpha > 0$ is the damping parameter. J is the strength of the interaction between the spin and the magnetization. The gyromagnetic term describes the precession of \mathbf{M} around the $\mathcal{H} + J\mathbf{s}$, whereas the damping term accounts for dissipation mechanisms in the system. The field \mathcal{H} is

$$\mathcal{H} = -\frac{K_u}{M_s^2} (M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3) + \frac{C_{ex}}{M_s^2} \Delta \mathbf{M} + \mu_0 \mathbf{H}_e - \mu_0 \nabla U, \quad (4)$$

where we have used $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ and $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

The first two terms in (4) are the anisotropy and exchange fields, respectively, with K_u and C_{ex} being material constants. \mathbf{H}_e is an externally applied field, and μ_0 is the permeability of vacuum ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$). Finally, $\mathbf{H}_s = -\nabla U$ is the stray field. The magnetostatic potential, U , satisfies equation

$$\begin{aligned} \Delta U &= \operatorname{div} \mathbf{M}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \\ \Delta U &= 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \setminus \bar{\Sigma}, \end{aligned} \quad (5)$$

with jump boundary conditions at the material-vacuum interface:

$$[U]_{\partial\Sigma} = 0; \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \nu} \right]_{\partial\Sigma} = -\mathbf{M} \cdot \nu, \quad (6)$$

where ν is the outward unit normal on $\partial\Sigma$.

Equations (1)-(2) must be solved with Neumann boundary conditions

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Sigma} = 0, \quad (7)$$

where \mathbf{n} is the outward unit normal on $\partial\Omega$.

2 Numerical Results

Explicit time-stepping schemes for the numerical solution of (1)-(2) suffer from a very strict stability constraint [10]. Here we consider a splitting algorithm for the numerical solution of (1)-(2). Given $\mathbf{m}^n, \mathbf{s}^n$, we solve analytically the following system of linear ordinary differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{s}}}{\partial t} &= -2D_0(\mathbf{x}) \frac{\tilde{\mathbf{s}}}{\lambda_{sf}^2} - 2D_0(\mathbf{x}) \frac{\tilde{\mathbf{s}} \times \mathbf{m}^n}{\lambda_J^2}, \\ \tilde{\mathbf{s}}(t_n, \mathbf{x}) &= \mathbf{s}^n(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8)$$

We consider the intermediate value $\mathbf{s}^*(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{s}}(t_{n+1}, \mathbf{x})$. Now we solve

$$\frac{\mathbf{s}^{n+1} - \mathbf{s}^*}{\Delta t} = \nabla \cdot \left(2D_0(\mathbf{x}) \left[\nabla \mathbf{s}^{n+1} - \frac{\beta\beta'}{M_s^2} \mathbf{M}^n \otimes (\nabla \mathbf{s}^n \cdot \mathbf{M}^n) \right] - \frac{\beta\mu_B}{eM_s} \mathbf{M}^n \otimes \mathbf{J}_e^n \right).$$

The spatial discretization employed is second order accurate. Finally, the LLG equation (2) is advanced in time using the *Gauss-Seidel Projection Method* (GSPM). The GSPM is an unconditionally stable method for the LLG, whose numerical complexity is comparable to that of solving the linear heat equation using Backward Euler [10, 11]. Further details may be found in [7].

In figure 2 we demonstrate the effect of the spin current in a double layer. The dimensions of the multilayer are $128 \text{ nm} \times 64 \text{ nm} \times \{100 + 20 + 60\} \text{ nm}$. We used the parameters of the Permalloy ($C_{ex} = 1.3 \times 10^{-11} \text{ J/m}$, $K_u = 10^2 \text{ J/m}^3$, $M_s = 8 \times 10^5 \text{ A/m}$, $\gamma = 1.76 \times 10^{11} (\text{Ts})^{-1}$). The current used was $J_e = (0, 0, -10^{11}) \text{ A/m}^2$. The coupling parameter was $J = 3.125 \times 10^{-4} \text{ N/A}^2$. The polarization parameter for FM1 was $\beta = 0.9$, and for FM2 was $\beta' = 0.8$. The diffusion constant was set to be $D_0 = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ inside the ferromagnetic layers, and $D_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ outside. In the hysteresis loop we plot the average magnetization at steady state for a descending sequence of external fields. The sample is initially saturated by applying a magnetic field $\mathbf{H}_e = 0.06 \text{ mT}$.

It is seen that when only the magnetic fields are considered, a field of strength 0.06 mT is not enough to reverse the magnetization. However, when spin currents are present, the magnetization reverses with a field of approximately 0.025 mT .

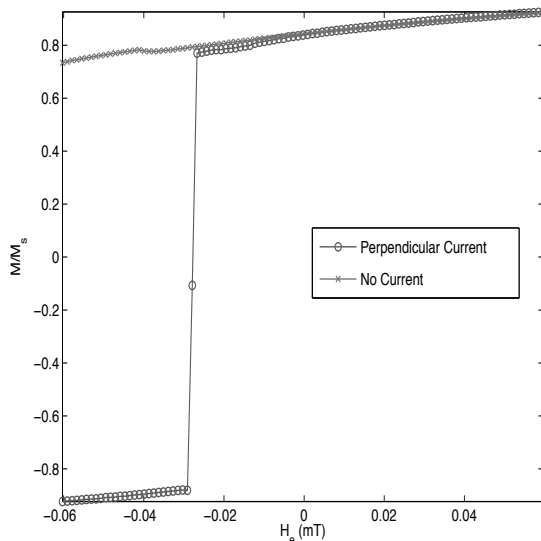


Figure 2: Hysteresis loop in a double layer. Letting a current flow perpendicular to the layers can reduce considerably the magnetic field necessary for magnetization reversal.

3 Acknowledgments

This work is partially supported by Hong Kong RGC-CERG Grant HKUST 603503P. The work of García-Cervera is also partially funded by an NSF grant, award number DMS-0505738. The work of Wang is also partially supported by RGC-CERG Grant HKUST 604105.

References

- [1] J.C. Slonczewski. Current-driven excitation of magnetic multilayers. *J. Magn. Magn. Mat.*, 159:L1–L7, 1996.
- [2] L. Berger. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current. *Phys. Rev. B*, 54:9353, 1996.
- [3] M.D. Stiles and J. Miltat. Spin transfer torque and dynamics. *preprint*, 2005.
- [4] T. Valet and A. Fert. Theory of the perpendicular magnetoresistance in magnetic multilayers. *Phys. Rev. B*, 48:7099, 1993.
- [5] A. Shpiro, P.M. Levy, and S. Zhang. Self-consistent treatment of nonequilibrium spin torques in magnetic multilayers. *Phys. Rev. B*, 67:104430, 2003.
- [6] C.J. García-Cervera and X.P. Wang. Spin-Polarized transport: Existence of weak solutions. *Submitted to J. Disc. Cont. Dyn. Sys., Series B*, 2005.
- [7] C.J. García-Cervera and X.P. Wang. Numerical simulations of a spin transfer model. *in preparation*, 2005.
- [8] L. Landau and E. Lifshitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 8:153–169, 1935.
- [9] T.L. Gilbert. *Phys. Rev.*, 100:1243, 1955. [Abstract only; full report, Armor Research Foundation Project No. A059, Supplementary Report, May 1, 1956 (unpublished)].
- [10] X.-P. Wang, C.J. García-Cervera, and W. E. A Gauss-Seidel Projection Method for the Landau-Lifshitz equation. *J. Comp. Phys.*, 171:357–372, 2001.
- [11] C.J. García-Cervera and W. E. Improved Gauss-Seidel Projection Method for Micromagnetics Simulations. *IEEE Trans. Mag.*, 39(3):1766–1770, 2003.

Transporte de Radiación en Malla Adaptativa Refinada*

PEDRO VELARDE¹, FRANCISCO OGANDO²
CARLOS GARCÍA¹, EDUARDO OLIVA¹

¹Instituto de Fusión Nuclear, Universidad Politécnica de Madrid

²Energiatieteiden laboratorio, Helsinki University of Technology

pedro@din.upm.es

Resumen

Se presentan las componentes básicas de un código, denominado ARWEN, en malla adaptativa por bloques para el tratamiento de problemas físicos con transporte de radiación acoplado a la fluidodinámica. Se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales y se describen los distintos métodos numéricos que se utilizan. Finalmente se muestran algunas de las aplicaciones realizadas con dicho código.

Palabras clave: *AMR, Radiation Transport, CFD, Inertial Confinement Fusion, X-Ray laser*

1 Introducción

La radiación juega un papel importante en numerosos procesos físicos tanto en experimentos en laboratorios [4] como en procesos astrofísicos [7]. A temperaturas por encima de unos pocos eV (11600 K) la radiación empieza a ser muy efectiva en el transporte de energía. Por lo tanto, al estudiar numéricamente la evolución de un fluido en el régimen de alta densidad de energía (ver fig. 1), hay que tener en cuenta el transporte de radiación. Existen varias aproximaciones para tratar el efecto de la radiación, dependiendo del grado de detalle y precisión que se requiera. La más completa y costosa en términos de memoria y tiempo de cálculo, es resolver directamente la ecuación de transporte. Esto implica resolver en la intensidad específica $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$ la ecuación

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu + \kappa I_\nu = \varepsilon$$

*Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los programas ENE2005-02064/FTN del Ministerio de Educación y Ciencia, NEST-012843 TUIXS de la Comisión Europea.

siendo (\mathbf{r}, t) las variables habituales de espacio y tiempo, y $(\boldsymbol{\Omega}, \nu)$ ángulo y frecuencia de la radiación. La estructura hiperbólica de la ecuación 1 obliga a resolverla numéricamente con un método similar al *upwinding* desarrollado para leyes de conservación. El carácter hiperbólico es el dominante en medios ópticamente delgados, que son los más habituales en experimentos, pero la discretización de la ecuación ha de cumplir consistentemente los casos límites de difusión y transporte [1], como se señala más adelante. En la práctica se usa un método de bajo orden tanto en la discretización espacial como angular. Esta ecuación se resuelve simultáneamente junto a las de fluidos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= -\nabla (P + P_r) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho E + P + P_r) \mathbf{u}] &= \dot{S} + \nabla \cdot (\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_r) \\ \frac{\partial \rho e_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_e \mathbf{u}) + (P_e + P_r) \nabla \cdot \mathbf{u} &= \dot{S}_e + \nabla \cdot (\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_r) + \Omega_{ei}(T_i - T_e)\end{aligned}$$

En estas ecuaciones ρ es la densidad del plasma, \mathbf{u} la velocidad, $E = e_e + e_i + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$ la energía total específica, e_e la energía interna de los electrones, T_e y T_i la temperatura iónica y electrónica, y todas ellas dependen de (\mathbf{r}, t) . Las presiones (total y electrónica) y todos los coeficientes en las ecuaciones anteriores dependen de (ρ, e) . La conducción de calor por electrones, muy superior a la producida por los iones, se obtiene resolviendo la ecuación de conducción con flujos \mathbf{q}_e dados por

$$\mathbf{q}_e = -k_e \nabla T_e$$

Este grupo de ecuaciones se completa con la presión P_r que ejerce la radiación sobre la materia, y la cantidad de energía de radiación que absorben o emiten los electrones

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{q}_r &= \int (\kappa I_{\nu} - \varepsilon) d\nu \\ E_r &= \frac{1}{c} \int I_{\nu} d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\ P_r &= \frac{1}{3} E_r\end{aligned}$$

Estas ecuaciones llevan implícitas ciertas aproximaciones que se utilizan habitualmente en el transporte de radiación no relativista [5]. La ecuación de estado, característica de cada material, establece una relación $P = P(\rho, e)$ para la especie iónica y electrónica. El coeficiente de conducción electrónico k_e se determina en función de la densidad y de la temperatura electrónica. Tanto κ como ε se obtienen a partir de la densidad y temperatura de los electrones, y dependen también de la frecuencia de la radiación. En condiciones de ausencia

de equilibrio termodinámico, estos coeficientes pueden depender además de la propia intensidad de radiación. La energía externa es depositada en los electrones, generalmente por una fuente láser, y se representa por \dot{S} . El resto de las fuentes (fusión, deposición de energía por partículas, etc) se incluyen en este término. El problema así planteado es difícil de aproximar numéricamente en 2 o 3 dimensiones. La forma habitual de resolverlo es separar el cálculo en sucesivos pasos que resuelven grupos de ecuaciones, donde cada grupo suma su contribución al siguiente. La bondad de este método se establece por pruebas numéricas, pero es seguro que cuando se separa en grupos, el paso de tiempo se acorta severamente. La resolución numérica del grupo fluidodinámico se ha de realizar teniendo en cuenta que hay que tratar ondas de choque intensas y gradientes fuertes de temperatura. Los métodos de Godunov con reconstrucción lineal o parabólica y un solver de Riemann robusto funcionan adecuadamente. Parte de la responsabilidad del comportamiento correcto del solver de Riemann recae en la ecuación de estado, que ha de cumplir algunas propiedades de consistencia.

La dificultad adicional estriba en las diferentes escalas temporal y espacial que se suelen dar en plasmas alta densidad de energía. Por ejemplo, en un experimento típico donde un láser de KrF con longitud de onda de $0,25\mu\text{m}$ y alta intensidad, pongamos $100\text{TW}/\text{cm}^2$, incide sobre una placa de aluminio, uno obtiene temperaturas de 1000 eV en la corona, que es el plasma que fluye a alta velocidad (unos 300 km/s), generando una onda de choque intensa viajando hacia el interior del material. Las escalas de densidad y temperatura en la corona son muy superiores a las de la zona de interior. Blancos más complicados, con más estructura de capas y huecos, como los utilizados en experimentos reales, poseen más regiones de diferentes escalas. Está claro pues que una malla uniforme, o adaptada a unas condiciones iniciales, no podría seguir los detalles de un flujo de estas características. Una solución clásica a este problema es usar mallas que se mueven (y deforman) con el fluido [13]. Estas mallas son capaces de seguir con precisión los cambios de densidad del fluido, pero sufren de problemas topológicos en 2 y 3 dimensiones. Esto obliga a rezonar la malla provocando una pérdida de precisión importante. Otra posibilidad es utilizar distintos bloques de mallas, con distintas resoluciones según se requiera en el cálculo siguiendo el criterio de seguir algunas características del flujo o mantener el error aproximadamente constante en el sistema. Esta técnica de parchado de la malla recibe el nombre de refinamiento por malla adaptativa (AMR) [2]. El código ARWEN [9, 6] es la resultante de incluir la resolución las ecuaciones anteriores con refinamiento con malla adaptativa.

2 Malla adaptativa refinada

El código ARWEN utiliza para la resolución un esquema de Malla Adaptativa Refinada por Bloques. Los esquemas de malla adaptativa en general son algoritmos con los que se puede controlar el error numérico de resolución de las ecuaciones variando de modo local el refinamiento de la discretización realizada.

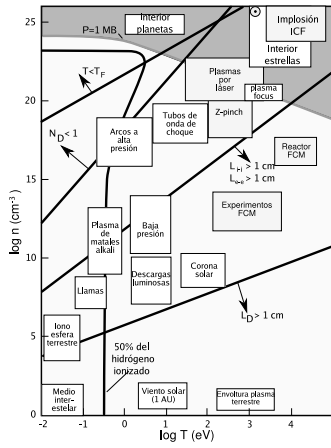


Figura 1: Regiones de densidad numérica-temperatura de algunos plasmas característicos. La región de alta densidad de energía se corresponde aproximadamente con la parte superior delimitada por la curva de presión de 1 MB. Gráfica tomada del NRL Plasma Formulary, con correcciones y añadidos.

El objetivo a conseguir es un error numérico homogéneo espacialmente, de modo que zonas de alto error numérico no degraden la precisión de zonas resueltas más finamente. La estimación del error numérico se puede realizar de varias maneras: la más correcta es la llamada *extrapolación de Richardson* por la que se obtiene como extrapolación de los errores cometidos sobre el mismo sistema usando dos refinamientos diferentes. Esta técnica es costosa de cálculo, por lo que en muchas ocasiones se utilizan criterios basados en el gradiente o en la segunda derivada de la solución.

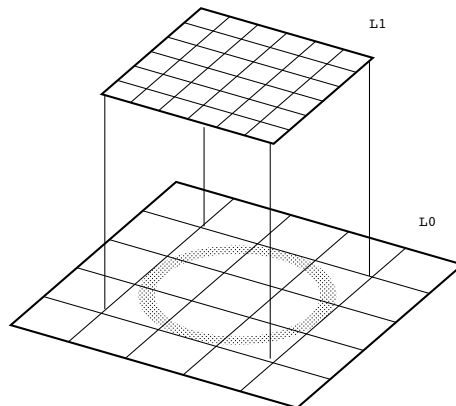


Figura 2: Colocación de malla fina sobre malla gruesa

El esquema de Malla Adaptativa por Bloques es un caso particular de

AMR en el cual se busca realizar cálculos siempre en mallas homogéneas (de tamaño de celda fijo). Estas mallas son especialmente propicias para cálculos de fluidodinámica por el fenómeno de cancelación de errores. El modo de conjugar tamaños de celda variables con mallas homogéneas se realiza en este sistema mediante un sistema de parcheados. Se genera un cierto número de mallas agrupadas conforme a su tamaño de celda. Cada conjunto de mallas de un tamaño de celda dado forma un nivel de refinamiento y tiene como propiedades fundamentales: a) Las mallas no se intersectan, b) La unión de mallas cubre un subconjunto del dominio correspondiente al nivel inmediatamente más grueso, c) los bordes de malla coinciden con bordes de celda del nivel inmediatamente más grueso. El nivel más grueso cubre todo el dominio de simulación y en la mayoría de los casos suele constar de una única malla.

El esquema anteriormente descrito corresponde a un sistema de mallas que son parcheadas por mallas de mayor refinamiento (ver fig. 2). La colocación de las mallas finas es un proceso dinámico que depende de las particularidades de la solución en cada momento, buscando el propósito fundamental de AMR (error numérico homogéneo). Las condiciones de contorno de los niveles más finos se construyen a partir de interpolaciones en el contorno a partir de datos del nivel inmediatamente más grueso, o a partir de fronteras comunes con mallas del mismo nivel. Por otra parte, los cálculos en malla fina toman prioridad sobre los realizados en malla gruesa en la misma posición, de modo que sustituyen a estos últimos mediante un proceso de proyección. Todas estas operaciones pueden realizarse de un modo conservativo, con lo que son especialmente adecuadas para la resolución de las ecuaciones de fluidodinámica y de transferencia de energía.

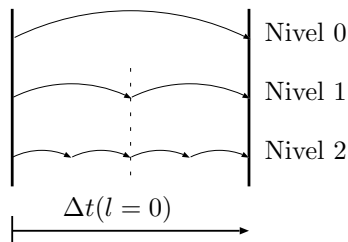


Figura 3: División temporal en AMR.

El refinamiento diferente en diferentes niveles se puede extender a la variable temporal en sistemas dinámicos. Con métodos explícitos en fluidodinámica, el paso de tiempo máximo es directamente proporcional al tamaño de celda, con lo que cada nivel tiene una restricción diferente. Esta situación se resuelve fijando el paso temporal de un nivel fino como un submúltiplo del nivel inmediatamente más grueso. Este desfase temporal se resuelve avanzando los niveles finos el número de veces suficientes para sincronizarse con el grueso (ver fig. 3).

Un ejemplo donde se observa la bondad de todo este proceso se muestra en la fig 4, donde un tubo de onda de choque se ha simulado con 3 niveles de

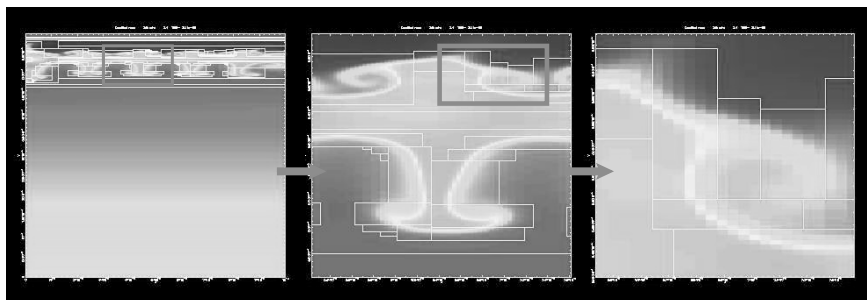


Figura 4: Ejemplo de funcionamiento del sistema de refinamiento por malla adaptativa. En este caso una superficie de separación de materiales se hace inestable al paso de una onda de choque, tanto cuando proviene de la parte inferior, como cuando rebota en la pared superior. Los rectángulos son los bordes de los parches de alta resolución, por lo que sólo una parte reducida del sistema se calcula con paso de malla fino.

refinamiento. Observar que la mayor parte del sistema se calcula en el nivel de más baja resolución, concentrando todo el esfuerzo numérico en la estrecha franja alrededor de las estructuras de la parte superior.

3 Transporte de radiación

La ecuación de transporte de radiación (1) modela el comportamiento de la distribución de la radiación térmica electromagnética y su interacción con el sistema fluido. La resolución de la ecuación en sistemas prácticos se puede abordar únicamente de modo numérico y de modo costoso debido al número de variables independientes (3 espaciales, 2 de dirección de propagación, 1 de energía de la radiación y 1 temporal). Es precisamente por esto que el uso de esquemas optimizados de resolución tiene gran influencia en el rendimiento global del código.

El funcionamiento del método AMR por bloques sigue el esquema descrito en el punto anterior. La ecuación es sucesivamente resuelta en diferentes mallas y sus datos intercambiados para lograr concordancia entre ellas. Por tanto a la hora de afrontar un sistema de transporte de radiación en AMR, los problemas tratados se pueden encuadrar en dos divisiones:

- Problemas inherentes a la resolución en malla fija. Este tipo de problemas radican principalmente en efectos bidimensionales (efecto rayo) e interacción de la radiación con la materia (iteración de fuente)
- Esquemas de transmisión de información aplicados a la ecuación, con los efectos de distintas emisividades en distintos parches superpuestos, y condiciones de contorno en cada parche compatible con la iteración en fuente.

En el caso del ARWEN se utiliza ordenadas discretas, es decir, descomposición angular de la forma $I = \sum_m w_m I_m \delta(\Omega - \Omega_m)$ con discretización de primer orden en el espacio. Es la técnica más utilizada y la más barata en tiempo de cálculo, dando resultados aceptables en muchos casos. La fuerte dependencia de la emisión y absorción de radiación de las propiedades del medio, obligan a tener en cuenta cómo van cambiando estos coeficientes a medida que el cálculo progresa. Desde principios de la década de 1980 se sabe que las técnicas de aceleración sintética, si utilizadas de forma consistente, dan buenas tasas de convergencia. Hoy en día estas técnicas son estándar en la resolución de la ecuación de transporte. El coste computacional del transporte de radiación es más del 95 % del tiempo de cálculo total, así que cualquier mejora en los algoritmos tiene una influencia dramática en la velocidad de cálculo.

4 Aplicaciones

En el desarrollo del código ARWEN han participado en mayor o menor medida 8 investigadores y más de 10 alumnos en los últimos años de carrera, esto últimos sobre todo en programas de apoyo (análisis y generación de datos) al código. Las aplicaciones se extienden tanto en el diseño de experimentos, ya sea por el propio grupo o por otras instituciones, diseño de blancos para fusión inercial [12, 11] (figs 6,7), laboratorio terrestre de astrofísica [3](fig. 5), cadenas de amplificadores de laser de rayos X para aplicaciones biológicas, determinación de opacidades de plasmas de alta densidad [8], etc. La estructura del código permite trabajar en equipos bien diferenciados, dado el esquema modular del mismo. La utilización de herramientas de control de versiones, lenguajes C/C++ para la gestión de mallas y fortran para núcleos de cálculo, un sistema de lectura/escritura eficiente y un sistema gráfico pensado para el desarrollo, ha permitido la evolución rápida del código por varios investigadores a la al mismo tiempo.

Referencias

- [1] Marvin L. Adams and Edward W. Larsen. Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations. *Progress in Nuclear Energy*, 40(1):1–159, 2002.
- [2] M.J. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *J. Comp. Phys.*, 82:64–84, 1989.
- [3] P. Velarde et al. In ANS, editor, *Inertial Fusion Sciences and Applications 2001*. Elsevier, 2004.
- [4] J. Lindl. Development of the indirect-drive approach to inertial confinement fusion and the target physics basis for ignition and gain. *Phys. Plasmas*, 2(11):3933–4024, 1995.
- [5] D. Mihalas and B. Mihalas. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Oxford University Press, New York, 1984.

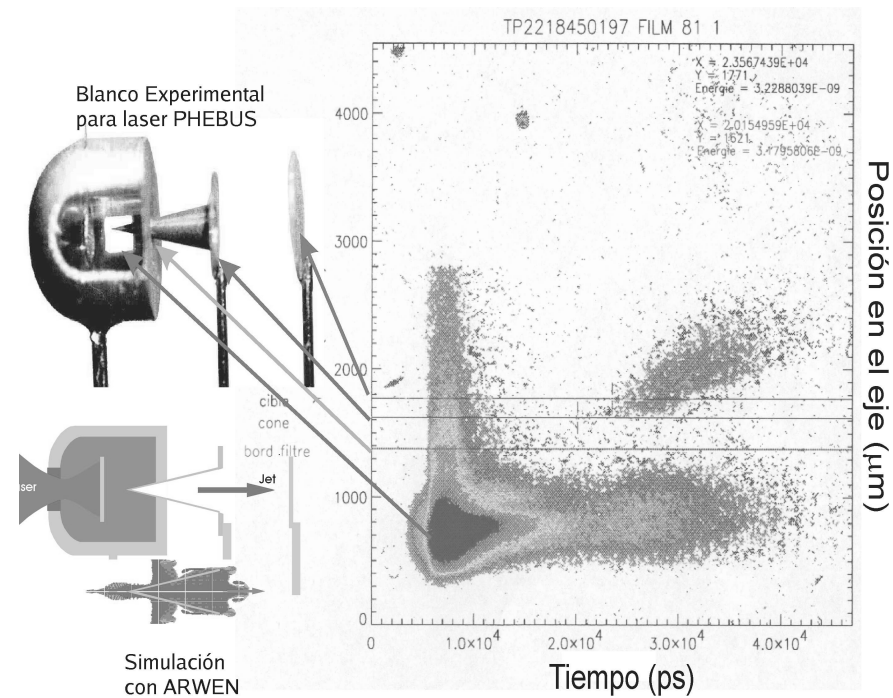


Figura 5: Uno de los primeros blancos diseñados con ARWEN (versión 1996, sin transporte de radiación) y el resultado de dicho experimento (terminado en 1997 [10]), orientado a obtener jets de muy alta velocidad (por encima de 200 km/s). El blanco era un cono incrustado en una cavidad de radiación generada por el láser PHEBUS incidiendo desde la izquierda. La microfotografía del blanco, fabricado en oro, se ve en la parte superior izquierda. El esquema está justo debajo, y la simulación está graficada debajo del esquema. El resultado de los experimentos está resumido en el gráfico de emisión de la derecha, donde se observa la emisión de un jet, en este caso de velocidad no suficientemente alta.

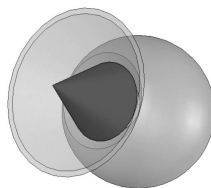


Figura 6: Imagen en 3D del blanco de fusión rápida por impacto de jet

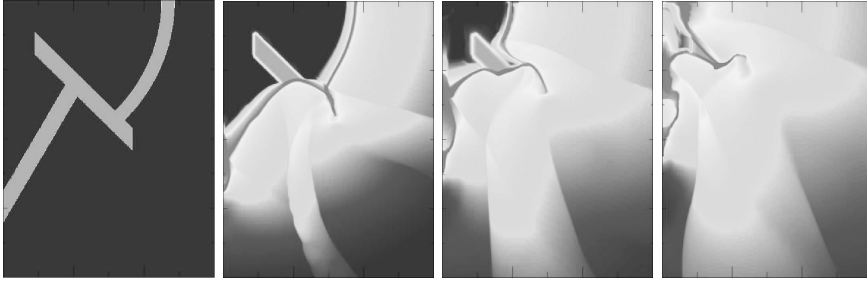


Figura 7: Evolución de la densidad en un blanco guiado para fusión por confinamiento inercial. El exterior del sistema está sumergido en radiación térmica de temperatura de 300 eV, producida en una cavidad en la que incide un láser de alta intensidad (fuera de la figura). Las dimensiones son $600 \times 800 \mu\text{m}$ y los tiempos sucesivos de los gráficos 0, 0.6, 2.1 ns. respectivamente.

- [6] F. Ogando and P. Velarde. Development of a radiation transport fluid dynamic code under AMR scheme. *JQSRT*, 71:541–550, 2001.
- [7] D. Ryutov, R.P. Drake, J. Kane, E. Liang, B.A. Remington, and W.M. Wood-Vasey. Similarity criteria for the laboratory simulation of supernova hydrodynamics. *ApJ*, 518:821–832, 1999.
- [8] R. Schott, F. Philippe, P. Angelo, E. Dufour, A. Poquérusse, E. Leboucher-Dalimier, P. Sauvan, P. Velarde, F. Ogando, E. Mínguez, J. M. Gil, J.G. Rubiano, R. Rodríguez, P. Martel, and R. Mancini. Access to spectrally resolved ultra-dense hot low Z emissivities and opacities. In *AIP Conference Proceedings*, volume 645, page 340, 2002.
- [9] P. Velarde. A fct method for staggered mesh. *Journal of Computational Physics*, 108:27–37, 1993.
- [10] P. Velarde, J.M. Martínez-Val, S. Eliezer, M. Piera, J. Guillen, M.D. Cobo, F. Ogando, A. Crisol, L. González, J. Prieto, and G. Velarde. Hypervelocity jets from conical hollow-charges. In E. M. Campbell G.H. Miley, editor, *Laser Interaction and Related Plasma Phenomena*, volume 406, pages 182–189. AIP, 1997.
- [11] P. Velarde, F. Ogando, S. Eliezer, and J.M. Martínez-Val. Fast ignition heavy-ion fusion by jet impact. *Nuclear instruments and methods in physics research A*, 544:329–332, 2005.
- [12] P. Velarde, F. Ogando, S. Eliezer, and M. Saule. Target ignition by jet interaction. In B.A. Hammel, D.D. Meyerhofer, J. Meyer ter Vehn, and H. Azechi, editors, *Inertial fusion sciences and applications 2003*, pages 88–91. American Nuclear Society, 2004.

- [13] G.B. Zimmerman and W.L. Kruer. *Comments Plas. Phys. Controlled Fusion*, 2:51, 1975.

**Sesión monográfica de
TEORÍA DE CONTROL**

Coordinador: EDUARDO CASAS

Participantes:
LUIS ALBERTO FERNÁNDEZ
ENRIQUE FERNÁNDEZ CARA
XU ZHANG

Control Theory

EDUARDO CASAS

Dep. de Matemática Aplicada y CC. de la Computación
Universidad de Cantabria

eduardo.casas@unican.es

1 Introduction

In the Session on Control Theory of the past CEDYA 2005, celebrated in Leganés, three talks were delivered devoted to the control of partial differential equations. There are two main topics considered in the study of control problems governed by partial differential equations: “*Optimal Control*” and “*Controllability, Observability and Stabilization*”. In the first topic, the main tools for the study come from Optimization Theory and Partial Differential Equations. Partial Differential Equations methods are the main ingredients in the second topic, in particular the unique continuation property is an essential tool for this study. This property is usually deduced from the application of a Holmgren-type uniqueness theorem or from Carleman inequalities. In both topics, Numerical Analysis plays also a very important role.

In the session on control theory there was a talk delivered by Luis Alberto Fernández focused on the first topic. He formulated an optimal control problem in the coefficients and presented a very complete study, including the existence of a solution, the first and second order conditions for optimality and the numerical approximation. He proved convergence of the approximations and provided some error estimates in the L^2 norm as well as in the L^∞ norm.

There was a talk by Enrique Fernández Cara dealing with the second topic. He presented a review of recent results concerning the null controllability of parabolic systems. Among others he considered the heat equation, the Burgers, Navier-Stokes and Ginzburg-Landau equations. He established the relationship between the null controllability of a system and the observability of the adjoint system. In particular the role played by Carleman inequalities was showed.

There was another talk, by Xu Zhang, dealing with Unique Continuation Property, corresponding to the second topic of the control theory. Contrary to the other two cases, the talk was devoted to the study of Stochastic Partial

Differential Equations. He explained the difficulties to adapt a Holmgren-type uniqueness theorem or the Carleman inequalities to the case of stochastic equations. The talk was focused on the presentation of a recent result on the unique continuation property for stochastic parabolic equations, which is based on a key stochastic version of Carleman-type estimate and a suitable “partial Holmgren coordinate transform”.

In the next pages we present a summary of these talks.

2 Numerical approximation of control problems associated to semilinear elliptic PDE: Multiplicative control, by Eduardo Casas and Luis Alberto Fernández.

Luis Alberto Fernández
 Dep. de Matemáticas, Estadística y Computación
 Universidad de Cantabria

lafernandez@unican.es

2.1 Introduction

In this work, we study the numerical approximation of the following control problem

$$(P) \begin{cases} \text{Inf } J(u) = \int_{\Omega} L(x, y(x), u(x)) dx, \\ u \in U^{ad} = \{u \in L^{\infty}(\Omega) : 0 \leq a \leq u(x) \leq b < +\infty \text{ a. e. } x \in \Omega\}, \end{cases} \quad (2.1)$$

with y being the solution of the boundary value problem given by

$$\begin{cases} Ay(x) = f_1(x, y) + u(x)f_2(x, y) & \text{in } \Omega, \\ y(x) = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (2.2)$$

where Ω is an open bounded convex set in \mathbb{R}^n ($n = 2$ or $n = 3$), whose boundary Γ is $C^{1,1}$; A denotes a second-order elliptic operator of the form

$$Ay(x) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \right), \quad (2.3)$$

where $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ for $i, j \in \{1, \dots, n\}$ and there exists $\gamma > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2, \quad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\Omega}. \quad (2.4)$$

There are some previous papers dealing with the case where the control u appears in the PDE a linear way (i.e., $f_2(x, y) \equiv 1$), see for instance [1] and

its bibliography. As far as we know, this is the first time that error estimates are derived for multiplicative controls. Moreover, this study can be applied to the inverse problems framework: for instance, if we think that u is an unknown coefficient of the PDE that we want to recover from some distributed noisy measurement.

2.2 Study of the control problem

Together with (2.1)–(2.4), we will assume that $f_1, f_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $L \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial f_i}{\partial y}(x, y) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

for $i = 1, 2$, and there exists $m > 0$ such that

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, y, u) \geq m > 0, \quad \forall (x, y, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

The C^2 assumption with respect to the x variable for f_1, f_2 and L is too strong and it is assumed here for simplicity. It can be weakened as in [1].

By using the standard truncation technique with the monotonicity of the right hand term of the PDE with respect to y (remember (2.5) and that $u \geq 0$) and some classical regularity results for linear PDE, it is not difficult to establish the following result:

Theorem 2.1 *Given $u \in U^{ad}$, then the state equation (2.2) has a unique solution y_u in $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ for every $p > n$.*

Taking into account that L is convex with respect to u (thanks to (2.6)), we can derive the existence of (at least) one solution (optimal control) \bar{u} of (P) by classical argumentation. In general, (P) is non-convex (even if f_1 and f_2 are linear resp. y), because the control is multiplicative; therefore, we cannot expect uniqueness of solutions.

As usual, we can obtain the first order necessary optimality conditions that satisfies each solution:

Theorem 2.2 *Given an optimal control \bar{u} of (P), then there exists an adjoint state $\bar{\varphi}$ in $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ for every $p > n$ verifying the adjoint state equation*

$$\begin{cases} A^* \bar{\varphi}(x) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, \bar{y}) + \bar{u} \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, \bar{y}) \right) \bar{\varphi}(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{u}) \quad \text{in } \Omega, \\ \bar{\varphi}(x) &= 0 \quad \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{2.7}$$

where $\bar{y} = y_{\bar{u}}$, A^* denotes the adjoint operator of A and

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Omega} \left(\bar{\varphi} f_2(x, \bar{y}) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}, \bar{u}) \right) (u - \bar{u}) dx \geq 0, \quad \forall u \in U^{ad}. \tag{2.8}$$

At this point, it is useful to introduce the function $\bar{d}(x) = \bar{\varphi}(x)f_2(x, \bar{y}(x)) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x))$. Taking into account (2.8) and the expression of U^{ad} , we get

$$\bar{d}(x) = \begin{cases} 0 & \text{where } a < \bar{u}(x) < b \\ \geq 0 & \text{where } \bar{u}(x) = a \\ \leq 0 & \text{where } \bar{u}(x) = b \end{cases} . \tag{2.9}$$

This provides a pointwise representation for \bar{u} and a regularity result: for each $x \in \bar{\Omega}$, the equation $\bar{\varphi}(x)f_2(x, \bar{y}(x)) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}(x), t) = 0$ has a unique solution $t = \bar{s}(x)$. Moreover, $\bar{s} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Then, $\bar{u}(x) = Proj_{[a,b]}(\bar{s}(x))$ and, in particular, $\bar{u} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

Since (P) is non-convex, previous optimality conditions are not sufficient for (local) optimality. To have this, the following second order sufficient optimality condition is needed (see [2] for a general result):

Theorem 2.3 *Let us assume that $\bar{u} \in U^{ad}$ satisfies (2.8) and there are $\delta > 0$ and $\tau > 0$ such that*

$$J''(\bar{u})v^2 \geq \delta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in C_{\bar{u}}^\tau, \tag{2.10}$$

where

$$C_{\bar{u}}^\tau = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \begin{array}{ll} v(x) \geq 0 & \text{if } \bar{u}(x) = a \\ v(x) \leq 0 & \text{if } \bar{u}(x) = b \\ v(x) = 0 & \text{if } |\bar{d}(x)| > \tau \end{array} \right\}$$

Then, \bar{u} is a local solution of (P) .

2.3 Finite element approximation

We will consider $\{T_h\}_{h>0}$ a regular family of triangulations of $\bar{\Omega}$, where h is the mesh size of the grid (see [1] for a detailed description of the usual regularity assumption). For each h , let us take $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in T_h} T$ and let Ω_h and Γ_h denote its interior and its boundary, respectively. We assume that the vertices of T_h placed on the boundary Γ_h are points of Γ .

Furthermore, we will also denote $U_h = \{u_h \in L^\infty(\Omega) : u_{h|_T} \text{ is constant } \forall T \in T_h\}$, $U_h^{ad} = U^{ad} \cap U_h$ and $V_h = \{y_h \in C(\bar{\Omega}) : y_{h|_T} \in P_1, \forall T \in T_h, y_h = 0 \text{ on } \bar{\Omega} \setminus \Omega_h\}$, where P_1 is the space of polynomials of degree less or equal than 1.

Given $u \in L^\infty(\Omega)$, we will denote by $y_h(u)$ and $\varphi_h(u)$ the solutions of the usual discrete state and discrete adjoint state equations, respectively, associated to u . Following a similar technique to [3], we can prove the typical error estimates, that are closely related with the interpolation errors.

Theorem 2.4 *There exists a constant $C > 0$ (independent of h) such that the following estimates hold for each $u \in U^{ad}$:*

i) $\|y_u - y_h(u)\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_u - \varphi_h(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch.$

ii) $\|y_u - y_h(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_u - \varphi_h(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2.$

$$iii) \|y_u - y_h(u)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_u - \varphi_h(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{2-\frac{n}{2}}.$$

Now, we can introduce the approximate optimal control problem given by

$$(P_h) \begin{cases} \text{Inf } J_h(u_h) = \int_{\Omega_h} L(x, y_h(u_h)(x), u_h(x))dx, \\ u_h \in U_h^{ad}. \end{cases}$$

Clearly, this finite-dimensional problem (P_h) has (at least) one solution \bar{u}_h , by the continuity of J_h and the compactness of U_h^{ad} . Furthermore, the optimal solutions of (P_h) can be characterized analogously to the continuous case (see Theorem 2.2)

Theorem 2.5 *Given a solution \bar{u}_h of (P_h) , then there exist $\bar{y}_h = y_h(\bar{u}_h)$ and $\bar{\varphi}_h = \varphi_h(\bar{u}_h)$ in $H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ verifying*

$$J'_h(\bar{u}_h)(u - \bar{u}_h) = \int_{\Omega_h} \left(\bar{\varphi}_h f_2(x, \bar{y}_h) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}_h, \bar{u}_h) \right) (u - \bar{u}_h) dx \geq 0, \quad (2.11)$$

for all $u \in U_h^{ad}$.

As a consequence of (2.11), we can obtain that $\bar{u}_h(x) = Proj_{[a,b]}(\bar{s}_h(x))$, where $\bar{s}_h(x) = s_T$ is the unique constant solution of the equation

$$\int_T \left(\bar{\varphi}_h(x) f_2(x, \bar{y}_h(x)) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}_h(x), s_T) \right) dx = 0,$$

for each $T \in T_h$.

Combining previous theorems with the assumptions, it is possible to prove the following convergence results:

Theorem 2.6 *Let $\{\bar{u}_h\}_{h>0}$ be any sequence of solutions to (P_h) . Then, there exist weakly* converging subsequences (denoted in the same way). Moreover, each of these limits \bar{u} is a solution of (P) and it is verified that*

- i) $\lim_{h \rightarrow 0} J_h(\bar{u}_h) = J(\bar{u})$.
- ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = 0$.
- iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$.

First part of Theorem 2.6 holds because $\bar{y}_h \rightarrow \bar{y}$ in $L^\infty(\Omega)$, if $\bar{u}_h \rightarrow \bar{u}$ weakly* in $L^\infty(\Omega)$. Strong convergence in $L^2(\Omega)$ is a consequence of (2.6) and the convergence in $L^\infty(\Omega)$ follows from the explicit representation of \bar{u} and \bar{u}_h previously obtained.

Finally, we present the main theorem of this work that contains explicit error estimates for the optimal controls:

Theorem 2.7 *Let $\{\bar{u}_h\}_{h>0}$ be any sequence of solutions to (P_h) converging weakly* to \bar{u} that satisfies (2.10). Then, there exists a constant $C > 0$ (independent of h) such that:*

$$i) \quad \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch.$$

$$ii) \quad \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^\lambda,$$

with $\lambda = 1$ (if $n = 2$) and $\lambda = 1/2$ (if $n = 3$), for all sufficiently small $h > 0$.

Let us present the sketch of the proof for the estimate *i*). We start by using the first order necessary conditions (2.8) and (2.11)

$$J'(\bar{u})(\bar{u}_h - \bar{u}) \geq 0, \quad J'_h(\bar{u}_h)(u_h - \bar{u}_h) \geq 0,$$

for any $u_h \in U_h^{ad}$ to be selected.

Together with (2.10) and using that $\bar{u}_h - \bar{u} \in C_{\bar{u}}^\tau$, we have

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq J'(\bar{u})(u_h - \bar{u}) + (J'_h(\bar{u}_h) - J'(\bar{u}))(u_h - \bar{u}) + \\ &\quad + (J'(\bar{u}_h) - J'_h(\bar{u}_h))(\bar{u}_h - \bar{u}) \leq Ch^2, \end{aligned}$$

for sufficiently small h , because the first term is zero, for some u_h selected in a clever way and also verifying

$$\|u_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch.$$

The second term can be estimated as follows

$$\begin{aligned} &|(J'_h(\bar{u}_h) - J'(\bar{u}))(u_h - \bar{u})| \leq \\ &\leq C (\|\varphi_h(\bar{u}) - \bar{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} + \|y_h(\bar{u}) - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}) \|u_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

The third term can be also estimated

$$\begin{aligned} &|(J'(\bar{u}_h) - J'_h(\bar{u}_h))(\bar{u}_h - \bar{u})| \leq \\ &\leq C (\|\bar{\varphi}_h - \varphi_{\bar{u}_h}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{y}_h - y_{\bar{u}_h}\|_{L^2(\Omega)}) \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Combining these estimates with the error estimates in L^2 given in Theorem 2.4-*ii*), we arrive to *i*). Estimate *ii*) is a consequence of *i*) and Theorem 2.4-*iii*).

References

- [1] N. Arada, E. Casas, F. Tröltzsch. Error estimates for the numerical approximation of a semilinear elliptic control problem. *Comput. Optim. Appl.*, 23 (2): 201-229, 2002.
- [2] E. Casas, F. Tröltzsch. Second-order necessary and sufficient optimality conditions for optimization problems and applications to control theory. *SIAM J. Optim.*, 13 (2): 406-431, 2002.

- [3] M. Mateos, *Problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones semilineales con restricciones de tipo integral sobre el gradiente del estado*. Ph. D. Thesis, University of Cantabria, 2000.

Acknowledgements: The author has been partially supported by D.G.I. (Spain), Grant BFM2002-02488.

3 Remarks on the controllability of some parabolic equations and systems

Enrique Fernández Cara
Dpto. E.D.A.N, Universidad de Sevilla

cara@us.es

Abstract

We present a review of recent results concerning the null controllability of parabolic systems. Among others, we will consider the heat equation, the Burgers, Navier-Stokes and Ginzburg-Landau equations, etc. We will also indicate some open questions.

3.1 Introduction. Controllability and observability

Let us first recall some general ideas that apply to a large family of (linear and nonlinear) evolution problems.

Suppose that we are considering a *state equation* of the form

$$\begin{cases} y_t - A(y) = Bv, & t \in (0, T), \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (3.1)$$

which governs the behavior of a physical system. It is assumed that $A : D(A) \subset H \mapsto H$ is a (generally nonlinear) operator, $y : [0, T] \mapsto H$ is the *state*, i.e. the variable that serves to identify the physical properties, $v : [0, T] \mapsto U$ is the *control*, i.e. the variable we can choose, $B \in \mathcal{L}(U; H)$ and $y^0 \in H$ (U and H are Hilbert spaces).

Suppose that (3.1) is well-posed, in the sense that for each $y^0 \in H$ and each $v \in L^2(0, T; U)$, (3.1) possesses exactly one solution. Then the *null controllability* problem for (3.1) can be stated as follows:

For each $y^0 \in H$, find $v \in L^2(0, T; U)$ such that the corresponding solution of (3.1) satisfies $y(T) = 0$.

For each system of the form (3.1), the null controllability problem leads to several interesting questions. Among them, let us mention the following:

- First, are there controls v such that $y(T) = 0$?

- Then, if this is the case, which is the *cost* we have to pay to drive y to zero? In other words, which is the minimal $L^2(0, T; U)$ -norm of a control v satisfying this property?
- How can these controls be computed?

The controllability of differential systems is a very relevant area of research and has been the subject of many papers the last years. In particular, the null controllability of linear PDEs was first analyzed in [25, 26, 22, 23, 18, 21]. For semilinear systems, the first contributions have been given in [27, 6, 14].

In this paper, we will try to recall some known results concerning among others the heat equation, the Burgers, Navier-Stokes and Ginzburg-Landau equations, etc. We will also indicate some open questions.

3.2 The classical heat equation. Carleman estimates

In this Section, we will consider the controlled heat equation, complemented with initial and Dirichlet boundary conditions:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = v1_\omega, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y^0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Here, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a nonempty bounded open set, $\omega \subset\subset \Omega$ is a (small) nonempty open subset (1_ω is the characteristic function of ω) and $y^0 \in L^2(\Omega)$. It is well known that, for every $y^0 \in L^2(\Omega)$ and every $v \in L^2(\omega \times (0, T))$, there exists a unique solution y to (3.2), with $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

In this context, the null controllability problem reads:

For each $y^0 \in L^2(\Omega)$, find $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ such that the corresponding solution of (3.2) satisfies

$$y(T) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (3.3)$$

Together with (3.2), for each $\varphi^1 \in L^2(\Omega)$, we can introduce the associated adjoint system

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \varphi = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi^1, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Then, it is well known that the null controllability of (3.2) is in practice equivalent to the following property:

There exists $C > 0$ such that

$$\|\varphi(0)\|_{L^2}^2 \leq C \iint_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt \quad \forall \varphi^1 \in L^2(\Omega). \quad (3.5)$$

This is called the observability of (3.4); it is said that (3.5) is an observability estimate. We thus find that, in order to solve the null controllability problem for (3.2), it suffices to prove (3.5).

The estimates (3.5) are a consequence of the so called global Carleman inequalities. These have been introduced in the context of the controllability of PDEs by Fursikov and Imanuvilov, see [18, 14]. When they are applied to the solutions of the adjoint systems (3.4), they take the form

$$\iint_{\Omega \times (0,T)} \rho^2 |\varphi|^2 dx dt \leq K \iint_{\omega \times (0,T)} \rho^2 |\varphi|^2 dx dt \quad \forall \varphi^1 \in L^2(\Omega), \quad (3.6)$$

where $\rho = \rho(x, t)$ is an appropriate weight, depending on Ω , ω and T and the constant K only depends on Ω and ω . In order to prove (3.6), we have to use a weight ρ decreasing exponentially to zero as $t \rightarrow 0$ and $t \rightarrow T$.

Combining (3.6) and the dissipativity of the backwards heat equation (3.4), it is not difficult to deduce (3.5) for some C only depending on Ω , ω and T .

As a consequence, we have:

Theorem 3.1 *The linear system (3.2) is null controllable. In other words, for each $y^0 \in L^2(\Omega)$, there exists $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ such that the corresponding solution of (3.2) satisfies (3.3). ■*

There are many generalizations and variants of this result that provide the null controllability of other linear PDEs:

- Time-space dependent (sufficiently regular) coefficients can be included, other boundary conditions can be used to complement the PDE, boundary control (instead of distributed control) can be imposed, etc. For a review of recent applications of Carleman inequalities to the controllability of parabolic systems, see [10].
- The controllability of Stokes-like systems can also be analyzed with these techniques. This includes systems of the form

$$y_t - \Delta y + (a \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)b + \nabla p = v1_\omega, \quad \nabla \cdot y = 0, \quad (3.7)$$

where a and b are regular enough; see for instance [11].

- Other linear parabolic (non-scalar) systems can also be considered, etc.

As mentioned above, an interesting question related to theorem 3.1 concerns the cost of null controllability. One has the following result from [13]:

Theorem 3.2 *For each $y^0 \in L^2(\Omega)$, let us set*

$$C(y^0) = \inf \{ \|v\|_{L^2(\omega \times (0,T))} : \text{the solution of (3.2) satisfies } y(T) = 0 \text{ in } \Omega \}.$$

Then we have the following estimate

$$C(y^0) \leq \exp \left(C \left(1 + \frac{1}{T} \right) \right) \|y^0\|_{L^2}, \quad (3.8)$$

where the constant C only depends on Ω and ω . ■

Remark 3.1 Notice that theorem 3.1 ensures the null controllability of (3.2) for any ω and T . This is a consequence of the fact that, in a parabolic equation, the information is transmitted at infinite speed. For instance, this is not the case for the wave equation. For the latter, null controllability does not always hold. Contrarily, the couple (ω, T) has to satisfy appropriate geometrical assumptions; see [23] and [3] for more details. ■

3.3 Positive and negative controllability results for the one-dimensional Burgers equation

In this section, we will be concerned with the null controllability of the following system for the Burgers equation:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = v1_\omega, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.9)$$

Some controllability properties of (3.9) have been studied in [14] (see Chapter 1, Theorems 6.3 and 6.4). There, it is shown that one cannot reach (not even approximately) stationary solutions of (3.9) with large $L^2(0, 1)$ -norm at any time T . In other words, with the help of one control, the solutions of the Burgers equation cannot go anywhere at any time.

For each $y^0 \in L^2(0, 1)$, let us introduce

$$T(y^0) = \inf\{T > 0 : (3.9) \text{ is null controllable at time } T\}.$$

Then, for each $r > 0$, let us define the quantity

$$T^*(r) = \sup\{T(y^0) : \|y^0\|_{L^2} \leq r\}.$$

Our main purpose is to show that $T^*(r) > 0$, with an explicit sharp estimate in terms of r , which in particular implies that (global) null controllability at any positive time does not hold for (3.9).

More precisely, let us set $\phi(r) = (\log \frac{1}{r})^{-1}$. We have the following result from [7]:

Theorem 3.3 *One has*

$$C_0\phi(r) \leq T^*(r) \leq C_1\phi(r) \quad \text{as } r \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

for some positive constants C_0 and C_1 not depending of r .

Remark 3.2 The same estimates hold when the control v acts on system (3.9) through the boundary *only* at $x = 1$ (or only at $x = 0$). When (3.9) is controlled at both points $x = 0$ and $x = 1$, it is unknown whether we still have an estimate from below for $T^*(r)$. ■

Sketch of the proof of theorem 3.3: The proof of the estimate from above in (3.10) can be obtained by solving the null controllability problem for (3.9) via a (more or less) standard fixed point argument, using global Carleman inequalities to estimate the control and energy inequalities to estimate the state and being very careful with the role of T in these inequalities.

More precisely, let us first consider the associated linear system

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + a(x, t)y_x = v1_\omega & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x) & x \in (0, 1), \end{cases} \tag{3.11}$$

where $a \in L^\infty(Q)$ and $\|a\|_\infty \leq 1$.

There exist controls $v \in L^\infty(\omega \times (0, T))$ such that the associated states y satisfy

$$y(x, T) = 0 \text{ in } (0, 1) \tag{3.12}$$

and one has

$$\|v\|_\infty \leq e^{K/T} \|y^0\|_{L^2}, \tag{3.13}$$

for some $K > 0$ independent of y^0 .

In order to prove this, it suffices to adapt the arguments in the previous section, paying special attention to the estimate of the observability constant.

This leads to a local controllability result for (3.9). More precisely, one has the following result, whose proof is sketched at the end of this section:

Lemma 3.4 *Assume that the initial data satisfies*

$$\|y^0\|_\infty \leq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \|y^0\|_{L^2} \leq \frac{1}{2T} e^{-K/T}. \tag{3.14}$$

Then there exist controls v such that the associated states in (3.9) satisfy (3.12).

Let us now finish the proof of the right inequality in (3.10). Let $r > 0$ be given and let us introduce the set

$$Z(r) = \{z : \|z\|_\infty \leq \frac{1}{2}, \quad \|z\|_{L^2} \leq r\}.$$

Starting from $y^0 \in L^2(0, 1)$ with $\|y^0\|_{L^2} \leq r$, we first let evolve the solution freely. From the parabolic regularity of the heat equation, we have that the solution of (3.9) satisfies

$$\|y(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2 t^{-1/4} \|y^0\|_{L^2} \quad \forall t > 0,$$

where C_2 is a constant (see for instance [20]). Accordingly, if we set $T_0 = (2C_2)^4 r^4$, we have $y(T_0) \in Z(r)$.

Then, starting at time $t = T_0$, we can apply to (3.9) a control v such that the associated solution satisfies (3.12) at time $T = T_0 + T_1$, where

$$T_1 = \frac{K}{\log(1/r)}.$$

Indeed, (3.14) is satisfied for $T = T_1$ (since $r \leq (1/2T_1) \exp\{-C^*/T_1\}$). Consequently, from lemma 3.4 we see that such a control exists.

This proves that $T^*(r) \leq C_1\phi(r)$ for some C_1 as $r \rightarrow 0$.

Let us now turn to the proof of the estimate from below in (3.10), that is inspired by the arguments in [1].

We will prove that there exist positive constants C_0 and C'_0 such that, for any sufficiently small $r > 0$, we can find initial data y^0 satisfying $\|y^0\|_{L^2} \leq r$ with the following property: for any state y associated to y^0 , one has

$$|y(x, t)| \geq C'_0 r \text{ for some } x \in (0, 1) \text{ and any } t : 0 < t < C_0\phi(r).$$

Let us set $T = \phi(r)$ and let $\rho_0 \in (0, 1)$ be such that $(0, \rho_0) \cap \omega = \emptyset$. We can suppose that $0 < r < \rho_0$. Let us choose $y^0 \in L^2(0, 1)$ such that $y^0(x) = -r$ for all $x \in (0, \rho_0)$ and let us denote by y an associated solution of (3.9).

Let us introduce the function $Z = Z(x, t)$, with

$$Z(x, t) = \exp \left\{ -\frac{2}{t} \left(1 - e^{-\rho_0^2(\rho_0-x)^3/(\rho_0/2-x)^2} \right) + \frac{1}{\rho_0-x} \right\}. \tag{3.15}$$

Then one has $Z_t - Z_{xx} + ZZ_x \geq 0$.

Let us now set $w(x, t) = Z(x, t) - y(x, t)$. It is immediate that

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + ZZ_x - yy_x \geq 0, & (x, t) \in (0, \rho_0) \times (0, T), \\ w(0, t) \geq 0, \quad w(\rho_0, t) = +\infty, & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = r, & x \in (0, \rho_0) \end{cases} \tag{3.16}$$

and, consequently, $w^-(x, t) \equiv 0$. Indeed, let us multiply the differential equation in (3.16) by $-w^-$ and let us integrate in $(0, \rho_0)$. Since w^- vanishes at $x = 0$ and $x = \rho_0$, after some manipulation we find that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\rho_0} |w^-|^2 dx + \int_0^{\rho_0} |w_x^-|^2 dx \\ & = \int_0^{\rho_0} w^- (ZZ_x - yy_x) dx \leq C \int_0^{\rho_0} |w^-|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Hence,

$$y \leq Z \text{ in } (0, \rho_0) \times (0, T). \tag{3.18}$$

Let us set $\rho_1 = \rho_0/2$ and let us introduce the solution u of the auxiliary system

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + uu_x = 0, & (x, t) \in (0, \rho_1) \times (0, T), \\ u(0, t) = Z(\rho_1, t), \quad u(\rho_1, t) = Z(\rho_1, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = -\tilde{r}(x), & x \in (0, \rho_1), \end{cases} \tag{3.19}$$

where \tilde{r} is any regular function satisfying the following: $\tilde{r}(0) = \tilde{r}(\rho_1) = 0$; $\tilde{r}(x) = r$ for all $x \in (\delta\rho_1, (1-\delta)\rho_1)$ and some $\delta \in (0, 1/4)$; $-r \leq -\tilde{r}(x) \leq 0$;

$$|\tilde{r}_x| \leq Cr \text{ and } |\tilde{r}_{xx}| \leq C \text{ in } (0, \rho_1), \tag{3.20}$$

where $C = C(\rho_1)$ is independent of r . Taking into account (3.18) and that $u_x, y \in L^\infty((0, \rho_1) \times (0, T))$ (see lemma 3.5 below), a standard application of Gronwall's lemma shows that

$$y \leq u \text{ in } (0, \rho_1) \times (0, T). \tag{3.21}$$

We will prove that, for some appropriate choices of C_0 and C'_0 , $u(\rho_1/2, t)$ remains below $-C'_0 r$ for any time $t < C_0 \phi(r)$. This, together with (3.21), will prove theorem 3.3.

We will need the following lemma, whose proof can be found in [7]:

Lemma 3.5 *One has*

$$|u| \leq Cr \text{ and } |u_x| \leq Cr^{1/2} \text{ in } (0, \rho_1) \times (0, \phi(r)), \tag{3.22}$$

where C is independent of r .

A consequence of (3.22) is that $u_t - u_{xx} \leq C^* r^{3/2}$ in $(0, \rho_1) \times (0, \phi(r))$ for some $C^* > 0$. Let us consider the functions p and q , given by $p(t) = C^* r^{3/2} t - r$ and $q(x, t) = c(e^{-(x-(\rho_1/4))^2/4t} + e^{-(x-3(\rho_1/4))^2/4t})$. It is then clear that $b = u - p - q$ satisfies

$$\begin{aligned} b_t - b_{xx} &\leq 0 \text{ in } (\rho_1/4, 3\rho_1/4) \times (0, \phi(r)), \\ b(\rho_1/4, t) &\leq Z(\rho_1, t) - C^* r^{3/2} t + r - c(1 + e^{-\rho_1^2/(16t)}) \text{ for } t \in (0, \phi(r)), \\ b(3\rho_1/4, t) &\leq Z(\rho_1, t) - C^* r^{3/2} t + r - c(1 + e^{-\rho_1^2/(16t)}) \text{ for } t \in (0, \phi(r)), \\ b(x, 0) &= 0 \text{ for } x \in (\rho_1/4, 3\rho_1/4). \end{aligned}$$

Obviously, in the definition of q , the constant c can be chosen large enough to have $Z(\rho_1, t) - C^* r^{3/2} t + r - c(1 + e^{-\rho_1^2/(16t)}) < 0$ for any $t \in (0, \phi(r))$. If this is the case, we get $u \leq p + q$ and, in particular,

$$u(\rho_1/2, t) \leq (p + q)(\rho_1/2, t) = 2ce^{-\rho_1^2/(64t)} + C^* r^{3/2} t - r.$$

Therefore, we see that there exist C_0 and C'_0 such that $u(\rho_1/2, t) < -C'_0 r$ for any $t \in (0, C_0 \phi(r))$.

This proves (3.10) and, consequently, ends the proof of theorem 3.3. ■

Sketch of the proof of lemma 3.4: The proof of this lemma is standard but will be given here for completeness.

Let us introduce the fixed-point mapping $\mathcal{A} : L^2(Q) \mapsto L^2(Q)$ given by

$$\mathcal{A}(z) = y,$$

where y is the solution of

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + z(x, t)y_x = v1_\omega & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & t \in (0, T), \\ y(x, 0) = y^0(x) & x \in (0, 1), \end{cases} \tag{3.23}$$

for a control v such that (3.13) holds and $y(T) = 0$ in Ω .

Let $K := \{z \in L^2(Q) : \|z\|_\infty \leq 1\}$, which is a convex and closed set in $L^2(Q)$. We are going to see that \mathcal{A} fulfills the hypothesis of Kakutani's fixed-point theorem for this K .

- An application of the classical maximum principle yields

$$\|y\|_\infty \leq T\|v\|_\infty + \|y^0\|_\infty.$$

Now, from (3.13) and conditions (3.14), we deduce

$$\|y\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Consequently, \mathcal{A} maps K into K .

- For any $z \in K$, $\mathcal{A}(z)$ is a closed and convex subset of $L^2(Q)$. This is very easy to check so the proof is left to the reader.

- Let us finally prove that \mathcal{A} is upper semicontinuous in $L^2(Q)$. Let $\{z_n\} \subset K$ such that $z_n \rightarrow z$ in $L^2(Q)$ and $y_n \rightarrow y$ in $L^2(Q)$, where y_n (resp. y) is the solution of (3.23) associated to z_n (resp. y). Then, we can extract a subsequence $\{z_{n'}\} \subset \{z_n\}$ such that

$$z_{n'} \rightharpoonup z \text{ weakly-}^* \text{ in } L^\infty(Q).$$

From the classical regularity estimates for the linear heat equation, we have:

$$y_{n'} \rightharpoonup y \text{ weakly in } Y_\varepsilon := L^2(\varepsilon, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(\varepsilon, T; L^2(\Omega))$$

for any small $\varepsilon > 0$. Observing that Y_ε is compactly imbedded in the space $L^2(\varepsilon, T; H_0^1(\Omega))$ and $z_n y_{n,x}$ is uniformly bounded in $L^2(Q)$, we deduce that $z_{n'} y_{n',x}$ converges weakly in $L^2(Q)$ to $z y_x$. Consequently, y satisfies system (3.23). Now, it is readily seen that $y \in \mathcal{A}(z)$.

This ends the proof. ■

3.4 Other more realistic nonlinear equations and systems

There are a lot of more realistic nonlinear equations and systems from mechanics that can also be considered in this context. First, we have the well known Navier-Stokes equations:

$$\begin{cases} y_t + (y \cdot \nabla)y - \Delta y + \nabla p = v1_\omega, & \nabla \cdot y = 0, & (x, t) \in Q, \\ y = 0, & & (x, t) \in \Sigma, \\ y(x, 0) = y^0(x), & & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.24)$$

Here and below, Q and Σ stand for the sets

$$Q = \Omega \times (0, T) \text{ and } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T),$$

respectively.

To our knowledge, the best results concerning the controllability of this system have been given in [11] and [12]. The main ideas come from [15, 19]. Essentially, these results establish the local exact controllability of the solutions of (3.24) to uncontrolled trajectories (this is, more or less, the analog of the *positive* controllability result in theorem 3.3).

Similar results have been given in [16] for the Boussinesq equations

$$\begin{cases} y_t + (y \cdot \nabla)y - \Delta y + \nabla p = \theta k + v1_\omega, & \nabla \cdot y = 0, \\ \theta_t + y \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = u1_\omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

complemented with initial and Dirichlet boundary conditions for y and θ (see [12] for a controllability result with a reduced number of scalar controls).

Another system is considered in [9]:

$$\begin{cases} y_t + (y \cdot \nabla)y - \Delta y + \nabla p = \nabla \times w + v1_\omega, & \nabla \cdot y = 0, \\ w_t + (y \cdot \nabla)w - \Delta w - \nabla(\nabla \cdot w) = \nabla \times y + u1_\omega. \end{cases} \quad (3.26)$$

These equations govern the behavior of a micropolar fluid, see [24]. As usual, y and p stand for the velocity field and pressure and w is the microscopic velocity of rotation of the fluid particles. Again, the local exact controllability of the solutions to the trajectories is established.

Let us also mention [2, 17], where the controllability of the MHD and other related equations has been analyzed.

Frequently, the proof of the controllability results for these systems follows the steps of the proof of the first part of theorem 3.3. This is the scheme:

- First, consider a linearized similar problem and the associated adjoint system and rewrite the original controllability problem in terms of a fixed point equation.
- Then, prove a global Carleman inequality and an observability estimate for the latter. This provides a controllability result for the linearized problem.
- Prove appropriate estimates for the control and the state (this needs some kind of *smallness* of the data); prove an appropriate compactness property of the state and deduce that there exists at least one fixed point.

An alternative method is furnished by the implicit function theorem. This corresponds to a general strategy introduced in [14]:

- First, rewrite the original controllability problem as a nonlinear equation in a space of admissible “state-control” pairs.
- Then, prove an appropriate global Carleman inequality and a regularity result and deduce that the linearized equation possesses at least one solution. Again, this provides a controllability result for a related linear problem.

- Check that the hypotheses of a suitable implicit function theorem are satisfied and deduce a local result.

At present, no negative result is known to hold for these nonlinear systems (apart from the one-dimensional Burgers equation).

3.5 Some remarks on the Ginzburg-Landau equation

We end this paper with a brief section devoted to the controllability of the Ginzburg-Landau equation. The system under consideration is the following:

$$\begin{cases} m_t - \alpha m \times m_t - \Delta m + \frac{|m|^2 - 1}{\varepsilon} m = v1_\omega, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial m}{\partial n} = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ m(0) = m^0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.27}$$

Here, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a regular bounded open set, $m = (m_1, m_2, m_3)$ is the magnetization field, $\varepsilon > 0$ is a parameter, $\alpha \geq 0$ is a physical constant and it is assumed that m^0 is a measurable initial field satisfying $|m^0| \equiv 1$.

In this framework, the interesting controllability problem is the following:

Given a stationary solution $m^ = m^*(x)$ and an initial field $m^0 = m^0(x)$ with $|m^0| \equiv 1$, find a control $v \in L^2(\omega \times (0, T))^3$ and an associated solution of (3.27) such that*

$$m(T) = m^* \text{ in } \Omega.$$

By introducing the new variable y , with $m = m^* + y$, this can be rewritten in terms of a null controllability problem. Indeed, let us consider the system

$$\begin{cases} y_t - \alpha(y + m^*) \times y_t - \Delta y + G_\varepsilon(x, y)y = v1_\omega, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ y(0) = m^0(x) - m^*(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.28}$$

where

$$G_\varepsilon(x, y)y \equiv \frac{|m^*(x) + y|^2 - 1}{\varepsilon} (m^*(x) + y) - \frac{|m^*(x)|^2 - 1}{\varepsilon} m^*(x).$$

Then the problem is:

For any given $m^ = m^*(x)$ and an initial field m^0 with $|m^0| \equiv 1$, find a control $v \in L^2(\omega \times (0, T))^3$ and an associated solution of (3.28) such that*

$$y(T) = 0 \text{ in } \Omega.$$

For the moment, we can give answers to this problem only when $\alpha = 0$; this will appear in [5]. It is reasonable to expect similar (positive) controllability results when α is sufficiently small, but at present this is an open question.

Remark 3.3 For any fixed v , the solutions of (3.27) can be shown to converge in some sense as $\varepsilon \rightarrow 0$ to a solution of the so called Landau-Lifshitz equation, see for instance [4]:

$$\alpha m_t = m \times (\Delta m - m_t + v1_\omega), \quad |m| = 1. \quad (3.29)$$

Consequently, it would be very interesting to be able to solve the previous problem with controls v uniformly bounded with respect to ε . However, this is apparently a difficult question. ■

Acknowledgements: The author has been partially supported by D.G.I. (Spain), Grant BFM2003-06446.

References

- [1] S. ANITA, D. TATARU, *Null controllability for the dissipative semilinear heat equation*, Appl. Math. Optim. 46 (2002), 97–105.
- [2] V. BARBU, T. HAVARNEANU, C. POPA, S.S. SRITHARAN, *Exact controllability for the magnetohydrodynamic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003), 732–783.
- [3] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Cont. Optim., **30** (1992), 1024–1065.
- [4] M. BERTSCH, P. PODIO-GUIDUGLI, V. VALENTE, *On the dynamics of deformable ferromagnets. I. Global weak solutions for soft ferromagnets at rest*, Ann. Mat. Pura Appl., 179 (2001), 331–360.
- [5] J.L. BOLDRINI, E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, *Some controllability results for the Ginzburg-Landau equation*, in preparation.
- [6] C. FABRE, J.-P. PUEL, E. ZUAZUA, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125 A** (1995), 31–61.
- [7] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, *Remarks on the null controllability of the Burgers equation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), 229–232.
- [8] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, *On the null controllability of the Burgers equation*, in preparation.
- [9] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, *Local exact controllability of micropolar fluids*, to appear in J. Math. Fluid Mech.

- [10] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, to appear in SIAM J. Control Optim.
- [11] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, O. YU. IMANUVILOV, J.-P. PUEL, *Local exact controllability to the trajectories of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl. 83, 12 (2004), p. 1501–1542.
- [12] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, O. YU. IMANUVILOV, J.-P. PUEL, *Some controllability results for the N -dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with $N-1$ scalar controls*, to appear in SIAM J. Control and Optim.
- [13] E. FERNÁNDEZ-CARA, E. ZUAZUA, *The cost of approximate controllability for heat equations: The linear case*, Advances Diff. Eqs., Vol. 5 (4–6), April–June 2000, p. 465–514.
- [14] A. V. FURSIKOV, O. YU. IMANUVILOV, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes #34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [15] A. V. FURSIKOV, O. YU. IMANUVILOV, *Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk 54, no. 3(327), 93–146; translation in Russian Math. Surveys 54 (1999), no. 3, 565–618.
- [16] S. GUERRERO, *Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system*, Annales IHP, Anal. non linéaire, 23 (2006), 29–61.
- [17] T. HAVARNEANU, C. POPA, S.S. SRITHARAN, *Exact internal controllability for the magnetohydrodynamic equations in multi-connected domains*, to appear.
- [18] O. YU. IMANUVILOV, *Boundary controllability of parabolic equations*, Russian Acad. Sci. Sb. Math., 186 (1995), 109–132 (in Russian).
- [19] O. YU. IMANUVILOV, *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 6 (2001), 39–72.
- [20] O. A. LADYZENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URALTZEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Trans. Math. Monograph: Moscow, 1967; Vol. 23.
- [21] G. Lebeau and L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. P.D.E., 20 (1995), 335–356.
- [22] J.-L. LIONS, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Review, 30 (1988), 1–68.
- [23] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité Exacte, Stabilisation et Perturbations de Systèmes Distribués, Tomes 1 & 2*, Masson, RMA 8 & 9, Paris 1988.

- [24] G. LUKASZEWICZ, *Micropolar fluids. Theory and applications. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [25] D.L. RUSSELL, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Appl. Math. 52 (1973), 189–221.
- [26] D. L. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions*, SIAM Review 20 (1978), 639–739.
- [27] E. ZUAZUA, *Exact boundary controllability for the semilinear wave equation*, in “Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications”, Vol. X (p. 357–391), H. Brezis and J.L. Lions eds., Pitman, New York 1991.

4 Unique Continuation for Stochastic Partial Differential Equations and Its Applications

Xu Zhang

School of Mathematics, Sichuan University, China; and
 Dep. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de
 Madrid, Spain

xu.zhang@uam.es

4.1 Introduction

Unique continuation property is an important problem not only in partial differential equations itself, but also in some application problems such as controllability, optimal control, inverse problems and so on. Numerous studies on unique continuation for deterministic partial differential equations can be found in [1] and the rich references cited therein. It would be quite interesting to extend the deterministic unique continuation theorems to the stochastic ones, but there are many things which remain to be done, and some of which seem to be challenging.

There are two classical tools in the study of the unique continuation for deterministic partial differential equations. One is Holmgren-type uniqueness theorem, another is Carleman-type estimate. Note however that the solution of a stochastic equation is generally non-analytic in time even if the coefficients of the equation are constants. Therefore, one cannot expect a Holmgren-type uniqueness theorem for the unique continuation for stochastic equations unless some very special cases. On the other hand, the usual approach to employ Carleman-type estimate for the unique continuation needs to localize the problem. The difficulty for the stochastic situation consists in the fact that one cannot simply localize the problem as usual because the usual localization

technique may change the adaptedness of solutions, which is a key feature in the stochastic setting.

In this paper, we shall summarize a recent result on the unique continuation property for stochastic parabolic equations, which is based on a key stochastic version of Carleman-type estimate and a suitable “partial Holmgren coordinate transform”.

The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we recall the classical unique continuation property for deterministic parabolic equations and the main ingredients for its proof. In Section 3, we state our main unique continuation theorem for stochastic parabolic equations. In Sections 4, we outline the key points in the proof of our main theorem. In the last section, we present a list of open problems in the field of stochastic unique continuation.

We refer to [4] for a detailed proof of the result in this paper and other related results.

4.2 Review on unique continuation for deterministic parabolic equations

Let $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) be a given bounded domain with a C^2 boundary ∂G , and $G_0 \neq G$ be a given subdomain of G . Put $Q \triangleq (0, T) \times G$ and $Q_0 \triangleq (0, T) \times G_0$. Throughout this paper, we assume that $a^{ij} \in W^{1,\infty}(0, T; W_{loc}^{2,\infty}(G))$ satisfy $a^{ij} = a^{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) and for any open subset G_1 of G , there is a constant $s_0 = s_0(G_1) > 0$ so that

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi^i \xi^j \geq s_0 |\xi|^2, \quad \forall (t, x, \xi) \equiv (t, x, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \in (0, T) \times G_1 \times \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

The following unique continuation result for deterministic parabolic equations is classical (see [2], for example):

Theorem 4.1 *Any weak solution $y \in C([0, T]; L_{loc}^2(G)) \cap L^2(0, T; H_{loc}^1(G))$ of*

$$\left| y_t - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} y_{x_i})_{x_j} \right| \leq C(|y| + |\nabla y|), \quad \text{in } Q \tag{4.2}$$

vanishes identically in Q provided $y = 0$ in Q_0 .

The proof of Theorem 4.1 is based on the following two tools:

- **Carleman estimate for deterministic parabolic operators:**

Lemma 4.2 *Let K be a bounded subdomain of Q . Then there exist constants $C, \lambda, \tau_0 > 0$ such that for all $\tau \geq \tau_0$ and $u \in C_0^\infty(K)$, it holds*

$$\int_K e^{2\tau\phi} [\tau^3 |u|^2 + \tau |\nabla u|^2] dt dx \leq C \int_K e^{2\tau\phi} \left| u_t - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} \right|^2 dt dx, \tag{4.3}$$

where

$$\phi = \phi(t, x_1, \dots, x_n) = e^{-\lambda x_n}, \tag{4.4}$$

and $\lambda > 0$ is a suitable (large) constant.

• **Holmgren coordinate transform:**

The transform is defined as follows

$$\begin{cases} \tilde{t} = t, \\ \tilde{x}' = x', \\ \tilde{x}_n = f(t, x) \triangleq \frac{(2t-T)^2}{T^2} + |x'|^2 + x_n, \end{cases} \tag{4.5}$$

where $x = (x', x_n)$.

The fundamental inequality (4.3) in Lemma 4.2 and Transform (4.5) allow to propagate the zero set of any weak solution y to (4.2) from $x_n = 0$ to some neighborhood of this hyperplane. We remark that, the role of t and x' is completely symmetric in the above lemma and transform. As we shall see, this is the key obstacle to extend Theorem 4.1 to the stochastic situation.

4.3 Unique continuation for stochastic parabolic equations

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ be a complete filtered probability space on which a 1 dimensional standard Brownian motion $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ is defined. Let H be a Fréchet space. We denote by $L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ the Fréchet space consisting of all H -valued $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapted processes $X(\cdot)$ such that $\mathbb{E}(|X(\cdot)|^2_{L^2(0, T; H)}) < \infty$, with the canonical norms; by $L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ the Fréchet space consisting of all H -valued $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapted bounded processes, with the canonical norms; and by $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([0, T]; H))$ the Fréchet space consisting of all H -valued $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapted continuous processes $X(\cdot)$ such that $\mathbb{E}(|X(\cdot)|^2_{C([0, T]; H)}) < \infty$, with the canonical norms.

We consider the following stochastic parabolic equation:

$$dz - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} z_{x_i})_{x_j} dt = [\langle a, \nabla z \rangle + bz] dt + cz dw(t) \quad \text{in } Q, \quad P - \text{a.s.} \tag{4.6}$$

Here a, b and c are suitable coefficients, and we denote the scalar product in \mathbb{R}^n by $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

The main result of this paper is stated as follows:

Theorem 4.3 *Let*

$$a \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; L^\infty_{loc}(G; \mathbb{R}^n)), \quad b \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; L^\infty_{loc}(G)), \quad c \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; W^{1,\infty}_{loc}(G)).$$

Then any weak solution $z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2_{loc}(G))) \cap L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H^1_{loc}(G))$ of (4.6) vanishes identically in $Q \times \Omega$, P -a.s. provided $z = 0$ in $Q_0 \times \Omega$, P -a.s.

The above result is a unique continuation theorem for stochastic parabolic equations. There are numerous references on the unique continuation for deterministic parabolic equations. However, to my best acknowledge, very little is known for its stochastic counterpart.

Remark 4.1 *In a previous joint paper with S. Tang ([3]), we showed a quantitative version of Theorem 4.3 under some stronger conditions, i.e., the following are assumed:*

$$a \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; L^\infty(G; \mathbb{R}^n)), \quad b \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; L^\infty(G)), \quad c \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; W^{1,\infty}(G)), \\ z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H^1_0(G)).$$

In our equation (4.6), for the space variable x , we may proceed as in the classical argument. However, for the time variable t , due to the adaptedness requirement, we will have to treat it separately.

4.4 Key points in the proof of Theorem 4.3

We now show the key points in the proof of our main result, Theorem 4.3.

• **Carleman estimate for stochastic parabolic operators:**

For any nonnegative and nonzero function $\psi \in C^3(\uparrow G)$, any $k \geq 2$, and any (large) parameters $\lambda > 1$ and $\mu > 1$, put

$$\ell = \lambda\alpha, \quad \alpha(t, x) = \frac{e^{\mu\psi(x)} - e^{2\mu|\psi|_{C(\uparrow G)}}}{t^k(T-t)^k}, \quad \varphi(t, x) = \frac{e^{\mu\psi(x)}}{t^k(T-t)^k}. \quad (4.7)$$

Based on a key exponentially weighted energy identity for a stochastic parabolic-like operator, established in [3], we have a crucial Carleman-type estimate for stochastic parabolic operators as follows:

Theorem 4.4 *Let $\psi \in C^3(\uparrow G)$ satisfy $\min_{x \in G} |\nabla\psi(x)| > 0$. Then there is some $\mu_0 > 0$ such that for all $\mu \geq \mu_0$, one can find two constants $C = C(\mu) > 0$ and $\lambda_1 = \lambda_1(\mu)$ so that for all $u \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C([0, T]; L^2(G))) \cap L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H^2_0(G))$, $f \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; L^2(G))$ and $g \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H^1(G))$ with*

$$du - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}u_{x_i})_{x_j} dt = f dt + g dw(t) \quad \text{in } Q, \quad P - \text{a.s.},$$

and all $\lambda \geq \lambda_1$, it holds

$$\lambda^3 \mu^4 \mathbb{E} \int_Q \varphi^3 \theta^2 u^2 dx dt + \lambda \mu^2 \mathbb{E} \int_Q \varphi \theta^2 |\nabla u|^2 dx dt \\ \leq C \left[\mathbb{E} \int_Q \theta^2 f^2 dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 \sum_{i,j=1}^n b^{ij} g_i g_j dx dt + \mathbb{E} \int_Q \theta^2 A g^2 dx dt \right], \quad (4.8)$$

where $A \triangleq - \sum_{i,j=1}^n (b^{ij} \ell_i \ell_j - b^{ij} \ell_i + b^{ij} \ell_{ij})$.

We remark that the time variable t in (4.8) is treated globally. This is the key feature of our stochastic Carleman estimate.

• **Selection of weighted function:**

In the proof of Theorem 4.3, we choose ψ as

$$\psi = \psi(x) = 1 - x_n.$$

In this way, α in (4.7) plays a similar role as that of ϕ in (4.4).

• **Partial Holmgren coordinate transform:**

This transform is defined as follows

$$\begin{cases} \tilde{x}' = x', \\ \tilde{x}_n = |x'|^2 + x_n. \end{cases} \tag{4.9}$$

Note that, unlike (4.5), the time variable t does not appear in (4.9).

4.5 Open problems

The field of stochastic unique continuation is full of open problems! In what follows, we only present a very limited list of these ones.

• **Strong unique continuation for stochastic parabolic equations.**

Does the conclusion in Theorem 4.3 remain true under a weaker assumption in which the condition “ $z = 0$ in $Q_0 \times \Omega$, P -a.s.” is replaced by

$$\mathbb{E} \int_{|t-t_0|+|x-x_0|^2 < R^2} z^2 dxdt = O(R^N)$$

for all $N > 0$, as $R \rightarrow 0$, for some point $(t_0, x_0) \in Q$?

• **Unique continuation for stochastic hyperbolic equations, or even more general stochastic partial differential equations.** Almost nothing is known in this respect. We refer to [5] for some preliminary recent result in this respect for the stochastic wave equation.

• **Unique continuation for backward stochastic partial differential equations, or even forward-backward stochastic partial differential equations.** Nothing is known in this respect.

• **Application of unique continuation properties of stochastic partial differential equations, backward stochastic partial differential equations and forward-backward stochastic partial differential equations.** Almost nothing has been done in this respect. Nevertheless, applications to control and inverse problems can be expected, but remains to be done. Applications to some finance problem is also possible.

Acknowledgements: The author has been partially supported by FANEDD of China (Project No: 200119), the Program for New Century Excellent Talents in University of China, the NSF of China under grant 10371084.

References

- [1] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators (III–IV)*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [2] J.-C. Saut, B. Scheurer, *Unique continuation for some evolution equations*, *J. Differential Equations*, 66 (1987), 118–139.
- [3] S. Tang, X. Zhang, *Null controllability for forward and backward stochastic parabolic equations*, in submission.
- [4] X. Zhang, *Unique continuation for stochastic parabolic equations*, in submission.
- [5] X. Zhang, Work in progress.

**SÉPTIMO PREMIO SĒMA DE
“DIVULGACIÓN DE LA MATEMÁTICA APLICADA”**
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

PREÁMBULO

La Sociedad Española de Matemática Aplicada (SĒMA), en cumplimiento de su objetivo de contribuir al desarrollo en nuestro país de las Matemáticas y sus aplicaciones, consciente del notable desarrollo que las Matemáticas están experimentando, del incremento de su influencia sobre todos los aspectos de la vida en las sociedades desarrolladas, de la conveniencia de promover el interés de los investigadores por este punto de vista sin por ello ocultar sus peligros o dilemas, de la necesidad no menos acuciante de estimular el interés del público por la cultura científica y, finalmente continuando con una tradición honrosa y habitual tanto en las Artes como en las Ciencias, convoca el “Séptimo Premio SĒMA de Divulgación de la Matemática aplicada”, según las bases que se adjuntan.

SĒMA busca ante todo promover la divulgación de las Matemáticas, su relevancia y su eficacia. Dada la enorme variedad de intereses aplicados de las Matemáticas, las Bases del concurso pretenden dar preferencia a los temas que tradicionalmente han estado ligados a SĒMA de una u otra manera. Muy en especial, deben ser mencionados el análisis teórico y numérico, el control y los aspectos computacionales de sistemas que permiten modelizar fenómenos con origen en otras Ciencias.

BASES DE LA CONVOCATORIA

1. La Sociedad Española de Matemática aplicada (SĒMA) convoca el “Premio SĒMA a la Divulgación de la Matemática aplicada”, que se concederá anualmente.

2. Son posibles candidatos todos los ciudadanos del mundo que sometan un texto de acuerdo con los puntos 4 y 9 de estas Bases.

3. El Premio está destinado a promover los valores de la belleza, relevancia y eficacia de las Matemáticas como instrumento indispensable del funcionamiento de la sociedad y cultura modernas. El Premio tomará en especial consideración los temas que incidan en la realidad de la Matemática aplicada en la sociedad española.

4. Los candidatos habrán de presentar dentro del plazo fijado en el punto 10 un texto original de la longitud que deseen y con el formato que juzguen conveniente. Los requisitos básicos son que el texto contribuya a la divulgación de algún aspecto relevante de la Matemática Aplicada y que su contenido esté

pensado para un público no exclusivamente formado por profesionales de las Matemáticas. Los trabajos serán presentados bajo un seudónimo, incluyendo con el mismo un sobre cerrado conteniendo el nombre y la dirección del autor. El autor no podrá formar parte del Comité Científico que habrá de juzgar los trabajos por lo que en caso de ser propuesto para el mismo, deberá indicar al presidente su incompatibilidad.

5. Los méritos serán juzgados por un Comité Científico de cinco miembros, personalidades de probado prestigio en la Ciencia Matemática y la cultura científica, nombrado por el Consejo Ejecutivo de la Sociedad. Este Comité tendrá su propio reglamento de funcionamiento. En todo caso, será presidido por el Presidente de la Sociedad u otro miembro del Consejo Ejecutivo en quien delegue, no pudiendo ser miembros del Comité Científico más de dos miembros del Consejo Ejecutivo.

6. El galardonado con el Premio recibirá de la Sociedad un Diploma acreditativo y una cuantía de 1500 euros. Además quedará eximido del pago de las cuotas como socio de SĒMA correspondientes a los años 2007 y 2008. En caso de no ser miembro de SĒMA, pasaría automáticamente a serlo.

7. El fallo del concurso es irrevocable. El Comité acompañará la concesión del Premio de una exposición de los méritos hallados en los candidatos galardonados. Por lo demás, las deliberaciones y resoluciones del Comité serán regidas por su reglamento.

8. La Sociedad publicará la obra premiada en su Boletín.

9. Si el texto original no estuviera escrito en castellano, el jurado podrá solicitar al autor su traducción si así lo estimase necesario.

10. La fecha límite de presentación de originales es el 30 de abril de 2006.

11. La documentación, compuesta del texto por quintuplicado, su traducción si ha lugar, así como los datos identificativos, debe ser dirigida a

Prof. Juan I. Montijano
Premio SĒMA Divulgación de la Matemática Aplicada 2006
Departamento de Matemática Aplicada
Edificio de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 - Zaragoza

12. El Premio será fallado antes del 31 de agosto de 2006 y será entregado con ocasión de la Asamblea anual de la Sociedad, en el marco de la XII Escuela Jacques-Louis Lions Hispano Francesa sobre simulación numérica en Física e Ingeniería, que tendrá lugar en Castro Urdiales, Cantabria, entre el 18 y el 22 de septiembre de 2006.

Zaragoza, a 18 de enero de 2006

NOVENO PREMIO SĒMA AL JOVEN INVESTIGADOR
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

PREÁMBULO

La Sociedad Española de Matemática Aplicada (SĒMA), en cumplimiento de su objetivo de contribuir al desarrollo en nuestro país de las Matemáticas y sus aplicaciones y, más en concreto, de promover y estimular la investigación y procurar medios para efectuarla, consciente del notable desarrollo que las Matemáticas están experimentando y de la necesidad de promover el interés de las jóvenes generaciones por la tarea de la creación científica, convencida del papel positivo que el aprecio de la comunidad juega en la vida científica de los investigadores y siguiendo con una tradición honrosa y habitual tanto en las Artes como en las Ciencias, convoca el “Noveno Premio SĒMA al Joven Investigador”, según las bases que se adjuntan.

BASES GENERALES

1. La Sociedad Española de Matemática aplicada (SĒMA) convoca el “Premio SĒMA al Joven Investigador”, que se concederá anualmente.
2. Son posibles candidatos todos los investigadores españoles que, a la fecha del límite de presentación de candidaturas, no rebasen la edad de 33 años. También pueden serlo aquellos investigadores de otras nacionalidades que tengan un puesto de trabajo permanente en una Universidad o Centro de investigación español y cumplan la condición de edad. No pueden concurrir al Premio candidatos galardonados en convocatorias precedentes.
3. El Premio está destinado a promover la excelencia en el trabajo matemático original en todas las ramas de las Matemáticas que tienen una componente aplicada. Su objetivo es premiar la contribución personal del candidato. El límite de edad fijado pretende señalar candidatos que hayan tenido tiempo de desarrollar su creatividad matemática independiente tras la etapa formativa correspondiente a la Tesis Doctoral. El Premio tiene así por objetivo abrirles el camino de su periodo de madurez y reconocer al mismo tiempo sus capacidades demostradas.
4. Los méritos serán juzgados por un Comité Científico de cinco miembros, nombrado por el Consejo Ejecutivo de la Sociedad entre investigadores de probado prestigio. Este Comité tendrá su propio reglamento de funcionamiento. En todo caso, será presidido por el Presidente de la Sociedad u otro miembro del Consejo Ejecutivo en quien delegue, no pudiendo ser miembros del Comité Científico más de dos miembros del Consejo Ejecutivo.
5. Los candidatos habrán de presentar, dentro del plazo que se cite, una Memoria exponiendo la trayectoria vital y los méritos que concurren, un curriculum normalizado, así como otros documentos que puedan ser pertinentes para acreditar sus contribuciones originales a las Matemáticas y sus aplicaciones. Las candidaturas pueden ser presentadas también por otros investigadores. El

Comité se reserva el derecho de recabar la información complementaria necesaria del candidato o de quien le haya presentado

6. El galardonado con el Premio recibirá de la Sociedad un Diploma acreditativo y una cuantía que será establecida en cada convocatoria por la Sociedad.

7. La Sociedad requerirá al candidato galardonado un resumen de su trabajo de investigación escrito en estilo divulgativo, con una extensión a convenir entre las 6 y las 20 páginas para su publicación en el Boletín de la Sociedad. Este resumen puede formar parte de la Memoria mencionada en el punto 5.

8. El fallo del concurso es irrevocable. El Comité acompañará la concesión del Premio de una exposición de los méritos hallados en el candidato galardonado. Por lo demás, las deliberaciones y resoluciones del Comité serán regidas por su reglamento.

BASES PARTICULARES DE LA CONVOCATORIA DE 2006

9. La fecha límite de presentación de candidaturas es el 30 de abril de 2006. Podrán concursar por tanto las personas que hayan nacido después del 30 de abril de 1972.

10. La documentación presentada constará de la Memoria y el curriculum citados, así como copia de las cinco contribuciones más importantes del investigador a las Matemáticas y sus aplicaciones, todo ello por quintuplicado.

Se recomienda a los candidatos que presenten su propia candidatura que la Memoria se adecúe o en su caso contenga el resumen del trabajo de investigación referido en el apartado 7.

11. La documentación debe ser dirigida a

Prof. Juan I. Montijano
Premio SēMA Joven Investigador 2006
Departamento de Matemática Aplicada
Edificio de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 - Zaragoza

12. La cuantía actual del Premio es de 1500 euros. El Premio es indivisible. Además, el candidato galardonado quedará eximido del pago de las cuotas como socio de SēMA correspondientes a los años 2007 y 2008. En caso de no ser miembro de SēMA, pasaría automáticamente a serlo.

13. El Premio será fallado antes del 31 de agosto de 2006 y será entregado con ocasión de la Asamblea anual de la Sociedad, en el marco de la XII Escuela Jacques-Louis Lions Hispano Francesa sobre simulación numérica en Física e Ingeniería, que tendrá lugar en Castro Urdiales, Cantabria, entre el 18 y el 22 de septiembre de 2006.

Zaragoza, a 18 de enero de 2006

Direcciones útiles

Consejo Ejecutivo de SēMA

Presidente:

Juan Ignacio Montijano. (monti@unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Facultad de Ciencias. Edificio de Matemáticas. Ciudad Universitaria s/n. 50016 Zaragoza. *Tel:* 976 761 120.

Secretario:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Tesorera:

María Pilar Laburta Santamaría. (laburta@unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Pol. Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. *Tel:* 976 762 006.

Vocales:

Rafael Bru García. (rbru@mat.upv.es)

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Agrónomos. Univ. Politécnica de Valencia. Camí de Vera, s/n. 46022 Valencia. *Tel:* 963 879 669.

José Antonio Carrillo de la Plata. (carrillo@mat.uab.es)

Dpto. de Matemáticas. Univ. Autónoma de Barcelona. Edifici C. 08193 Bellaterra (Barcelona). *Tel:* 93 581 2413.

Inmaculada Higuera Sanz. (higuera@unavarra.es).

Dpto. de Matemática e Informática Univ. Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. *Tel:* 948 169 526. 31006 Pamplona.

Pablo Pedregal Tercero. (Pablo.Pedregal@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real.

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

José Javier Valdés García. (valdes@orion.ciencias.uniovi.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. de Oviedo. Avda. de Calvo Sotelo, s/n. 33007 Oviedo. *Tel:* 985 103 340.

Enrique Zuazua Iriondo. (enrique.zuazua@uam.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

Comité Científico del Boletín de SēMA

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Alfredo Bermúdez de Castro. (mabermud@usc.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus Univ.. 15706 Santiago (A Coruña) *Tel:* 981 563 100.

Eduardo Casas Rentería. (eduardo.casas@unican.es).

Dpto. de Matemática Aplicada y C.C.. E.T.S.I. Ind. y Telec. Univ. de Cantabria. Avda. de Los Castros s/n. 39005 Santander. *Tel:* 942 201 427.

José Luis Cruz Soto. (jlacruz@uco.es).

Dpto. de Informática y An. Numérico. Univ. de Córdoba. Campus de Rabanales. Edificio C-2. 14071 Córdoba. *Tel:* 957 218 629.

José Manuel Mazón Ruiz. (Jose.M.Mazon@uv.es).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

Luis Ferragut Canals. (ferragut@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1522.

Juan Luis Vázquez Suárez. (juanluis.vazquez@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 935.

Luis Vega González. (mtpvegol@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Enrique Zuazua Iriondo. (enrique.zuazua@uam.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

Grupo Editor del Boletín de SĒMA

Luis Ferragut Canals. (ferragut@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400, ext. 1522.

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Francisco Andrés Pérez. (franc@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1537.

M. Isabel Asensio Sevilla. (mas@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias Químicas. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1537.

M. Teresa de Bustos Muñoz. (tbustos@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S. Ing. Ind. de Béjar. Univ. de Salamanca. Avda. Fernando Ballesteros, 2. 37700 Béjar, Salamanca. *Tel:* 923 408 080 ext. 2263.

Antonio Fernández Martínez. (anton@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. E. Politécnica Superior Zamora. Univ. de Salamanca. Avda. Requejo, 33. Campus Viriato. 49022 Zamora. *Tel:* 980 545 000 ext. 4459.

Responsables de secciones del Boletín de SĒMA

Artículos:

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Matemáticas e Industria:

Mikel Lezaun Iturralde. (mpleitm@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e I. O. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Apto. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Educación Matemática:

Roberto Rodríguez del Río. (rr_delrio@mat.ucm.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Químicas. Univ. Compl. de Madrid. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid. *Tel:* 913 944 102.

Resúmenes de libros:

Fco. Javier Sayas González. (jsayas@posta.unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza. C/María de Luna, 3. 50015 Zaragoza. *Tel:* 976 762 148.

Noticias de SĒMA:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Anuncios:

Óscar López Pouso. (oscarlp@usc.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus sur, s/n. 15782 Santiago de Compostela Tel: 981 563 100, ext. 13228.

Responsables de otras secciones de SĒMA**Gestión de Socios:**

María Pilar Laburta Santamaría. (laburta@unizar.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. Tel: 976 762 006.

Página web: www.sema.org.es/:

J. Rafael Rodríguez Galván. (rafael.rodriguez@uca.es).
Dpto. de Matemáticas. Fac. de CC. EE. y Empresariales. Univ. de Cádiz. C/ Duque de Nájera, 6. 11002 Cádiz. Tel: 956 015 478.

1. Los artículos publicados en este Boletín podrán ser escritos en español o inglés y deberán ser enviados por correo certificado a

Prof. E. FERNÁNDEZ CARA
Presidente del Comité Científico, Boletín SēMA
Dpto. E.D.A.N., Facultad de Matemáticas
Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA

También podrán ser enviados por correo electrónico a la dirección

`boletin_sema@usal.es`

En ambos casos, el/los autor/es deberán enviar por correo certificado una carta a la dirección precedente mencionando explícitamente que el artículo es sometido a publicación e indicando el nombre y dirección del autor corresponsal. En esta carta, podrán sugerirse nombres de miembros del Comité Científico que, a juicio de los autores, sean especialmente adecuados para juzgar el trabajo.

La decisión final sobre aceptación del trabajo será precedida de un procedimiento de revisión anónima.

2. Las contribuciones serán preferiblemente de una longitud inferior a 24 páginas y se deberán ajustar al formato indicado en los ficheros a tal efecto disponibles en la página web de la Sociedad (<http://www.sema.org.es/>).

3. El contenido de los artículos publicados corresponderá a un área de trabajo preferiblemente conectada a los objetivos propios de la Matemática Aplicada. En los trabajos podrá incluirse información sobre resultados conocidos y/o previamente publicados. Se anima especialmente a los autores a presentar sus propios resultados (y en su caso los de otros investigadores) con estilo y objetivos divulgativos.

Ficha de Inscripción Individual

Sociedad Española de Matemática Aplicada SēMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense. 28040 Madrid.
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

Datos Personales

- Apellidos:
- Nombre:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Fecha de inscripción:

Datos Profesionales

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: Fax:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Categoría Profesional:
- Líneas de Investigación:
-

Dirección para la correspondencia: Profesional Personal

Cuota anual para el año 2005

- Socio ordinario: 30 EUR. Socio de reciprocidad con la RSME: 12 EUR.
- Socio estudiante: 15 EUR. Socio extranjero: 25 EUR.

Datos bancarios

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean pasados al cobro en la cuenta cuyos datos figuran a continuación

Entidad (4 dígitos)	Oficina (4 dígitos)	D.C. (2 dígitos)	Número de cuenta (10 dígitos)

- Entidad bancaria:
- Domicilio:
- C.P.: Población:

Con esta fecha, doy instrucciones a dicha entidad bancaria para que obren en consecuencia.

Atentamente,

Fdo.

Para remitir a la entidad bancaria

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean cargados a mi cuenta corriente/libreta en esa Agencia Urbana y transferidas a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander

Atentamente,

Fdo.

Ficha de Inscripción Institucional

Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense. 28040 Madrid.

Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

Datos de la Institución

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Fecha de inscripción:

Forma de pago

La cuota anual para el año 2005 como Socio Institucional es de 150 EUR.
El pago se realiza mediante transferencia bancaria a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander