

SēMA  
BOLETÍN NÚMERO 33  
Diciembre 2005

sumario

Editorial .....	5
Opinión .....	7
<i>Fundación Centro de Ciencias de Benasque</i> , por P. Pascual .....	7
<i>Sobre la enseñanza del Análisis Numérico</i> , por B. del Hoyo y F. Vadillo	13
<i>Entrevista a John Ball, Presidente de la IMU</i> .....	19
Artículos .....	27
<i>Simulación numérica del cruce de trenes: combinación de un método de reducción del modelo con una implementación de los elementos de contorno</i> , por L. Hermanns y E. Alarcón .....	27
<i>Algunos problemas de interpolación en procesamiento de imágenes</i> , por V. Caselles .....	37
<i>Multi-solitons and large time dynamics of some nonlinear dispersive equations</i> , por Y. Martel .....	79
VI Premio SēMA a la Divulgación de la Matemática Aplicada (2005) ..	113
<i>Simulación numérica en odontología y ortodoncia</i> , por J. M. Viaño y su Grupo de Investigación .....	113
Historia de las Matemáticas .....	149
<i>¿Fue Arquímedes matemático aplicado?</i> , por J. M. Vegas .....	149
Resúmenes de tesis doctorales .....	165
Resúmenes de libros .....	173
Anuncios .....	177

# Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

## Grupo Editor

L. Ferragut Canals (U. de Salamanca)      E. Fernández Cara (U. de Sevilla)  
F. Andrés Pérez (U. de Salamanca)      M.I. Asensio Sevilla (U. de Salamanca)  
M.T. de Bustos Muñoz (U. de Salamanca)      A. Fernández Martínez (U. de Salamanca)

## Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla)      A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)  
E. Casas Rentería (U. de Cantabria)      J.L. Cruz Soto (U. de Córdoba)  
L. Ferragut Canals (U. de Salamanca)      J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia)  
I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid)      J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)  
L. Vega González (U. del País Vasco)      E. Zuazua Iriondo (U. Comp. de Madrid)

## Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)  
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)  
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)  
Historia Matemática: J.M. Vegas Montaner (U. Comp. de Madrid)  
Resúmenes: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)  
Noticias de SĒMA: C.M. Castro Barbero (Secretario de SĒMA)  
Anuncios: Ó. López Pouso (U. de Santiago de Compostela)

## Página web de SĒMA

<http://www.sema.org.es/>

---

Dirección Editorial: Boletín de SĒMA. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37008. Salamanca. [boletin\\_sema@usal.es](mailto:boletin_sema@usal.es).

ISSN 1575-9822.

Depósito Legal: AS-1442-2002.

Imprime: Gráficas Lope. C/ Laguna Grande, parc. 79, Políg. El Montalvo II 37008. Salamanca.

Diseño de portada: Luis Ferragut Alonso.

**Consejo Ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada**  
SĒMA

**Presidente**

Juan Ignacio Montijano Torcal

**Vicepresidente**

Mikel Lezaun Iturralde

**Secretario**

Carlos Manuel Castro Barbero

**Tesorera**

María Pilar Laburta Santamaría

**Vocales**

Rafael Bru García

Jose Antonio Carrillo de la Plata

Javier Chavarriga Soriano

Inmaculada Higuera Sanz

Pablo Pedregal Tercero

Ireneo Peral Alonso

Enrique Zuazua Iriondo



Estimados socios:

Con este nuevo número del Boletín SĒMA cerramos nuestro primer año como grupo editor. Esperamos haber ido mejorando nuestro trabajo con la experiencia. Deseamos seguir en esta línea durante el próximo año y para ello contamos con el apoyo de todos los que ya habéis colaborado con nosotros.

En este Boletín podéis encontrar una reseña sobre la Fundación Centro de Ciencias de Benasque que su director, el Prof. Pedro Pascual, nos ha hecho amablemente llegar. Los Prof. Begoña del Hoyo y Fernando Vadillo nos invitan a reflexionar sobre las aportaciones del libro del Prof. Moler en la enseñanza del Análisis Numérico. La sección de opinión se cierra con una interesante entrevista al Prof. John Ball, Presidente de la IMU, realizada por el Prof. Pablo Pedregal.

Como viene siendo habitual, encontraréis a continuación una serie de artículos científicos de contenido variado. Aprovechamos la ocasión para daros una buena noticia: en la actualidad, contamos con una importante reserva de trabajos de gran diversidad temática y en muchos casos de personas de indiscutible relevancia científica que, gracias a vosotros, han ido llegando a nuestras manos. En el momento actual podemos augurar un buen año para nuestro Boletín por ésta y otras muchas razones.

Como habréis visto, para la portada de este Boletín hemos elegido una impactante figura, tomada del trabajo galardonado con el VII Premio SĒMA de Divulgación de la Matemática Aplicada sobre simulación numérica en Odontología y Ortodoncia, realizado por el Prof. Juan Manuel Viaño y su grupo de investigación. Esperamos de disfrutéis de la lectura del mismo.

En la sección **Historia de las Matemáticas**, su director, el Prof. José Manuel Vegas Montaner, nos acerca a un matemático genial, Arquímedes.

De nuevo nuestro agradecimiento a todos los que han colaborado para dar forma a este volumen, el último de 2005.

Os seguimos invitando a todos a participar en cualquiera de las secciones, para seguir haciendo posible la edición de estos boletines un año tras otro. Aprovechamos además la ocasión para desearos unas felices fiestas y un próspero año 2006.

Grupo Editor  
boletin\_sema@usal.es



# Fundación Centro de Ciencias de Benasque

PEDRO PASCUAL

Universidad de Barcelona

pascual@ecm.uab.es

## Abstract

Se presenta en este breve artículo una descripción de la *Fundación Centro de Ciencias de Benasque* y de sus actividades.

## 1 Introducción

En 1994, ni en España ni en el resto de Europa existía un centro en el que, en un ambiente agradable, los científicos se pudieran dedicar a trabajar tranquilamente y a discutir los problemas de su investigación con colegas del resto del mundo, durante un periodo de dos o tres semanas. Un centro de este tipo llevaba bastantes años funcionando, con gran éxito, en la localidad norteamericana de Aspen, en Colorado.

Al repasar el mapa de nuestro país se vio que se debía localizar un pueblo pequeño, para evitar la dispersión de los asistentes, con una buena infraestructura de hoteles y apartamentos, con clima agradable y que fuera atractivo para las familias que acompañaran a los científicos. Un lugar adecuado parecía ser Benasque, en el corazón de los Pirineos. Las autoridades de Benasque fueron extraordinariamente receptivas a la idea y con su ayuda y la de IBERDROLA S.A. se creó el “Centro de Física de Benasque” (CFB).

## 2 Centro de Física de Benasque (CFB)

El Centro de Física de Benasque se creó en 1994 como un instituto internacional dedicado a promover investigación en distintas ramas de la Física. La idea fundamental era albergar y promover actividades de grupos selectos de físicos que trabajaran en ramas relacionadas de esta ciencia. El centro debía programarse de forma que reunieran las condiciones necesarias para la colaboración entre los participantes.

En aquel momento y teniendo en cuenta las posibilidades de financiación y de infraestructura existentes en Benasque, se pretendió reunir durante tres semanas a unos cincuenta científicos divididos en dos grupos, de tamaños similares, que trabajasen en campos de la Física con una clara zona de interés común. El

número de seminarios debía ser muy reducido, de forma que los científicos tuvieran mucho tiempo para discutir entre sí y poder desarrollar su trabajo de investigación.

El Ayuntamiento de Benasque nos cedió, desde su inicio, una amplia habitación en la “Casa de la Cultura de Benasque”, donde se instalaron la Secretaría del Centro y los despachos del Comité Organizador, desde su inicio formado por: Pedro Pascual (Director, Universidad de Barcelona), José Ignacio Latorre (Universidad de Barcelona) y Manuel Asorey (Universidad de Zaragoza). Por otra parte el Ayuntamiento de Benasque nos cedió el uso de la escuela municipal que, debidamente adecuada, serviría para despachos de los asistentes. En los primeros años la escuela aún funcionaba como tal y sólo era posible usarla en tiempo de vacaciones.

Este centro desarrolló su labor en los veranos de 1995 a 1998.

### 3 Fundación Centro de Ciencias de Benasque (FCCB)

La Fundación Centro de Ciencias de Benasque fue constituida en Benasque el día 15 de julio de 1998, según consta en escritura pública número 253 otorgada ante el Notario del Ilustre Colegio de Zaragoza don Javier Santos Lloro, siendo sus socios fundadores la Diputación General de Aragón, el Ayuntamiento de Benasque, la Diputación Provincial de Huesca y Universidad de Zaragoza. El capital fundacional es de 5.010.000 ptas.

En la página 1010 del Boletín Oficial de Aragón de 16 de febrero de 2001 apareció: “336. ORDEN del Departamento de Presidencia y Relaciones Institucionales, por la que se inscribe en el Registro de Fundaciones de la Comunidad de Aragón la denominada Fundación Centro de Ciencias de Benasque, instituida en Benasque (Huesca)”. El CIF de la misma es G.22217905 y la cuenta corriente está en Ibercaja y tiene el número 2085-2310-38-0330044193.

La primera reunión del Patronato de la FCCB tuvo lugar en el Departamento de Educación y Ciencia del Gobierno de Aragón el 28 de Febrero de 2001. Se acordó nombrar Presidente de la fundación al Excmo. Sr. Alcalde de Benasque, y Director-Gerente del Centro al Prof. Pedro Pascual de Sans, catedrático emérito de la Universidad de Barcelona.

En estos momentos el FCCB dispone de una Secretaría con línea ADSL, teléfono, impresoras, etc. y la escuela de Benasque. Además de un centro de informática con una decena de modernos PCs y la posibilidad de conectar los portátiles de los asistentes. También hay conexión inalámbrica.

Se puede obtener toda la información que se desee sobre la FCCB y sus actividades en <http://benasque.ecm.ub.es/>. Daremos aquí sólo un resumen de lo realizado desde su fundación.

## 4 Reuniones ordinarias, woksshops y reuniones extraordinarias (1995-2004)

### 4.1 Reuniones ordinarias:

1995. *Quantum Chromodynamics and Effective Lagrangians Recent Developments in Quantum Field Theory*, E. de Rafael, L. Álvarez-Gaumé.

1996. *Recent Progress in S-duality Electroweak Theory*, L. Álvarez-Gaumé, J. Bernabéu.

1997. *Quantum Field Theory Statistical Mechanics*, A. González-Arroyo, F. Guinea.

1998. *Progress in Quantum Computing, Cryptography and Communication Progress in Quantum Optics and Atomic Physics*, A. Ekert, I. Cirac.

1999. *Quantum Gases and Quantum Liquids M. Lewenstein, Y. Castin.*

2000. *Quantum Information Processing: Theory Quantum Information Processing: Experiments*, I. Cirac, A. Ekert.

2001. *Physics in the Pyrenees: Strings, Branes and Field Theory*, D. Z. Freedman, I. R. Klebanov.

2002. *Physics of Ultracold Dilute Atomic Gases*, A. J. Leggett, F. Sols.

2002. *Pushing the limits of QCD*, M. J. Savage, H. W. Hammer.

2003. *Quantum Information*, I. Cirac, A. Ekert.

2003. *String Theory*, D. Z. Freedman, A. Strominger.

2003. *Regulatory and Functional RNAs: Computational, Genomic and Structural Approaches*, E. Rivas, E. Westhof.

2003. *From Pattern Formation to Granular Physics and Soft Condensed Matter*, I. Aronson, L. Kramer.

2004. *Terrestrial and Cosmic Neutrinos, Leptogenesis and Cosmology*, J. Bernabéu, D. L. Wark.

2004. *Matching Light Quarks to Hadrons*, M. Golterman, S. Peris.

2004. *Time-dependent Density-Functional Theory: Prospects and Applications*, A. Rubio, E. K. U. Gross, M. L. A. Marqués, F. Nogueira.

### 4.2 Workshops:

2000. *Fermions, Disorder and Extended Objects on the Lattice*, V. Azcoiti, D. Espriu, V. Jiménez, P. Hernández.

2000. *Advanced School of Quantum Chromodynamics 2000*, V. Vento, S. Peris.

2001. *Renormalization*, T. R. Morris, J. I. Latorre.

2004. *Interplay of Magnetism and Structure in Functional Materials*, A. Planes, L. Mañosa, A. Saxena.

### 4.3 Reuniones extraordinarias:

2004. *Las Fronteras de la Física.*

2004. *Percepción Social de la Ciencia.*

#### 4.4 Datos sobre participantes:

El número total de participantes que han asistido a las 16 reuniones ordinarias que han tenido lugar hasta el 31-12-2004 es de 1013, provenientes de 36 países. La distribución detallada de los participantes de acuerdo con el centro del que provienen es la siguiente:

Alemania	109
Argentina	3
Australia	8
Austria	36
Bélgica	8
Brasil	2
Canadá	23
Chile	1
Checoslovaquia	1
Corea del Sur	3
Dinamarca	8
Eslovaquia	1
España	226
EE UU	217
Finlandia	9
Francia	60
Holanda	23
Hungría	3
India	1
Irán	1
Irlanda	2
Israel	24
Italia	68
Japón	8
Noruega	2
Nueva Zelanda	2
Polonia	13
Portugal	5
Reino Unido	84
Rumania	3
Rusia	10
Singapur	1
Suecia	13
Suiza	33
Taiwán	1
Uzbekistán	1
Total	1013

El número total de participantes que han asistido a los 4 workshops que han

tenido lugar hasta el 31-12-2004 es de 162, provenientes de 21 países.

El número total de participantes que han asistido a las 2 reuniones extraordinarias que han tenido lugar hasta el 31-12-2004 es de 270, provenientes principalmente de España.

#### **4.5 Soporte financiero:**

La financiación del FEB ha sido siempre un problema importante. Al principio estaba básicamente financiada por Iberdrola S.A. y el Ayuntamiento de Benasque.

Al final del año 2004 se tenían una serie de contratos de larga duración:

- Con la Universidad de Barcelona, firmado el 3 de Abril de 2002, con una financiación de 9.000 Euros cada año durante el trienio 2002–2004. Ha sido renovado el 30 de Septiembre del 2004 con la misma cantidad para el trienio 2005–2007.
- Con el Ayuntamiento de Benasque, firmado el 24 de junio de 2002, con una financiación de 30.000 Euros anuales para el quinquenio 2003–2007.
- Con la Fundación Banco de Bilbao, Vizcaya, Argentaria (BBVA), firmado el 9 de Septiembre de 2002, con una financiación de 42.000 Euros cada año para el trienio 2003–2005.

En <http://benasque.ecm.ub.es/> se puede consultar la cantidad aportada por los distintos organismos financiadores y el modo en que ha sido gastado el presupuesto.



# Sobre la enseñanza del Análisis Numérico

B. DEL HOYO Y F. VADILLO

Dep. Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad del País Vasco

mepvaarf@lg.ehu.es

## Abstract

Cuando finalizamos la primera lectura del libro del profesor Moler [1] recordamos el comentario del profesor Trefethen en el prólogo de [2] donde afirma que ha nacido una nueva era en la Computación Científica con el desarrollo de MATLAB. En estos breves comentarios intentamos argumentar que el texto del profesor Moler es una aportación importante y novedosa en la enseñanza del Análisis Numérico sobre todo por dos razones:

- Los interfaces gráficos que ilustran los algoritmos.
- Los ejemplos reales y no triviales resueltos.

Nick Trefethen en un artículo no publicado [3] considera varias definiciones de Análisis Numérico, y después de algunos comentarios parece preferir la que dice lo siguiente: *El Análisis Numérico es el estudio de algoritmos para los problemas de las matemáticas continuas*. Algoritmos que en nuestra opinión después se deben implementar en los ordenadores. Se trata por tanto de una disciplina matemática totalmente aplicada y para su estudio y aprendizaje es indispensable encontrar el equilibrio entre la parte teórica dedicada al diseño y estudio de los algoritmos y las clases prácticas para resolver problemas concretos. Naturalmente, el tiempo dedicado a cada una de estas dos partes dependerá de los alumnos, en una licenciatura de Matemáticas habrá mayores contenidos teóricos que cuando se trate de alumnos de otras ciencias o enseñanzas técnicas donde la asignatura en nuestra opinión deberá tener una presentación más descriptiva y práctica.

Los desarrollos teóricos de las diferentes materias disponen de bibliografía clásica. Sin contar con los textos específicos para cada tema, las referencias clásicas [13], [9], [5], ó [8] seguramente cubren muchas de las necesidades en un curso de introducción al Análisis Numérico, aunque con bastante carecen de contenidos prácticos. Algunas novedades en los últimos años como [10], [7], [11] o [12] incorporan al lenguaje de programación científica MATLAB

para proponer prácticas que implementan algunos de los algoritmos que se explican en la parte teórica. Son textos a los que apenas se les puede poner objeciones por su calidad y el prestigio de sus autores, pero en nuestra opinión son programas pensados sobre todo para que los alumnos con la ayuda de un ordenador estudien las implementaciones de los diversos algoritmos resolviendo ejemplos académicos. Por contra, como mostraremos en algunos ejemplos, los programas desarrollando en este nuevo texto [1] creemos que son un importante apoyo la labor didáctico para el profesor.

El primer ejemplo que consideramos es un tema común a todos los programas de introducción al Cálculo Numérico: **la factorización LU de una matriz** utilizando la eliminación gaussiana con las distintas técnicas de elegir el pivote. Imaginemos que quisiéramos factorizar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 31 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Cuando se escriba en la ventana de comandos de MATLAB la instrucción `lugu(A)` aparecerá en pantalla la figura 1 en cuya ventana inferior se puede elegir entre las cuatro opciones:

- Elegir el pivote con el ratón.
- No hacer pivotaje.
- Pivotaje parcial.
- Pivotaje completo.

17.0000	24.0000	1.0000	8.0000	15.0000
23.0000	5.0000	7.0000	14.0000	16.0000
4.0000	6.0000	13.0000	20.0000	22.0000
10.0000	12.0000	19.0000	21.0000	3.0000
11.0000	18.0000	25.0000	2.0000	9.0000

Pick a pivot ▾

Figure 1: Matriz que se desea factorizar.

Después de la elección del tipo de pivotaje observaremos en pantalla todo el proceso hasta llegar a la factorización final del tipo que aparece en la figura 2. Evidentemente el resultado cambia con la opción del pivote y la elección `repeat` permite comprobarlo de manera fácil.

23.0000	5.0000	7.0000	14.0000	16.0000	
	20.3043	-4.1739	-2.3478	3.1739	
1.0000		24.8608	-2.8908	-1.0921	
0.7391	1.0000		19.6512	18.9793	
0.4783	0.7687	1.0000		-22.2222	
0.1739	0.2527	0.5164	1.0000		
0.4348	0.4839	0.7231	0.9231	1.0000	
					repeat

Figure 2: Resultado de la factorización con pivotaje parcial.

El segundo ejemplo que comentaremos se refiere a una de las herramientas más importantes en todo el Análisis Numérico: **la transformada rápida de Fourier**. En MATLAB la transformada discreta de Fourier de un vector  $\mathbf{u}$  se obtiene con el comando `fft` pero para investigar las propiedades es mucho más interesante el comando `fftpgui` que abre una ventana como la figura 3 donde se representan las partes reales e imaginarias de  $\mathbf{u}$  y su transformada  $\hat{\mathbf{u}}$ . Además, con el ratón se pueden cambiar los valores en una de las cuatro ventanas para observar como se modifican los valores representados en las otras tres. Un sistema que evidentemente invita a estudiar distintas situaciones y propiedades.

También merecen destacarse las aplicaciones de esta herramienta para explicar el funcionamiento del teclado telefónicos o la búsqueda de periodos en series temporales de los ejemplos de las observaciones de las manchas solares o el famoso fenómeno de El Niño.

Aunque los ejemplos que nos interesarían son muchos y variados, finalizamos esta breve exposición comentando el tratamiento del problema de interpolación. La introducción es clásica hasta motivar la interpolación a trozos con el fenómeno de Runge que visualiza con el programa `rungeinterp` y que también aparecen en otras referencias como [8] o [12]. Sin embargo, el algoritmo `pchip` de interpolación cúbica a trozos nos parece interesante y sobre todo el programa `interpGUI` que abre una ventana reproducido en la figura 4 permite visualizar las diferencias en los resultados de los distintos tipos de interpolación.

Compartimos la opinión expresada por el profesor Sanz-Serna en el prólogo de [8] cuando dice que *aprender matemáticas es un proceso donde se trata de aprender a hacer algo, no de adquirir conocimientos*. Esta línea de pensamiento ahora incluso es más profunda porque como se dice en el prefacio de [14] *las modernas herramientas computacionales permiten resolver en clase problemas*

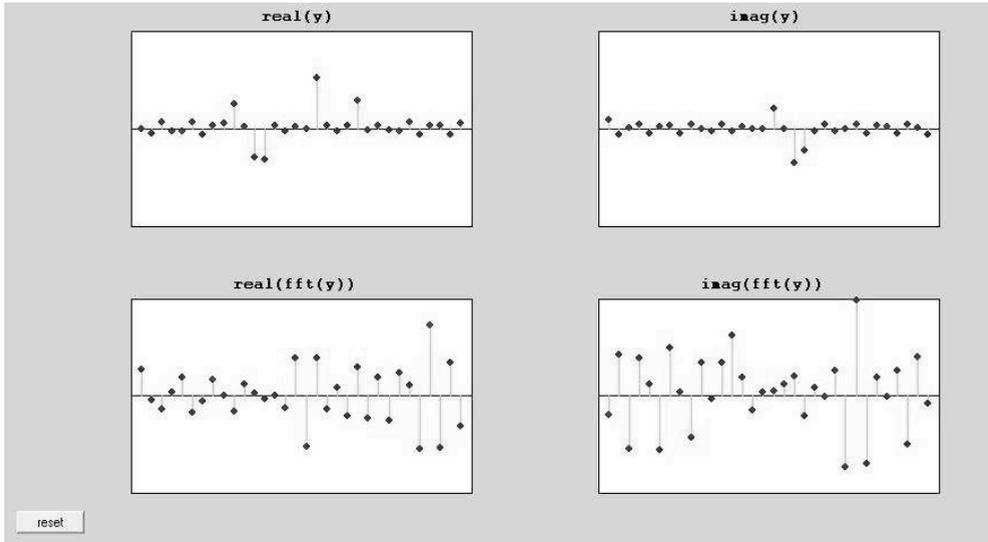


Figure 3: Transforma discreta de Fourier de un vector.

*reales aunque no triviales.* En nuestra opinión, el texto del profesor Moler confirma dicho argumento y además facilita las exposiciones con las interfaces gráficas, vea por ejemplo el modelo del caminante de la página 301.

Son muchas las novedades del libro del profesor Moler que nos han interesado: el algoritmo **zeroin** aproxima los ceros de funciones y se visualiza con el programa **fzerogui**, la cuadratura adaptativa se explica con el programa **quadgui**, se puede dibujar una mano (página 111) y después calcular su área (página 185) o sus autofunciones (página 323) etc...

Lo que aquí hemos expuesto sólo es una pequeña muestra de las muchas posibilidades que se sugieren en este texto, las relaciones de ejercicios propuestos son *generosas y succulentas*, opinamos que merecen la pena dedicarles algún tiempo. Nos gustaría haber despertado el apetito o curiosidad de nuestros colegas que imparten cursos de Cálculo Numérico, porque aunque son más los libros que se publican, son pocos los que aportan novedades, como dice Schopenhauer *Para leer lo bueno es necesario no leer lo malo, porque la vida es corta y el tiempo y las fuerzas, limitadas* (Sobre la lectura y los libros).

## References

- [1] CLEVE B. MOLER, Numerical Computing with MATLAB, *SIAM*, 2004.
- [2] LLOYD N.TREFETHEN, Spectral Methods in MATLAB, *SIAM*, 2000.
- [3] L.N.TREFETHEN, The Definition of Numerical Analysis, <http://www.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen>,

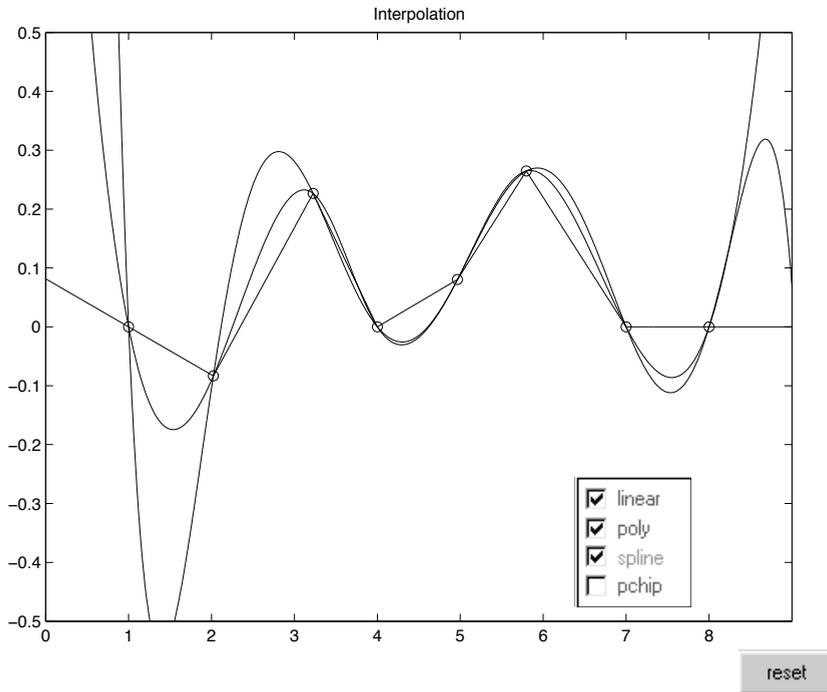


Figure 4: Ventana del programa interpgui.

- [4] D.J.HIGHAM AND N.J.HIGHAM, *MATLAB Guide*, *SIAM*,2000.
- [5] J.STOER AND R.BULIRSH, *Introduction to Numerical Analysis*, *Springer*, 1980.
- [6] G.STRANG, *Introduction to Applied Matematics*, *Wellesley-Cambridge Press*, 1986.
- [7] R.SACCO, F.SALERI,A.QUARTERONI, *Numerical Mathematics*, *Springer*, 2000.
- [8] , J.M.SANZ-SERNA, *Diez lecciones de Cálculo Numérico*, *Universidad de Valladolid*, 1998.
- [9] K.E.ATKINSON, *An Introduction to Numerical Analysis*, *Wiley*, 1978.
- [10] J.F.MATHEWS Y K.D.FINK, *Métodos Numéricos con MATLAB*. Tercera edición, *Prentice Hall*, 1999.
- [11] L.V.FAUSSET, *Applied Numerical Analysis Using MATLAB*, *Prentice Hall*, 1999.

- [12] C.F.VAN LOAN, Introduction to Scientific Computing. A Matrix-Vector Approach Using MATLAB, *Prentice Hall*, 2000.
- [13] E.ISAACSON AND H.KELLER, Analysis of Numerical Methods, *John Wiley & Sons*, 1966.
- [14] W.GANDER AND J.HREBICEK, Solving Problems in Scientific Computing Using MAPLE and MATLAB, *Springer*, 2004.

## Entrevista a John Ball, Presidente de la IMU



Ofrecemos a continuación una entrevista a John Ball, realizada por Pablo Pedregal, de la Universidad de Castilla - La Mancha.

John Ball es *Professor* de la Universidad de Oxford. Como investigador, es mundialmente conocido desde hace considerable tiempo por sus aportaciones a la teoría de la elasticidad, al Cálculo de Variaciones y al análisis de sistemas dinámicos de dimensión infinita. Se ha mostrado particularmente interesado por las “Matemáticas de las micro-estructuras” con origen en los cambios de fase de los sólidos y sus relaciones con cuestiones abiertas del Cálculo de Variaciones multi-dimensional, como la comprensión del concepto de quasi-convexidad. Sus numerosos trabajos dan cuenta de su gran habilidad para relacionar las Matemáticas con la Mecánica.

Desde el año 2002 es Presidente de la *International Mathematical Union* (IMU). Con anterioridad, había sido Presidente de la *London Mathematical Society* (de 1996 a 1998) y era ya también conocido por sus actividades, en particular como miembro del “Fields Medal Committee” y del “Programme Committee” del Congreso Internacional de 2002 de Beijing ICM 2002.

### 1 General issues

**Question:** Your position as President of the IMU enables you to appreciate many important issues related to mathematics from “above”. What would you highlight, good or bad, of the activity of mathematicians around the world?

Mathematicians have much to be proud of as regards the development and applications of our subject. One problem area is the often negative image of mathematics among the general public, which discourages students from studying the subject and reduces the number of good teachers to provide them

with inspiration. Another is the uneasy relation which has developed between research mathematicians and those working in mathematics education.

**Q: What impression do you have of the mathematical community as a whole?**

I have very good feelings about our community. It has rigorous scientific standards, high integrity, and a fine record of service.

**Q: What are the main challenges for mathematics and the mathematical community today in our society?**

Mathematics can contribute understanding to almost every aspect of human existence. As subjects become better understood they become more susceptible to mathematical treatment. We see this happening now with biology and medicine, and the life sciences will certainly be a major growth area for mathematics over the coming decades. Mathematical biology is of course already an established branch of applied mathematics, but it is probably fair to say that it is not yet regarded by most in the life sciences as an essential part of their subject. More mathematicians need to invest the time to learn relevant parts of biology, and young researchers in the life sciences need to become convinced of the value of mathematical ways of thinking. In this process of interaction there can be resistance and misunderstanding, but the rewards are potentially immense.

**Q: What about education? What are the main issues in this important area, both in higher education and schools?**

The first priority must be to encourage more young people to pursue further studies in mathematics and to increase the number of high quality mathematics teachers in schools. Of course the situation varies from country to country. In those countries in which mathematicians have various attractive careers to choose from, there seems little alternative to improving the pay and conditions for teachers of mathematics, and of other key science subjects in which high quality teacher recruitment is a problem. Such action requires political will, and thus an appreciation of the importance of mathematics and science among politicians and opinion formers.

In developing countries the opportunities for schoolchildren to study mathematics are often extremely limited, due to the lack of resources and trained teachers, while in universities an important goal is to improve the education of the teachers themselves.

**Q: The importance of higher education for the technological development of our society is clear. How do you feel that higher education could and should cooperate with programmes in innovation, research and development?**

Most research leaders I have met from industry see the main role of universities as providing highly trained and flexible graduates and carrying out fundamental research. Fundamental research has much to contribute to

and gain from industry, and it is important that structures are in place that make interaction between universities and industry as easy as possible, including appropriate schemes for undergraduates and postgraduates. Universities should ensure that their approach to intellectual property rights and internal structures give the necessary incentives for academics to found start-up companies to exploit their work. But universities should not be places where routine development work is carried out that could better be done in industry, detracting from the fundamental university research mission.

**Q: What is your opinion about the future of science in Europe? What do you think of the European Research Council?**

My personal experience of European Union science initiatives, such as research networks and individual Marie Curie fellowships, has been rather positive. I think that they have contributed significantly to the personal development of young researchers and to forging a European unity for research. The funds are quite flexible, although the bureaucracy is heavy. On the other hand there are concerns, first about the representation of basic science, including mathematics, in the programmes, and second about the position of mathematics itself (for example, there is no mathematician on the 45 member European Research Advisory Board). The European Research Council offers some hope of responding to these concerns, and we will have to wait to see how it evolves.

## 2 IMU

**Q: Can you explain a bit for our readers the role and leadership of IMU?**

IMU is the scientific union for mathematics, and the principal body representing mathematics on the world stage. Originally, its aims were mainly concerned with the organization of the ICMS, and the award of the Fields Medals, but now they include other issues of importance for mathematics, for example those connected with electronic publishing and with the development of mathematics in less advantaged parts of the world.

The members of IMU are countries. Each country is represented by an Adhering Organization, which is in turn advised by a Committee for Mathematics. The member countries are divided into five groups; for example Spain is currently in Group IV. The higher the number of the group the more votes the country has, and the more dues it pays. The dues finance almost all the activities of IMU.

The IMU Executive Committee consists of ten mathematicians, elected every four years by the IMU General Assembly. The Executive Committee is responsible for all policy matters, and for such tasks as choosing the members of the ICM Program Committee and various prize committees. It meets physically for two days once a year, but carries out most of its business by email. There is no permanent office, and the IMU administrative base is at the institution of the Secretary (currently Phillip Griffiths of the Institute for Advanced Study in Princeton).

**Q: Could you indicate some specific projects in which IMU is now involved?**

The current Executive Committee has made a big effort to improve the service IMU provides for developing countries. It commissioned a report from an ad hoc group of experts, completed in 2003, to advise IMU on how to proceed, and most of the recommendations of this report have been implemented. These include the formation of a Developing Countries Strategy Group, the appointment of a half-time administrator for developing countries based at the International Centre for Theoretical Physics (ICTP) in Trieste, the merging of IMU conference support with its developing countries budget, and the proposed creation of a new category of Associate Membership of IMU suitable for poorer developing countries. We are fortunate to have received a generous grant of \$ 50,000 from the Abel Fund, which is likely to be renewed annually, and the award by the Nuffield Foundation of a substantial project grant of 105,000 pounds sterling to IMU and the London Mathematical Society to support mathematics and its teaching in the Anglophone countries of sub-Saharan Africa has just been announced. A new prize for young mathematicians from developing countries, the Ramanujan Prize, has been founded by ICTP with prize money donated by the Abel Fund and support from IMU.

The present printed World Directory of Mathematicians has become outdated, and through IMU's Committee for Electronic Information and Communication (CEIC) is being replaced by an Electronic World Directory of Mathematicians (EWDM), and a Federated World Directory of Mathematicians (FWDM) that simultaneously searches the EWDM and other databases such as the AMS/SIAM/MAA Combined Membership List.

A new prize for applications of mathematics having a real impact in the world, the Carl Friedrich Gauss Prize, will be awarded for the first time at ICM 2006, endowed by the German Mathematical Union from profits from the 1998 Berlin ICM.

IMU has also embarked on a process of electoral reform. If approved by the 2006 General Assembly, the slates for the IMU Executive Committee and Commissions of IMU will henceforth be proposed by independent Nominating Committees, a system that is being operated informally for the present cycle. The proposal is that in future the Officers and Executive Committee for the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) will be elected by the ICMI General Assembly, and not by the IMU General Assembly as at present.

You can learn more about these various initiatives by subscribing to the (free) new IMU electronic newsletter IMU-Net via the IMU webpages.

**Q: What is your impression on the project of digitization of the mathematical literature?**

You refer to the World Digital Mathematics Library (WDML) proposal, to make the entire mathematical literature digitally available in fully searchable and linked form, in particular via retro-digitization of older journals and books. Mathematics differs from other sciences in the generally much longer period

over which research papers retain their value, which makes retrodigitization particularly attractive.

IMU strongly supports the WDML vision, and in particular the idea of a ‘moving wall’, a negotiated period - say 5 years - after which all journals are made electronically available free of charge by publishers. IMU cannot itself fund digitization, but can help with the adoption of common standards (see, for example, the digitization best practices document available on the IMU/CEIC webpages). For the WDML to become a reality will require a gradual process of persuasion of society and commercial publishers that it is in their interest to participate. There is already a considerable amount of retro-digitized material available, due to the splendid and continuing efforts of various projects, and some optimism that substantial new projects will soon emerge to increase this material. However, major obstacles, especially related to copyright, need to be overcome before the dream can be realized.

**Q: In what ways could IMU improve?**

IMU could do more if it had more funds at its disposal. I already mentioned that the majority of these funds come from the dues of member countries, which are low in comparison with other scientific unions. For example, it has been difficult to justify financially the recent appointment of a half-time administrator for developing countries, despite the advantages of this post for furthering the aims of IMU. Given the funds, we could increase the scale of our activities on behalf of developing countries and in the areas covered by CEIC.

I also believe that IMU could take a more professional approach to relations with the media, and the task of influencing public and political opinion on behalf of mathematics. IMU should find occasions to say how important mathematics is for the world, and to draw attention to key problems (e.g. numbers of students and teachers) facing the subject. At the moment we do not have the mechanisms or experience for doing this in an effective way. In particular this means engaging with the issues of mathematics education, and helping to bring together the mathematics and mathematics education communities.

### 3 ICM

**Q: What is the significance of the next ICM being held in Spain?**

The award of the ICM for the first time to Spain shows the respect and trust of mathematicians worldwide in Spanish mathematics and mathematicians.

**Q: What opinion do you have of the Organizing Committee and their capacity to organize this great event?**

I have every confidence in their ability to organize a fine Congress.

**Q: What are the benefits that mathematics in Spain can derive from this event?**

The ICM will be an unparalleled opportunity for press coverage of mathematics in Spain, and the build-up to it an important period for focussing

the attention of the government on the needs of the Spanish mathematical community. I am sure that the preparations for the Congress will also bring together Spanish mathematicians in a way that will have lasting benefits.

## 4 Mathematics

**Q: What is, or should be, the role of mathematics in science, technology and society?**

Mathematics is the language of science and technology, and is used by all scientists and engineers in one way or another. Today's standard mathematical tools - calculus, Fourier series, matrices, stress and so on - with their incalculable economic and scientific impact, were once the latest mathematical research. This is rarely understood by the general public, or by politicians. Some important mathematical tools may take decades or longer to develop to the stage when they are of practical importance, the result of the combined efforts of many mathematicians. The development of such tools results often from a combination of ideas addressing questions posed by the world around us, together with progress on such ideas based on the intrinsic structure and elegance of mathematics. Sometimes the applications of mathematics can be very surprising, for example the turning of a mathematical theorem on the Radon transform found fifty years before into the life-saving medical tool of X-ray tomography.

**Q: Would your answer be any different about the role of mathematicians in those areas of human endeavour?**

I think that mathematicians, and those who have studied mathematics in the past, can and do also contribute greatly by their ability to apply the mathematical way of thinking to life in general, for example through the discipline of careful problem formulation, and the logical analysis of problems starting from clear hypotheses.

**Q: What is the role of applied mathematics within mathematics itself?**

I do not much like dividing mathematics into pure and applied. Many of the great mathematicians that we revere, for example Archimedes, Newton, Gauss, Euler, Cauchy, Poincaré, von Neumann, apparently regarded mathematics as a seamless whole. The modern tendency to make a division has, I think, been damaging, and is happily now being eroded. Understanding the world has always needed and stimulated the discovery of new mathematical techniques and theories. These theories are often then organized and developed on the basis of the natural structure and beauty of the subject, and these developments then in turn influence applications.

**Q: Would you single out some parts of mathematics as having a high impact either in science or technology?**

Because many of the governing equations of science and engineering are partial differential equations, of course the understanding of such equations, both theoretically and numerically, is of paramount importance. But every area of science and technology has its own special bits of mathematics that are crucial.

**Q: Your expertise in the Calculus of Variations is very well known to everyone. Is there a particular contribution of yours which is most dear to you?**

Yes, finding a way to prove the existence of energy-minimizing deformations of elastic bodies under realistic assumptions on the material, since it set the scene for much of my future work. I was a young postdoc at Brown University, and had tried for months to make progress on this problem, and had several times considered giving it up as too hard. The issue of what properties it was reasonable to assume about the stored-energy function was puzzling, and the literature confusing. One afternoon while lying on my bed (it was too hot to do anything else) I suddenly realized that the determinant of the deformation gradient must be weakly continuous on an appropriate Sobolev space. I knew immediately that this would unlock the problem, and a lot of things that had been puzzling me fell into place. In fact I learnt a year or two later that this weak continuity was not a new discovery and had been previously proved by Reshetnyak. Also, the much earlier work of Morrey on quasiconvexity, which I had been reading but not understanding, effectively proved the same. So I could then go back to Morrey's work, which had gone almost unnoticed for 25 years, understand it, and recognize that perhaps its most important application was to elasticity. It was an exciting period, and it gave me the confidence not to stop working on other hard problems later in my career, even if I have only been able to make progress on a few.

**Q: What is the future of the Calculus of Variations as a mathematical discipline?**

Like other branches of mathematics, the calculus of variations has undergone periods of rapid growth, of consolidation and of stagnation. Stagnation often comes when a subject becomes introverted, and exciting developments when contact is made with a different part of mathematics or with new problems generated by the outside world. I am sure that variational techniques will continue to be of very great importance for the foreseeable future, but whether the calculus of variations continues to be regarded as a separate branch of mathematics may change as it coalesces with other areas or splits into more specialized parts.

## 5 Spain

**Q: What can you say about the development of mathematics in Spain seen from the outside?**

I do not have a perspective on Spanish mathematics as a whole, but in the areas which I am familiar with there has been a steady improvement in quality over the last 20 years.

**Q: There are two natural communities to which Spain belongs, Europe and the Spanish speaking world that comprises Spain and countries of South America. How do you see the role of Spanish mathematics in these two communities?**

I hesitate to comment on this! Perhaps I could just say that any help Spain can offer to mathematicians in less prosperous Spanish speaking countries would be valuable.

**Q: What recommendations do you have for the Spanish mathematical community to keep improving?**

I am sure that the Spanish mathematical community is well aware of the kinds of things that are needed. Of course it is very important to have flexible funding mechanisms for retaining talented young people and nurturing good research groups.

**Q: Would you like to add any further comments?**

Just to say that we all look forward with great anticipation to ICM 2006, and I send everyone involved with its organization the best wishes of IMU.

## **Simulación numérica del cruce de trenes: combinación de un método de reducción del modelo con una implementación de los elementos de contorno**

LUTZ HERMANN<sup>1</sup> Y ENRIQUE ALARCÓN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centro de Modelado en Ingeniería Mecánica (F2I2-CEMIM)  
Fundación para el Fomento de la Innovación Industrial

<sup>2</sup> Dpto. de Mecánica Estructural  
Universidad Politécnica de Madrid

lhermanns@etsii.upm.es, alarcon@estru.upm.es

### **Resumen**

En este artículo se presentan los resultados obtenidos con un método aproximado para calcular las historias temporales de los coeficientes aerodinámicos correspondientes a las fuerzas y los momentos a que están sometidos los coches de cabeza durante el cruce de dos trenes de alta velocidad al aire libre. El método aproximado utiliza funciones de forma construidas partiendo de soluciones de algunos pasos de tiempo y resuelve un problema de tamaño reducido, consiguiendo un ahorro de tiempo considerable y conservando una precisión aceptable en los resultados. Así, se puede llevar a cabo la simulación de un cruce de trenes en apenas 8 horas y media en un ordenador personal equipado con un procesador Pentium IV corriendo a 2,67 GHz.

## **1 Introducción**

Con el continuo aumento de las velocidades de circulación de los trenes de pasajeros han surgido fenómenos relacionados con la aerodinámica que no se suelen presentar con tanta intensidad en líneas férreas convencionales, en las que la velocidad de circulación no supera los 200 km/h. Entre ellos destacan los siguientes:

- El control de la fuerza de contacto entre pantógrafo y catenaria.

---

Fecha de recepción: 25/07/05

- La onda de presión que provoca el tren al entrar en un túnel y que puede manifestarse en la vibración de los cristales de edificaciones ubicadas en la cercanía de la boca opuesta (*sonic boom*).
- La proyección del balasto.
- Estabilidad de marcha bajo la presencia de viento lateral.
- Las fuerzas provocadas en operarios o pasajeros esperando en un andén.
- Cuestiones de confort y seguridad durante el cruce de trenes en el túnel.
- Rotura de cristales debido a las altas presiones producidas durante un cruce.
- Cuestiones de confort y seguridad durante el cruce de trenes al aire libre.

Algunos de estos puntos afectan directamente a la seguridad de los viajeros y por tanto es crucial su cuidadoso estudio.

En la implementación del modelo aerodinámico utilizado para la obtención de los resultados presentados en el presente artículo, se ha supuesto que el campo de flujo es irrotacional y que la viscosidad y compresibilidad del fluido son nulas. Estas simplificaciones permiten describir el comportamiento del fluido con una sola ecuación en derivadas parciales, la *ecuación de Laplace*. El precio a pagar consiste en la limitación de la aplicabilidad de dicho modelo.

El *método de los elementos de contorno* ha demostrado a lo largo de las últimas tres décadas sus ventajas en cierto tipo de aplicaciones. Una de ellas es el estudio aerodinámico de perfiles de alas de avión o de vehículos terrestres mediante modelos aerodinámicos lineales como el del flujo potencial. Es evidente que la aplicación de un modelo de este tipo está limitada a las situaciones en las que, por un lado, las separaciones de flujo se limitan a zonas muy pequeñas en comparación con la extensión del objeto al no influir demasiado en los resultados globales y, por otro, aquéllas en las que la compresibilidad del fluido puede no tenerse en cuenta. Por tanto, se considera que la precisión de los resultados obtenidos mediante un modelo aerodinámico lineal en la cabeza tractora de un tren de alta velocidad es aceptable mientras que no haya mucho viento lateral que pueda provocar el desprendimiento del flujo.

Resumiendo, se puede decir que el modelo del flujo potencial sólo podría emplearse para el estudio de los dos últimos puntos de la lista anterior.

## 2 Modelo aerodinámico lineal

A continuación se presenta de manera breve la formulación del modelo aerodinámico utilizado.

Suponiendo un campo de flujo irrotacional y solenoidal de un fluido incompresible, la velocidad  $\vec{V}$  puede derivarse de un potencial escalar como sigue:

$$\vec{V} = \nabla u. \quad (1)$$

La forma general de la ecuación de la conservación de masa es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2)$$

siendo  $\rho$  la densidad; la expresión anterior se reduce para un fluido incompresible homogéneo a

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (3)$$

Sustituyendo  $\vec{V}$  en (3) por (1), llegamos a la bien conocida ecuación diferencial de Laplace

$$\text{div } \nabla u = \Delta u = 0. \quad (4)$$

Es importante recordar que la ecuación de Laplace describe fenómenos de carácter estacionario. El carácter no estacionario de las variaciones de presión se introduce a través de la derivada del potencial con respecto al tiempo usando la ecuación de Bernoulli

$$p = p_\infty + \rho \left\{ \vec{V}_0 \cdot \nabla u - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial u}{\partial t} \right\}, \quad (5)$$

donde  $p_\infty$  se denomina *presión de referencia* y  $\vec{V}_0$  es la velocidad constante del sistema de coordenadas de referencia fijado en el objeto en que se calcula la presión. La derivada del potencial con respecto al tiempo se puede aproximar utilizando un esquema de diferencias finitas.

Las condiciones de contorno se formulan de manera que la velocidad relativa en la dirección normal con respecto a las paredes del objeto es nula, es decir:

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n}, \quad (6)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal en la superficie del objeto, apuntando desde la zona ocupada por el fluido hacia el interior del objeto.

### 3 Implementación del método de los elementos de contorno

Para la simulación del cruce de dos trenes al aire libre se ha desarrollado un programa de ordenador basado en una implementación del método directo de los elementos de contorno. Para una descripción detallada del método de los elementos de contorno se recomienda consultar las referencias [1] ó [2].

A continuación se resumen las características más importantes del programa desarrollado:

- Elementos isoparamétricos de cuatro nodos.
- Integración de los coeficientes del sistema de ecuaciones mediante un método adaptativo.

- Aprovechamiento de varios procesadores para la integración de los coeficientes utilizando varios hilos de trabajo.
- Resolución del sistema de ecuaciones mediante el método iterativo GMRES(50).
- Tratamiento de dos vectores de carga (casos simétrico y antisimétrico).
- Cálculo de los coeficientes constantes sólo en el primer paso de tiempo.
- Método aproximado mediante descomposición ortogonal y elección del intervalo entre dos pasos de control sucesivos.

Dicho programa se diferencia de las implementaciones habituales sobre todo en el último punto de la lista anterior, que se describe a continuación en más detalle.

En el caso de problemas tridimensionales el número de incógnitas suele ser muy elevado. Así, por ejemplo en los casos relacionados con los cruces de trenes, el número de incógnitas oscila entre 6.000 y 11.000, en función de la longitud de los trenes y el nivel de detalle utilizado en su discretización. El objetivo de estas simulaciones es obtener historias temporales de presiones, fuerzas y momentos, con lo cual hay que calcular las matrices de coeficientes para muchas configuraciones geométricas distintas, aunque los coeficientes cambien poco entre dos pasos de tiempo sucesivos. Tanto es así que al menos la mitad de los coeficientes no cambia al relacionar puntos de colocación y elementos que pertenecen al mismo objeto. Aprovechando esta situación, los coeficientes se calculan sólo una vez en el primer paso. Aparte de guardar los propios coeficientes también hay que guardar su contribución al vector de carga. Para simular el paso de las cabezas tractoras con un desplazamiento relativo en cada paso de tiempo de 0,4 m, el número de pasos de tiempo suele estar entorno a 200. Los dos procesos más costosos en tiempo de cálculo para la simulación son el cálculo de los coeficientes y la resolución del sistema, estando muy por encima el primero ya que en general son necesarias menos de 60 iteraciones del método GMRES para reducir el residuo a un nivel aceptable.

El carácter estacionario de las soluciones de la ecuación de Laplace implica que la solución del potencial en un instante de tiempo no depende de las soluciones correspondientes a todos los instantes de tiempo anteriores. La solución transitoria en un instante de tiempo en particular depende por tanto sólo de las dos o tres soluciones estacionarias en pasos de tiempo sucesivos, según la aproximación temporal elegida en forma de diferencias finitas. Este aspecto es muy importante al permitir la cuantificación del error correspondiente a un método aproximado en cualquier paso de tiempo aunque no se disponga de la solución exacta en todos los pasos anteriores. Esta particularidad del problema ha motivado el desarrollo de un método aproximado que se describe más adelante.

El modelo empleado para la simulación del cruce comprende 7916 elementos. En la Figura 1 se presenta una vista isométrica de uno de los dos trenes de idéntico diseño.

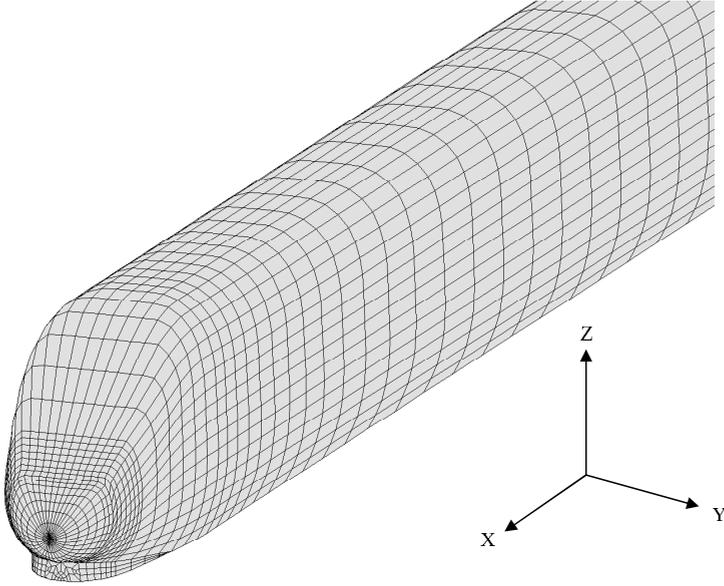


Figura 1: Vista isométrica de la malla de cálculo

## 4 El método aproximado

En el método aproximado se utilizan las soluciones  $u(t_i)$  del potencial de algunos pasos de tiempo  $t_i$  para generar una matriz de observaciones

$$X = [u(t_1)^T \ u(t_2)^T \ \cdots].$$

El intervalo entre dos pasos utilizados para ello es un dato de entrada. La aplicación de la descomposición de valores singulares a la matriz de observaciones permite extraer las funciones de forma espaciales más importantes y con ellas se define una base vectorial inicial. Por tanto, se obtienen las tres matrices  $\Phi$ ,  $\Sigma$  y  $\Psi$  como sigue:

$$X = \Phi \Sigma \Psi^T.$$

Las columnas de la matriz  $\Phi$  contienen las funciones de forma, que son los autovectores de la matriz de covarianzas de la matriz de observaciones

$$R = X X^T,$$

mientras que la matriz  $\Sigma$  contiene los valores singulares en la diagonal (sus cuadrados coinciden con los autovalores de la matriz de covarianzas  $R$ ). Las funciones de ponderación en el tiempo se obtienen proyectando la matriz de

observaciones en las direcciones de los distintos autovectores, aunque este paso no se lleva a cabo, dado que las funciones de ponderación no son de interés para el cálculo posterior.

Para la elección de los vectores que componen la base vectorial inicial se seleccionan aquéllos cuyos autovalores no son inferiores a  $10^6$  veces el autovalor máximo.

A continuación se procede al cálculo de las soluciones de la manera habitual, es decir utilizando las matrices completas, en los llamados pasos de control. Después se eligen las filas del sistema de ecuaciones que serán utilizadas para calcular una solución aproximada con la base actual. Los resultados son por un lado la matriz de coeficientes reducida  $H_{red}$  y por otro el vector de carga reducido  $f_{red}$ . A continuación se calcula la solución aproximada con la base actual  $\Phi_{act}$  en los siguientes dos pasos:

$$\bar{a} = \arg \min (\|H_{red}\Phi_{act}\bar{a} - f_{red}\|),$$

$$u_{aprox} = \Phi_{act}\bar{a}.$$

Comparando el residuo resultante se procede a enriquecer la base con una o más funciones de forma adicionales si fuese necesario. Las funciones de forma adicionales suelen derivarse del propio vector residual.

Este proceso se repite hasta reducir el residuo a un nivel aceptable. En general es suficiente la ampliación de la base por el vector del residuo normalizado para conseguir la convergencia. Se supone que la base determinada de esta forma contiene la información suficiente para aproximar las soluciones correspondientes a pasos de tiempo vecinos con una precisión aceptable. En el siguiente paso se calculan para estos pasos de tiempo las soluciones aproximadas del problema reducido, es decir, solamente se calculan los coeficientes de una parte reducida del sistema de ecuaciones.

Es evidente que el número de ecuaciones de control del problema reducido influye mucho en el tiempo de cálculo del algoritmo. Mientras que en problemas pequeños se pueden elegir las filas de control manualmente, en el caso de modelos tridimensionales con varios miles de grados de libertad se optará por elegir cada  $k$ -ésima fila del sistema de ecuaciones. Para variar las ecuaciones de control a lo largo de la simulación se desplaza este conjunto de manera aleatoria en cada paso de tiempo. De esta forma se consigue un muestreo sobre todas las ecuaciones del sistema a lo largo de la simulación. El límite inferior para la cantidad de filas lo marca el número de vectores base. En consecuencia, tanto el número de los vectores base como el de las ecuaciones de control pueden variar durante una simulación. Los resultados presentados a continuación han sido calculados utilizando el 10 % de las filas del sistema completo siendo el número de vectores base al comienzo de la simulación de 21.

En el diagrama de flujo presentado en la Figura 2 se han resumido los pasos más importantes del método aproximado, siendo cada cuarto paso uno de control.

En el contexto de la reducción de modelos existen los conceptos de controlabilidad y observabilidad de estados del sistema. Dichos conceptos son

muy importantes a la hora de reducir el modelo de manera adecuada. Para la elección de las funciones de forma más importantes se suelen calcular los valores singulares de Hankel, aunque en la implementación desarrollada se aplica un criterio más sencillo que, como ya se comentó anteriormente, consiste en la eliminación de la base completa de aquellas funciones de forma cuyos autovalores son inferiores a  $10^{-6}$  veces el del valor máximo. Para una descripción detallada de los conceptos más sofisticados como por ejemplo el de la reducción de modelos mediante truncamiento en el espacio de estados se recomienda consultar la literatura correspondiente, como por ejemplo [3] y [4]. El aumento de la base durante una simulación con cientos de pasos puede aumentar el tiempo de cálculo necesario de manera significativa. Por tanto, existe la posibilidad de

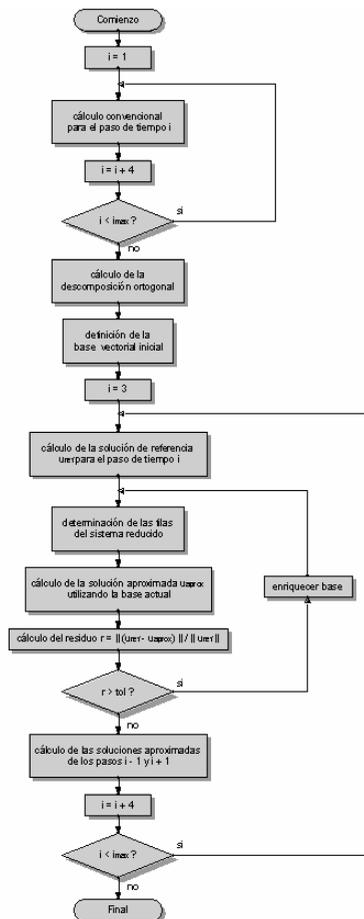


Figura 2: Diagrama de flujo del método aproximado

comprobar, en cada paso de control, si se puede eliminar un vector de la base

para limitar el tamaño de ella. Al igual que ocurre al enriquecer la base donde existen varias opciones de determinar el vector nuevo, a la hora de reducir la base hay que emplear algún criterio. En este sentido no hay que olvidar que dicho vector puede tener una participación importante en pasos de tiempos posteriores. Un criterio que se base solamente en el peso de la contribución de cada uno de los vectores de la base en la solución correspondiente al paso de control no tiene en cuenta este aspecto. En general, no se recomienda eliminar los vectores de la base inicial debido a la evidente importancia para la simulación. Aunque se hayan obtenido buenos resultados con un programa para problemas bidimensionales en que se permite la reducción de la base, a lo largo de la simulación se ha renunciado a la implementación de esta característica en el programa para problemas tridimensionales.

Es evidente que el ahorro de tiempo de cálculo se debe a la determinación de la solución de algunos pasos de tiempo con el sistema reducido. Siendo cada cuarto paso uno de control y habiendo utilizado las soluciones correspondientes a una cuarta parte para calcular la matriz de observaciones al comienzo de la simulación, se ha obtenido la solución “exacta” en cada segundo paso de tiempo. Entonces se podría plantear la siguiente pregunta. ¿Por qué no se interpola linealmente entre las soluciones exactas para obtener las soluciones aproximadas para los restantes pasos de tiempo?

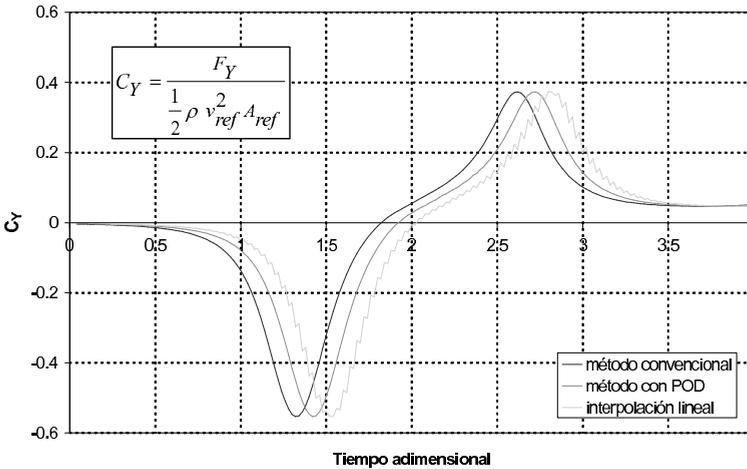


Figura 3: Comparación de las historias temporales del coeficiente  $C_Y$  calculadas con distintos métodos

Contemplando la Figura 3, se puede fácilmente deducir la respuesta a esta pregunta, ya que la precisión de los resultados no es ni mucho menos satisfactoria. En dicha figura se han presentado las tres historias temporales para el coeficiente aerodinámico  $C_Y$  correspondientes a la solución de referencia, la obtenida con el método aproximado y la obtenida por interpolación lineal.

Para facilitar la identificación de las diferencias se ha introducido un incremento temporal de 0,1 para las dos últimas curvas. Se observa claramente que el método aproximado (método con POD) conserva la regularidad de la solución de referencia mientras que la historia temporal obtenida interpolando linealmente introduce cambios bruscos en la solución. Al imponer ésta última como carga transitoria a un modelo de elementos finitos de la estructura de los coches se producirían vibraciones que en la realidad no existen.

La calidad de los resultados para otros coeficientes es muy parecida, como se puede observar en la Figura 4, donde se presentan las historias temporales del coeficiente  $C_N$ .

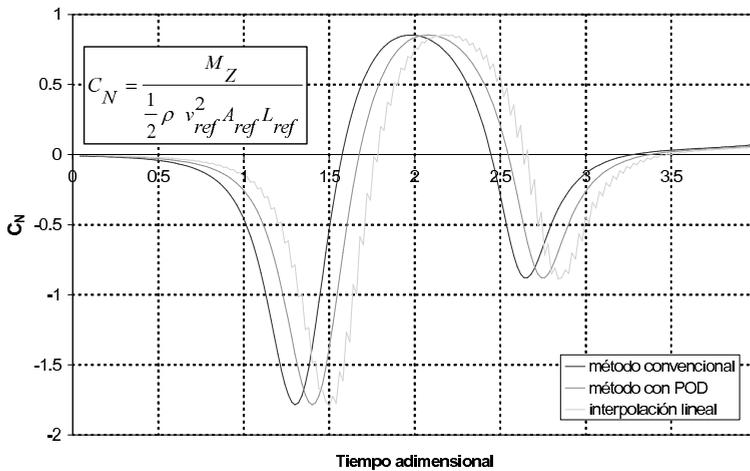


Figura 4: Comparación de las historias temporales del coeficiente  $C_Y$  calculadas con distintos métodos

El ahorro de tiempo en el caso estudiado corresponde al 30 % del resultante al usar el método convencional.

## Referencias

- [1] G. BEER, *Programming the Boundary Element Method*, Wiley & Sons, 2001.
- [2] C. A. BREBBIA, J. DOMINGUEZ, *Boundary Elements : an Introductory Course, 2nd edition*, McGraw-Hill, 1989
- [3] B. RAHN, *A Balanced Truncation Primer*, Institute for Quantum Information, California Institute of Technology, 2001.
- [4] K. ZHOU, J. C. DOYLE, K. GLOVER, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.



# Algunos problemas de interpolación en procesamiento de imágenes

VICENT CASELLES

Dpto. Tecnología, Universitat Pompeu Fabra,  
Passeig de Circumvalació, 8, 08003 Barcelona

`vicent.caselles@upf.edu`

## Resumen

Problemas de interpolación aparecen en diversos contextos del procesamiento de imágenes: cartografía digital, compresión de imágenes basadas en regiones, restauración y manipulación de imágenes, restauración de *agujeros* en superficies digitalizadas, fotografía digital o imágenes satélite. Presentamos algunos de ellos y discutimos una posible solución basada en la morfología matemática. Adaptando algunas de las ideas básicas sobre el contenido geométrico de las imágenes a cada caso concreto, pueden construirse modelos variacionales o basados en ecuaciones en derivadas parciales cuya solución numérica proporciona la interpolación buscada.

## 1 Introducción

### 1.1 Imágenes digitales

Simplificando las cosas, podemos decir que una imagen digital es como una fotografía, diferenciándose tan sólo en su codificación. Consideremos primero, para simplificar, imágenes de intensidades o niveles de gris (fotografías en blanco y negro). Para digitalizar una fotografía y guardarla en la memoria de un ordenador, la dividimos en pequeños cuadrados a los que llamaremos ‘pixels’ y colocamos en cada uno de ellos un número que representa la luminosidad o nivel de gris del pixel. El valor numérico 0 representa el negro, el valor numérico 255 representa el blanco, y los enteros  $1, 2, \dots, 254$  representan los niveles de gris intermedios. Después de la división de la imagen en pixels y de la codificación de los niveles de gris en números enteros de 0 a 255 tenemos la imagen digitalizada, es decir, la hemos convertido en una matriz de enteros que podemos almacenar en la memoria del ordenador.

---

Fecha de recepción: 10/08/05

Visualizar la imagen requiere, de alguna manera, reinvertir este proceso, transformar la imagen digital en cantidades de luz que representen la sensación asociada al nivel de gris correspondiente. Este proceso tiene lugar cuando miramos la imagen en la pantalla del ordenador. La Figura 1.a muestra una imagen de la que hemos extraído un fragmento representado en la Figura 1.b, siendo los valores numéricos del nivel de gris los de la Figura 1.c.

Diremos pues que una imagen digital es una función  $u : \{0, 1, \dots, M - 1\} \times \{0, 1, \dots, N - 1\} \rightarrow [0, 255] \cap \mathbb{Z}$  donde, para simplificar, hemos escogido como rango de valores de  $u$  los valores enteros de 0 a 255 y  $M, N \in \mathbb{Z}$ . Una imagen analógica sería una función  $u$  con valores reales definida en un rectángulo de  $\mathbb{R}^2$  que, para simplificar, podemos suponer que es el cuadrado unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Digitalizar una imagen analógica supone discretizar tanto su dominio de definición (operación llamada muestreo) como su rango de valores (operación llamada cuantización).



Figura 1: a) Lena. b) Extracto de Lena. c) Niveles de gris

## 1.2 Algunos problemas de interpolación

Los problemas de interpolación aparecen en diversos contextos en procesamiento de imágenes. Vamos a presentar algunos de ellos en esta introducción sin pretender ser exhaustivo. La selección de estos problemas está motivada tanto por su interés práctico como por razones de exposición: vamos a situarlos en un contexto común de interpolación de estructuras topográficas, idea que desarrollaremos en detalle en el resto del trabajo.

Los métodos de interpolación que discutiremos en este trabajo han estado propuestos o inspirados por aplicaciones en

- cartografía digital,

- métodos de compresión basados en segmentaciones de la imagen en regiones (usan algoritmos de interpolación a partir de datos dados sobre una familia de curvas),
- restauración de imágenes (incluyendo vídeos) y superficies,
- fusión de imágenes satélite.

En el contexto de la cartografía digital, se plantea el problema de la reconstrucción de un modelo digital de elevación de terreno a partir de una familia de curvas de nivel (ver Figura 2). Las curvas de nivel seleccionadas son generalmente representativas de la elevación real y es poco probable que oscilaciones importantes de los datos no hayan sido reflejadas por las mismas. Ello implica que los métodos de interpolación razonables no deben crear oscilaciones artificiales entre las curvas de nivel dadas. La traducción matemática de este principio ha llevado a algunos investigadores a proponer métodos de interpolación basados en la solución de ecuaciones en derivadas parciales que satisfacen el principio del máximo (entre ellas, la ecuación de Laplace) en dominios determinados por curvas de nivel (véase [30]). Los métodos propuestos son muy astutos y reflejan algunas de las propiedades matemáticas que nos servirán de base para formular un planteamiento axiomático del problema.

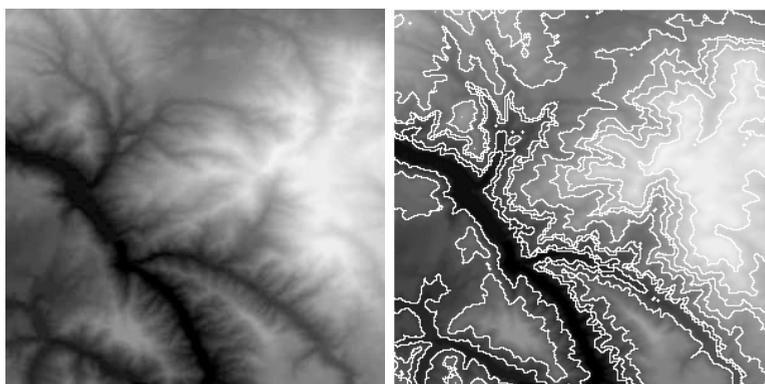


Figura 2: a) Visualización como imagen de un modelo digital de elevación de terreno. b) Algunas de sus curvas de nivel.

Los métodos de compresión de imágenes basados en regiones — llamados métodos de segunda generación —, que intentan alcanzar altas tasas de compresión, proponen una representación de la imagen en contornos y texturas. Los contornos o curvas que delimitan los objetos de una imagen pueden obtenerse de diferentes maneras, por ejemplo, pueden estar formados por una selección de curvas de nivel de la imagen atendiendo a criterios de coste de codificación. En los métodos de compresión basados en regiones se codifican los

contornos (con su nivel de gris) y el receptor ha de recuperar a partir de ellos el nivel de gris de cada pixel de la imagen; véase [52].

La Figura 3 nos muestra una imagen  $u : [0, 1]^2 \mapsto [0, 256]$  (donde  $u(x)$  representa el nivel de gris en el punto  $x \in [0, 1]^2$ ) y la familia de curvas de nivel (es decir, las fronteras de los conjuntos de nivel  $\{x \in [0, 1]^2 : u(x) \geq \lambda\}$ ) para los valores de  $\lambda$  múltiplos de 20. Se trata de recuperar los niveles de gris intermedios, perdidos por la cuantización de las curvas de nivel de  $u$ . En este contexto, J.R. Casas [52] propuso un algoritmo de interpolación basado en la propagación de los valores de la imagen en los contornos. De nuevo, una variante de este algoritmo puede interpretarse en términos de la solución de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico.



Figura 3: a) Imagen dada. b) Curvas de nivel correspondientes a los múltiplos de 20.

La necesidad de restaurar o retocar imágenes abarca desde la clásica restauración de pinturas hasta la actual de fotografías y películas. Los objetivos pueden ir desde evitar el deterioro (caso de rayas o motas de polvo en películas) hasta añadir o suprimir detalles, objetos o personas (desde la supresión de un texto en una imagen hasta la infame desaparición de enemigos políticos [37]). La Figura 4 nos muestra un ejemplo de aplicación de las técnicas de ‘inpainting’ para suprimir un texto impreso sobre una fotografía. Por comodidad, nos referiremos a todo este tipo de aplicaciones con el término ‘inpainting’, que es la palabra inglesa para referirse a la restauración de pinturas. Con el desarrollo de la tecnología digital, se usan cada vez más las técnicas digitales en inpainting de imágenes, aunque éstas se aplican aún de forma manual, siendo necesario el desarrollo de métodos robustos que permitan su automatización.

Podemos clasificar los trabajos sobre inpainting de imágenes digitales en tres grandes grupos. El primero de ellos contiene los relativos a la restauración de películas [39, 40, 41], el segundo abarca los trabajos relativos a la síntesis de texturas, y el tercero los relativos al inpainting de estructuras geométricas. Los métodos dedicados a la síntesis de texturas están basados en formulaciones de la imagen como campo de Markov e intentan reproducir los patrones repetitivos de la imagen, ver [28]. Los métodos dedicados al inpainting de estructuras geométricas están basados en formulaciones variacionales (la elástica de Euler) [45, 47, 46, 8, 10, 9] o bien directamente en ecuaciones en derivadas parciales



Figura 4: a) Fotografía de New-Orleans con texto. b) Imagen restaurada.

[15, 16].

Mientras que las imágenes digitales en niveles de gris pueden ser representadas como funciones  $u : \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$  (tomando de hecho un conjunto discreto de valores), las imágenes en color lo son como funciones  $\vec{u} : \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es decir, como tres imágenes escalares asociadas a una descomposición de la luz en tres bandas espectrales que podemos llamar rojo, verde y azul. La imagen de intensidad correspondiente, a la que llamaremos a partir de ahora *imagen pancromática*, se calcula sumando las contribuciones de los tres canales de  $\vec{u}$  con pesos convenientes. En el contexto de las imágenes satélite, para economizar el espacio de almacenamiento, se adquiere la imagen pancromática a la máxima resolución de muestreo espacial y los tres canales de color (más eventualmente un canal infrarrojo) a una resolución  $s$  veces más pequeña, donde  $s = 2$  ó  $4$ . En la Figura 5 mostramos una imagen pancromática y los tres canales de color ( $R, G, B$ ) a una resolución 4 veces más pequeña. En este caso un pixel de la imagen pancromática representa 0,7 metros mientras que un pixel de la imagen en color representa 2,8 metros. El objetivo consiste en recuperar los canales de color a la resolución de la imagen pancromática [11]. En la Sección 6 propondremos una solución de este problema asignando a los canales de color ( $R, G, B$ ) de  $\vec{u}$  la estructura topográfica, es decir, las curvas de nivel, de la imagen pancromática asociada.

El objetivo de estas notas es explicar cómo los problemas planteados en esta introducción pueden tratarse desde una perspectiva común: como problemas



Figura 5: a) Imagen pancromática a la resolución de 0,7 m/píxel, denotada por  $u$  en la Sección 6. b) Canales de color  $\vec{u} = (R, G, B)$  a la resolución de 2,8 m/píxel.

de interpolación del mapa topográfico de una imagen. El mapa topográfico es la estructura básica que permite describir la información geométrica de una imagen y a él está dedicada la Sección 2. La Sección 3 está dedicada a plantear el problema de interpolación — a partir de datos dados sobre una familia de curvas de una imagen — de forma axiomática, empezando con los requisitos básicos que ha de satisfacer un operador de interpolación y deduciendo que éste se obtiene resolviendo una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico. Veremos cómo se enmarcan en este contexto los dos primeros problemas presentados en esta introducción. La Sección 4 está dedicada al problema de inpainting de imágenes. Presentaremos la formulación variacional basada en la elástica y mostraremos algunos experimentos de restauración de imágenes y de superficies. La Sección 5 contiene algunos comentarios sobre el problema de inpainting de vídeo. La Sección 6 está dedicada al problema de la fusión de imágenes satélite multi-espectrales y nos servirá como excusa para hablar de un modelo simplificado de la geometría de las imágenes en color.

Han quedado de lado muchos otros problemas de interpolación (entre ellos los relacionados con la conversión análogo-digital) que se abordan mejor desde el punto de vista de los ‘splines’ o del Análisis de Fourier. El lector interesado en una buena introducción a los mismos puede consultar [57].

## 2 La geometría de las imágenes de intensidad

Ante una imagen de cualquier escena natural podemos hacernos la siguiente pregunta básica: ¿ cuáles son las formas geométricas presentes ?. De otra forma, ¿ cuáles son los objetos presentes ?, ¿ cómo reconstruirlos ?

Estas preguntas son muy complejas y no podemos decir por ahora que



Figura 6: El despacho del INRIA.

existan respuestas satisfactorias a ellas. Como ocurre muchas veces en la ciencia, conviene modificar ligeramente la pregunta de manera que seamos capaces de darle una respuesta que, aunque no nos satisfaga completamente, permita llegar a una conclusión operativa. Transformamos pues las preguntas anteriores en la siguiente: ¿cuáles son las formas **computables** presentes en una imagen ?

No vamos a abordar esta cuestión desde un punto de vista filosófico, más bien buscamos una definición operativa de la idea de forma u objeto en una imagen. Ilustremos, antes de nada, la complejidad de esta tarea con la imagen de la Figura 6, que representa un despacho con un par de mesas y sillas. Esta observación, que es una tarea muy sencilla para la visión humana, supone de hecho una construcción muy elaborada: una observación atenta de la imagen nos permite ver que lo que llamamos ‘silla’ no es más que un conjunto de manchas de niveles de gris muy diferentes que agrupamos perceptualmente. Una definición de silla debería incluir todos los tipos diferentes de sillas, cuesta creer que la tarea de reconocerlas sea factible para un ordenador ...



Figura 7: Imágenes binarias

Antes de dar nuestra respuesta a la pregunta anterior, vamos a considerar un caso más sencillo aunque no exento de dificultades: el caso de imágenes con dos

niveles de gris (por ejemplo blanco y negro), o imágenes binarias. La Figura 7 muestra ejemplos de imágenes binarias. Vemos unos ‘objetos negros sobre fondo blanco’ (¿ objetos blancos sobre un fondo negro’ ?). La ambigüedad figura-fondo está ilustrada en la Figura 8.a. Otro tipo de dificultades que presentan las imágenes binarias está ilustrada por el triángulo de Kanizsa, Figura 8.b, que nos presenta un contorno ilusorio (ya que no existe una discontinuidad del nivel de gris en el contorno del triángulo) que, no obstante, ‘vemos’ con mucha fuerza perceptiva. No vamos a entrar en más detalles relativos a los problemas presentes en la percepción de las imágenes binarias y mandamos para ello a la obra de los psicólogos de la Gestalt, entre ellos a la obra de G. Kanizsa, accesible en castellano [36].

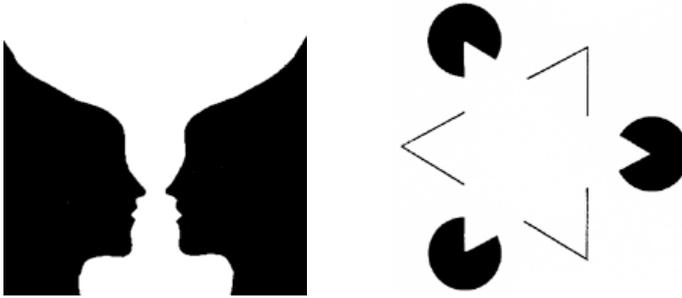


Figura 8: a) ¿ Vaso o caras ? b) El triángulo de Kanizsa.

Alguna vez, al poner en marcha el ordenador, nos hemos dado cuenta de que la pantalla estaba algo oscura por estar desajustado el contraste. En un caso así y para ver mejor las imágenes de la pantalla, modificamos el contraste hasta que nuestra visión es satisfactoria. Algunos aumentaremos más que otros la luminosidad de la pantalla pero todos estaremos de acuerdo en que no por ello no estamos viendo la misma imagen. Admitimos que tanto antes como después del ajuste de contraste ambas imágenes nos proporcionan la misma información geométrica. Tomaremos este hecho básico como axioma. Para precisarlo, vamos a dar algunas definiciones.

**Definición 1** *Llamaremos cambio de contraste a cualquier función  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  continua y estrictamente creciente.*

La noción de cambio de contraste pretende formalizar el ajuste de contraste del que hablamos en nuestra experiencia compartida. No se trata más que de un reordenamiento (biyectivo) de los niveles de gris. Podemos ahora enunciar nuestro axioma básico.

**Axioma básico:** *Dada una imagen  $u$  y un cambio de contraste  $g$ , las imágenes  $u$  y  $g(u)$  poseen la misma información geométrica.*

Este axioma nos permite responder a la pregunta que enunciamos al principio, es decir, nos permite decir cuáles son las formas geométricas de una

imagen. Si decimos que  $u$  y  $g(u)$  están relacionadas por un cambio de contraste y definimos las clases de equivalencia según esta relación, el axioma básico nos dice que el contenido geométrico de una imagen  $u$  está asociado a su clase de equivalencia en el conjunto de las imágenes.

Los cambios de contraste permiten una formalización matemática sencilla de la relación entre dos imágenes de una misma escena tomadas con iluminaciones (globales) distintas. Lo mismo ocurre si las imágenes son tomadas con cámaras distintas. De hecho, cualquier sensor o cámara traduce el ‘continuum’ de intensidades luminosas siguiendo una curva de contraste específica (el número de fotones que llegan al sensor se traduce de forma no lineal en la intensidad medida aunque esta traducción pueda ser aproximadamente lineal en un cierto rango de valores), que en la práctica nos es desconocida.

Estas consideraciones llevaron hace más de ochenta años al físico y psicólogo de la Gestalt M. Wertheimer [58] a formular como principio básico que el nivel de gris no es un observable. Las imágenes son percibidas módulo un cambio de contraste arbitrario y desconocido. Una doctrina del análisis de imágenes, la *morfología atemática*, reconoce la invarianza por cambios de contraste como un axioma fundamental y propone que las operaciones que se realicen sobre las imágenes lo sean [54] (si aceptamos este axioma, debemos también aceptar sus consecuencias).

Recordemos a continuación una propiedad básica de las funciones con valores reales:

**Definición 2** Consideremos la imagen  $u : [0, 1]^2 \mapsto \mathbb{R}$ . Llamaremos conjuntos de nivel superiores (resp. inferiores) de  $u$  a los conjuntos de la forma

$$X^\lambda u = \{x \in [0, 1]^2 : u(x) \geq \lambda\} \quad (\text{resp. } X_\lambda u = \{x \in [0, 1]^2 : u(x) \leq \lambda\}),$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por comodidad, utilizaremos la notación  $[u \geq \lambda]$  ó  $[u \leq \lambda]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  para denotar el conjunto de nivel superior, o inferior, de nivel  $\lambda$ .

Una función con valores reales puede describirse en términos de sus conjuntos de nivel. Enunciemos este resultado en términos precisos:

**Proposición 1** Si  $u : [0, 1]^2 \mapsto [a, b]$  es una función, los conjuntos de nivel superiores de  $u$ ,

$$X^\lambda := X^\lambda u = \{x \in [0, 1]^2 : u(x) \geq \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

cumplen las propiedades siguientes:

- (i)  $X^\lambda \subseteq X^\mu$  si  $\lambda > \mu$ ,  $X^a = [0, 1]^2$ ,  $X^\lambda u = \emptyset$  para todo  $\lambda > b$ .
- (ii)  $X^\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} X^\mu$  para todo  $\lambda > -\infty$ .

Recíprocamente, si  $\{X^\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$  es una familia de conjuntos que cumple las propiedades (i) y (ii), entonces la función  $u : [0, 1]^2 \rightarrow [a, b]$  definida por la fórmula

$$u(x) = \sup\{\lambda : x \in X^\lambda\} \tag{1}$$

tiene por conjuntos de nivel los conjuntos  $X^\lambda u = X^\lambda$ .

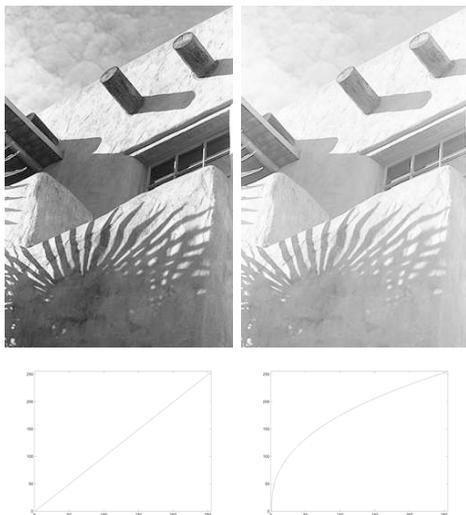


Figura 9: Cambios de contraste.

No vamos a dar en detalle la demostración de este hecho, por otro lado simple. No es más que una traducción de las propiedades elementales de los números reales.

Llamaremos *descripción topográfica* de una función a la descripción de la misma en términos de sus conjuntos de nivel, tal como se hace en la Proposición 1. Ésta es en la práctica similar a la descripción de un mapa de alturas por curvas de nivel, de donde tiene sentido la denominación precedente.

Todos estamos acostumbrados a leer la altura del mapa mirando las curvas de nivel, pudiendo visualizar mentalmente la topografía, siempre y cuando conozcamos la altura de cada curva. Vamos a aclarar pues por qué hemos utilizado conjuntos en vez de curvas de nivel. La descripción de la función altura en términos de curvas de nivel es perfecta si por todo punto pasa una y sólo una curva, como ocurre con las funciones suaves. Sin embargo si la función es discontinua a lo largo de una curva rectificable (una curva de clase  $C^1$  por ejemplo), entonces no podemos afirmar que por los puntos de esta curva pasa una curva de nivel. De hecho, esto ocurriría en un acantilado, por citar un ejemplo (un acantilado es una manera gráfica de representar una discontinuidad de salto del nivel de gris). Para evitar esta complicación técnica hemos utilizado los conjuntos de nivel como descriptores de la topografía de una función con valores reales. Las curvas de nivel pueden recuperarse tomando las fronteras de los conjuntos de nivel, siempre que estas fronteras sean curvas, lo cual depende ya del modelo funcional que utilicemos para describir las imágenes.

Por ejemplo, si la función es suave podemos definir sus curvas de nivel por las fronteras (relativas al dominio  $[0, 1]^2$ )

$$\partial X^\lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observemos que  $\partial X^\lambda u = \partial X_\lambda u$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de manera que podemos restringirnos a considerar solamente las fronteras de los conjuntos de nivel superiores. Genéricamente, es decir, para casi todos los niveles  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se cumplirá que

$$\partial X^\lambda u = [u = \lambda],$$

con la excepción eventual de los rellanos.

**Definición 3** *Llamaremos curvas de nivel de  $u$  a las fronteras de sus conjuntos de nivel, sean éstos superiores o inferiores.*

Más adelante mencionaremos otros modelos funcionales más generales y mejor adaptados a las imágenes que las funciones suaves y para los cuales las curvas de nivel son efectivamente uniones a lo sumo numerables de curvas de Jordan.

En la Figura 10 aparecen las curvas de nivel — correspondientes a niveles múltiplos de 20 — de la Figura 1.a. Podemos ver de manera compacta la geometría de la imagen 1.a.



Figura 10: Curvas de nivel de Lena correspondientes a los múltiplos de 20.

Los conjuntos de nivel constituyen los invariantes básicos de una imagen módulo cambios de contraste; en otras palabras, se cumple:

**Proposición 2** *Dos imágenes relacionadas por un cambio de contraste comparten sus familias de conjuntos de nivel.*

En efecto, consideremos una imagen  $u : [0, 1]^2 \mapsto \mathbb{R}$  y un cambio de contraste  $g$ . Observemos que, siendo continua y estrictamente creciente,  $g$  es una biyección de  $\mathbb{R}$  sobre su imagen. Entonces, para cada  $\lambda \in g(\mathbb{R})$ , se cumple

$$\begin{aligned} X^\lambda g(u) &:= \{x \in [0, 1]^2 : g(u(x)) \geq \lambda\} \\ &= \{x \in [0, 1]^2 : u(x) \geq g^{-1}(\lambda)\} = X^{g^{-1}(\lambda)} u. \end{aligned}$$

Así, las familias de conjuntos de nivel coinciden aunque tengamos que modificar las alturas correspondientes.

En términos de interpretación topográfica, si miramos las curvas de nivel de un mapa sin ver la altura correspondiente estamos mirando de hecho muchos mapas, todos ellos relacionados por cambios de contraste. Por cierto, los cambios de contraste que respetan la estructura topográfica pueden ser locales, es decir de la forma  $v(x) = g(x, u(x))$ , siendo  $g$  una función con la dependencia adecuada en  $x$  de forma que  $u$  y  $v$  posean la misma estructura topográfica.

Para completar este círculo de ideas tan sólo queda por enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 3** *Si  $u$  y  $v$  son dos imágenes cuyas familias de conjuntos de nivel superiores coinciden, existe un cambio de contraste generalizado  $g$  tal que  $v = g(u)$ .*

Observemos que el enunciado habla de un cambio de contraste generalizado, de hecho de una función no decreciente  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Todo esto forma parte de los detalles técnicos de las demostraciones y no es nuestro objetivo aquí insistir en ello.

Esta excursión por la morfología matemática nos permite responder a lo que podemos considerar como formas de una imagen. Admitiendo el axioma básico, todas las imágenes relacionadas por un cambio de contraste comparten la misma información geométrica y, según las Proposiciones 2 y 3, esta información consiste en los conjuntos de nivel comunes a dichas imágenes.

## 2.1 Cambios de contraste locales

Los conjuntos de nivel son pues objetos básicos en tratamiento y análisis de imágenes. Para tener una descripción más local de los objetos de una imagen algunos autores han propuesto considerar las componentes conexas de los conjuntos de nivel como objetos básicos; véase [54], [19].

El argumento principal es que los cambios de contraste no son globales sino locales y dependen de las propiedades de reflectancia de los objetos. Por tanto, no sólo los cambios de contraste globales, sino también los locales son irrelevantes a la hora de analizar una imagen. En [19] definimos una noción de cambio de contraste local y vimos cómo las componentes conexas de los conjuntos de nivel son invariantes bajo tales cambios de contraste. Esto conduce al concepto de **mapa topográfico**, es decir, la familia de componentes conexas de los conjuntos de nivel superiores [ $u \geq \lambda$ ] o inferiores [ $u \leq \lambda$ ]. Buscando el nivel más grande de generalidad podemos llamar *objetos básicos de la imagen  $u$*  a los conjuntos de la  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma(u)$  engendrada por las componentes conexas de los conjuntos de bi-nivel [ $\lambda \leq u < \mu$ ]. Para funciones suaves, los átomos de esta  $\sigma$ -álgebra son las componentes conexas de los isoniveles [ $u = \lambda$ ].

Este planteamiento posee interesantes aplicaciones a la comparación de imágenes. Para mencionar alguna de ellas citemos [12], donde los autores proponen comparar imágenes satélite de la misma región geográfica tomadas

en tiempos distintos (o correspondientes a diferentes canales espectrales) comparando los mapas topográficos. Mencionemos también el algoritmo de alineación de imágenes desarrollado en [48], donde el autor se propone calcular la transformación entre dos imágenes de la misma escena tomadas por la misma o distintas cámaras, de manera que la relación entre ambas está dada de manera aproximada por una transformación afín. La alineación de imágenes basada en componentes conexas de conjuntos de nivel funciona de manera eficaz cuando las técnicas clásicas de correlación fallan: cuando ambas imágenes no se corresponden con fotografías tomadas casi simultáneamente. Situaciones más generales requieren aún objetos básicos más generales como fragmentos de curvas de nivel [43].

## 2.2 Algunos modelos funcionales de imágenes

No hemos hablado hasta ahora sobre el tipo de funciones que pueden representar imágenes; éste es, de hecho, un problema muy complejo. Aunque no vamos a resolver este problema en esta sección, vamos a presentar un modelo que parece suficiente para muchas aplicaciones. Mencionemos por ejemplo la segmentación de imágenes, la restauración en el sentido de la deconvolución y supresión de ruido, el aumento de resolución, el inpainting, el estudio de filtros de la morfología matemática y un largo etcétera.

El modelo del que vamos a hablar fue introducido por L. Rudin, S. Osher y E. Fatemi [51] en el contexto de la deconvolución y eliminación de ruido en imágenes. También fue utilizado en segmentación de imágenes por la escuela de De Giorgi para estudiar el modelo de segmentación de Mumford-Shah. Finalmente, fue utilizado también en [2] para (a) fundamentar los desarrollos esbozados en las secciones anteriores, dando un contenido riguroso a los modelos de la morfología matemática para funciones con discontinuidades de salto y (b) poder estudiar tanto algunas familias de filtros del análisis de imágenes como los modelos variacionales de inpainting, de los que daremos cuenta en la Sección 4.

El objeto del trabajo [2] fue proponer un modelo funcional en el que se pudiera describir el mapa topográfico en términos de curvas de Jordan (orientadas). Este modelo funcional, llamado WBV (que se lee en inglés Weak BV, funciones de variación acotada débil), es una variante del espacio de las funciones de variación acotada.

**Definición de función de variación acotada:** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$ . Diremos que  $u$  es una función de variación acotada en  $\Omega$  si  $u \in L^1(\Omega)$  y su gradiente en el sentido de las distribuciones  $Du$  es una medida de Radon vectorial cuya variación total

$$|Du|(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), |\varphi| \leq 1 \text{ en } \Omega \right\}$$

es finita.

Denotaremos  $BV(\Omega)$  el espacio de funciones de variación acotada en  $\Omega$ . Recordemos que  $C_0^\infty(\Omega)$  representa el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables y de soporte compacto en  $\Omega$ .

Diremos que un conjunto medible  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  tiene perímetro finito en  $\Omega$  si  $\chi_E \in BV(\Omega)$ . El perímetro de  $E$  en  $\Omega$  se define por  $P(E, \Omega) := |D\chi_E|(\Omega)$ . Un resultado fundamental debido a De Giorgi [29] establece que  $D\chi_E = \nu \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial^* E}$ , donde  $\partial^* E$  es un subconjunto de la frontera topológica de  $E$  para el cual tiene sentido definir la normal exterior  $\nu$  en el sentido de teoría geométrica de la medida y  $\mathcal{H}^{N-1}$  representa la medida de Hausdorff  $(N-1)$ -dimensional. La frontera  $\partial^* E$  recibe el nombre de *frontera esencial* de  $E$ .

**Definición 4** Diremos que  $u : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función WBV si para casi todos los niveles  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el conjunto de nivel  $[u \geq \lambda]$  tiene perímetro finito.

El único aspecto técnico de esta definición es la noción de conjunto de perímetro finito, dada en un párrafo anterior. De todas formas, para entender los desarrollos que siguen basta tener una comprensión intuitiva de lo que estamos diciendo. Un conjunto tiene perímetro finito si su frontera (rigurosamente hablando su frontera esencial) tiene una longitud finita. Por ejemplo, el conjunto acotado por una curva de Jordan rectificable tiene perímetro finito. Más generalmente, un conjunto como el anterior, acotado exteriormente por una curva de Jordan de longitud finita y por una cantidad a lo sumo numerable de agujeros delimitados por curvas de Jordan de longitud finita y cuya suma de longitudes sea finita, es también un conjunto de perímetro finito en  $\mathbb{R}^2$ . Llamemos a estos conjuntos ‘simples’. Finalmente, una reunión finita o numerable de conjuntos simples tal que la suma de las longitudes de sus fronteras es finita es un conjunto de perímetro finito. Los conjuntos simples pueden ser disjuntos o pueden tocarse en sus fronteras, siempre que lo hagan en un conjunto de longitud nula. Mientras la situación sea la dibujada aquí, la descripción de estas uniones numerables de conjuntos simples puede hacerse sin ambigüedad. Hemos demostrado en [2] que esta situación es la más general posible para los conjuntos de perímetro finito en  $\mathbb{R}^2$ . En otras palabras, todo conjunto de perímetro finito de  $\mathbb{R}^2$  es una unión numerable de conjuntos simples que, si se tocan, lo hacen en una parte de su frontera de longitud nula (además, podemos descomponer cada conjunto simple en sus componentes conexas si nos resulta conveniente; haremos esto más adelante).

Si  $u$  es una imagen WBV, casi todos sus conjuntos de nivel tienen perímetro finito y están formados por uniones, a lo sumo numerables, de componentes conexas que son conjuntos delimitados por curvas de Jordan rectificables. Nuestra conclusión puede resumirse así:

*Si  $u$  es WBV, entonces las formas geométricas computables de  $u$  están dadas por las curvas de Jordan que forman las fronteras exteriores e interiores de las componentes conexas de sus conjuntos de nivel.*

**Nota 1** Las funciones WBV son funciones de variación acotada módulo un cambio de contraste; es decir, para cada función  $u$  que sea WBV, existe una

función  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  continua, acotada y estrictamente creciente tal que  $g(u)$  es de variación acotada.

**Las funciones continuas como modelos de imágenes:** A pesar de que las funciones BV o WBV son mejores para describir imágenes, debido a que permiten discontinuidades de salto a lo largo de curvas rectificables, en algunos contextos (como en el caso de los dos primeros problemas de interpolación mencionados en la Sección 1), las funciones continuas constituyen un modelo razonable. En ambos casos, pretendemos interpolar una función en un dominio en cuya frontera conocemos su valor. Para ello resolvemos una ecuación en derivadas parciales como la ecuación de Laplace o el AMLE (véase la Sección 3) y la solución obtenida es una función continua.

### 3 Una aproximación axiomática al problema de interpolación

Los dos primeros ejemplos considerados en la introducción pueden formularse como problemas de interpolación de datos escalares dispersos dados sobre un conjunto de curvas y/o puntos del plano. Para abordar éstos, seguiremos el planteamiento axiomático propuesto en [22].

Los principales operadores de interpolación aparecen inmediatamente considerando qué tipo de media (lineal o no lineal) debe satisfacer la función a interpolar. Supongamos que conocemos  $u(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}^2$  (que suponemos discretizado) salvo en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . ¿Qué valor deberíamos escoger en  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  ?

Planteemos algunas posibilidades:

1.  $u(x_0)$  es el valor medio de los pixels vecinos.
2.  $u(x_0)$  es el valor mediano de los pixels vecinos.
3.  $u(x_0)$  se obtiene propagando el valor de los pixels vecinos (según precisaremos luego).

Si suponemos ahora que la función  $u$  es un interpolante de sí misma, es decir, que  $u(x_0)$  coincide con el valor medio de  $u$  en un entorno de  $x_0$  (independientemente de lo que signifique ‘valor medio’) para cada  $x_0$  y que  $u$  es de clase  $C^2$ , bajo las posibilidades anteriores obtenemos:

1. Para  $h > 0$  suficientemente pequeño

$$u(x_0) = \frac{u(x_0 + (h, 0)) + u(x_0 - (h, 0)) + u(x_0 + (0, h)) + u(x_0 - (0, h))}{4} .$$

Tras algunos cálculos, haciendo tender  $h \rightarrow 0$ , el desarrollo de Taylor permite escribir que

$$\Delta u(x_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_0) = 0.$$

Ésta es la que podríamos llamar *interpolación estándar*. El cálculo anterior puede extenderse a muchas otras medias lineales.

2. De nuevo, para  $h > 0$  suficientemente pequeño,

$$u(x_0) = \text{valor mediano de } \{u(y), y \in D(x_0; h)\},$$

donde  $D(x_0; h)$  es la bola de centro  $x_0$  y radio  $h$ . Después de algunos cálculos y haciendo tender  $h \rightarrow 0$ , puede demostrarse en este caso que

$$\begin{aligned} \text{Curv}(u)(x_0) &= \frac{1}{|Du|^3} D^2u(Du^\perp, Du^\perp) \\ &= \frac{u_{x_2}^2 u_{x_1 x_1} - 2u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_1}^2 u_{x_2 x_2}}{(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^{3/2}} = 0, \end{aligned}$$

donde  $\text{Curv}(u)(x_0)$  es la curvatura de la curva de nivel que pasa por  $x_0$  y  $Du^\perp$  es perpendicular a  $Du$  con  $|Du^\perp| = |Du|$ , siendo  $Du = (u_{x_1}, u_{x_2})$  el gradiente de  $u$  y  $D^2u$  la matriz Hessiana de  $u$ .

Aquí y en lo sucesivo, dada una matriz  $2 \times 2$   $A = (a_{ij})_{i,j}$  y dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , utilizaremos la notación  $A(x, y) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} x_i y_j$ .

3. En el caso de propagación de valores discutido por J.R. Casas, si  $u$  es de clase  $C^2$  y  $u(x)$  se obtiene promediando los valores propagados de pixels vecinos siguiendo la dirección del gradiente, podemos escribir

$$u(x) = \frac{1}{2} (u(x + hDu) + u(x - hDu)) + o(h^2).$$

Haciendo  $h \rightarrow 0$  y calculando el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$D^2u(Du, Du) = u_{x_1}^2 u_{x_1 x_1} + 2u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_2}^2 u_{x_2 x_2} = 0.$$

En conclusión, después de analizar los algoritmos anteriores, hemos visto que la función interpolante satisface alguna de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico siguientes

$$\Delta u = 0. \tag{2}$$

$$D^2u(Du^\perp, Du^\perp) = 0, \tag{3}$$

$$D^2u(Du, Du) = 0. \tag{4}$$

Un análisis axiomático detallado de los operadores de interpolación permite obtener todos los anteriores e identificar aquéllos que satisfacen una serie razonable de requisitos. De hecho, veremos cómo los tres operadores analizados describen esencialmente todas las posibilidades de que disponemos. El segundo de ellos, dado por (3), no admite en general solución. El primero de ellos (2) es un operador de interpolación excelente y estándar pero no permite interpolar puntos aislados (como es bien sabido, no existen funciones  $u$  que verifiquen  $\Delta u = 0$  en  $D(0; r)$ ,  $u = 0$  sobre  $\partial D(0; r)$  y  $u(0, 0) = 1$ ). La ecuación (4), en

cambio, produce el cono  $u(x) = |x| - 1$  como resultado de la interpolación. Esta ecuación (4) es, digamos, nueva en el contexto de procesamiento de imágenes. Para ella, usando los resultados de Aronsson [6] y Jensen [35], se demuestra que existe un interpolante Lipschitz continuo si los datos están dados por funciones Lipschitzianas en un conjunto de curvas y/o puntos (aunque nos inspiramos en los trabajos de Casas [18] para llegar a dicho operador, el método de este autor no produce necesariamente una interpolación continua de los datos, en contraste con el operador de Aronsson [6]; véase también [35]).

Volveremos a hablar de todo esto más adelante.

Sea  $\mathcal{C}$  un conjunto de curvas de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . Para cada  $\Gamma \in \mathcal{C}$ , sea  $F(\Gamma)$  el conjunto de funciones continuas sobre  $\Gamma$ . Llamaremos operador de interpolación a toda aplicación  $E$  que asocia a cada curva  $\Gamma \in \mathcal{C}$  y cada  $\varphi \in F(\Gamma)$  una única función  $E(\varphi, \Gamma)$  definida en la región  $D(\Gamma)$  interior a  $\Gamma$  que satisfaga los axiomas siguientes:

(A1) **Principio de comparación:**

$$E(\varphi, \Gamma) \leq E(\psi, \Gamma)$$

para cualquier  $\Gamma \in \mathcal{C}$  y cualesquiera  $\varphi, \psi \in F(\Gamma)$  tales que  $\varphi \leq \psi$ .

(A2) **Principio de estabilidad:**

$$E(E(\varphi, \Gamma) |_{\Gamma'}, \Gamma') = E(\varphi, \Gamma) |_{D(\Gamma')}$$

para cualquier  $\Gamma \in \mathcal{C}$ , cualquier  $\varphi \in F(\Gamma)$  y  $\Gamma' \in \mathcal{C}$  tales que  $D(\Gamma') \subseteq D(\Gamma)$ .

(A3) **Principio de regularidad:** Denotemos  $SM(2)$  el conjunto de las matrices simétricas  $2 \times 2$ . Sean  $A \in SM(2)$ ,  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  y

$$Q(y) = \frac{A(y - x, y - x)}{2} + \langle p, y - x \rangle + c.$$

(donde  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i$ ). Entonces

$$\frac{E(Q |_{\partial D(x;r)}, \partial D(x;r))(x) - Q(x)}{r^2/2} \rightarrow H(A, p, c, x) \quad \text{cuando } r \rightarrow 0+, \quad (5)$$

donde  $H : SM(2) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  es una función continua.

Junto con estos axiomas básicos, consideremos los siguientes axiomas, que expresan un conjunto de invarianzas geométricas de los operadores de interpolación.

(A4) **Invarianza por traslación:**

$$E(\tau_h \varphi, \Gamma - h) = \tau_h E(\varphi, \Gamma)$$

siendo  $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x + h)$ ,  $h \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \in F(\Gamma)$  y  $\Gamma \in \mathcal{C}$ .

(A5) **Invarianza por rotación:**

$$E(R\varphi, R\Gamma) = RE(\varphi, \Gamma)$$

siendo  $R\varphi(x) = \varphi(R^t x)$ ,  $R$  una matriz de rotación en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \in F(\Gamma)$  y  $\Gamma \in \mathcal{C}$ .

(A6) **Invarianza por traslación del nivel de gris:**

$$E(\varphi + c, \Gamma) = E(\varphi, \Gamma) + c$$

para cualesquiera  $\Gamma \in \mathcal{C}$ ,  $\varphi \in F(\Gamma)$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

(A7) **Invarianza por cambio de escala lineal del nivel de gris:**

$$E(\lambda\varphi, \Gamma) = \lambda E(\varphi, \Gamma) \quad \text{para cualquier } \lambda > 0.$$

(A8) **Invarianza por ‘zoom’:**

$$E(\delta_\lambda\varphi, \lambda^{-1}\Gamma) = \delta_\lambda E(\varphi, \Gamma)$$

donde  $\delta_\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ .

Para ilustrar cómo deben ser los operadores de interpolación que satisfacen los axiomas anteriores, mencionaremos tan sólo un resultado (véase [22]). Como referencia para el concepto de solución de viscosidad, indiquemos [25].

Sea  $H = H(A, p, c, x)$  la función que aparece en (A3). Gracias a los axiomas (A4) y (A6),  $H$  es independiente de  $c$  y de  $x$ :  $H = H(A, p)$ . Dado  $p \in \mathbb{R}^2$ ,  $p \neq 0$ , sea  $R_p$  la matriz de rotación tal que  $R_p^t p = |p|e_1$  donde  $e_1 = (1, 0)$ . Entonces, gracias al axioma (A5), se tiene que

$$H(A, p) = H(R_p^t A R_p, e_1) \quad \forall (A, p) \in SM(2) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

**Teorema 4** *Supongamos que el operador  $E$  satisface los axiomas (A1) – (A8). Sean  $\varphi \in F(\Gamma)$ ,  $u = E(\varphi, \Gamma)$  y  $G(A) \equiv H(A, e_1)$ . Entonces  $u$  es la solución de viscosidad del problema*

$$\begin{cases} G(R_{D_u}^t D^2 u R_{D_u}) = 0 & \text{en } D(\Gamma), \\ u = \varphi & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (6)$$

*Obsérvese que  $G$  es una función continua y no decreciente de  $A$  tal que  $G(\lambda A) = \lambda G(A)$  para todo  $\lambda > 0$  y toda  $A \in SM(2)$ .*

Supongamos que  $E$  satisface (A1) – (A8). Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

y escribamos por simplicidad  $G(a, b, c)$  en vez de  $G(A)$ . Dado  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , pongamos  $\nu = \frac{p}{|p|}$ . Entonces  $R_p(x) = e_1 \otimes \nu(x) + e_2 \otimes \nu^\perp(x)$  y podemos escribir que

$$R_p^t D^2 u R_p = \begin{pmatrix} D^2 u(\nu, \nu) & D^2 u(\nu, \nu^\perp) \\ D^2 u(\nu^\perp, \nu) & D^2 u(\nu^\perp, \nu^\perp) \end{pmatrix}.$$

Podemos por tanto re-escribir la ecuación (6) como sigue:

$$G\left(D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right), D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du^\perp}{|Du|}\right), D^2u\left(\frac{Du^\perp}{|Du|}, \frac{Du^\perp}{|Du|}\right)\right) = 0.$$

Se ha probado en [22] que, si la función  $G$  es diferenciable en  $(0, 0, 0)$ , el único operador de la familia anterior capaz de interpolar datos dados sobre curvas y/o puntos y mantener la solución Lipschitziana cuando los datos lo sean es el operador asociado a la ecuación

$$D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right) = 0. \quad (7)$$

Vistas las cosas de un modo ligeramente distinto, si  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  y  $\varphi : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$  es Lipschitziana, podemos preguntarnos si existe una función  $u$  Lipschitziana en  $\Omega$  tal que  $u = \varphi$  sobre  $\partial\Omega$  y

$$\|Du\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^N)} \leq \|Dw\|_{L^\infty(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^N)}$$

para todo subdominio  $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$  y toda función  $w$  tal que  $u - w$  es Lipschitziana en  $\tilde{\Omega}$  y  $w = u$  sobre  $\partial\tilde{\Omega}$ . Si existe, tal función se llama un interpolante AMLE (Absolutely Minimizing Lipschitz Extension) de  $\varphi$  en  $\Omega$ . Aronsson demostró en [6] que, si  $u$  es un AMLE y es de clase  $C^2$  en  $\Omega$ , entonces  $u$  es una solución clásica de la ecuación

$$D^2u(Du, Du) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (8)$$

Luego, Jensen [35] demostró que si  $u$  es un AMLE, entonces es la solución de viscosidad de

$$\begin{cases} D^2u(Du, Du) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

(las ecuaciones (7) y (8) son la misma desde el punto de vista de las soluciones de viscosidad). En un trabajo posterior, F. Cao [17] demostró que los resultados de interpolación AMLE pueden extenderse a ciertos datos discontinuos.

Mención especial merece el problema de la regularidad de las soluciones AMLE. Como ha demostrado recientemente O. Savin [53], las soluciones de (8) son de clase  $C^1$  en el interior de  $\Omega$  si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$ . No se sabe si este resultado es cierto si  $N \geq 3$ ; véase [7]. En todo caso, la mejor regularidad que podría obtenerse es que las soluciones de (8) sean diferenciables en todo punto y  $Du$  sea localmente Hölder-continua, con exponente  $1/3$  (véase [6, 7]), aunque no se sabe realmente si esto es cierto.

Digamos finalmente que la formulación axiomática del problema de interpolación puede extenderse a la interpolación de datos sobre superficies (véase la Figura 13).

En la Figura 11 podemos ver el resultado de la interpolación de un cono con el Laplaciano, esto es, resolviendo la ecuación (2) y con el interpolante AMLE, es decir, resolviendo (8). Aunque estrictamente hablando no podemos imponer

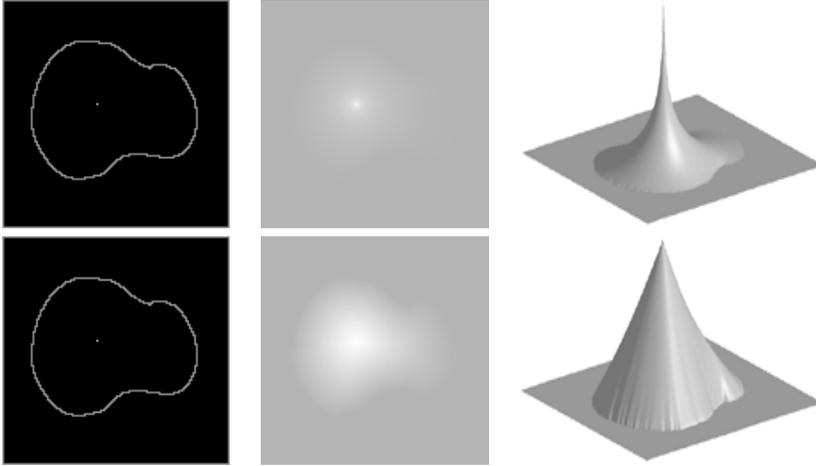


Figura 11: Arriba y de derecha a izquierda: el dato original, resultado de la interpolación usando el Laplaciano y su representación  $3D$ . Abajo y de derecha a izquierda: el dato original, resultado de la interpolación usando el AMLE y su representación  $3D$ .

el valor de una función armónica en un punto, la Figura 11 nos muestra la solución numérica. La Figura 12.b nos muestra el resultado de la interpolación AMLE de las curvas de nivel de la Figura 3. Éste puede compararse con la Figura 12.a, donde se muestra la imagen constante a trozos siendo su nivel de gris en cada región de la Figura 3 la constante correspondiente al nivel de gris de una de sus fronteras.

La Figura 13 ilustra el resultado de la interpolación de un perfil topográfico sobre una esfera a partir de los datos de elevación dados sobre una familia de curvas (Figura 13.a). Para ello hemos usado el interpolante AMLE sobre la esfera. La Figura 13.b muestra el resultado obtenido visualizado en un código de niveles de gris (blanco significa más alto y negro más bajo). La Figura 13.c muestra directamente la elevación.

### 3.1 Algunos comentarios sobre el uso del interpolante AMLE y de otros interpoladores en cartografía digital

Uno de los métodos más simples de interpolación entre curvas de nivel para las que conocemos su altura es la solución de la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0$  en el dominio  $D$  comprendido entre dos de ellas, con condición de frontera dada por la altura a la que se encuentran dichas curvas. Los resultados que se obtienen con este modelo no se consideran aceptables ya que se generan algunos fenómenos no deseables, conocidos como *creación de terrazas*. Para corregir este defecto (véase [30]), los investigadores han propuesto la estrategia siguiente:

1. Calcular las líneas de gradiente de la solución de  $\Delta u = 0$  ó de cualquier



Figura 12: Izquierda: Imagen cuantizada de 20 en 20. Derecha: Interpolación AMLE de la imagen de la izquierda.

otra interpolación suave entre curvas de nivel.

2. Interpolarse a lo largo de las líneas de gradiente a partir de los valores de altura donde la línea de gradiente cruza las curvas de nivel.



Figura 13: Interpolación de un modelo de elevación digital a partir de algunas curvas de nivel sobre la esfera: a) Datos sobre la esfera. b) La interpolación AMLE. c) El mismo resultado representado como un grafo sobre la esfera.

Si en el paso 2 adoptamos una interpolación lineal y llamamos  $v$  a la solución obtenida, podemos resumir el algoritmo anterior con la ecuación

$$\langle (D^2 v) Du, Du \rangle = 0 \quad \text{en } D, \quad (10)$$

con condiciones de frontera  $v|_{\partial D}$  dadas por la altura de las curvas de nivel que constituyen  $\partial D$ .

Obviamente, en estos métodos de interpolación la información no se difunde a través de las curvas de nivel dadas y puede que éstas sean demasiado visibles en la superficie reconstruida, ya que las pendientes de la superficie pueden no coincidir a un lado y otro de la curva de nivel.

El modelo más simple que permite incorporar información sobre las pendientes de la superficie en las curvas de nivel está basado en la ecuación

*biarmónica*

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{en } D, \quad (11)$$

donde el operador  $\Delta^2 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$  recibe el nombre de *bi-Laplaciano*.

Podemos resolver esta ecuación si especificamos los valores de  $u$  y (por ejemplo)  $\nabla u \cdot \nu^D$  sobre la frontera de  $D$  (siendo  $\nu^D$  la normal unitaria exterior a  $\partial D$ ). El defecto de este modelo es que puede provocar la aparición de oscilaciones espúreas y ello desaconseja su utilización. Esto no es nada sorprendente, ya que la ecuación (11) no satisface el principio del máximo.

Una de las conclusiones que debemos sacar de lo visto en esta sección es que, si pretendemos interpolar datos en un dominio de forma que se satisfaga el principio del máximo — sin olvidar los otros principios —, nos vemos obligados a adoptar modelos basados en ecuaciones elípticas de segundo orden. El principio del máximo es el requisito que garantiza que nuestro interpolador respete las estructuras geométricas presentes en los datos, ya que impedirá la aparición de nuevos extremos (y, en particular, de oscilaciones espúreas).

Una comparación de diversos métodos de interpolación, incluyendo el AMLE, aplicados a la reconstrucción de modelos digitales de elevación de terreno puede encontrarse en [1].

### 3.2 Algunos comentarios sobre interpolación en compresión de imágenes basada en regiones

Como hemos comentado en la introducción, en el contexto de los algoritmos de compresión basados en regiones, se codifican los contornos (con su nivel de gris) y, a partir de ellos, se reconstruye el nivel de gris del resto de los pixels de la imagen. Para ello, J. R. Casas [52] propuso un algoritmo de interpolación basado en la propagación de los valores de la imagen en los contornos. Los frentes de propagación de los valores confluyen en un frente intermedio, al que asignamos el valor promedio. Esto determina un nuevo sistema de frentes que de nuevo vuelven a confluir proporcionando nuevos valores intermedios. Iterando este esquema puede llegarse a una reconstrucción de la imagen en la región considerada  $D$ . Una variante de este algoritmo puede ser interpretada en términos de la resolución de la ecuación (4), es decir, en términos de la construcción de un interpolante AMLE; véase [22].

## 4 Modelos variacionales en inpainting

Vamos a presentar un método geométrico para interpolar información en regiones de la imagen donde, por una razón u otra, no disponemos de ella. Llamaremos *agujero* de la imagen a cada una de estas zonas; véanse las letras en la Figura 4.a.

El trabajo de D. Mumford, M. Nitzberg y T. Shiota [50] es una de las primeras contribuciones a la recuperación de la geometría de una imagen 2D.

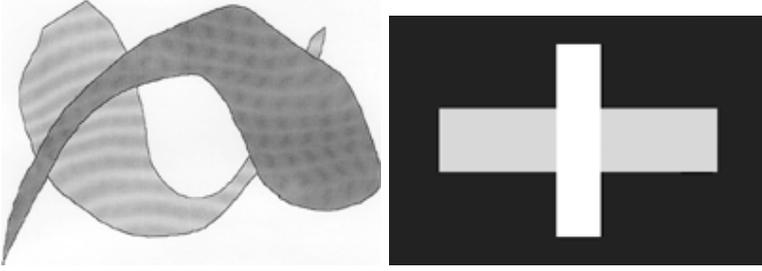


Figura 14: a) Nuestra interpretación de esta imagen sigue el principio de *buena continuación*. b) Ejemplo esquemático de confluencia en  $T$ .

Dicho trabajo no estaba directamente dedicado a la restauración de *agujeros*, sino a la segmentación de imágenes en objetos ordenados de acuerdo con su profundidad en la escena. El algoritmo de segmentación debería ser capaz de calcular los objetos, ordenarlos según su profundidad y determinar los trozos de frontera de los mismos ocultos por otros objetos. Para ello, se apoyaron en un principio básico de la teoría de la Gestalt: nuestro sistema visual es capaz de completar las fronteras parcialmente ocultas y su completación tiende a respetar el *principio de buena continuación* [36] (ver Figura 14.a). Cuando un objeto oculta otro, las fronteras forman una configuración particular llamada *confluencia en  $T$*  (de la expresión inglesa *T-junction*), en la que la parte visible de la frontera del objeto oculto llega a la frontera del objeto que le oculta formando una  $T$  (véase la Figura 14.b). En estas condiciones, nuestro sistema visual continúa de forma suave la frontera oculta. Mumford, Nitzberg y Shioita [50] propusieron un funcional de energía para segmentar una escena que toma en cuenta la profundidad de los objetos y la energía de las fronteras ocultas entre  $T$ -confluencias. Esta energía intenta calcular curvas lo más cortas posible que respeten el principio de buena continuación. Obviamente, es necesario dar una interpretación matemática de todo esto.

Dadas dos  $T$ -confluencias  $q$  y  $\tilde{q}$  y las tangentes  $\tau_q$  y  $\tau_{\tilde{q}}$  a los contornos que en ellas terminan, los autores propusieron como curva de buena continuación entre  $q$  y  $\tilde{q}$  la elástica, es decir, la curva que minimiza la energía

$$\int_C (\alpha + \beta \kappa^2) ds, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (12)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura de  $C$ ,  $ds$  es su longitud de arco y el mínimo se calcula entre todas las curvas  $C$  que unen  $q$  y  $\tilde{q}$  y tienen por tangentes  $\tau_q$  y  $\tau_{\tilde{q}}$  en esos puntos. La elástica ha sido usada reiteradamente en procesamiento de imágenes en relación con el cálculo de contornos subjetivos (véase la Figura 8.b) y el artículo de Mumford [49] contiene una discusión muy interesante sobre la misma; véase [56, 34, 60, 55].

Inspirados por Mumford, Nitzberg y Shioita, Masnou y Morel [45, 47, 46] propusieron un modelo variacional para interpolar las curvas de nivel de una imagen (uniendo los pares de confluencias en  $T$  por rectas) y llamaron

a este proceso des-ocultación. La elástica ha inspirado también los modelos variacionales introducidos en [8, 10, 9] que interpolan conjuntamente las curvas de nivel y su campo de direcciones. Los desarrollos algorítmicos de estos trabajos permiten la interpolación de imágenes 3D y la reconstrucción de agujeros en superficies. El papel jugado por la elástica en el caso bi-dimensional lo juega ahora el funcional de Willmore (la integral del cuadrado de la curvatura media).

#### 4.1 Reconstrucción del mapa topográfico basada en la elástica

Como propuso Masnou en [45, 47], el problema de inpainting puede verse como un problema de completación del mapa topográfico. Si  $u$  es una función de variación acotada en  $D = [0, 1]^2$ , de acuerdo con los resultados expuestos en la Sección 2.2, casi todos los conjuntos de nivel  $u$  tienen perímetro finito y pueden descomponerse en componentes conexas, de forma que la frontera esencial de cada componente conexa está formada por una curva de Jordan exterior  $y$ , a lo sumo, un conjunto numerable de curvas de Jordan interiores, todas ellas rectificables (véase [2]). Además, dos de tales curvas pueden tocarse, eventualmente, en un conjunto de longitud nula. Ya que los conjuntos de nivel superiores de  $u$  forman una familia monótona de conjuntos, la fórmula de reconstrucción

$$u(x) = \sup\{\lambda : x \in X^\lambda u\} \quad (13)$$

es válida para casi todo  $x \in D$ .

Supongamos que  $\Omega_0$  es un abierto no vacío que verifica  $\Omega_0 \subset\subset D$  y tiene frontera Lipschitziana. Supongamos que conocemos la imagen  $u_0 : D \setminus \overline{\Omega_0} \rightarrow [a, b]$  con  $0 \leq a < b$  y queremos reconstruir la imagen  $u_0$  en  $\Omega_0$  usando la información de  $u_0$  en  $D \setminus \overline{\Omega_0}$ . Llamaremos a  $\Omega_0$  un *agujero* de la imagen. Supondremos que la función  $u_0$  es una función de variación acotada en  $D \setminus \overline{\Omega_0}$ . Sabemos que el mapa topográfico de  $u_0$  en  $D \setminus \overline{\Omega_0}$  está formado por curvas de Jordan. Además, podemos suponer, ampliando para ello el *agujero* si fuese necesario, que para casi todo nivel  $\lambda$  las curvas de nivel de  $X^\lambda u_0$  intersectan transversalmente a la frontera del *agujero* en un número finito de puntos [45]. Denotemos  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$  la familia de estos niveles. S. Masnou formuló el problema de inpainting [45, 47, 46] como la reconstrucción del mapa topográfico de  $u_0$  dentro de  $\Omega_0$ . Dados  $\lambda \in \Lambda$  y dos puntos  $q, \tilde{q} \in \partial^* X^\lambda u_0 \cap \partial \Omega_0$ , denotaremos  $\tau_q$  y  $\tau_{\tilde{q}}$  los vectores tangentes a la curva de nivel  $\partial^* X^\lambda u_0$  en  $q$  y  $\tilde{q}$ , respectivamente. Siguiendo a Mumford, Nitzberg y Shiota, la curva de unión de  $q$  y  $\tilde{q}$  propuesta por Masnou [45, 47] es la curva  $\Gamma$  contenida en  $\Omega_0$  que minimiza la energía

$$\int_{\Gamma} (\alpha + \beta |\kappa|^p) d\mathcal{H}^1 + (\tau_q, \tau_{\Gamma}(q)) + (\tau_{\tilde{q}}, \tau_{\Gamma}(\tilde{q})), \quad (14)$$

donde  $\kappa$  es (de nuevo) la curvatura de  $\Gamma$  y  $\tau_{\Gamma}(q)$  y  $\tau_{\Gamma}(\tilde{q})$  son las tangentes a  $\Gamma$  en los puntos  $q$  y  $\tilde{q}$ , respectivamente;  $(\tau_q, \tau_{\Gamma}(q))$  es el ángulo que forman los vectores  $\tau_q$  y  $\tau_{\Gamma}(q)$  y  $(\tau_{\tilde{q}}, \tau_{\Gamma}(\tilde{q}))$  el ángulo análogo para  $\tilde{q}$ . Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son positivas y  $p \geq 1$ . La solución del problema de inpainting se obtiene

minimizando el funcional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\Gamma \in F_\lambda} \left( \int_{\Gamma} (\alpha + \beta |\kappa|^p) d\mathcal{H}^1 + (\tau_q, \tau_\Gamma(q)) + (\tau_{\tilde{q}}, \tau_\Gamma(\tilde{q})) \right) d\lambda, \quad (15)$$

donde  $F_\lambda$  denota la familia de curvas de unión asociadas al conjunto de nivel  $X^\lambda u_0$ . Como hemos indicado más arriba, para casi todo nivel  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la familia  $F_\lambda$  es finita, de forma que la suma en (15) es finita de modo genérico. En sus trabajos [45, 47], los autores demostraron que existe un mínimo para el problema de inpainting en  $\tilde{\Omega}$  para todo  $p \geq 1$  y, en el caso del exponente  $p = 1$ , propusieron un algoritmo de programación dinámica para calcular las uniones óptimas entre puntos de  $\partial^* X^\lambda u_0 \cap \partial\Omega_0$ . Observemos que para  $p = 1$  las curvas de unión son líneas rectas. Con esta estrategia, calcularon el mínimo del funcional (15) [45, 46].

Una variación del funcional (15) fue propuesta en [3]. Los autores observaron que calculando la integral  $\int_{\Gamma} (\alpha + \beta |\kappa|^p) d\mathcal{H}^1$  no sólo a lo largo de la curva de unión sino también sobre un trozo de la curva de nivel exterior a  $\Omega_0$ , el criterio (15) podía escribirse como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\Gamma \in F_\lambda} \left( \int_{\Gamma} (\alpha + \beta |\kappa|^p) d\mathcal{H}^1 \right) d\lambda, \quad (16)$$

donde ahora las curvas de  $F_\lambda$  contienen la curva de unión y un trozo de curva de nivel de  $u_0$  en  $\Omega \setminus \Omega_0$  para un dominio  $\Omega \supseteq \Omega_0$ . Para proceder con esta estrategia los autores suponen que las curvas de nivel de  $u_0$  están en  $W^{2,p}$  en  $\Omega \setminus \Omega_0$ . En este caso, para funciones  $u$  de clase  $C^2$ , el funcional (16) puede escribirse de la forma

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \left( \alpha + \beta \left| \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^p \right) dx \quad (17)$$

usando el convenio de que el integrando es 0 cuando  $|\nabla u| = 0$ . Este funcional fue estudiado en [3] cuando el dominio  $D$  y el agujero  $\tilde{\Omega}$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 2$ . También se analizó el correspondiente funcional relajado que, como demostraron los autores, coincide con

$$\int_R \int_{\partial[u \geq t]} (\alpha + \beta |H_{[u \geq t]}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} dt \quad (18)$$

para funciones  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $N \geq 2$  y  $p > N - 1$ , siendo  $H_{[u \geq t]}$  la curvatura media de  $[u \geq t]$ .

## 4.2 Interpolación conjunta de campos de vectores y niveles de gris

Supondremos en esta sección que  $D$  es un hiperrectángulo de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , que representa el dominio de la imagen. Sean  $\Omega$  y  $\Omega_0$  dos dominios abiertos y acotados de  $\mathbb{R}^N$  cuya frontera es Lipschitziana y supongamos que  $\Omega_0 \subset\subset \Omega \subset\subset D$ . Definimos  $B := \Omega \setminus \overline{\Omega_0}$ , conjunto al que llamaremos la *banda* alrededor de  $\Omega_0$  (véase la Figura 15). Supondremos que la imagen  $u_0$  está dada en  $D \setminus \Omega_0$  y



Figura 15: El agujero y la banda

es de variación acotada en este dominio. En los trabajos [8, 10, 9], los autores propusieron restaurar el agujero  $\Omega_0$  de la imagen utilizando tanto el nivel de gris como las normales a las curvas de nivel conocidas en  $B$ , intentando prolongar las curvas de nivel de  $u_0$  hacia el interior de  $\tilde{\Omega}$  de acuerdo con el principio de la buena continuación.

Denotemos por  $\theta_0$  el campo de direcciones del gradiente de  $u_0$  en  $D \setminus \tilde{\Omega}$ . Esto quiere decir que  $\theta_0$  es un campo de vectores con valores en  $\mathbb{R}^N$  que satisface  $\theta_0(x) \cdot Du_0(x) = |Du_0(x)|$  como medidas en  $B$  y  $|\theta_0(x)| \leq 1$  casi por todas partes en  $B$ . Obsérvese que hemos escrito  $|\theta_0(x)| \leq 1$  y no  $|\theta_0(x)| = 1$ , ya que podemos elegir cualquier valor de  $\theta_0(x)$  cuando  $Du_0(x) = 0$  (al imponer sólo  $|\theta_0(x)| \leq 1$ , queda abierta la posibilidad de demostrar resultados de existencia de soluciones [9]). Supondremos además que  $\theta_0(x)$  tiene una traza sobre  $\partial\Omega$ .

Planteamos el problema de inpainting de la siguiente forma: ¿podemos extender (de forma razonable) el par  $(u_0, \theta_0)$ , definido en  $B$ , a un par de funciones  $(u, \theta)$  dentro de  $\Omega$ ?

Por supuesto, hemos de precisar qué entendemos aquí por ‘razonable’.

Nos proponemos dar una formulación variacional de este problema y discutir un funcional de energía diseñado a tal efecto. Los datos del problema están dados sobre  $B$  y debemos procurar que la solución  $(u, \theta)$  esté cerca de los datos en  $B$ . El campo de vectores debería satisfacer  $\theta \cdot \nu^\Omega = \theta_0 \cdot \nu^\Omega$  (donde  $\nu^\Omega$  es la normal unitaria exterior a  $\Omega$ ),  $|\theta| \leq 1$  en  $\Omega$ , y debería estar relacionado con  $u$  por la relación  $\theta \cdot Du = |Du|$ . La condición  $|\theta(x)| \leq 1$  debe interpretarse como una restricción relajada. De hecho puede ocurrir que  $Du(x) = 0$  y, en este caso, no podemos normalizar el campo. Hemos de tener en mente que, en una situación ideal,  $u$  es una función suave tal que  $Du(x) \neq 0$  para todo  $x \in \Omega$  y  $\theta = \frac{Du}{|Du|}$ . Finalmente, debemos imponer que  $\theta_0$  se prolongue de manera suave a  $\theta$  en  $\Omega$ . Observemos que, si  $\theta$  representa las direcciones de las normales a las hipersuperficies  $u(x) = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces un término como  $\text{div } \theta$  representa su curvatura media. Para imponer la continuación suave de las hipersuperficies de nivel de  $u_0$  dentro de  $\Omega$ , exigiremos  $\text{div } \theta \in L^p(\Omega)$  con  $p > 1$ . Por consistencia, supondremos que  $\text{div } \theta_0 \in L^p(B)$ .

Interpretando la energía de la elástica en este contexto, proponemos el

siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\theta)|^p (\gamma + \beta |\nabla K * u|) dx \\ & \text{Sujeto a} \\ & |\theta| \leq 1, |Du| - \theta \cdot Du = 0 \quad \text{en } \Omega \\ & |u| \leq M \\ & u = u_0 \quad \text{en } B, \quad \theta \cdot \nu^{\Omega}|_{\partial\Omega} = \theta_0 \cdot \nu^{\Omega}|_{\partial\Omega}, \end{aligned} \tag{19}$$

donde  $p > 1$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $K$  es un núcleo regularizador de clase  $C^1$  positivo en casi todo y  $M = \sup_{x \in B} |u_0(x)|$ . La convolución de  $Du$  con  $K$  en (19) es útil para demostrar la existencia de un mínimo de (19).

Minimizamos el funcional en el espacio  $\mathcal{E}_p(\Omega, B, \theta_0)$  formado por los pares de funciones  $(u, \theta)$  donde  $u \in BV(\Omega)$  y  $\theta \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ,  $|\theta| \leq 1$ ,  $\operatorname{div} \theta \in L^p(\Omega)$ ,  $\theta \cdot Du = |Du|$  y  $\theta \cdot \nu^{\Omega} = \theta_0 \cdot \nu^{\Omega}$  en  $\partial\Omega$ .

**Comentarios sobre el modelo (19):**

- ¿Cuál es el papel de la banda  $B$ ? Para discutir esta cuestión consideremos la Figura 16.a que representa una cinta gris en un fondo negro que ha sido parcialmente tapada por un cuadrado blanco  $\tilde{\Omega}$ . Supongamos que los lados del cuadrado son perpendiculares a las curvas de nivel de la cinta. En estas condiciones, la componente normal de  $\theta_0$  sobre  $\partial\tilde{\Omega}$  es nula. Por consiguiente, siendo las condiciones de frontera naturales del problema las dadas por  $\theta_0 \cdot \nu^{\Omega_0}|_{\partial\Omega_0}$ , se cumple que  $\theta_0 \cdot \nu^{\Omega_0}|_{\partial\Omega_0} = 0$ . En particular, el campo  $\theta = 0$  satisface esta condición. Si no somos capaces de propagar  $\theta$  dentro de  $\Omega_0$  estamos ante una situación desagradable, ya que ello implica que no podremos propagar los valores de  $u$  desde la frontera hacia el interior de  $\Omega_0$ . Si escribimos el funcional (19) con  $\theta = 0$  y  $\alpha = 1$ , el funcional resultante coincide con la variación total [51]. La decisión de extender la cinta gris o el fondo negro hacia el interior del agujero  $\Omega$  se tomará en función del perímetro de las discontinuidades de la función resultante en el *agujero*.

Para superar esta dificultad, introducimos la banda  $B$  alrededor de  $\Omega$  como una manera de garantizar que el campo  $\theta$  esté presente en el funcional. En la Figura 16.b mostramos el resultado de la interpolación con  $\theta = 0$  en  $\Omega_0$ . En la Figura 16.c mostramos el resultado de la interpolación obtenido con el funcional (19), usando la banda  $B$  y el campo  $\theta$  en ella. Aunque la banda  $B$  podría extenderse a todo el dominio  $D \setminus \Omega_0$ , en la práctica usamos tan sólo la información en una banda de unos pocos pixels alrededor del agujero.

- Si  $N = 2$  y  $u$  es la función característica de la región interior a una curva regular  $C$  de clase  $C^2$ , entonces podemos escribir la expresión

$$\beta \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\theta)|^p |Du| + \alpha \int_{\Omega} |Du| dx \tag{20}$$

como  $\int_C (\alpha + \beta |\kappa|^p) ds$ , donde  $\kappa$  es la curvatura de  $C$ . Si  $p = 2$ , esta energía es la de la elástica de Euler (12). La elástica (12) fue propuesta en [50] como técnica



Figura 16: a) Una cinta tapada por un cuadrado. b) Resultado obtenido usando (19) con  $\theta = 0$ . c) Resultado obtenido usando (19).

para recuperar los contornos de un objeto ocultos por otros, con el objetivo de segmentar una imagen teniendo en cuenta la relación de profundidad entre objetos de la escena, ya que proporciona curvas suaves y cortas. En términos de funciones características, el funcional (12) toma la forma

$$\int_{\Omega} |\nabla u| (\alpha + \beta |\operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}|^2) dx. \quad (21)$$

El inconveniente es que este funcional no es semicontinuo inferiormente [14]. Como se demuestra en [3], el funcional (21) coincide con el propuesto por Masnou y Morel [45, 46, 47] para funciones suaves.

El funcional puede ser considerado también como una formulación relajada de la elástica. En nuestro caso, hemos introducido el campo  $\theta$  como una variable independiente relacionada con  $u$  por  $\theta \cdot Du = |Du|$ . La convolución de  $Du$  con  $K$  permite evitar las dificultades planteadas por un estudio directo de (21).

- Los coeficientes  $\gamma$  y  $\beta$  son positivos. La positividad de  $\gamma$  implica que  $\operatorname{div} \theta \in L^p(\Omega)$ , lo que a su vez garantiza la regularidad de las curvas de nivel de  $u$ ; véase [9]. Si  $\beta > 0$ , podemos tomar en consideración la contribución de la curvatura sobre la curva de nivel correspondiente a la frontera del objeto.

- En la práctica usamos el funcional (19) para interpolar los conjuntos de nivel  $[u_0 \geq \lambda]$  y obtener los conjuntos de nivel  $X^\lambda u$  de una función  $u$ , que se reconstruye en  $\Omega$  usando la fórmula (1). Para garantizar que los conjuntos de nivel reconstruidos corresponden a una función  $u$ , hemos de imponer que  $X^{\lambda+1}u \subseteq X^\lambda u$ . De hecho calculamos una solución verificando esta propiedad.

Aunque el funcional (19) puede ser directamente usado para interpolar funciones, la energía pondera las discontinuidades de la imagen por el tamaño del salto, lo cual tiene un efecto difusivo sobre el resultado. Si trabajamos con los conjuntos de nivel, todos ellos son tratados en pie de igualdad y la energía (19) sólo contiene cantidades geométricas (longitud y curvatura).

- La descomposición de la imagen  $u_0$  en conjuntos de nivel superiores y la reconstrucción de la solución introduce un sesgo a favor de dichos conjuntos respecto a los conjuntos de nivel inferiores. El efecto puede verse en la Figura 17. La Figura 17.a nos muestra la imagen que queremos reconstruir. La descomposición en conjuntos de nivel superiores proporciona la solución de la Figura 17.b, ya que favorece que el objeto cuyo nivel es 210 pase por encima

del objeto cuyo nivel es 0. Su hubiésemos usado los conjuntos de nivel inferiores, las cintas negras habrían pasado por encima de las blancas. En cualquier caso, ello demuestra que no existe una solución única de este problema y nuestra elección proporciona una de ellas.

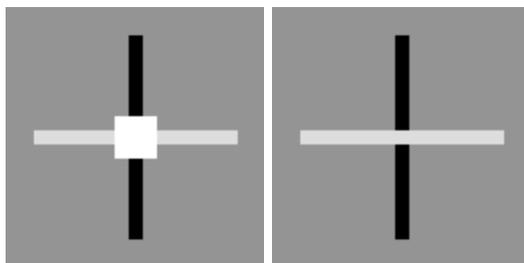


Figura 17: a) Imagen con *agujero*. b) Imagen reconstruida usando (19). La descomposición de la imagen en conjuntos de nivel superiores provoca que la banda blanca pase por encima de la negra.

Un análisis numérico directo del modelo (21) fue abordado en [23] aproximando el campo  $\frac{Du}{|Du|}$  por

$$\frac{Du}{\sqrt{\epsilon^2 + |Du|^2}}, \quad \epsilon > 0.$$

Las soluciones de este modelo aproximado convergen, después de extraer una subsucesión, hacia una solución de (19) (véase [9]; el estudio de los operadores diferenciales involucrados es el objeto de [5]). Para este análisis es necesario incorporar las condiciones de frontera en forma variacional.

- Los funcionales presentados en esta Sección están inspirados en el funcional de Willmore. Una minimización directa de este funcional usando métodos basados en las propiedades de los conjuntos de nivel puede encontrarse en [27]. Una aproximación numérica a la restauración de superficies basada en la minimización del funcional de Willmore y usando elementos finitos puede encontrarse en [24]. Un esquema numérico muy interesante para resolver el flujo de Willmore ha sido recientemente propuesto en [32]. La demostración de su convergencia es probablemente un problema abierto de gran interés.

### 4.3 Algunos experimentos

**Ejemplos para imágenes 2D.** Los experimentos que siguen muestran algunos resultados obtenidos usando el funcional (19) para el valor  $p = 2$ .

La Figura 18 muestra el resultado de la interpolación de cuatro discos parcialmente cubiertos por un cuadrado. La Figura 19.a es un detalle de la boca de Lena con un *agujero* y la Figura 19.b muestra el resultado obtenido usando (19). La Figura 20.a muestra una imagen con un texto que queremos eliminar y en la Figura 20.b presentamos el correspondiente resultado.

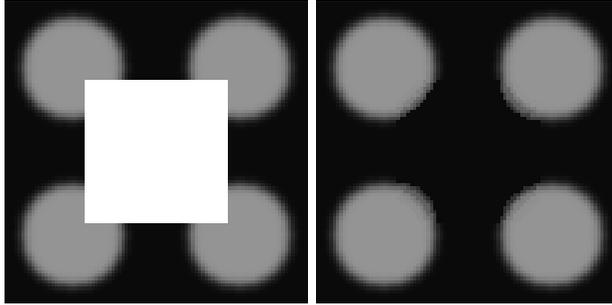


Figura 18: Cuatro discos y su reconstrucción.

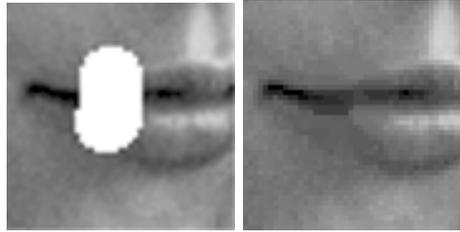


Figura 19: a) Detalle de la boca de Lena. b) Reconstrucción obtenida usando (19).

**Reconstrucción de agujeros en superficies.** Podemos usar el funcional (19) para reconstruir un *agujero* en una superficie  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Supongamos, para fijar ideas, que  $\mathcal{S}$  es una superficie compacta y conexa y  $\mathcal{M}$  es una parte desconocida de  $\mathcal{S}$  que no pudo ser obtenida al escanearla. De manera que en lo sucesivo identificaremos  $\mathcal{S}$  con su parte conocida. Consideremos un paralelepípedo  $Q$  en  $\mathbb{R}^3$  conteniendo en su interior al *agujero*  $\mathcal{M}$  y una parte de  $\mathcal{S}$  (ver Figs. 23.a, 23.b). Denotemos  $\partial\mathcal{M}$  la frontera del *agujero* (una curva o un conjunto de curvas en  $\mathbb{R}^3$ ). Aunque  $\mathcal{M}$  es desconocida, sí conocemos su frontera relativa en  $\mathcal{S}$ . Consideremos un entorno  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{S} \cap Q$  definido por

$$\mathcal{F} = \{x \in Q : d(x, \mathcal{S} \cap Q) < \alpha d(x, \partial\mathcal{M})\}, \quad \alpha > 0,$$

donde  $d(x, \mathcal{S} \cap Q)$  denota la distancia de  $x$  a  $\mathcal{S} \cap Q$ . Supondremos que  $\mathcal{F} \setminus (\mathcal{S} \cap Q)$  esta formado por dos componentes conexas que podemos identificar como vecinas a las dos caras de  $\mathcal{S}$  (ver Figura 21). Denotemos  $d^{\mathcal{F}}(x)$  la distancia de un punto  $x \in \mathcal{F}$  a  $\mathcal{S} \cap Q$ . Cambiando el signo de  $d^{\mathcal{F}}$  en una de las caras de la superficie podemos definir la función distancia signada a  $\mathcal{S} \cap Q$  en  $\mathcal{F}$ , que denotaremos por  $d_s^{\mathcal{F}}(x)$ . El campo de vectores dado por

$$N(x) = \nabla d_s(x)$$

en  $\mathcal{F}$  es una extensión del campo de vectores formado por las normales unitarias a  $\mathcal{S} \cap Q$  a su entorno  $\mathcal{F}$ . Consideraremos esta información como fiable y la



Figura 20: Imagen con texto y su reconstrucción.

usaremos como restricción.

Para adaptar el funcional (19) a la reconstrucción de *agujeros* de superficies, debemos explicitar el *agujero*  $\Omega_0$  y las funciones  $(u_0, \theta_0)$  en una banda alrededor de  $\Omega_0$ . Para ello consideramos una bola  $\mathcal{B}$  (u otro abierto homeomorfo a una bola) tal que  $\overline{\mathcal{B}} \subset \subset Q$  y contiene a  $\partial\mathcal{M}$  en su interior. Definimos el *agujero*  $\Omega_0$  eliminando de  $\mathcal{B}$  los puntos de  $\mathcal{F}$ . Definimos la banda  $B = Q \setminus \overline{\Omega_0}$ .

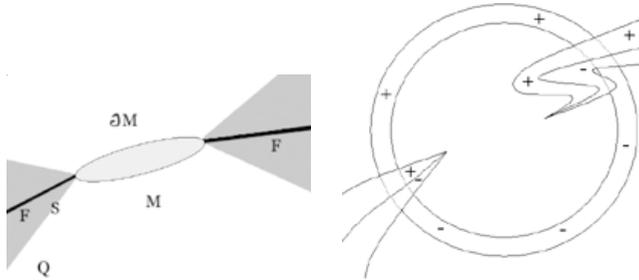


Figura 21: a) Una sección de la superficie  $\mathcal{S}$  con el *agujero*  $\mathcal{M}$  y el entorno  $\mathcal{F}$ . b) Asignación del signo en las dos caras de  $\mathcal{S}$ .

Por otra parte, definimos  $u_0 : Q \setminus \overline{\Omega_0} \rightarrow R$  como una función característica. Los valores  $u_0(x) = 1$  y  $u_0(x) = 0$  representan el interior y el exterior de  $\mathcal{S}$ , respectivamente. Inicialmente, indexamos las dos componentes conexas de  $\mathcal{F} \setminus (\mathcal{S} \cap Q)$  por los valores  $u_0 = 1$  (interior) y  $u_0 = 0$  (exterior). Propagando estos valores al resto de  $Q \setminus \overline{\Omega_0}$ , obtenemos  $u_0$  en  $B$ . Supondremos que podemos proceder a esta indexación de forma consistente y no podemos conectar dos puntos con valores diferentes sin cruzar  $\mathcal{S}$  (véase la Figura 21). Llamamos  $A$  al conjunto de puntos  $x$  de  $Q \setminus \overline{\Omega_0}$  tales que  $u_0(x) = 1$ , de manera que  $u_0(x) = \chi_A(x)$ . Minimizando (19) podemos reconstruir el conjunto  $A$  dentro de  $\Omega_0$ . Definimos el campo  $\theta_0 = \nabla d_s$  en  $\mathcal{F}$  y lo extendemos al resto de  $Q \setminus \Omega$  extendiendo primero  $d_s$  a  $Q \setminus \overline{\Omega_0}$  y tomando  $\theta_0 = \nabla d_s$ . Observemos que  $Du_0 = \nu \mathcal{H}^2|_{\mathcal{S} \cap Q}$  donde  $\nu$  es la normal unitaria exterior a  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{H}^2|_{\mathcal{S} \cap Q}$  representa la medida de Hausdorff en  $\mathcal{S} \cap Q$ . Por consiguiente, se cumple que  $\theta_0 \cdot Du_0 = |Du_0|$ . Minimizamos (19) usando  $u = u_0$  y  $\theta = \theta_0$  en  $B$  como restricciones. La aproximación numérica usada es la descrita en [8, 9].

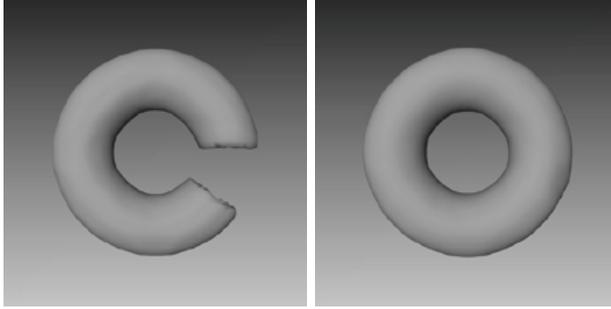


Figura 22: Un toro roto y su reconstrucción.

La Figura 22.a representa un toro al que le falta un fragmento, la Figura 22.b representa su reconstrucción obtenida minimizando el funcional (19).

Las Figuras 23.a, 23.b nos muestran dos agujeros en una versión digitalizada del David de Miguel Ángel (imágenes cortesía de Marc Levoy y el Michelangelo Project [42])). Hemos representado en estas imágenes el paralelepípedo  $Q$  conteniendo el agujero. Las Figuras 23.c y 23.d representan la superficie (triangulada) alrededor del *agujero*. Las Figuras 23.e y 23.f representan la reconstrucción obtenida minimizando el funcional (19). Para visualizar estas imágenes nos hemos servido del software AMIRA Visualization and Modeling System [4].

## 5 Un comentario sobre el método de Efros-Leung para inpainting de imágenes texturadas y vídeo

El algoritmo anterior puede usarse para imágenes en secuencias de video como si fuesen datos 3D. Experimentos de este tipo pueden verse en [9]. Sin embargo, los datos de vídeo no pueden considerarse datos 3D geométricos y los experimentos realizados en [9] para secuencias de imágenes no son convincentes. En ello influye la baja tasa de muestreo temporal para garantizar la suavidad de las superficies de nivel. Por otro lado, los cambios de iluminación y el movimiento de los objetos provoca distorsiones en los mismos o la aparición o desaparición de objetos de la escena.

Entre los trabajos dedicados a la síntesis de texturas, uno de los más notables es el de Efros y Leung basado en una interpretación de la imagen como un campo de Markov [28] (ver también [26]). En este trabajo, a partir de una textura de muestra, los autores proponen sintetizar una realización de la misma de forma incremental considerando a cada paso entornos similares en la muestra y copiándolos, llegando a resultados espectaculares.

Sin entrar en mucho detalle, podemos aprovechar el algoritmo propuesto por Efros y Leung para restaurar algunos agujeros en secuencias de vídeo (por ejemplo rayas en películas). Este algoritmo aprovecha la redundancia de la imagen: busca en la imagen un entorno similar a la parte conocida del entorno

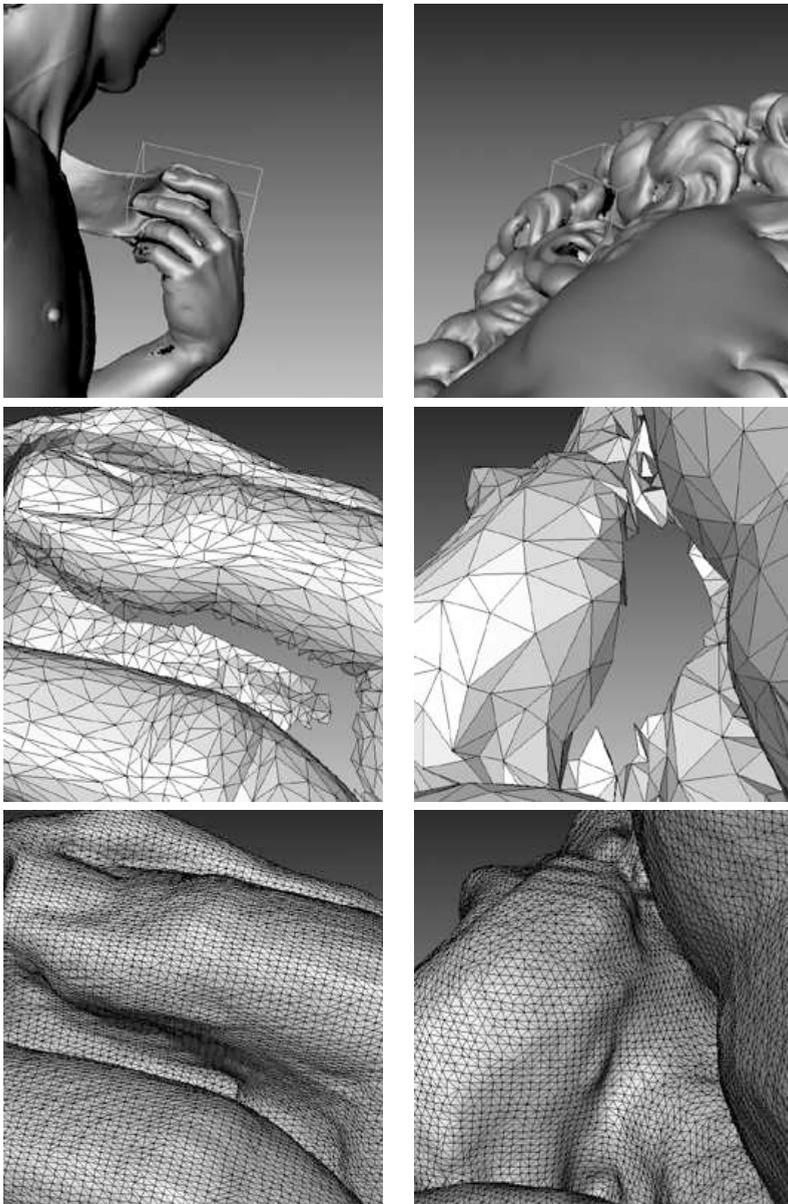


Figura 23: De arriba a abajo y de izquierda a derecha: a) La mano izquierda del David de Miguel Ángel con la caja  $Q$ . b) Parte de la cabeza y del pelo mostrando la caja  $Q$ . c) Un zoom de un detalle de a) mostrando un *agujero* sobre su superficie. d) Un zoom de un detalle de b) mostrando un *agujero* en el pelo. e) Reconstrucción del *agujero* de c). f) Reconstrucción del *agujero* de d).

del punto  $p$  que se quiere reconstruir y copia dicha información en  $p$ . Si hay varios entornos igualmente semejantes, determina cuál de ellos copiar de forma aleatoria. Una mejora notable de este algoritmo ha sido propuesta en [26]: se calcula una prioridad para determinar el orden en que se van a considerar los pixels del *agujero*. Esta prioridad depende del módulo y orientación del gradiente en cada pixel.

La Figura 24 nos muestra un ejemplo de reconstrucción de un agujero en una imagen de una secuencia de vídeo calculada usando el algoritmo de Efros y Leung, habiendo compensado el movimiento de la secuencia. Las imágenes a) y b) nos muestran los fotogramas 74 y 76 de una secuencia estándar llamada Foreman. La imagen en c) nos muestra el fotograma 75 de la secuencia con un *agujero* tapando los ojos. La imagen d) nos muestra la reconstrucción. La información recuperada en la imagen 75 se ha buscado en los dos fotogramas inmediatamente anterior y posterior 74 y 76.

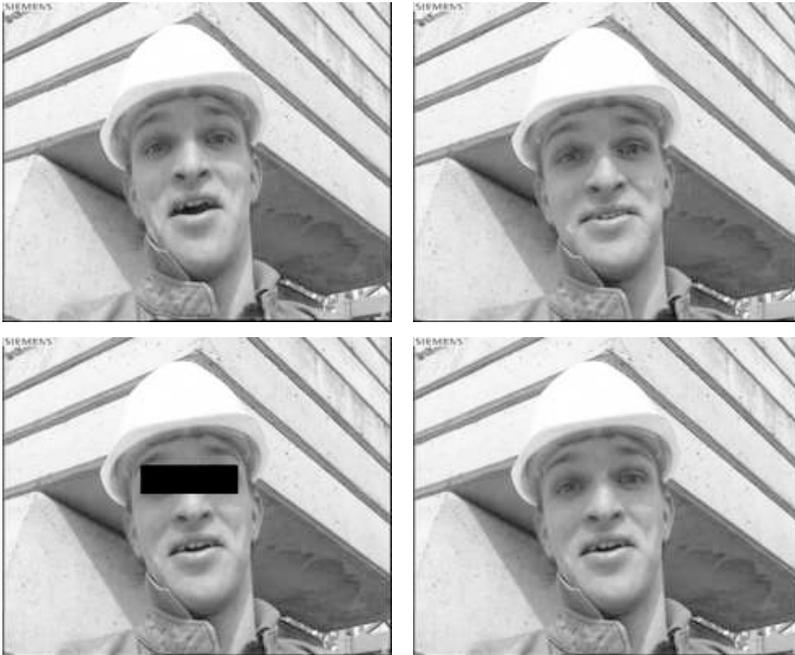


Figura 24: Arriba: a) y b) Las imágenes 74 y 76 de la secuencia Foreman. Abajo: c) La imagen 75 de la secuencia Foreman con un *agujero* en los ojos. d) Reconstrucción obtenida usando el algoritmo de Efros y Leung con compensación de movimiento.

## 6 Fusión de imágenes multi-espectrales

Sea ahora  $D = [0, 1]^2$ . Mientras que una imagen de intensidad puede representarse por una función  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , una imagen multi-espectral se representa por una función vectorial  $\vec{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  donde  $m$  representa el número de canales. En el caso de imágenes en color,  $m = 3$  y  $\vec{u} = (R, G, B)$  donde  $R$ ,  $G$  y  $B$  representan los canales rojo, verde y azul. Si a ellos añadimos el canal infrarrojo, como ocurre en algunos satélites, entonces  $m = 4$ . Mientras cada canal representa la energía de la luz en una banda del espectro, la suma ponderada de todas ellas produce la imagen de intensidad o imagen pancromática. Para fijar ideas, supondremos que  $m = 3$  y denotaremos  $\vec{u} = (X_1, X_2, X_3)$  la imagen multi-espectral de canales  $(R, G, B)$ . En este caso,

$$u(x) = \alpha_1 X_1(x) + \alpha_2 X_2(x) + \alpha_3 X_3(x), \quad (22)$$

siendo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ .

En las imágenes digitales, la única información disponible es una versión muestreada y cuantizada de  $u$ ,  $u(i, j)$ , donde  $(i, j)$  recorre un conjunto discreto de puntos (habitualmente sobre una retícula) y  $u(i, j)$  recorre un conjunto discreto de valores que en muchos casos se corresponden con los valores  $0, 1, \dots, 255$ . Suponiendo que las muestras han sido tomadas respetando el teorema de muestreo de Shannon, entonces podemos recuperar la función  $u$  a partir de las muestras  $u(i, j)$ . En el caso de imágenes satélite, esto es razonable como aproximación y podemos suponer que  $u$  es interpolable en  $D$  a partir de las muestras.

Típicamente (como ocurre en el caso de los satélites SPOT) la imagen pancromática es muestreada a más alta resolución que los canales espectrales y se plantea el problema de recuperar dichos canales a la resolución de la imagen pancromática. Supondremos que la imagen  $u(i, j)$  tiene un tamaño de  $N \times N$  pixels mientras los canales espectrales tienen una resolución  $s$  veces más baja y, por tanto, un tamaño de  $\frac{N}{s} \times \frac{N}{s}$  donde  $s = 2$  ó  $s = 4$ . Denotaremos los canales espectrales a baja resolución por el vector  $\vec{u}^s = (X_1^s, X_2^s, X_3^s)$ . El problema consiste en recuperar  $\vec{u}$  a partir de  $u$  y de  $\vec{u}^s$ , teniendo en cuenta la restricción (22) y las restricciones dadas por el modelo de adquisición de imágenes. En nuestro caso, para cada canal, el valor  $X_n^s$  en un pixel a baja resolución está relacionado con el valor de  $X_n$  en los pixels a alta resolución por un filtro pasa-bajo y un submuestreo. Si  $k_1, k_2, k_3$  denotan las respuestas impulsionales de los filtros correspondientes a los canales  $X_1, X_2, X_3$ , supondremos que  $k_n$  son operadores lineales de  $L^2(D)$  en  $C(D)$  y se cumple que

$$X_n^s(i, j) = k_n * X_n(i, j), \quad \forall (i, j) \in S, \quad n = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Obviamente, la recuperación de las  $X_n$  a partir de  $u$  y de las  $X_n^s$  verificando las relaciones (22) y (23) es un problema mal planteado. Para resolverlo seguiremos la estrategia habitual: regularización. En nuestro caso, propondremos una regularización basada en la información geométrica contenida en la imagen pancromática.



Figura 25: a) Resultado obtenido a partir de las imágenes  $u$  y  $\bar{u}$  de la Figura 5.  
b) Imagen de referencia para comparar el resultado.  $(R_{ref}, G_{ref}, B_{ref})$ .

Hemos definido la geometría de una imagen de intensidad en términos de su mapa topográfico. Pero, ¿cuál es el contenido geométrico de una imagen en color? Obviamente, la respuesta a esta pregunta es compleja y, estrictamente hablando, la geometría de una imagen en color no se puede reducir a la geometría de su luminosidad. De hecho es fácil construir un contraejemplo en el que podemos ver objetos en color en una imagen de luminosidad constante. Pero, ¿qué ocurre en las imágenes naturales? ¿Se crean contornos en imágenes en color con luminancia constante?

En el trabajo [20] adoptamos la hipótesis (**GC**) que, esencialmente, dice que *la información geométrica de una imagen en color está contenida en el mapa topográfico de su correspondiente imagen de intensidad* y la sometimos a verificación experimental. Para ello, modificamos los canales de color de forma que sus curvas de nivel estuviesen contenidas en las curvas de nivel de su imagen de intensidad y procedimos a su comparación con la imagen original. Los resultados parecen confirmar nuestra hipótesis y podemos resumir brevemente la conclusión de [20]: *la sustitución de los colores de una imagen por sus esperanzas condicionales respecto a los niveles de gris no altera nuestra percepción de la imagen en color*. Nada hay de sorprendente en esto, como es experiencia común, las fotografías o el cine en blanco y negro permiten convencernos de que las formas contenidas en las imágenes pueden codificarse en la escala de niveles de gris, experiencia corroborada por una gran parte de la investigación en procesamiento de imágenes.

Admitimos en lo que sigue que la hipótesis (**GC**) es razonable para los canales *RGB* en imágenes satélite. De acuerdo con la Sección 2, la geometría de  $u$  está dada por sus curvas de nivel. Pero necesitamos una herramienta más adaptada al diseño de un funcional de energía y para ello vamos a describir la geometría de  $u$  a partir del campo de normales unitarias a las curvas de nivel. Suponiendo que  $u \in BV(D)$ , definimos el campo  $\theta$  como la derivada de Radon-Nykodym de la medida  $Du$  respecto a su variación  $|Du|$ , de manera que, formalmente, se satisface la relación  $\theta \cdot Du = |Du|$  y  $|\theta| \leq 1$  casi por todas partes. Llamaremos a  $\theta$  el campo de normales unitarias a los conjuntos de nivel de  $u$ . En la práctica, a nivel computacional, definimos  $\theta$  por la relación  $\theta(x) = \frac{Du(x)}{|Du(x)|}$  si  $Du(x) \neq 0$  y  $\theta(x) = 0$  si  $Du(x) = 0$ ,  $x \in D$ .

Suponiendo que  $X_1, X_2, X_3 \in BV(D)$ , para imponer que la geometría de los canales de color está determinada por  $\theta$  impondremos las relaciones

$$|DX_n| = \theta \cdot DX_n, \quad n = 1, 2, 3, \quad (24)$$

o bien, de otra forma, impondremos

$$\theta^\perp \cdot DX_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (25)$$

donde  $\theta^\perp$  representa la rotación en el sentido anti-horario de  $\pi/2$  de  $\theta$ , es decir, el campo de tangentes a las curvas de nivel de  $u$ . Para fijar ideas, impondremos (25).

Obviamente, tanto las relaciones (25) como las restricciones (22) y (23) pueden no ser satisfechas de forma exacta y es necesario imponerlas en un

contexto variacional. Teniendo en cuenta todas estas restricciones, proponemos minimizar el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^3 \gamma_n \int_{\Omega} |\theta^\perp \cdot DX_n|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^3 \alpha_n X_n - u \right)^2 dx \\ & + \mu \sum_{n=1}^3 \int_{\Omega} \Pi_S \left( (k_n * X_n(x) - X_n^S(x)) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (26)$$

con las restricciones  $0 \leq X_n \leq M_n := \max_{(i,j) \in S} \max \left( \frac{u(i,j)}{\alpha_n}, X_n^S(i,j) \right)$ , siendo  $\gamma_n, \lambda, \mu > 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Observemos que  $\Pi_S$  representa el peine de Dirac sobre la retícula de puntos  $S$ , es decir,  $\Pi_S = \sum_{(i,j) \in S} \delta_{(i,j)}$ . Para más precisiones sobre el espacio funcional en que minimizamos (26), nos referimos a [11]. Digamos para finalizar que el efecto del primer término del funcional es la difusión de los canales de color a lo largo de las curvas de nivel de la luminancia. Un descenso de gradiente aplicado a este término lleva a la ecuación de difusión

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \operatorname{div} (\langle \theta^\perp, DX \rangle \theta^\perp) \quad (27)$$

para cada canal  $X = X_1, X_2, X_3$  ([11]).

La Figura 25.a nos muestra el resultado obtenido a partir de la imagen pancromática  $u$  y los canales de color  $\vec{u}$  de la Figura 5 cuya resolución es de 0.7 y 2.8 m/pixel, respectivamente. La Figura 25.b muestra una imagen de referencia con la que podemos comparar visualmente. Para una comparación cuantitativa referimos al lector a [11].

**Agradecimientos:** Quisiera agradecer a F. Andreu, C. Ballester, M. Bertalmío, E. Fernández-Cara y J.M. Mazón sus comentarios en la preparación de este trabajo. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya, por el proyecto PNP GC, referencia BFM2003-02125 y por el CNES.

## Referencias

- [1] A. ALMANSA, F. CAO, Y. GOUSSEAU, B. ROUGÉ, Interpolation of digital elevation models using AMLE and related methods, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **40**, (2002) 314–325.
- [2] L. AMBROSIO, V. CASELLES, S. MASNOU, J.M. MOREL, Connected Components of Sets of Finite Perimeter and Applications to Image Processing, *Journal of the Euro. Math. Soc.*, **3**, 39–92 (2001).
- [3] L. AMBROSIO, S. MASNOU, A Direct Variational Approach to a Problem Arising in Image Reconstruction. *Interfaces and Free Boundaries*, **5**:63–81, 2003.

- [4] AMIRA, Advanced 3D Visualization and Volume Modeling, 2004. See related information in <http://www.AmiraVis.com>.
- [5] F. ANDREU, V. CASELLES, J. M. MAZÓN, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*. Progress in Mathematics, vol. 223, 2004. Birkhauser.
- [6] G. ARONSSON, Extension of functions satisfying Lipschitz conditions, *Ark. for Math.* **6**, (1967) 551–561.
- [7] G. ARONSSON, M. G. CRANDALL, P. JUUTINEN, A Tour of the Theory of Absolute Minimizing Functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, (2002) 439–505.
- [8] C. BALLESTER, M. BERTALMÍO, V. CASELLES, G. SAPIRO, J. VERDERA, Filling-in by Joint Interpolation of Vector Fields and Grey Levels. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10:1200–1211, 2001.
- [9] C. BALLESTER, V. CASELLES, J. VERDERA, Disocclusion by Joint Interpolation of Vector Fields and Gray Levels. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2:80–123, 2003.
- [10] C. BALLESTER, V. CASELLES, J. VERDERA, M. BERTALMÍO, G. SAPIRO, A Variational Model for Filling-in Gray level and Color Images. In *ICCV 2001*, vol. 1, pp. 10–16, Vancouver, Canada.
- [11] C. BALLESTER, V. CASELLES, B. ROUGÉ, J. VERDERA, Une méthode géométrique de fusion des images P+XS. *Bulletin de la Société Française de Photogrammetrie et Teledetection*, Num. 169, pp. 53–63, 2003. Una versión ulterior aparecerá en IJCV.
- [12] C. BALLESTER, E. CUBERO-CASTAN, M. GONZALEZ, J. M. MOREL, Contrast Invariant Image Intersection, *Cahiers de l'ENS Cachan*, 9817, 1998.
- [13] C. BALLESTER, V. CASELLES, P. MONASSE, The tree of shapes of an image, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9, pp. 1–18, 2003.
- [14] G. BELLETTINI, G. DAL MASO, M. PAOLINI, Semicontinuity and Relaxation Properties of a Curvature Depending Functional in 2d. *Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Cl. Sci.*, 20:247–297, 1993.
- [15] M. BERTALMÍO, G. SAPIRO, C. BALLESTER, V. CASELLES, Image inpainting, *Proceedings of Comp. Graphics, SIGGRAPH 2000*, New Orleans, USA, July 2000, pp. 417–424.
- [16] M. BERTALMÍO, A. BERTOZZI, G. SAPIRO, Navier-Stokes, Fluid-Dynamics and Image and Video Inpainting, *Proc. IEEE Int. Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Hawaii, USA, December 2001, pp. 355–362.

- [17] F. CAO, Absolutely minimizing Lipschitz extension with discontinuous boundary data, *C.R. Acad. Sci. Paris* **327**, (1998) 563–568.
- [18] J. R. CASAS, *Image compression based on perceptual coding techniques*, PhD thesis, Dept. of Signal Theory and Communications, UPC, Barcelona, Spain, March 1996.
- [19] V. CASELLES, B. COLL, J. M. MOREL, Topographic Maps and Local Contrast Changes in Natural Images, *International Journal of Computer Vision* 33(1), 5–27 1999.
- [20] V. CASELLES, B. COLL, J. M. MOREL, Geometry and Color in Natural Images, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 16, pp. 89–107, 2002.
- [21] V. CASELLES, L. IGUAL, O. SANDER, An Axiomatic Approach to Scalar Data Interpolation on Surfaces, Preprint 2004.
- [22] V. CASELLES, J. M. MOREL, C. SBERT, An axiomatic approach to image interpolation, *IEEE Transactions on Image Processing* **7**, (1998) 376–386.
- [23] T. CHAN, S. KANG, J. SHEN, Euler’s Elastica and Curvature Based Inpaintings. *SIAM J. Appl. Math.*, 63:564–592, 2002.
- [24] U. CLARENZ, U. DIEWALD, G. DZIUK, M. RUMPF, R. RUSU, A finite element method for surface restoration with smooth boundary conditions. *Computer Aided Geometric Design*, 21(5), pp. 427–445, 2004.
- [25] M. G. CRANDALL, H. ISHII, P.-L. LIONS, User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Am. Math. Soc.* 27 (1992) pp. 1–67.
- [26] A. CRIMINISI, P. PEREZ, K. TOYAMA, Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting. *IEEE-TIP*, 13(9):1200–1212, 2004.
- [27] M. DROSKE, M. RUMPF, A level set formulation for Willmore flow, *Interfaces and Free Boundaries*, 6(3), pp. 361–378, 2004. .
- [28] A. EFROS, T. LEUNG, Texture synthesis by non-parametric sampling. In *IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 1033–1038, 1999.
- [29] L. C. EVANS, R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Math., CRC Press, 1992.
- [30] W. R. FRANKLIN, A. SAID, Lossy compression of elevation data, *7th Int. Symposium on Spatial Data Handling*, 1996.
- [31] F. GUICHARD, J. M. MOREL, *Introduction to Partial Differential Equations on image processing*, Tutorial, ICIP-95, Washington.

- [32] R. GRZIBOVSKIS, A. HEINTZ, A convolution-thresholding scheme for the Willmore flow. *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2005), no. 6, 2652–2670.
- [33] A. HIRANI, T. TOTSUKA, Combining Frequency and Spatial Domain Information for Fast Interactive Image Noise Removal. In *SIGGRAPH 96*, pages 269–276, 1996.
- [34] B. HORN, The Curve of Least Energy. *ACM Trans. on Mathematical Software*, 9:441–460, 1982.
- [35] R. JENSEN, Uniqueness of Lipschitz extensions: Minimizing the sup norm of the gradient, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **123**, (1993) 51–74.
- [36] G. KANIZSA, *Gramática de la Visión*, Ed. Paidós, 1986.
- [37] D. KING, *The Commissar Vanishes*. Henry Holt and Company, 1997.
- [38] R. KIMMEL, R. MALLADI, N. SOCHEN, Images as Embedded Maps and Minimal Surfaces: Movies, Color, Texture and Volumetric Medical Images. *International Journal of Computer Vision*, 39(2):111–129, 2000.
- [39] A. KOKARAM, On missing data treatment for degraded video and film archives: a survey and a new bayesian approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13:397–415, 2004.
- [40] A. KOKARAM, R. MORRIS, W. FITZGERALD, P. RAYNER, Detection of Missing Data in Image Sequences. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11:1496–1508, 1995.
- [41] A. KOKARAM, R. MORRIS, W. FITZGERALD, P. RAYNER, Interpolation of Missing Data in Image Sequences. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11:1509–1519, 1995.
- [42] M. LEVOY, K. PULLI, B. CURLESS, S. RUSINKIEWICZ, D. KOLLER, L. PEREIRA, M. GINZTON, S. ANDERSON, J. DAVIS, J. GINSBERG, J. SHADE, D. FULK, The Digital Michelangelo Project: 3D Scanning of Large Statues. In *Computer Graphics (SIGGRAPH) 2000*, pages 269–276, 1996.
- [43] J. L. LISANI, *Comparaison automatique d'images par leurs formes*, Ph.D Thesis, Université de Paris-Dauphine, July, 2001.
- [44] J. L. LISANI, P. MONASSE, L. MOISAN, J. M. MOREL, Affine Invariant Mathematical Morphology Applied to Generic Shape Recognition Algorithm, *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Morphology 2000*, Palo Alto, June 2000.
- [45] S. MASNOU, *Filtrage et Desocclusion d'Images par Méthodes d'Ensembles de Niveau*. PhD thesis, Université Paris-Dauphine., 1998.

- [46] S. MASNOU, Disocclusion: a Variational Approach using Level Lines. *IEEE-TIP*, 11:68–76, 2002.
- [47] S. MASNOU, J. MOREL, Level Lines Based Disocclusion. In *Proc. 5th IEEE International Conference on Image Processing*, pages 259–263, Chicago, Illinois, 1998.
- [48] P. MONASSE, Image Registration, *Cahiers de l'ENS Cachan*, 1999.
- [49] D. MUMFORD, Elastica and Computer Vision. In C. Bajaj, editor, *Algebraic geometry and its applications*, pages 491–506. Springer-Verlag, 1994.
- [50] M. NITZBERG, D. MUMFORD, T. SHIOTA, *Filtering, Segmentation, and Depth*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [51] L. I. RUDIN, S. OSHER, E. FATEMI, Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*, 60:259–269, 1992.
- [52] P. SALEMBIER, P. BRIGGER, J. R. CASAS, M. PARDÀS, Morphological Operators for Image and Video Compression, *IEEE Trans. on Image Processing*, 5 (1996), pp. 881–897.
- [53] O. SAVIN,  $C^1$  regularity for infinity harmonic functions in two dimensions, Preprint.
- [54] J. SERRA, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.
- [55] K. THORNER, L. WILLIAMS, Characterizing the Distribution of Completion Shapes with Corners Using a Mixture of Random Processes. *Pattern Recognition*, 33:543–553, 2000.
- [56] S. ULLMAN, Filling-in the Gaps: the Shape of Subjective Contours and a Model for Their Generation. *Biological Cybernetics*, 75:1–6, 1976.
- [57] M. UNSER, Splines, a perfect fir for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 22–38, 1999.
- [58] M. WERTHEIMER, *Untersuchungen zur Lehre der Gestalt, II* Psychol. Forschung, 4:301–350, 1923.
- [59] D. WILLIAMS, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks 1991.
- [60] L. WILLIAMS, D. JACOBS, Local Parallel Computation of Stochastic Completion Fields. In *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR '96*, pages 161–168, 1996.

## Multi-solitons and large time dynamics of some nonlinear dispersive equations

YVAN MARTEL

Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines  
45, avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles - France

`martel@math.uvsq.fr`

### Abstract

We consider the generalized Korteweg–de Vries equations and the nonlinear Schrödinger equations in the subcritical case. We review recent results on the large time behavior of the solutions which are in an  $H^1$  neighborhood of one soliton or of the sum of several stable solitons. Such results are motivated by the remarkable properties of the  $N$ -soliton solutions of the KdV and mKdV equations, and of the cubic one dimensional Schrödinger equation.

## 1 Introduction

In these notes, we review recent results concerning the long time behavior of solutions of the subcritical generalized Korteweg–de Vries equations (gKdV equations)

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^p) = 0 \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

( $1 < p < 5$ ) which are close to one soliton or to the sum of several solitons. These results concern mainly the stability and asymptotic stability of the family of solitons and the existence, uniqueness and stability of multi-soliton type solutions. We also discuss similar questions for some other nonlinear dispersive equations, mainly for some nonlinear Schrödinger equations.

Questions related to solitons and multi-solitons of the generalized KdV equations being motivated by the remarkable properties of the original KdV equation ( $p = 2$ ), we start by recalling some of these properties.

### 1.1 Integrability and multi-solitons

It is well-known that the Korteweg-de Vries equation

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^2) = 0 \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

is completely integrable, which means that it has remarkable features for a nonlinear partial differential equation (see e.g. Lax [33], Lamb [31], Miura [54] and Schuur [63]). We recall in this section some classical results concerning multi-solitons for the KdV equation. Many of these properties were obtained using the Inverse Scattering Transform.

First, there are formally an *infinite number of conservation laws* for a solution  $u(t)$  of the KdV equation

$$\begin{aligned} \int u(t, x) dx, \quad \int u^2(t, x) dx, \quad \int ([\partial_x u(t, x)]^2 - \frac{2}{3} u^3(t, x)) dx, \\ \int ([\partial_x^2 u(t, x)]^2 - \frac{10}{3} [\partial_x u(t, x)]^2 u(t, x) + \frac{5}{9} u^4(t, x)) dx, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Higher order conserved quantities require solutions in  $H^s$ , for  $s \geq 3$  in order to be defined. Complete integrability is also related to the discovery for the KdV equation of a large family of explicit *multi-soliton* solutions. To get started, note that the function  $U_1(t, x)$  defined by

$$U_1(t, x) = \frac{3}{2} \cosh^{-2} \left( \frac{x-t}{2} \right) = 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{x-t})$$

is a travelling wave solution of (2). All other travelling waves are obtained from  $U_1$  by scaling and translation. Indeed, denoting

$$Q(x) = \frac{3}{2} \cosh^{-2} \left( \frac{x}{2} \right), \quad Q_c(x) = cQ(\sqrt{c}x) \quad \text{and} \quad U_c(t, x) = Q_c(x - ct),$$

the travelling waves solutions of (2) are exactly  $U_c(t, x - x_0)$ , for all  $c > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Note that

$$\int Q_c^2 = c^{3/2} \int Q^2, \quad (3)$$

which means that the speed of the travelling wave is related to its size in  $L^2$ .

The following function  $U_{1,c}$  which is a solution of (2), is a typical 2-soliton solution of (2) ( $0 < c < 1$ ):

$$U_{1,c}(t, x) = 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{x-t} + e^{\sqrt{c}(x-ct)} + \alpha e^{x-t} e^{\sqrt{c}(x-ct)}),$$

with  $\alpha = \left( \frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} \right)^2$ . By a classical analysis (Wadati and Toda [66]), we have

- As  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\|U_{1,c}(t, x) - Q_c(x - ct) - Q(x - t - \delta)\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0,$$

where  $\delta = 2 \log \left( \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}} \right) > 0$ .

- As  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\|U_{1,c}(t,x) - Q_c(x - ct - \delta') - Q(x - t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0,$$

$$\text{where } \delta' = \frac{\delta}{\sqrt{c}} > 0.$$

This solution contains two solitary waves  $Q$  and  $Q_c$  whose sizes are unchanged by interaction. The terminology *solitons* was introduced by Zabusky and Kruskal [70] to refer to travelling waves having such a stability property through interaction. Note that the trajectories of the solitary waves are shifted, as can be seen on the limit behavior as  $t \rightarrow +\infty$  and  $t \rightarrow -\infty$  ( $\delta, \delta' > 0$ ).

More general but similar expressions for multi-soliton solutions can be written for any number of solitons. Indeed, for any given parameters  $0 < c_1 < \dots < c_N$ ,  $\delta_1, \dots, \delta_N \in \mathbb{R}$ , there exists an explicit multi-soliton solution  $U(t, x)$  that satisfies as  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\left\| U(t, x) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(x - c_j t - \delta_j) \right\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Moreover, such solution also satisfies as  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\left\| U(t, x) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(x - c_j t - \delta'_j) \right\|_{H^1} \rightarrow 0,$$

for some  $\delta'_j$  such that  $\delta_j - \delta'_j$  depends on all the  $(c_k)$ .

These special solutions are fundamental in studying the properties of general solutions of the KdV equation because of the so-called *decomposition property*. Recall that Eckhaus and Schuur [17] state rigorously this property for any initial data such that the Inverse Scattering Transforms applies. More precisely, they proved the following result.

**Theorem** (Cohen [10]; Eckhaus and Schuur [17], [63]). *Suppose that  $u(0, x)$  satisfies*

$$u(0) \in C^4(\mathbb{R}), \quad k = 0, \dots, 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\partial^k u(0, x)}{\partial x^k} \right| \leq \frac{C}{|x|^{10}}.$$

*Then, for  $x > 0$ , as  $t \rightarrow +\infty$ ,*

$$u(t, x) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(x - x_j - c_j t) \rightarrow 0.$$

This result means that the asymptotic behavior of any solution (sufficiently regular and decaying) is governed by a finite number of solitons. The number  $N$  of solitons emerging is related to a spectral property of  $u(0)$ . We refer to the original paper and book for a precise convergence result.

Finally, we recall another rigorous result concerning  $N$ -soliton solutions of the KdV equation. The  $N$ -soliton solutions of (2) are stable in  $H^N$ , which means that if a solution  $u(t) \in H^N(\mathbb{R})$  of the KdV equation is such that for some time  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u(t_0)$  is close to such an  $N$ -soliton solution in  $H^N(\mathbb{R})$  then for all  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u(t)$  is close in  $H^N(\mathbb{R})$  to an  $N$ -soliton solution with same speeds (but possibly different positions). This result is due to Maddocks and Sachs [36] and we refer to this paper for a more precise statement. The exponent of the Sobolev norm has to be larger than or equal to the number of solitons since the proof of the stability result uses the first  $N + 1$  conserved quantities, and thus does not hold in the energy space  $H^1$  for  $N \geq 2$ .

There are other nonlinear partial differential equations coming from Physics that are completely integrable, see e.g. the book of Ablowitz and Segur [1]. Let us mention a few of them that have mathematical similarities with the KdV equation.

– First, of course, the modified KdV equation, i.e. equation (6) with  $p = 3$  is the closest model to the KdV equation. It is also a completely integrable equation and also admits explicit multi-soliton solution (see Ohmiya [57] and the book of Schuur [63]). Note that the mKdV equation also has *breather solutions*, i.e. another large family of explicit solutions that are localized. These solutions may also appear asymptotically in the behavior of general solutions, but it seems that their nonlinear stability was not studied so far.

– Second, consider the one dimensional cubic Schrödinger equation,

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2 u = 0 \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Recall that for a solitary wave of (4), the speed and the scaling are not related, as it is the case for the KdV equation, thus the two parameters can be chosen independently and the family of solitary waves is larger. See sections 2.3 and 2.6 for a description of the family of travelling waves. Zakharov and Shabat [71] have proved the existence of multi-soliton solutions for this equation. From [71], one knows that the family of such multi-solitons is richer than for the KdV equation : first, simply as a consequence of having a larger set of solitary waves, and also because multi solitary waves containing parallel solitons exist. We will discuss in these notes some generalized versions of (4) (general nonlinearities and  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ ).

– The so called KP I and KP II equations are also completely integrable models:

$$u_t + \partial_x^3 u \pm 3\partial_x^{-1} \partial_y^2 u + 6u\partial_x u = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \quad (5)$$

Recall that for the + sign in front of the third term, this is the KP II equation that does not admit solitary waves (see de Bouard and Saut [14] and also de Bouard and Martel [13]). The KP I equation does admit solitary waves (see de Bouard and Saut [14], [16]) and their stability has been studied, but to our knowledge, questions related to multi-soliton are open. We will not further discuss the KP equations in these notes.

## 1.2 Questions for the generalized models

The generalized KdV equation (1) is known to be integrable only for  $p = 2$  or 3. For a different power in the nonlinearity (or any other perturbation of the model), the Inverse Scattering Transform does not apply and the properties related to multi-solitons are not known. In particular, explicit multi-soliton solutions cannot be expected for the non integrable models. A vast question is to what extent the remarkable properties of solitons and multi-solitons of the integrable equations persist for the generalized models. These notes are devoted to the presentation of some recent results concerning this question. Surprisingly, some of these results also give some more insight on the behavior of the solutions around multi-solitons *even in the integrable cases*.

The main conclusion of the results gathered in these notes is that the properties of the flow of the gKdV equations in *a neighborhood of one or several solitons*, and *asymptotically as  $t \rightarrow +\infty$*  are quite similar to the ones of the KdV equation. Since the techniques developed in this situation do not use the very specific structure of the KdV equation, we believe that they have a wide scope of applicability. To support this belief, we present some extensions of these techniques to some other equations with solitary waves.

Since we consider only large time properties, and solutions containing several solitons with different speeds, the solitons are always decoupled in the results presented here. It seems that so far in the non-integrable cases, no information is available for the *interaction of several solitons* i.e. when the solitons come closer and begin to interact. In particular, it is not clear whether such interaction should preserve the shape of the solitons. By abuse of language, we may still call *solitons* the travelling waves of the gKdV equations.

Exactly the same questions can be asked for generalizations of the one dimensional cubic Schrödinger equation. We present in these notes the latest results in this direction.

## 1.3 Outline of the paper

In Section 2, we recall the generalized models to be studied and some of the general results on these models : local and global in time well-posedness results, existence of travelling wave solutions, stability or asymptotic stability results of these solutions. In the next sections, we present recent results on the gKdV models which appeared in [42], [48], [38] and [46].

Results for nonlinear Schrödinger equations and for a nonlinear equations introduced by Peregrine [59] and Benjamin, Bona and Mahony [3] are also presented ([49], [47], [18], [19], [20] and [39]). All these results hold in the energy space, and *are not based on complete integrability* and the Inverse Scattering Transform. Note that in this paper, we consider only  $H^1$  global and uniformly bounded solutions.

In Section 3, we recall a result of asymptotic stability of one soliton of the gKdV equation that holds in the energy space and we give a sketch of its proof.

Sections 4 and 5 deal with the case of multi-soliton solutions, i.e. solutions

which are close to the sum of several solitons of different speeds for large time (i.e. when the solitons are all sufficiently decoupled). Section 4 is concerned with the existence of multi-soliton type solutions as  $t \rightarrow +\infty$ , and section 5 present some results concerning the stability and asymptotic stability of such solutions.

In Sections 3, 4 and 5, we also present similar results for two other dispersive equations, the nonlinear Schrödinger equation and a nonlinear equation introduced in [59] and [3] which is similar to the KdV equation. These notes do not cover the critical case  $p = 5$  in (1) and the blow-up phenomena that was described in [41], [43], [51] and [44]. We refer the interested reader to these papers or to the review papers [45], Tzevtkov [65]. For recent progress in the blow up phenomena for the critical Schrödinger equation in  $\mathbb{R}^d$ , we refer to Merle and Raphaël [52] and to references therein.

## 2 Classical results for the generalized models

### 2.1 Introduction of the generalized models

In this section, we present the models to be studied in these notes.

- Generalized Korteweg-de Vries equations : As mentioned in the Introduction, we mainly focus on the generalized KdV equation with power nonlinearity :

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^p) = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

for  $p = 2, 3, 4$ . Formally, the conserved quantities for (6) are for all  $p > 1$ ,

$$\int u(t) = \int u(0), \quad (7)$$

$$\int u^2(t) = \int u^2(0), \quad (8)$$

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int (\partial_x u(t))^2 - \frac{1}{p+1} \int u^{p+1}(t) = E(u(0)). \quad (9)$$

Except for  $p = 2$  and 3, there are no other conserved quantities. Recall the symmetries of the gKdV equation :

- Scaling invariance : if  $u(t, x)$  is solution of (6) then  $c_0^{\frac{1}{p-1}} u(c_0^{\frac{3}{2}} t, c_0^{\frac{1}{2}} x)$  is also solution, for any  $c_0 > 0$ ,
- Translation invariance : if  $u(t, x)$  is solution of (6) then  $u(t - t_0, x - x_0)$  is also solution, for any  $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ .

We will also consider, more generally,

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + g(u)) = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

where  $g$  is of class  $C^1$  and  $g(0) = 0$ .

• Nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^d$  : First, we consider the pure power nonlinear Schrödinger equations ( $d \geq 1$ ):

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad (11)$$

for

$$1 < p < \frac{d+2}{d-2}, \text{ if } d \geq 3,$$

with conserved quantities

$$\int |u(t)|^2 = \int |u(0)|^2, \quad (12)$$

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int |\nabla u(t)|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u(t)|^{p+1} = E(u(0)), \quad (13)$$

$$\text{Im} \int \nabla u(t) \bar{u}(t) = \text{Im} \int \nabla u(0) \bar{u}(0). \quad (14)$$

Except for  $d = 1$  and  $p = 3$ , there are no other conserved quantities for (11). We also list the symmetries of equation (11) :

- Space-time translation invariance: if  $u(t, x)$  satisfies (11), then for any  $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $w(t, x) = u(t - t_0, x - x_0)$  also satisfies (11).
- Phase invariance: if  $u(t, x)$  satisfies (11), then for any  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ ,  $w(t, x) = u(t, x)e^{i\gamma_0}$  also satisfies (11).
- Galilean invariance: if  $u(t, x)$  satisfies (11), then for any  $v_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$w(t, x) = u(t, x - v_0 t) e^{i\frac{v_0}{2}(x - \frac{v_0}{2}t)} \quad (15)$$

also satisfies (11).

More generally, we also introduce

$$i\partial_t u + \Delta u + f(|u|^2)u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad (16)$$

for  $f$  of class  $C^1$ ,  $f(0) = 0$  and satisfying

$$\text{for all } s \geq 1, \quad |f'(s^2)| < Cs^{p-2}, \quad \text{for some } 1 < p < \frac{d+2}{d-2}. \quad (17)$$

• Peregrine [59] and Benjamin, Bona and Mahony [3] have introduced another equation similar to the KdV equation. It writes as follows

$$(1 - \partial_x^2)\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Note that in this case, the invariant quantities are

$$\int u^2(t) + (\partial_x u(t))^2 = \int u^2(0) + (\partial_x u(0))^2, \quad (19)$$

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int u^2(t) + \frac{1}{p+1} \int u^{p+1}(t) = E(u(0)). \quad (20)$$

We could also consider in (18) a generalized nonlinearity of the form  $u^p$  or even  $g(u)$  for some suitable  $g$ , however we restrict ourselves to the quadratic nonlinearity and we will refer to original papers for details on the generalized form. Note that (18) *is not completely integrable*, nor is any variant of it.

Note finally that the three models considered above are *time reversible*:

- If  $u(t, x)$  is solution of (6) then so is  $u(-t, -x)$ ;
- If  $u(t, x)$  is solution of (11) then so is  $\bar{u}(-t, x)$ ;
- If  $u(t, x)$  is solution of (18) then so is  $u(-t, -x)$ .

## 2.2 Cauchy problem in $H^1$

For all the models and nonlinearities under consideration, the local Cauchy problem is well-posed in  $H^1$ , in a strong sense, i.e. with continuous dependence upon the initial data in  $H^1$ . Moreover, the persistence property holds, which means that if the initial data is in  $H^s$ , for some  $s > 1$ , then the solution is also in  $H^s$ . Moreover any  $H^1$  solution considered is the limit in  $H^1$  of more regular solutions obtained by regularization of the initial data. This permits to justify the conservation of quantities defined in  $H^1$  : (8)–(9) for the gKdV equation, (12)–(14) for the NLS equation and (19)–(20) for the P-BBM equation.

For the NLS equation, the resolution of the local Cauchy problem in  $H^1$  is due to Ginibre and Velo [24], and for the gKdV equation to Kenig, Ponce and Vega [28] (see also references therein for previous works on the subject). For equation (18), the result is elementary due to regularizing properties of the operator  $(1 - \partial_x^2)^{-1}$ , see [3]. We refer to these papers for a precise statement of the well-posedness results.

Under subcritical assumptions, i.e.  $1 < p < 5$  for (6), or  $1 < p < 1 + 4/d$  for (11), and similar assumptions for the model with  $g(u)$ , all  $H^1$  solutions are in fact global in  $H^1$  and uniformly bounded in  $H^1$ . This is a usual consequence of the conserved quantities and of the resolution of the Cauchy problem.

In these notes, we work in the previous framework, i.e. we consider global  $H^1$  solutions that are limit of more regular global solutions. When stating a uniqueness result, we mean uniqueness in the class of the resolution of the Cauchy problem.

## 2.3 One-soliton solution of the generalized models

In this section, we describe the family of travelling waves or solitary waves of the generalized models introduced in Section 2.1. By abuse of language, we often refer to them as *solitons* though such terminology should be reserved to the integrable cases.

We begin with the gKdV equation, which is a one-dimensional problem. Looking for travelling wave solutions of the form  $u(t, x) = Q_c(x - ct)$ , one obtains the following equation for  $Q_c$

$$Q_c'' + Q_c^p = cQ_c.$$

There exist localized solutions ( $Q_c \in H^1(\mathbb{R})$ ) of this equation only for  $c > 0$ , as can be easily seen by Pohozaev's identity. In this case the solution is unique up to translation and is explicit:

$$Q_c(x) = c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}x) \quad \text{where} \quad Q(x) = \left( \frac{p+1}{2} \cosh^{-2} \left( \frac{(p-1)x}{2} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (21)$$

Thus, the only travelling wave solutions of (6) are  $R_{c,x_0}(t, x) = Q_c(x - x_0 - ct)$ .

As the gKdV equation, the P-BBM equation (18) has a two parameter family of solitary wave solutions: for any  $c > 1$  and  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u(t, x) = \varphi_c(x - ct - x_0)$  is a travelling wave solution of (18) if  $\varphi_c$  is solution of

$$-c\partial_x^2 \varphi_c + (c-1)\varphi_c - \varphi_c^2 = 0. \quad (22)$$

The unique even function going to zero at infinity which is solution of (22) is given by

$$\varphi_c(x) = (c-1)Q\left(\sqrt{\frac{c-1}{c}}x\right),$$

where  $Q$  is defined in (21) (for  $p = 2$ ).

We now consider solitary waves of the nonlinear Schrödinger equation (11). There are of the form

$$u(t, x) = e^{i\omega_0 t} Q_{\omega_0}(x), \quad (23)$$

for  $\omega_0 > 0$ , where  $Q_{\omega_0} \in H^1(\mathbb{R}^d)$  is solution of

$$\Delta Q_{\omega_0} + Q_{\omega_0}^p = \omega_0 Q_{\omega_0}, \quad Q_{\omega_0} > 0. \quad (24)$$

In dimension  $d = 1$ , the functions  $Q_{\omega_0}$  are the same as for the KdV equation. Recall for any  $d \geq 1$  that such positive solution of (24) exists and is unique up to translations (see [5], [22] and [30]), moreover, it is the solution of a variational problem. We call  $Q_{\omega_0}$  the solution of (24) which is radially symmetric. By the symmetries of equation (11), for any  $v_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  and  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$u(t, x) = Q_{\omega_0}(x - x_0 - v_0 t) e^{i(\frac{1}{2}v_0 \cdot x - \frac{1}{4}|v_0|^2 t + \omega_0 t + \gamma_0)}$$

is also a solitary wave of (11), moving on the line  $x = x_0 + v_0 t$ . There may be other (non positive) solutions of (24) but we do not study the corresponding solitary waves solutions here.

Comparing the family of solitons for the gKdV and the NLS equations, we remark that there are more parameters in the case of the NLS equation. In particular, we note that for  $1 < p < 5$ ,

$$\int Q_c^2 = c^{\frac{5-p}{2(p-1)}} \int Q^2, \quad (25)$$

and thus the speed of the soliton of the gKdV equation is directly related to its size in  $L^2$ . In contrast, the speed of a travelling wave and its size in  $L^2$

can be chosen independently for the NLS equation, since they are related to independent parameters  $\omega_0$  and  $v_0$ , the velocity parameter  $v_0$  being chosen by the Galilean invariance. See also the Introduction of Zakharov and Shabat's paper [71].

When considering the generalized models (i.e. (10) or (16)), we obtain the following general elliptic problem:

$$\Delta Q_\omega + f(Q_\omega^2)Q_\omega = \omega Q_\omega \quad \text{in } \mathbb{R}^d. \quad (26)$$

Let  $F(r) = \int_0^r f(s)ds$ . In the one-dimensional case  $d = 1$ , a necessary and sufficient condition for existence of nontrivial solutions of (26) is known ([5]): there exists a solution of (26) in  $H^1$  if and only if

$$r_0 = \inf \{r > 0, \text{ such that } F(r) = \omega r\} \text{ exists and satisfies } f(r_0) > \omega. \quad (27)$$

For  $d \geq 2$  the elliptic problem is not as well understood as for  $d = 1$ , see [5].

## 2.4 Stability of one soliton

In this section, we recall classical results of stability in  $H^1$  of the one soliton solutions introduced in the previous section. By stability, we mean *orbital stability*. First, we state the result for the subcritical gKdV equation.

**Theorem** (Stability of the soliton for gKdV eq.). *Let  $1 < p < 5$ . Let  $u(t)$  be an  $H^1$  solution of the gKdV equation (6). For all  $\epsilon > 0$ , there exists  $\delta > 0$ , such that if  $\|u(0) - Q\|_{H^1} \leq \delta$ , then for all  $t \in \mathbb{R}$ , there exists  $x(t) \in \mathbb{R}$ , such that*

$$\|u(t) - Q(\cdot - x(t))\|_{H^1} \leq \epsilon. \quad (28)$$

By invariance by scaling and translation of the gKdV equation, the result is the same for  $Q_c(x - x_0)$ . The proof of this result does not really use the equation but only the two  $H^1$  conserved quantities, the  $L^2$  norm and the energy (8)–(9), and the variational characterization of  $Q(x)$ . This stability result is due Benjamin [2], Bona [6], Cazenave and Lions [9] and Weinstein [68]. See below for a comparison of the two latter works.

Note that the above formulation of the stability result for the gKdV equation requires the local well-posedness of the Cauchy problem in  $H^1$ , which was proved later by Kenig, Ponce and Vega [28].

For the NLS equations in the subcritical case, the result is completely similar.

**Theorem** (Stability of the soliton for the NLS eq.). *Let*

$$1 < p < 1 + 4/d. \quad (29)$$

*Let  $u(t)$  be an  $H^1$  solution of (11). Let  $\omega_0 > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}^d$  and  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^d$ . For all  $\epsilon > 0$ , there exists  $\delta > 0$  such that if*

$$\left\| u(0) - Q_{\omega_0}(\cdot - x_0)e^{i(\frac{1}{2}v_0 \cdot x + \gamma_0)} \right\|_{H^1} \leq \delta$$

then, for all  $t \in \mathbb{R}$ , there exists  $x(t), \gamma(t) \in \mathbb{R}$  such that

$$\left\| u(t, \cdot) - Q_{\omega_0}(\cdot - x(t)) e^{i(\frac{1}{2}v_0 \cdot x + \gamma(t))} \right\|_{H^1} \leq \epsilon.$$

By the invariances of the NLS equation, this property does not depend on  $v_0$ ,  $x_0$  nor on  $\gamma_0$ . Cazenave and Lions [9] proved a general stability result (implying the above theorem) for solitary waves which are minimizers, in a certain sense, of the energy functional, and when a compactness condition on minimizing sequences holds. This approach requires the concentration compactness method of P.L. Lions [34]. The condition obtained on  $f$  is sharp for the case of power nonlinearities  $f(s^2) \equiv s^{p-1}$  (stability requires  $1 < p < 5$ ).

By a different approach based on the expansion of the conservation laws around a solitary wave, Weinstein [68] also proved a general result of stability in  $H^1$  in the case where  $Q_{\omega_0}$  is a ground state under the non-degeneracy condition:

$$\frac{d}{d\omega} \int_{\mathbb{R}} Q_{\omega}^2(x) dx \Big|_{\omega=\omega_0} > 0, \quad (30)$$

together with some assumptions on the spectrum of the linearized operator around  $Q_{\omega_0}$ . These assumptions are checked in [68] for subcritical power nonlinearities for  $d = 1$  and  $d = 3$ , and can also be checked under less restrictive conditions (see Maris [37] and McLeod [35]).

From [68], a natural assumption for nonlinear stability with a general nonlinearity is the existence of  $\lambda > 0$  such that for any function  $\eta \in H^1$ :

$$\int \eta Q_{\omega} = \int \eta \nabla Q_{\omega} = 0 \Rightarrow \int \left\{ |\nabla \eta|^2 + \omega |\eta|^2 - (f(Q_{\omega}^2) + 2Q_{\omega}^2 f'(Q_{\omega}^2)) |\eta|^2 \right\} \geq \lambda \|\eta\|_{H^1}^2.$$

Note that in the pure power case this condition is equivalent to subcriticality.

Conversely, it is known from works of Grillakis, Shatah and Strauss [25] and Bona, Souganidis and Strauss [7] that if

$$\frac{d}{d\omega} \int_{\mathbb{R}} Q_{\omega}^2(x) dx \Big|_{\omega=\omega_0} < 0,$$

then the solitary wave  $Q_{\omega_0}$  is unstable in  $H^1$ , for the case of the gKdV equations, which corresponds to the condition  $p > 5$ . A proof of instability in the supercritical case for the NLS equation is due to Berestycki and Cazenave [4]. The critical cases were treated by Weinstein [67] and Martel and Merle [40].

## 2.5 Asymptotic stability results [58], [53]

By the previous results, we know that under a subcriticality assumption or equivalently condition (30), a soliton is a stable object in  $H^1$ . However, the stability result does not describe the exact behavior of the solutions that are in

an  $H^1$  neighborhood of the soliton. This description is related to the notion of asymptotic stability.

We introduce the following weighted space and norm

$$H_a^1 = \{v \mid e^{ax}v \in H^1(\mathbb{R}), \text{ with } \|v\|_{H_a^1} = \|e^{ax}v\|_{H^1}\}.$$

Pego and Weinstein [58] proved the following theorem for the gKdV equation.

**Theorem** (Asymptotic stability in  $H_a^1$  for the gKdV eq. [58]). *Let  $c_0 > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  and let  $0 < a < \sqrt{c_0/3}$ . There exists  $\alpha_0 > 0$  such that if  $u(t)$  is a global  $H^1$  solution of (6) satisfying  $u_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap H_a^1$ ,*

$$\|u(0) - Q_{c_0}(\cdot - x_0)\|_{H^1} + \|u(0) - Q_{c_0}(\cdot - x_0)\|_{H_a^1} \leq \alpha_0, \quad (31)$$

*then, there exist  $c_+ > 0$  with  $|c_+ - c_0| \leq K_0\alpha_0$  and  $x_+ \in \mathbb{R}$  with  $|x_+ - x_0| < C\alpha_0$ , such that for all  $t \geq 0$ ,  $v(t, x) = u(t, x) - Q_{c_+}(x - x_+ - c_+t)$  satisfies*

$$\|v(t)\|_{H_a^1(x > \beta t)} \leq Ce^{-bt}, \quad (32)$$

*for some constants  $C, b > 0$ .*

We first comment on the location of the asymptotic soliton. The center of mass of the soliton contained in the solution  $u(t)$  is asymptotically located at  $x = x_+ + c_+t$ , which means that it moves precisely on a line. We point out that this may not be generally the case for a solution in the energy space, see Theorem 2 below. It is here a consequence of the use of initial data in  $H_a^1$ .

Second, we note that if we assume  $\|v(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow +\infty$ , then  $u(t)$  is exactly a soliton. Indeed, such a convergence in  $H^1(\mathbb{R})$  would imply that  $E(u) = E(Q_c)$  and  $\|u\|_{L^2} = \|Q_c\|_{L^2}$  and then by the variational characterization of  $Q_c$ ,  $u(t)$  is a soliton of the form  $Q_c(x - x_0 - ct)$ . The lack of convergence in  $H^1(\mathbb{R})$  is due to the presence of dispersion at the left ( $x < 0$ ) or to the possible presence of small solitons in the region  $0 < x < ct$ . In [58], the use of Sobolev spaces with exponential decay  $H_a^1$  avoids looking at the left of the soliton at the cost of a restrictive assumption on the initial data. For example, one cannot treat the initial data  $u_0(x) = Q_c(x) + Q_{c'}(x - y_0)$ , where  $0 < c' < c$ ,  $c'$  small with respect to  $c$ , since such initial data has a weak exponential decay. Such initial data are of course of interest when studying multi soliton solutions.

In section 3, we present an asymptotic stability result where the use of exponential decay spaces is replaced by the local  $H^1$  norm.

Miller and Weinstein [53] proved a similar result for the P-BBM equation (18). Note that (18) is not scaling invariant, and thus one cannot deduce the result for all the travelling waves from the proof for one soliton. In fact, their result is proved for *almost* all solitary waves, in a suitable sense.

## 2.6 Similar results for the NLS equations

A first result concerning the question of asymptotic stability of one solitary wave for the nonlinear Schrödinger equation is due to Buslaev and Perelman [8], for

$d = 1$  and under a set of conditions on the initial conditions, the solitary wave and the nonlinearity: the nonlinearity has to be flat at 0 ( $|f(s^2)|s \leq s^q$ , for  $q \geq 9$ ) and the initial condition has to be close to a solitary wave in a weighted space (the norm is related to  $\|u\|_{H^1} + \|xu\|_{L^2} + \|\hat{u}\|_{L^1}$ ). Perelman [60] addressed the same problem with two solitary waves, with large relative velocities. The other assumptions in these two works concern the spectrum of the linearized operator around the solitary waves and cannot be checked easily, in particular, these spectral assumptions are not simple consequences of (30) as in Weinstein's paper [68].

For  $d \geq 3$ , the question of asymptotic completeness of  $K$  solitary waves for nonlinear Schrödinger equations was considered simultaneously by Perelman [61] and Rodnianski, Schlag and Soffer [62], who prove similar results, both using dispersive estimates first due to Cuccagna. Both results require large velocities, flatness of  $f(r)$  for  $r$  near 0, and some spectral assumptions (assumptions on the generalized null space of the linearized operator, nonexistence of nonzero eigenvalues and non resonance conditions). The closeness of the initial data to the sum of solitary waves is assumed in different norms. In [61], the initial data is in  $H^1$  and close to the sum of solitary waves in the norm  $\|u\|_{L^1} + \|\hat{u}\|_{L^m}$ , for some  $m > 2$ . In [62], closeness is required in the following norm:  $\sum_{k=1}^s \|\nabla^k u\|_{L^1 \cap L^2}$  for some  $s > d/2$  integer.

As we can see, known asymptotic stability results for one or several solitary waves rely on spectral assumptions and on dispersive estimates in spaces strictly included in the energy space. Moreover, no result exists for  $d = 2$ , or for any  $d \geq 1$ , with a pure power nonlinearity.

### 3 Asymptotic stability in the energy space for a soliton

As we have seen before, the stability result in  $H^1$  does not describe the exact behavior of the solutions that are in an  $H^1$  behavior of the soliton. Pego and Weinstein's result proves a local convergence to the soliton as time goes to  $+\infty$  but require exponentially decaying initial data and was not proved for  $p = 4$ . In this section, we recall the asymptotic stability result proved in [42], [46] and we discuss the same question for the P-BBM and NLS equations.

#### 3.1 Asymptotic stability for the gKdV equations

We first state the asymptotic stability result for the gKdV equation (6) with  $p = 2, 3$  or 4.

**Theorem 1 (Asymptotic stability of one soliton for gKdV eq. [42], [46])** *Let  $c_0 > 0$ . There exists  $K_0 > 0$  and for any  $\beta > 0$ , there exists  $\alpha_0 = \alpha_0(\beta) > 0$  such that the following is true. Let  $u(t)$  be a global  $H^1$  solution of (6) satisfying*

$$\|u(0) - Q_{c_0}\|_{H^1} \leq \alpha_0. \quad (33)$$

Then, there exist  $c^+ > 0$  with  $|c^+ - c_0| \leq K_0 \alpha_0$  and a  $C^1$  function  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$v(t, x) = u(t, x) - Q_{c^+}(x - x(t)) \quad \text{satisfies} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(t)\|_{H^1(x > \beta t)} = 0. \quad (34)$$

Moreover,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx}{dt}(t) = c^+$ .

This result means that by taking  $\alpha_0$  small enough, we know the precise behavior of  $u(t)$  on  $x > \beta t$ , for any  $\beta > 0$  ( $\alpha_0$  depending on  $\beta$ ). Recall that strong convergence in  $H^1(\mathbb{R})$  in (34) is not true since it would imply that  $u(t)$  is a soliton (see the argument section 2.5). The space region where the convergence holds in Theorem 1 is sharp since in the integrable case  $p = 2$  one can construct an explicit solution which behaves asymptotically as  $t \rightarrow +\infty$  as  $Q(x - t) + Q_c(x - ct)$ , where  $c > 0$  arbitrary. In particular, choosing  $c > 0$  small, the  $H^1$  norm of  $Q_c(x - ct)$  is small, and this soliton travels on the line  $x = ct$ . This explains the necessity of a positive  $\beta$  in the convergence result. Moreover, one expects in general some loss of  $L^2$  norm as dispersion for  $x < 0$ .

The virial type property or the linear rigidity property (see below) that is necessary to prove Theorem 1 has been checked only for equation (6) with  $p$  integer, in contrast with the stability result of Weinstein [68] which holds for general subcritical nonlinearities, and not only power nonlinearities.

Now, we focus on the behavior of  $x(t)$  as  $t \rightarrow +\infty$ . One may think that the information on  $x(t)$  in Theorem 1 is rather poor, since only  $\frac{dx}{dt}(t)$  converges. Recall that in Pego and Weinstein's result (i.e. for exponentially decaying initial data), we have

$$x(t) - c^+ t - x^+ \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty. \quad (35)$$

This convergence property is related to the decay at the right of the initial data and is not necessarily true in  $H^1$ . Indeed, it is not true in general for  $H^1$  solutions that  $|x(t) - c^+ t|$  converges as  $t \rightarrow +\infty$  or even is bounded, by the following theorem.

**Theorem 2 ([46])** *There exists  $\alpha_0 > 0$  such that for any  $0 < \alpha < \alpha_0$ , the following is true. There exists an  $H^1$  solution  $u(t)$  of the KdV equation ((6) with  $p = 2$ ) such that*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - Q(x - x(t))\|_{H^1} \leq \alpha,$$

and

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - Q(x - x(t))\|_{H^1(x \geq t/2)} = 0,$$

for some  $C^1$  function  $x(t)$  satisfying, for some  $\kappa > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t) - t}{\sqrt{\log(t)}} = \kappa.$$

To prove Theorem 2, we use the special  $N$ -soliton solutions given explicitly in the case of the KdV equation, and for certain choice of parameters, we consider the limit case as  $N \rightarrow +\infty$ . The limit solution is composed for  $t$  negative of a soliton of size 1 plus a series of small solitons on the right of it. As time goes on, each small soliton interacts with the main soliton shifting it by a quantity related to the  $L^1$  norm of the small solution. By a suitable choice of parameters, we obtain an infinite resulting shift, as in Theorem 2.

The rest of this section is devoted to the presentation of some tools used in the proof of Theorem 1.

### 3.2 Decomposition of the solution and monotonicity

We need two technical tools for this approach of the asymptotic stability. Consider a solution  $u(t)$  of the gKdV equation such that

$$\alpha_0 \equiv \|u(0) - Q\|_{H^1} \quad (36)$$

is small enough. Recall first that from the  $H^1$  stability result, there exists a constant  $A_0 > 0$  such that (36) implies that for all  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\|u(t) - Q(\cdot - y(t))\|_{H^1} \leq A_0 \alpha_0, \quad (37)$$

for some function  $y(t)$ . A solution  $u(t)$  satisfying (37) can be decomposed in the following sense.

**Lemma 3 (Decomposition of a solution close to a soliton)** *If  $\alpha_0 > 0$  is small enough then there exist  $C^1$  functions  $c : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , such that*

$$\varepsilon(t, x) = u(t, x) - R(t, x), \quad \text{where } R(t, x) = Q_{c(t)}(x - x(t)), \quad (38)$$

satisfies, for all  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\int R(t, x) \varepsilon(t, x) dx = \int (x - x(t)) R(t, x) \varepsilon(t, x) dx = 0, \quad (39)$$

$$|c(t) - 1| + |c'(t)| + |x'(t) - c(t)| + \|\varepsilon(t)\|_{H^1} \leq C A_0 \alpha_0, \quad (40)$$

for some constant  $C > 0$ .

The function  $v(t) = u(t) - Q(\cdot - y(t))$  is small by (37). However, it is not true in general that  $v(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow +\infty$  in any sense, since the soliton in  $u(t)$  could converge to some  $Q_{c^+}$  for  $c^+$  close to 1, but not exactly 1. Remarkably, in Lemma 3 the orthogonality condition  $\int \varepsilon Q = 0$  on  $\varepsilon$  selects a suitable scaling function  $c(t)$  to prove the asymptotic stability; the rest of the proof consists in checking that  $\varepsilon \rightarrow 0$ , locally in  $H^1$  and  $c(t) \rightarrow c^+$ .

Note that the equation of  $\varepsilon$  is easily obtained from the equations of  $Q$  and  $u$ :

$$\begin{aligned} & \partial_t \varepsilon + \partial_x^3 \varepsilon + \partial_x ((\varepsilon + R)^p - R^p) \\ &= -\frac{c'(t)}{2c(t)} \left( \frac{2R}{p-1} + (x - x(t)) \partial_x R \right) + (x'(t) - c(t)) \partial_x R. \end{aligned} \quad (41)$$

A second tool in the asymptotic stability result is a *monotonicity* result of local  $L^2$  norm of a solution being such as in Lemma 3. Let  $K > 0$ . For  $x \in \mathbb{R}$ , let

$$\phi(x) = \frac{K}{\pi} \arctan(\exp(x/K)),$$

so that  $\lim_{+\infty} \phi = 1$ ,  $\lim_{-\infty} \phi = 0$  and for all  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ . Note that by direct calculations

$$\phi'(x) = \frac{1}{K\pi \cosh(x/K)}, \quad \phi'''(x) \leq \frac{1}{K^2} \phi'(x). \quad (42)$$

Let  $0 < \sigma < 1/2$ ,  $x_0 > 0$ . We define, for  $t_0 \in \mathbb{R}$ , for all  $t \leq t_0$ :

$$I_{x_0, t_0}(t) = \int u^2(t, x) \phi(x - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0) dx,$$

We claim the following

**Lemma 4 (Monotonicity result [42])** *For all  $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ , for all  $K > \sqrt{\frac{2}{\sigma}}$ , if  $\alpha_0 > 0$  is small enough, then for all  $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t \leq t_0$ ,*

$$I_{x_0, t_0}(t_0) - I_{x_0, t_0}(t) \leq \theta \exp\left(-\frac{x_0}{K}\right), \quad (43)$$

for some constant  $\theta$ .

The function  $I_{x_0, t_0}(t)$  is thus almost decreasing. It plays the role of a Liapunov functional to study the convergence in regions  $x > 0$  away from the soliton.

*Proof.* We repeat the proof from [42] and [46]. By simple calculations, for  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  of class  $C^3$ , we have (Kato's identity, see [27])

$$\frac{d}{dt} \int u^2 f = \int \left( -3u_x^2 + \frac{2p}{p+1} u^{p+1} \right) f' + \int u^2 f'''. \quad (44)$$

Let  $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ ,  $x_0 > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , and  $K > \sqrt{\frac{2}{\sigma}}$ . Let

$$\psi(t, x) = \phi(x - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0).$$

We obtain from (44), for all  $t \leq t_0$ ,

$$\frac{d}{dt} \int u^2 \psi = - \int \left( 3u_x^2 + \sigma u^2 - \frac{2p}{p+1} u^{p+1} \right) \psi_x + \int u^2 \psi_{xxx}.$$

Using (42) and  $\frac{1}{K^2} \leq \frac{\sigma}{2}$ , we obtain

$$\frac{d}{dt} \int u^2 \psi \leq - \int \left( 3u_x^2 + \frac{\sigma}{2} u^2 - \frac{2p}{p+1} |u|^{p+1} \right) \psi_x.$$

Let  $R_0 > 0$  to be chosen later. For  $t, x$  such that  $|x - x(t)| \geq R_0$ , by  $|Q(x)| \leq Ce^{-|x|}$ , (40), and the well-known inequality  $\|v\|_{L^\infty}^2 \leq 2\|v_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$ , we have

$$|u(t, x)| \leq R(t, x) + \|u(t) - R(t)\|_{L^\infty} \leq Ce^{-\frac{R_0}{2}} + \sqrt{2}\alpha_3.$$

Therefore, for  $\alpha_0$  small enough and  $R_0$  large enough, we have, for such  $t, x$ :

$$\frac{2p}{p+1}|u(t, x)|^{p-1} \leq \sigma/4.$$

Now,  $\alpha_0$  and  $R_0$  are fixed.

If  $|x - x(t)| \leq R_0$  then  $|x - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0| \geq -|x - x(t)| + |x(t) - x(t_0) + \sigma(t_0 - t) - x_0| \geq -R_0 + \frac{t_0 - t}{2} + x_0$ , and so

$$|\psi_x(t, x)| \leq Ce^{-\frac{t_0 - t}{2K}} e^{-\frac{x_0}{K}}.$$

Therefore, by  $\int |u|^{p+1} \leq C$ , we obtain

$$\frac{d}{dt} \int u^2 \psi \leq - \int \left( 3u_x^2 + \frac{\sigma}{4}u^2 \right) \psi_x - Ce^{-\frac{t_0 - t}{2K}} e^{-\frac{x_0}{K}} \leq -Ce^{-\frac{t_0 - t}{2K}} e^{-\frac{x_0}{K}}. \quad (45)$$

By integration between  $t$  and  $t_0$ , we obtain (43).

One can see that the proof of Lemma 4 is rather elementary and uses only Kato's identity (44) and the exact form of the cut-off function  $\psi$ .

### 3.3 Asymptotic stability as a consequence of the rigidity

In the more recent paper [46], the proof of the asymptotic stability is obtained from Lemmas 3, 4 and from a local virial type identity on the function  $\varepsilon$ . Roughly speaking a functional similar to  $\int x\varepsilon^2(t, x)dx$  is used as a Liapunov functional around the soliton. We refer to [46] for this approach.

Here, we recall briefly the main steps of the approach used in [42] which is based on rigidity properties. We say that a solution  $\tilde{u}(t)$  of the gKdV equation is  $L^2$  compact if

$$\forall \epsilon_0, \exists A_0 > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{|x| > A_0} \tilde{u}^2(t, x + \tilde{x}(t)) dx \leq \epsilon_0, \quad (46)$$

for some  $\tilde{x}(t)$  with  $\tilde{x}'(t) > 0$ . By a remarkable property of the flow of the gKdV equation, condition (46) implies that  $\tilde{u}(t)$  is completely smooth (i.e.  $\tilde{u}(t)$  is  $C^\infty$  in time and space) and decays exponentially in  $x$  as well as all its derivatives.

**Proposition 5** ( $L^2$  compact solutions [42], [32]) *Let  $p \geq 2$  integer. Let  $\tilde{u}(t)$  be a global  $H^1$  solution of (6), globally bounded in  $H^1$ . Assume that there exist  $0 < \beta_1 \leq \beta_2$  and a  $C^1$  function  $\tilde{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that for all  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1 \leq \tilde{x}'(t) \leq \beta_2$ , and such that (46) holds. Then  $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Moreover, there exist constants  $\gamma > 0$  and  $C_k > 0$  such that*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\partial_x^k \tilde{u}(t, x + \tilde{x}(t))| \leq C_k \exp(-\gamma|x|). \quad (47)$$

This result is reminiscent of Kato smoothing effect, see [27]. Proposition 5 follows from techniques introduced in Martel and Merle [41] and [42] while proving the asymptotic stability result (see [32] for a complete proof).

We now state the rigidity result.

**Theorem 6 (Liouville property close to  $Q$  [42])** *Let  $p = 2, 3$  or  $4$ . Let  $\tilde{u}(t)$  be a global  $H^1$  solution of (6). There exists  $\alpha_0 > 0$  such that if  $\|\tilde{u}(0) - Q\|_{H^1} \leq \alpha_0$  and if  $\tilde{u}(t)$  satisfies (46), then there exist  $c_1 > 0$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$  such that*

$$\tilde{u}(t, x) = Q_{c_1}(x - x_1 - c_1 t).$$

From Proposition 5, assumption (46) is equivalent to an exponential decay assumption. It is a strong assumption on the solution. Theorem 6 states that if an  $H^1$  solution of the gKdV equation is close in  $H^1$  to a soliton, and has uniform exponential decay in  $x$ , then it is exactly a soliton.

The proof of the asymptotic stability result in  $H^1$  in [42] follows from the rigidity property of the flow of the gKdV around the solitons, i.e. Theorem 6. We briefly explain this reduction. Let  $u(t)$  be a solution such as in Theorem 1. By the uniform bound of  $u(t)$  in  $H^1$ , one may consider a sequence  $t_n \rightarrow +\infty$ , a function  $\tilde{u}(0) \in H^1(\mathbb{R})$  and a positive real  $\tilde{c}_0 > 0$  such that

$$c^{-\frac{1}{p-1}}(t_n)u\left(t_n, \frac{1}{\sqrt{c(t_n)}} \cdot + x(t_n)\right) \rightarrow \tilde{u}(0) \quad \text{and} \quad c(t_n) \rightarrow \tilde{c}_0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Let  $\tilde{u}(t)$  be the solution of (6) defined for all  $t \in \mathbb{R}$  corresponding to  $\tilde{u}(0)$ . This solution is an asymptotic solution, and the fact that it comes asymptotically from the behavior of a solution  $u(t)$  implies that  $\tilde{u}(t)$  is  $L^2$  compact in the sense (46). The proof of this property uses Lemma 4 (see [42] for a detailed proof).

### 3.4 Idea of the proof of the rigidity result

By the previous discussion, to prove Theorem 1, we only have to prove Theorem 6. Under the assumptions of Theorem 6 one sees that  $\tilde{u}(t)$  can be decomposed with  $\tilde{\varepsilon}(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  and  $\tilde{R}(t)$  as  $u(t)$  by Lemma 3. In particular  $\tilde{\varepsilon}$  satisfies the orthogonality conditions and the estimates of Lemma 3. Moreover,  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{c}(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  satisfy the same equation as  $\varepsilon$ ,  $c(t)$  and  $x(t)$ , i.e. equation (41). Finally, by assumption (46), Proposition 5 on  $\tilde{u}(t)$  and the exponential decay of  $Q$ ,  $\tilde{\varepsilon}(t, x)$  also satisfies a uniform exponential decay property.

Note that the conclusion of Theorem 6 is equivalent to obtain  $\tilde{\varepsilon} \equiv 0$  provided that  $\alpha_0$  is small enough. We argue by contradiction on the smallness of  $\alpha_0$ , assuming that there exists a sequence of solutions  $(\tilde{u}_n)$  which are not solitons, satisfying  $\|\tilde{u}_n(0) - Q\|_{H^1} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$  and the assumptions of Theorem 6. Let  $\tilde{\varepsilon}_n \not\equiv 0$  be associated to  $\tilde{u}_n$  by Lemma 3.

We assume in what follows that the following estimate on  $\tilde{\varepsilon}_n(t)$  holds (see [42]):

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\tilde{\varepsilon}_n(t)\|_{H^1} \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\tilde{\varepsilon}_n(t)\|_{L^2}.$$

This allows us to prove that a renormalized version of the sequence  $(\tilde{\varepsilon}_n(t))$  converges to a solution  $w(t) \not\equiv 0$  of the following linear problem

$$\partial_t w - \partial_x(\mathcal{L}w) = \alpha(t) \left( \frac{2Q}{p-1} + xQ' \right) + \beta(t)Q', \quad (48)$$

where  $\alpha(t)$  and  $\beta(t)$  are given function of  $t$  and

$$\mathcal{L}w = -\partial_x^2 w + w - pQ^{p-1}w,$$

is the linearized operator around  $Q$ . To obtain formally the equation of  $w(t)$ , it suffices to keep only the linear terms in the equation of  $\tilde{\varepsilon}(t)$ .

Moreover,  $w$  also satisfies an exponential decay property

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, \quad |w(s, y)| \leq Ce^{-\theta|y|}, \quad (49)$$

and the same orthogonality conditions as  $\tilde{\varepsilon}_n(t)$ .

To conclude the proof, it suffices to prove that necessarily  $w \equiv 0$ , which implies the desired contradiction. Therefore the last step of the proof of the asymptotic stability result is the classification of bounded and localized solutions of the linearized equation around  $Q$ .

**Theorem 7 (Linear problem related to the gKdV eq. [42], [39])**

Let  $p > 1$ . Let  $w(t, x) \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$  be a solution of

$$\partial_t w = \partial_x(\mathcal{L}w) + \alpha(t) \left( \frac{2}{p-1}Q + xQ' \right) + \beta(t)Q' \quad \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (50)$$

where  $\alpha(t)$  and  $\beta(t)$  are two continuous and bounded functions. Assume that for two constants  $C > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,

$$\text{for all } t, x \in \mathbb{R}, \quad |w(t, x)| \leq Ce^{-\sigma|x|}. \quad (51)$$

Then for all  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$w(t) \equiv a(t) \left( \frac{2}{p-1}Q + xQ' \right) + b(t)Q', \quad (52)$$

for some  $C^1$  bounded functions  $a(t)$  and  $b(t)$  satisfying

$$a'(t) = \alpha(t), \quad b'(t) = -2a(t) + \beta(t). \quad (53)$$

Using this result and the orthogonality conditions on  $w(t)$ , we see that  $a(t) = b(t)$  and thus  $w \equiv 0$ .

Theorem 7 has first been proved by Martel and Merle in [41] for  $p = 5$  and [42] for  $p = 2, 3$  and  $4$ . The proof was technically complicated and required at some point to compute numerically the value of some integral. Moreover it was not clear how to generalize the proof to other  $p$  (e.g.  $p > 5$  or  $p$  not integer). The author of the present paper has recently [39] given another proof that is general for any  $p > 1$  and more elementary.

The proof presented in [39] is based on the fact that  $w(t)$  such as in Theorem 7 is smooth, and  $W(t) = \mathcal{L}w(t)$  satisfies

$$\partial_t W = \mathcal{L}(\partial_x W) - 2\alpha(t)Q.$$

It turns out that this equation is easier to handle than the equation of  $w(t)$ .

### 3.5 P-BBM equation

For the P-BBM equation (18), the same strategy as in [42] was used simultaneously by Mizumachi [56] and El Dika [18]-[19]. With some technical differences, but following the same line of proof, Mizumachi and El Dika proved that as for the gKdV equation, the asymptotic stability problem around  $\varphi_c$  is equivalent to a linear rigidity problem. In the case of the P-BBM equation, the linear problem to classify is

$$(1 - \lambda \partial_x^2) \partial_t u = \partial_x (\mathcal{L}u) \quad \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (54)$$

for  $\lambda = \frac{c-1}{c} \in (0, 1)$ . In their respective works, Mizumachi and El Dika use a part of Miller and Weinstein's proof of asymptotic stability [53] to solve the linear problem. Unfortunately, by this argument, the proof cannot be finished for any value of  $c > 1$  (some isolated values may not work). Recently, the author of the present paper [39] could solve the linear rigidity problem without Miller and Weinstein's argument for equation (18), thus the result obtained is the following.

**Theorem 8 (Asymptotic stability for the P-BBM eq. [56], [19], [39])**  
*Let  $c > 1$ . Let  $u(t)$  be an  $H^1$  solution of (18). There exists  $\alpha_0 > 0$  such that if*

$$\|u(0) - \varphi_c\|_{H^1} \leq \alpha_0, \quad (55)$$

*then, there exist  $c_+$  close to  $c$  and  $x(t)$  such that*

$$u(t) - \varphi_{c_+}(\cdot - x(t)) \rightarrow 0 \quad \text{in } H^1(x > \frac{1+c_+}{2}t) \text{ as } t \rightarrow +\infty. \quad (56)$$

Note that the proof in [39] is only for equation (18) and not for the generalized forms of it. The asymptotic stability result is thus open for the generalized P-BBM equation, though it depends only on the linear property.

### 3.6 Comments on the nonlinear Schrödinger equation

We have already commented on the existing asymptotic stability results for the NLS equations in Section 2.6. In particular, to our knowledge no such result exists for the nonlinear Schrödinger equation (11) with pure power nonlinearity. In fact, it is not clear whether or not such an asymptotic result should be true for the NLS equation. Indeed, if we consider the one dimensional cubic NLS equation (4), we know from [71] that explicit solutions containing parallel solitons exist. If one of the two parallel solitons can be taken arbitrarily small, it would prevent asymptotic stability to be true for the other soliton.

## 4 Existence of multi-soliton type solutions for generalized models

We have seen in the previous section that if the initial data  $u(0)$  of a solution  $u(t)$  of the subcritical gKdV equation is close to the function  $Q$  in  $H^1$  norm

then  $u(t, \cdot + x(t))$  converges in a local sense in  $H^1$  to some function  $Q_{c_+}$  for some center of mass  $x(t)$ . Moreover, if  $u(t, \cdot + x(t))$  converges to  $Q_{c_+}$  in  $H^1(\mathbb{R})$  then  $u(t)$  is exactly a soliton.

One can ask similar questions for a solution containing several solitons. Even the question of the stability in  $H^1$  of several solitons was open until recently. Roughly speaking, when the solitons are decoupled (i.e. solitons with different speeds for large time) the results are similar to the ones for one soliton. The question of stability and asymptotic stability of the sum of several solitons is addressed in the next section. In this section, we concentrate on the construction of one solution that behaves exactly as the sum of several given solitons in  $H^1(\mathbb{R})$ .

#### 4.1 Multi-soliton for the gKdV equations

The following result states existence and uniqueness of an asymptotically multi-soliton-like solution for the generalized KdV equation.

**Theorem 9 (Asymptotic multi-solitons for the gKdV eq. [38])** *Let  $p = 2, 3$  or  $4$ . Let  $N \in \mathbb{N}$ ,  $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_N$ , and  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ . There exists one and only one function  $U \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ , which is an  $H^1$  solution of (6) in the sense of [28] and such that*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| U(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(\cdot - x_j - c_j t) \right\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0. \quad (57)$$

Moreover,  $U \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$  for all  $s \geq 0$ , and there exist constants  $A_s > 0$  such that for all  $s \geq 0$ , for all  $t \geq T_0$ ,

$$\left\| U(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j}(\cdot - x_j - c_j t) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq A_s e^{-\gamma t}, \quad (58)$$

where  $\gamma = \sigma_0 \sqrt{\sigma_0} / 32$  and  $\sigma_0 = \min(c_1, c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_N - c_{N-1})$ .

This result means that one can indeed construct a solution that behaves as  $t \rightarrow +\infty$  as the sum of several solitons in  $H^1(\mathbb{R})$ . Moreover this solution is in fact completely smooth and converges exponentially in time in all Sobolev norms. Thus, the situation is quite similar to the one of the integrable cases  $p = 2$  and  $p = 3$ , with the explicit multi-soliton solutions, *as far as asymptotic behavior is concerned*. However, we do not know the behavior of the solution  $U(t)$  for  $t \rightarrow -\infty$  or even backwards in time when the solitons begin to interact. This is the main difference with the integrable case.

Theorem 9 also contains a uniqueness result. Such a solution is unique in the class of solutions that behaves in the same way as  $t \rightarrow +\infty$  in  $H^1(\mathbb{R})$ . This seems to be new even in the integrable case since results using the inverse scattering are for decaying and regular solutions.

Note that the proof of Theorem 9 does not use any rigidity argument but only the stability of each soliton in the sense of Weinstein [69]. In particular,

the result also holds for generalizations (10) of the model (6), under the only condition that independently the solitons are stable.

Mizumachi [55] has studied the case of two solitons with approximately the same sizes, his work is an evidence of a repulsive interaction between two solitons.

Very recently, Cote [11] studied the construction of a solution that behaves as the sum of  $N$  given solitons plus a linear part  $T(t)v_0$  where  $v_0$  is given.

For the P-BBM equation, and in fact also for the generalized version of it, El Dika and Martel [20] have proved exactly the same result as Theorem 9. The proof is quite similar, which is not surprising since the two equations have a quite similar structure.

It is maybe more surprising that a similar general existence result holds for the NLS models. This is treated in the next section.

## 4.2 Existence result for the NLS equations

The following result holds for the NLS equation (11).

**Theorem 10 (Existence of multi solitary waves for the subcritical NLSE [47])** *Let*

$$1 < p < 1 + 4/d. \quad (59)$$

*Let  $K \in \mathbb{N}^*$ . For any  $k \in \{1, \dots, K\}$ , let  $\omega_k^0 > 0$ ,  $v_k \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_k^0 \in \mathbb{R}^d$  and  $\gamma_k^0 \in \mathbb{R}$ . Assume that*

$$\text{for any } k \neq k', v_k \neq v_{k'}. \quad (60)$$

*Let*

$$R_k(t, x) = Q_{\omega_k^0}(\cdot - x_k^0 - v_k t) e^{i\left(\frac{1}{2}v_k \cdot x - \frac{1}{4}|v_k|^2 t + \omega_k^0 t + \gamma_k^0\right)}. \quad (61)$$

*Then, there exist an  $H^1$  solution  $U(t)$  of (11) such that,*

$$\text{for all } t \geq 0, \quad \left\| U(t) - \sum_{k=1}^K R_k(t) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{-\theta_0 t}, \quad (62)$$

*for some  $\theta_0 > 0$  and  $C > 0$ .*

The existence result seems satisfactory since it holds for any dimension  $d \geq 1$ , and all subcritical  $p$ . Moreover, there is no condition on the parameters  $\omega_k^0$ ,  $v_k$ ,  $\gamma_k^0$  and  $x_k^0$ . Only (59), or more generally the stability of each soliton is required. In fact, we conjecture that this assumption could be removed from Theorem 10, but it is an open question so far.

There is no uniqueness result in Theorem 10. It is in fact an open problem whether or not such a solution is unique in  $H^1$ .

### 4.3 Idea of the proof of existence

Let  $R_k(t)$  be  $K$  solitary waves of equation (11) as in (61) and let

$$R(t) = \sum_{k=1}^K R_k(t). \quad (63)$$

The construction of a solution  $U(t)$  satisfying the conclusion of Theorem 10 is based on an asymptotic argument. Let  $(T_n)_{n \geq 1}$  be an increasing sequence of  $\mathbb{R}^+$  with  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ . For all  $n \geq 1$ , we consider  $u_n$  the unique global  $H^1$  solution of

$$\begin{cases} i \partial_t u_n = -\Delta u_n - |u_n|^{p-1} u_n, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u_n(T_n) = R(T_n). \end{cases} \quad (64)$$

The key point of the proof of Theorem 10 is the following uniform estimate on the sequence  $(u_n)$ :

**Proposition 11 (Uniform estimates)** *There exist  $T_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$  such that, for all  $n \geq 1$ ,*

$$\forall t \in [T_0, T_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{H^1} \leq C_0 e^{-\theta_0 t}. \quad (65)$$

Assuming this estimate, we prove easily that there exist  $U_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$  and a subsequence  $(u_{\phi(n)})$  of  $(u_n)$  such that

$$u_{\phi(n)}(T_0) \rightarrow U_0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (66)$$

We consider the global  $H^1$  solution  $U(t)$  of

$$\begin{cases} i \partial_t U = -\Delta U - |U|^{p-1} U, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ U(T_0) = U_0. \end{cases} \quad (67)$$

Fix  $t \geq T_0$ . For  $n$  large enough, we have  $T_n > t$  and by continuous dependence of the solution of (11) upon the initial data in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , we have

$$u_{\phi(n)}(t) \rightarrow U(t) \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ as } n \rightarrow +\infty \quad (68)$$

(Tsutsumi [64]). Thus,  $u_{\phi(n)}(t) - R(t)$  converges weakly in  $H^1(\mathbb{R})$  to  $U(t) - R(t)$ , and so by (65), we obtain

$$\|U(t) - R(t)\|_{H^1} \leq C_0 e^{-\theta_0 t}. \quad (69)$$

Thus, Theorem 13 is proved assuming Proposition 11.

For the proof of Proposition 11, we refer to the original paper ([47]). It is a large time stability statement, since  $T_n \rightarrow +\infty$  and  $T_0$  is fixed. However it is a weak stability statement since  $u_n(T_n) = R(T_n)$  and since the interaction terms (between the various solitons) are exponentially small in time. The proof is based on a study of the variation in time of quantities (as energy and  $L^2$  norm) related the Weinstein's proof of stability. To treat the case of various solitons, we have to consider localized versions of these quantities around each soliton.

## 5 Stability of the multi-soliton dynamics for large time

Once a multi-soliton solution has been constructed for large time, a natural question is to study its stability and asymptotic stability as was done in sections 2 and 3 for one soliton. For the gKdV equation and the P-BBM equation, the question has been answered in a satisfactory way. Some NLS equations with suitable nonlinearities and for  $d = 1, 2$  and  $3$ , could be addressed by similar but refined techniques, but the general question is open for pure power NLS equations.

The stability results stated in this section concern several solitons which are already ordered by increasing speeds and sufficiently decoupled (far enough the one from the others), moreover, we prove stability only for positive time. This means that we do not consider the case of solitons interacting.

### 5.1 Stability of multi-solitons for gKdV equations

#### Theorem 12 (Asymptotic stability of the sum of $N$ solitons [48])

Let  $p = 2, 3$  or  $4$ . Let  $0 < c_1^0 < \dots < c_N^0$ . There exist  $\gamma_0, A_0, L_0, \alpha_0 > 0$  such that the following is true. Let  $u(t)$  be an  $H^1$  solution of (6), and assume that there exist  $L > L_0, 0 < \alpha < \alpha_0$ , and  $x_1^0 < \dots < x_N^0$ , such that

$$\left\| u(0) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j^0}(\cdot - x_j^0) \right\|_{H^1} \leq \alpha, \quad \text{and } x_j^0 > x_{j-1}^0 + L, \text{ for all } j = 2, \dots, N. \quad (70)$$

Then, there exist  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  such that

(i) Stability of the sum of  $N$  decoupled solitons.

$$\forall t \geq 0, \quad \left\| u(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j^0}(x - x_j(t)) \right\|_{H^1} \leq A_0 (\alpha + e^{-\gamma_0 L}). \quad (71)$$

(ii) Asymptotic stability of the sum of  $N$  solitons. There exist  $c_1^{+\infty}, \dots, c_N^{+\infty}$ , with  $|c_j^{+\infty} - c_j^0| \leq A_0 (\alpha + e^{-\gamma_0 L})$ , such that

$$\left\| u(t) - \sum_{j=1}^N Q_{c_j^{+\infty}}(x - x_j(t)) \right\|_{H^1(x > c_1^0 t / 10)} \rightarrow 0, \quad \dot{x}_j(t) \rightarrow c_j^{+\infty} \quad \text{as } t \rightarrow +\infty. \quad (72)$$

As in Theorem 1, one cannot expect the convergence to hold in  $H^1(x > 0)$ . Indeed, assumption (70) on the initial data allows the existence in  $u(t)$  of an additional soliton of size less than  $\alpha$  (thus travelling at arbitrarily small speed). For  $p = 2$ , an explicit example can be constructed using the  $N$ -soliton solutions. Moreover, convergence in  $H^1(\mathbb{R})$  would imply that  $u(t)$  is a special solution  $U(t)$  as constructed in Theorem 10.

As a direct corollary of Theorem 1, for  $p = 2$  and  $p = 3$ , the explicit multi-soliton solutions are stable and asymptotically stable, see Corollary 1 in [42]. This improves the result in [36].

## 5.2 Stability of multi-solitons for the P-BBM equation

For the P-BBM equation (18), the stability and asymptotic stability result of multi-solitons is exactly the same as for the gKdV equations, with a very similar proof, see El Dika and Martel [20], and [39] for the asymptotic stability result without restriction on the speeds.

## 5.3 Stability of multi-solitons for Nonlinear Schrödinger equations

In this section, we study similar questions for the nonlinear Schrödinger equation. The situation seems to be more delicate in general in this case. We have already observed (section 3.6) that no asymptotic stability result in the energy space for the nonlinear Schrödinger was known. In the case of multi-soliton dynamics, it seems that the richness of the family of solitons is an extra difficulty with respect to the gKdV equation. Indeed, we recall that for the nonlinear Schrödinger equation with pure power nonlinearity, the speed of the soliton is not related to its scaling, thus it might be possible for one or several small solitons to accompany for long time a large soliton. Such behavior is not possible for the gKdV equation (nor for the P-BBM equation) since the speed of the soliton is related to its scaling, which implies in a short time a spatial decoupling between large and small objects.

The results obtained so far concerning the stability in the energy space of multi-soliton for the nonlinear Schrödinger equation get around this difficulty by imposing conditions on the nonlinearity so that small solitons do not perturb the general dynamics of large solitons.

The results stated in this section concern the nonlinear Schrödinger equations in generalized form

$$i\partial_t u + \Delta u + f(|u|^2)u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad (73)$$

with  $f$  of class  $C^1$  satisfying  $f(0) = 0$  and (17). We denote

$$F(s) = \int_0^s f(s') ds'.$$

### Case of dimension 1.

We first state the main result in the one dimensional case.

**Theorem 13 (Stability of the sum of  $K$  solitary waves of NLS in 1D [49])** *Let  $d = 1$ . Assume that  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a function of class  $C^1$  such that  $f(0) = 0$  and*

**(A1) Flatness at 0:**

*there exists  $C > 0$  such that for all  $r \in [0, 1]$ ,  $f'(r) \leq Cr$ .*

*Let  $K \in \mathbb{N}$  and for all  $k \in \{1, \dots, K\}$ , let  $\omega_k^0 > 0$  be such that there exists  $Q_{\omega_k^0} \in H^1(\mathbb{R})$  a positive solution of*

$$Q_{\omega_k^0}'' + f(Q_{\omega_k^0}^2)Q_{\omega_k^0} = \omega_k^0 Q_{\omega_k^0}, \quad (74)$$

satisfying

**(A2) Nonlinear stability of each wave:**

$$\frac{d}{d\omega} \int_{\mathbb{R}} Q_{\omega}^2(x) dx \Big|_{\omega=\omega_k^0} > 0.$$

For all  $k \in \{1, \dots, K\}$ , let  $x_k^0 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_k^0 \in \mathbb{R}$  and  $v_k \in \mathbb{R}$ , with  $v_1 < v_2 < \dots < v_K$ . Assume further that, for all  $k \in \{1, \dots, K-1\}$ ,

**(A3) Condition on relative speeds:**  $(v_{k+1} - v_k)^2 > 4 |\omega_{k+1}^0 - \omega_k^0|$ .

Let  $u(t)$  be an  $H^1$  solution of (73). There exist  $L_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$ ,  $A_0 > 0$ , and  $\alpha_0 > 0$  such that for any  $L > L_0$ , and  $0 < \alpha < \alpha_0$ , if

$$\left\| u(0) - \sum_{k=1}^K Q_{\omega_k^0}(\cdot - x_k^0) e^{i(\frac{1}{2}v_k x + \gamma_k^0)} \right\|_{H^1} \leq \alpha, \quad (75)$$

and if for all  $k \in \{1, \dots, K-1\}$ ,

$$x_{k+1}^0 - x_k^0 > L, \quad (76)$$

then  $u(t)$  is defined in  $H^1$  for all  $t \geq 0$  and there exist functions  $x_1(t), \dots, x_K(t) \in \mathbb{R}$ , and  $\gamma_1(t), \dots, \gamma_K(t) \in \mathbb{R}$ , such that for all  $t \geq 0$ ,

$$\left\| u(t) - \sum_{k=1}^K Q_{\omega_k^0}(\cdot - x_k(t)) e^{i(\frac{1}{2}v_k x + \gamma_k(t))} \right\|_{H^1} \leq A_0(\alpha + e^{-\theta_0 L}). \quad (77)$$

Moreover, for all  $t \geq 0$ ,

$$|\dot{x}_k(t) - v_k| + \left| \dot{\gamma}_k(t) - \left( \omega_k^0 - \frac{v_k^2}{4} \right) \right| \leq A_0(\alpha + e^{-\theta_0 L}). \quad (78)$$

Our first comment is that, in contrast with previously existing results for the nonlinear Schrödinger equation, Theorem 13 is a stability result *in the energy space*. Moreover, no spectral assumption on the linearized operator is required, except the natural assumption that the various solitary waves are independently nonlinearly stable.

We now comment on assumption (A1) concerning the nonlinearity. The assumption on  $f$  which is really used in the proof of Theorem 13 is

$$\text{There exists } C > 0 \text{ such that, for all } s \in [0, 1], \quad f(s^2)s^2 - F(s^2) \leq Cs^6,$$

which is a consequence of (A1).

Recall that in the case of a pure power nonlinearity  $f(s^2) \equiv s^{p-1}$ , the critical exponent for the stability of the solitary waves is  $p = 5$ , which means that the stability condition (A2) holds on the solitary waves if and only if  $1 < p < 5$ . But for  $f(s^2) \equiv s^{p-1}$ , assumption (A1) requires  $p \geq 5$ . This means that Theorem 13 does not apply to the pure power case, for any  $p$ .

However, as pointed out in [49], there are important explicit examples of nonlinearities  $f$  to which Theorem 13 applies. Let us recall here one such class of examples constructed from the pure power case. Let  $1 < p < 5$  and  $q \geq 5$ . Consider  $f(s^2) = s^{p-1}$ , for  $s > s_0$ ,  $f(s^2) = s^{q-1}$ , for  $0 \leq s < \frac{s_0}{2}$  and  $f$  increasing and of class  $C^1$ . For  $s_0 > 0$  small, equation (73) is a perturbation of the pure power subcritical Schrödinger equation and (A1) holds since  $q \geq 5$ . Thus, since (A2) is true for any solitary wave for  $f(s^2) = s^{p-1}$  and since such condition depends continuously on  $f$ , it follows that for small  $s_0$ , the solitary waves such that  $\omega > \omega_0 > 0$  are stable in the sense that (A2) is true. Therefore provided that assumption (A3) on the speeds is satisfied, Theorem 13 applies to this case. Assumption (A3) means that if  $\omega_k^0$  and  $\omega_{k+1}^0$  are different then the relative speed of the corresponding solitary waves, i.e.:  $v_{k+1} - v_k$  has to be sufficiently large. However any speeds  $v_k < v_{k+1}$  are possible if  $\omega_k^0 = \omega_{k+1}^0$ . Note that condition (A3) is invariant by the Galilean transform (15).

### Case of dimensions 2 and 3.

Now, we turn to the nonlinear Schrödinger equation (16) set in  $\mathbb{R}^d$  for  $d = 2$  or 3. From Weinstein's stability proof ([68]), a natural assumption for nonlinear stability is the existence of  $\lambda > 0$  such that for any real-valued function  $\eta \in H^1$ :

$$(A2') \quad \int \eta Q_\omega = \int \eta \nabla Q_\omega = 0 \Rightarrow \int \left\{ |\nabla \eta|^2 + \omega |\eta|^2 - (f(Q_\omega^2) + 2Q_\omega^2 f'(Q_\omega^2)) |\eta|^2 \right\} \geq \lambda \|\eta\|_{H^1}^2.$$

Note that this condition is equivalent to subcriticality in the pure power case.

We claim the following result.

**Theorem 14 (Stability of the sum of  $K$  solitary waves in 2D and 3D [49])** *Let  $d = 2$  or 3. Assume that  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a function of class  $C^1$  such that  $f(0) = 0$  and for some constant  $C > 0$ :*

$$(A1') \quad \text{for all } r \geq 0, \quad f'(r) \leq Cr.$$

*Let  $K \in \mathbb{N}$  and for all  $k \in \{1, \dots, K\}$ , let  $\omega_k^0 > 0$  be such that there exists  $Q_{\omega_k^0} \in H^1(\mathbb{R}^d)$  a positive solution of*

$$\Delta Q_{\omega_k^0} + f(Q_{\omega_k^0}^2) Q_{\omega_k^0} = \omega_k^0 Q_{\omega_k^0}, \quad (79)$$

*satisfying (A2') for some  $\lambda_k > 0$ . For all  $k \in \{1, \dots, K\}$ , let  $x_k^0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $\gamma_k \in \mathbb{R}$ , and  $v_k \in \mathbb{R}^d$  satisfying*

$$\text{for all } k \neq k', \quad v_k \neq v_{k'}. \quad (80)$$

*Let  $u(t)$  be an  $H^1$  solution of (73). There exists  $\omega_0 = \omega_0(v_1, \dots, v_K) > 0$ ,  $T_0 > 0$ ,  $\theta_0 > 0$ ,  $A_0 > 0$ , and  $\alpha_0 > 0$  such that if*

$$(A3') \quad \text{for all } k \neq k', \quad |\omega_k^0 - \omega_{k'}^0| < \omega_0,$$

and, for any  $T > T_0$ , and  $0 < \alpha < \alpha_0$ , if

$$\left\| u(0) - \sum_{k=1}^K Q_{\omega_k^0}(\cdot - x_k^0 - v_k T) e^{i(\frac{1}{2}v_k \cdot x + \gamma_k^0)} \right\|_{H^1} \leq \alpha, \quad (81)$$

then,  $u(t)$  is defined in  $H^1$  for all  $t \geq 0$  and there exist  $x_1(t), \dots, x_K(t) \in \mathbb{R}^d$ , and  $\gamma_1(t), \dots, \gamma_K(t) \in \mathbb{R}$ , such that, for all  $t \geq T$ ,

$$\left\| u(t) - \sum_{k=1}^K Q_{\omega_k^0}(\cdot - x_k(t)) e^{i(\frac{1}{2}v_k \cdot x + \gamma_k(t))} \right\|_{H^1} \leq A_0(\alpha + e^{-\theta_0 T}). \quad (82)$$

Moreover, for all  $t \geq T$ ,

$$|\dot{x}_k(t) - v_k| + \left| \dot{\gamma}_k(t) - \left( \omega_k^0 - \frac{|v_k|^2}{4} \right) \right| \leq A_0(\alpha + e^{-\theta_0 T}). \quad (83)$$

This result is the analogue of Theorem 13, except that the condition on the relative speeds (A3') is less explicit.

To our knowledge, Theorem 14 is the first result of stability of the sum of solitary waves for semilinear Schrödinger equations in space dimension 2. Moreover, as Theorem 13, Theorem 14 holds in the energy space and without spectral assumptions. Therefore, for  $d = 3$ , it is different from the existing results described in sections 2.6 and 3.6 ([61] and [62]).

It is easily seen why Theorem 10 has a simpler proof and requires less assumptions than Theorems 13 and 14. Since the sum of two solitons satisfies the equation up to an interaction term of the size  $e^{-\theta t}$ , in the context of Theorem 10, the effect of this term is easy to control even in large time. The proofs of the stability results Theorems 13–14 are more delicate since the rest is in general of size  $\alpha$ , for all time. To control the effect of this term in large time thus requires more analysis (and so far more assumptions).

## 6 Comments

As we mentioned in the Introduction, for the gKdV equation (and for the similar model due to Peregrine, and Benjamin, Bona and Mahony), the behavior of the solutions *close to the sum of solitons* and *asymptotically as  $t \rightarrow +\infty$*  is well-known. However, no analysis for other situations exist in the non integrable cases. In particular, whether or not any solution of the gKdV equation should decompose as  $t \rightarrow +\infty$  as the sum of solitons in the right ( $x > 0$ ) is an open question in the non integrable case, except for solutions that are initially close to the sum of several solitons.

Another vast question when the model is not integrable is the behavior of the asymptotic multi-soliton-like solutions backwards in time, i.e. when the solitons begin to interact at a finite distance. Note that this question was already mentioned in Miura's review [54].

Finally, there are recent results for the nonlinear Schrödinger equations ([61], [62] and [49], [47]), yet most of the questions concerning the behavior of solutions close to the sum of solitons are open. In particular, the flow around solitons is not understood for general NLS equations.

## References

- [1] M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1981.
- [2] T.B. Benjamin, The stability of solitary waves, *Proc. Roy. Soc. London A* **328**, (1972) 153–183.
- [3] T.B. Benjamin, J.L. Bona and J.J. Mahony, Model equations for long waves nonlinear dispersion systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.* **272**, (1972) 47–78.
- [4] H. Berestycki and Th. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **293**, (1981) 489–492.
- [5] H. Berestycki and P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82**, (1983) 313–345.
- [6] J.L. Bona, On the stability theory of solitary waves, *Proc. Roy. Soc. London A* **349**, (1975) 363–374.
- [7] J.L. Bona, P.E. Souganidis and W.A. Strauss, Stability and instability of solitary waves of Korteweg–de Vries type, *Proc. R. Soc. Lond.* **411** (1987), 395–412.
- [8] V.S. Buslaev and G.S. Perelman, On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. *Nonlinear evolution equations*, 75–98, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **164**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [9] T. Cazenave and P.L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85**, (1982) 549–561.
- [10] A. Cohen, Existence and regularity for solutions of the Korteweg–de Vries equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **71** (1979), 143–175.
- [11] R. Côte, private communication.
- [12] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon and H.C. Morris, *Solitons and Nonlinear Waves equations*, Academic Press 1982.
- [13] A. de Bouard and Y. Martel, Non existence of  $L^2$ -compact solutions of the Kadomtsev-Petviashvili II equation. *Math. Ann.* **328**, (2004) 525–544.

- [14] A. de Bouard and J.-C. Saut, Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin.* **14**, (1997) 211–236 .
- [15] A. de Bouard and J.-C. Saut, Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev- Petviashvili solitary waves. *SIAM J. Math. Anal.* **28**, 1064–1085 (1997)
- [16] A. de Bouard and J.-C. Saut, Remarks on the stability of generalized KP solitary waves. *Mathematical problems in the theory of water waves (Luminy, 1995)*, *Contemp. Math.*, 200, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 75–84
- [17] W. Eckhaus and P. Schuur, The emergence of solutions of the Korteweg–de Vries equation from arbitrary initial conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **5**, (1983) 97–116.
- [18] K. El Dika, Stabilité asymptotique des ondes solitaires de l'équation de Benjamin-Bona-Mahony, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **337**, (2003) 649–652.
- [19] K. El Dika, Asymptotic stability of solitary waves for the Benjamin-Bona-Mahony equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **13** (2005), 583–622.
- [20] K. El Dika and Y. Martel, Stability of  $N$  solitary waves for the generalized BBM equations. *Dyn. Partial Differ. Equ.* **1** (2004), 401-437.
- [21] F. Gesztesy, W. Karwowski and Z. Zhao, New types of soliton solutions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **27**, (1992) 266–272.
- [22] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68**, (1979) 209–243.
- [23] J. Ginibre and Y. Tsutsumi, Uniqueness of solutions for the generalized Korteweg–de Vries equation, *SIAM J. Math. Anal.* **20**, **6** (1989), 1388–1425.
- [24] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *J. Funct. Anal.* **32**, (1979) 1–32.
- [25] M. Grillakis, J. Shatah, W. A. Strauss, Stability of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.* **74** (1987), 160–197.
- [26] S. Kamvissis, Focusing nonlinear Schrödinger equation with infinitely many solitons, *J. Math. Phys.* **36**, (1995) 4175–4180.
- [27] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation, *Advances in Mathematical Supplementary Studies, Studies in Applied Math.* **8** (1983), 93–128.

- [28] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle, *Comm. Pure Appl. Math.* **46**, (1993) 527–620.
- [29] D.J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag.* **539**, (1895) 422–443.
- [30] M.K. Kwong, Uniqueness of positive solutions of  $\Delta u + u^p = 0$  in  $R^n$ , *Arch. Rational Mech. Anal.* **105**, (1989) 243–266.
- [31] G.L. Lamb Jr., *Element of soliton theory* (John Wiley & Sons, New York 1980).
- [32] C. Laurent and Y. Martel, Smoothness and exponential decay of  $L^2$ -compact solutions of the generalized KdV equations. *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), 2093–2107.
- [33] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, (1968) 467–490.
- [34] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 109–145.
- [35] K. McLeod, Uniqueness of positive radial solutions of  $\Delta u + f(u) = 0$  in  $R^n$ . II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **339**, (1993) 495–505.
- [36] J.H. Maddocks and R.L. Sachs, On the stability of KdV multi-solitons, *Comm. Pure Appl. Math.* **46**, (1993) 867–901.
- [37] M. Mariş, Existence of nonstationary bubbles in higher dimension, *J. Math. Pures Appl.* **81**, (2002) 1207–1239.
- [38] Y. Martel, Asymptotic  $N$ -soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg–de Vries equations, *Amer. J. Math.* (2005), to appear.
- [39] Y. Martel, Linear problems related to asymptotic stability of solitons of the generalized KdV equations, preprint.
- [40] Y. Martel and F. Merle, Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation, *Geom. Funct. Anal.* **11**, (2001) 74–123.
- [41] Y. Martel and F. Merle, A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg–de Vries equation, *J. Math. Pures Appl.* **79**, (2000) 339–425.
- [42] Y. Martel and F. Merle, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **157**, (2001) 219–254.

- [43] Y. Martel and F. Merle, Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation. *Annals of Mathematics*, **155** (2002), 235–280.
- [44] Y. Martel and F. Merle, Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the  $L^2$ -critical generalized KdV equations, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 617–664.
- [45] Y. Martel and F. Merle, Review on blow up and asymptotic dynamics for critical and subcritical gKdV equations. *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, 157–177, *Contemp. Math.*, **350**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [46] Y. Martel and F. Merle, Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited. *Nonlinearity* **18** (2005), no. 1, 55–80.
- [47] Y. Martel and F. Merle, Multi solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, preprint submitted.
- [48] Y. Martel, F. Merle and Tai-Peng Tsai, Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of  $N$  solitons for subcritical gKdV equations, *Commun. Math. Phys.* **231**, (2002) 347–373.
- [49] Y. Martel, F. Merle and Tai-Peng Tsai, Stability in  $H^1$  of the sum of  $K$  solitary waves for some nonlinear Schrödinger equations, to appear in *Duke Math. J.*
- [50] F. Merle, Construction of solutions with exactly  $k$  blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity, *Commun. Math. Phys.* **129**, (1990) 223–240.
- [51] F. Merle, Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized Korteweg–de Vries equation, *J. Amer. Math. Soc.* **14**, (2001) 555–578.
- [52] F. Merle and P. Raphaël, The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math.* **161**, (2005) 157–222.
- [53] J. R. Miller, M. I Weinstein, Asymptotic stability of solitary waves for the regularized long-wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **49**, (1996) 399–441.
- [54] R.M. Miura, The Korteweg–de Vries equation: a survey of results, *SIAM Review* **18**, (1976) 412–459.
- [55] T. Mizumachi, Weak interaction between solitary waves of the generalized KdV equations. *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), 1042–1080.

- [56] T. Mizumachi, Asymptotic stability of solitary wave solutions to the regularized long-wave equation. *J. Differential Equations* **200** (2004), 312–341.
- [57] M. Ohmiya, On the generalized soliton solutions of the modified Korteweg-de Vries equation, *Osaka J. Math.* **11**, (1974), 61–71.
- [58] R.L. Pego and M.I. Weinstein, Asymptotic stability of solitary waves, *Commun. Math. Phys.* **164**, (1994) 305–349.
- [59] D. H. Peregrine, Long waves on a beach. *J. Fluid Mechanics* **27** (1967), 815–827.
- [60] G.S. Perelman, Some results on the scattering of weakly interacting solitons for nonlinear Schrödinger equations. Spectral theory, microlocal analysis, singular manifolds, 78–137, *Math. Top.*, **14**, Akademie Verlag, Berlin, 1997.
- [61] G.S. Perelman, Asymptotic stability of multi-soliton solutions for nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Partial Differential Equations* **29**, (2004) 1051–1095.
- [62] I. Rodnianski, W. Schlag, A.D. Soffer, Asymptotic stability of  $N$ -soliton states of NLS, to appear in *Comm. Pure. Appl. Math.*
- [63] P. C. Schuur, Asymptotic analysis of solitons problems, *Lecture Notes in Math.* **1232** (1986), Springer-Verlag, Berlin.
- [64] Y. Tsutsumi,  $L^2$ -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear group, *Funkcialaj Ekvacioj* **30**, (1987) 115–125.
- [65] N. Tzvetkov, On the long time behavior of KdV type equations (after Martel-Merle). *Séminaire Bourbaki* **933** (2004).
- [66] M. Wadati and M. Toda, the exact  $N$ -soliton solution of the Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan* **32**, (1972) 1403–1411.
- [67] M.I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equation and sharp interpolation estimates, *Commun. Math. Phys.* **87**, (1983) 567–576.
- [68] M.I. Weinstein, Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.* **16**, (1985) 472–491.
- [69] M.I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **39**, (1986) 51–68.
- [70] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15**, (1965) 240–243.
- [71] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Physics JETP*, **34**, (1972) 62–69.



PREMIO SĒMA DE DIVULGACIÓN DE LA  
MATEMÁTICA APLICADA  
2005

**Simulación numérica en  
odontología y ortodoncia**

JUAN M. VIAÑO Y SU GRUPO DE INVESTIGACIÓN<sup>1,2</sup>

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas  
Universidad de Santiago de Compostela, 15782 Santiago de Compostela, España.

`maviano@usc.es`

[http://www.usc.es/dmafм/grupo\\_viano/index.htm](http://www.usc.es/dmafм/grupo_viano/index.htm)

(1) MARGARITA BURGUERA, JOSÉ R. FERNÁNDEZ, ÁNGEL D. RODRÍGUEZ-ARÓS y MARCO A. CAMPO.

(2) Los aspectos médicos y biomecánicos fueron estudiados en colaboración con los siguientes odontólogos de la Facultad de Medicina y Odontología de la misma universidad: DAVID SUÁREZ, TERESA ABELEIRA y MERCEDES GALLAS.

### Abstract

En este trabajo se pretende divulgar la aplicación de las matemáticas y, más concretamente, de la simulación numérica a la modelización y mejor conocimiento de ciertos fenómenos mecánicos en odontología y en ortodoncia. Para ello hemos intentado resumir, en un lenguaje asequible, la investigación realizada por los autores desde el año 1997, en colaboración con un grupo de cirujanos ortodoncistas de la Universidad de Santiago de Compostela. El objetivo fundamental de la investigación (financiada durante 3 años por la Xunta de Galicia) es la simulación numérica de diferentes procesos mecánicos en la mandíbula humana y del comportamiento de algunos dispositivos utilizados en su cirugía y ortodoncia (“brackets”, implantes dentales, miniplacas de titanio). Después de la descripción anatómica de la mandíbula, hacemos especial énfasis en las dificultades solventadas para realizar un buen modelo geométrico con elementos finitos tetraédricos tanto de la mandíbula como de las piezas dentales. Construído el modelo, se describe la simulación en ordenador de diferentes problemas de interés para los especialistas médicos: tensiones en una mordida con el primer molar derecho y con un implante dental de titanio, localización de fracturas mandibulares después de un impacto, reducción de fracturas de mandíbula con miniplacas de titanio y comparación del comportamiento de dos modelos de “brackets” ortodóncicos de acero. La formulación matemática de los problemas se basa en las ecuaciones en derivadas parciales que traducen el comportamiento elástico del hueso y de los dispositivos, con distintas condiciones de contacto. Estos problemas se aproximan por el método de los elementos finitos (variable espacial) y el esquema de Newmark (variable temporal) y se resuelven en ordenador con programas de cálculo elaborados por el propio equipo investigador.

**Key words:** *Simulación numérica, mandíbula humana, ortodoncia, brackets, fracturas de mandíbula, implantes dentales, elementos finitos, elasticidad, contacto.*

**AMS subject classifications:** *65M60, 65N30, 74G15, 74L15, 92C10, 92C60.*

## 1 Introducción

La modelización y simulación numérica del cuerpo humano es un área de investigación relativamente reciente que está experimentando un enorme auge en los últimos años. Su principal objetivo es conseguir un mejor conocimiento del comportamiento mecánico y fisiológico del cuerpo humano y diseñar herramientas para su correcta simulación numérica en ordenador con vistas a poder hacer predicciones y tomar decisiones.

Hoy en día los modelos biomecánicos y fisiológicos del cuerpo humano juegan un papel prominente en la prevención, diagnóstico y terapia de muchas enfermedades. La introducción generalizada de tales modelos en la actividad médica contribuirá decisivamente al desarrollo de una medicina más preventiva

y más individualizada. En efecto, el progreso continuo del tratamiento de imágenes médicas durante las pasadas décadas, permite actualmente obtener una cantidad cada vez mayor de información funcional y anatómica de cualquier individuo, con una enorme precisión en tiempo y en espacio. Esta ingente cantidad de datos e imágenes es imposible de analizar directamente y se necesita desarrollar nuevos modelos de cálculo que capturen los parámetros relevantes para el análisis o para la simulación. Hay también un número importante de aplicaciones no estrictamente médicas de estos modelos humanos virtuales en campos diversos como la conducción (vehículos más seguros), el trabajo (puestos más ergonómicos), la actividad física y el deporte (entrenamiento más eficiente),...

Hay básicamente tres niveles de diseño de modelos del cuerpo humano. El primer nivel es geométrico y tiene como objetivo la descripción digital de la anatomía, casi siempre adquirida a través de las imágenes médicas (TAC's, radiografías, ...). El segundo nivel es físico y pretende la modelización bicomecánica de los diferentes tejidos, órganos, vasos sanguíneos, músculos o huesos. El tercer nivel es fisiológico y tiene que ver con la modelización de las funciones de los más importantes sistemas biológicos (cardiovascular, respiratorio, digestivo, muscular,...) o algún metabolismo patológico (evolución de un tumor, de una inflamación, ...).

La investigación en este campo abarca prácticamente todas las partes y funciones del cuerpo humano: simulación numérica del corazón y del sistema circulatorio, del hígado, del ojo, del cerebro, crecimiento de tumores, formación de huesos, ... Especial relevancia tiene toda la investigación relacionada con la cirugía guiada por imagen a distancia y con las consecuencias de los accidentes por impacto (accidentes de tráfico) en diferentes partes del cuerpo (cabeza, rodillas, mandíbulas,...). El lector interesado puede encontrar un resumen del estado del arte en este tema en la referencia [10].

El trabajo que presentamos en estas páginas está relacionado con la simulación de diversos procesos mecánicos que ocurren en la mandíbula humana, considerada como una estructura ósea, y también en las distintas piezas dentales y/o dispositivos utilizados en su cirugía y ortodoncia ("brackets", implantes dentales, miniplacas de titanio,...). Comenzamos haciendo especial énfasis en las dificultades solventadas para realizar un buen modelo geométrico con elementos finitos tetraédricos tanto de la mandíbula como de las piezas dentales. Construido el modelo, mediante digitalización (sección 3) hemos considerado la simulación de diferentes problemas de interés para los especialistas médicos: la simulación de una mordida con el primer molar derecho (sección 4) y de un implante dental de titanio (sección 5), la localización de fracturas mandibulares después de un impacto (sección 6), la reducción de fracturas de mandíbula con miniplacas de titanio (sección 7) y una comparación entre dos modelos de "brackets" ortodóncicos (sección 8). En todos estos estudios, su formulación mecánica da lugar a problemas de contacto entre cuerpos elásticos: contacto con un cuerpo rígido (mordida o localización de fracturas), contacto entre dos cuerpos elásticos (implante dental con la mandíbula y brackets con el alambre) o contacto entre tres cuerpos (las miniplacas con las dos partes de la

mandíbula fracturada). Estos problemas se formulan en términos de ecuaciones en derivadas parciales y se resuelven numéricamente mediante el método de los elementos finitos para la aproximación de la variable espacial y el esquema de Newmark para discretizar las derivadas en tiempo.

La simulación numérica en la mecánica de la mandíbula comienza a principios de los años 90 ([11, 21, 32, 35, 45, 46, 47]) y el número de trabajos no ha parado de crecer hasta hoy. Además de las publicaciones médicas especializadas, es interesante observar el número de presentaciones y publicaciones relacionadas con la simulación en ortodoncia y odontología que aparecen en congresos de ingeniería biomédica y biomecánica. Señalamos como ejemplo la referencia [37]. Los métodos y resultados de nuestra investigación

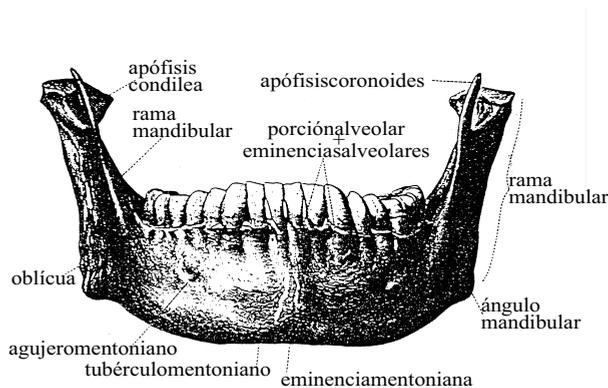


Figure 1: Mandíbula humana: vista frontal.

y otras similares son de indudable interés por sí mismas pero también como paso importante hacia modelos más precisos que, en consonancia con las necesidades médicas actuales, permitan la simulación del movimiento dentario y del proceso de formación de hueso. Estos aspectos no han sido tratados en nuestra investigación, entre otras razones, porque los modelos matemáticos de estos fenómenos están todavía en fase de formulación y validación. En lo que se refiere a los modelos de formación de hueso, varios grupos trabajan en esta dirección (véase [13, 14, 15, 16, 20, 27, 31, 38, 52] y sus referencias) pero son todavía escasos los trabajos sobre modelización del movimiento dentario ([29, 42]).

## 2 Anatomía de la mandíbula humana

La mandíbula humana es un hueso con forma de U que soporta los dientes inferiores y conforma el esqueleto facial inferior. La mandíbula está suspendida y unida a la boca mediante músculos, ligamentos y otros tejidos blandos que le dan la movilidad necesaria para realizar su función con el maxilar (parte superior de la boca).

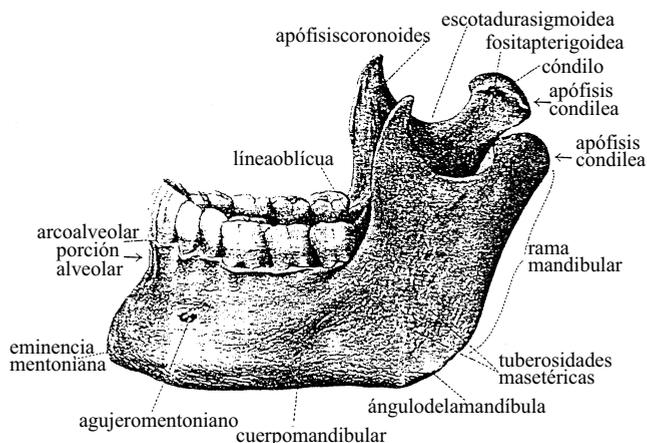


Figure 2: Mandíbula humana: vista lateral.

El espacio alveolar y los dientes están localizados en la parte superior de la mandíbula. El cuerpo mandibular se extiende hacia atrás en dirección descendente desde el ángulo mandibular y formando la rama de la mandíbula en dirección ascendente. La rama se divide en dos partes: la parte coronoidea y, una de las partes más importante de la mandíbula, el cóndilo (véanse las Figuras 1 y 2).

La estructura histológica de la mandíbula, como sucede en la mayoría de los huesos del cuerpo humano, se compone de dos partes muy distintas: una parte exterior de un espesor muy pequeño (1-2 mm) que es muy fibrosa, compacta y dura, llamada *hueso cortical*, y una parte interna que es muy porosa llamada *hueso esponjoso o trabecular* (Figura 3). Supondremos siempre que los desplazamientos y deformaciones que se inducen en el hueso son “pequeñas” y que su comportamiento mecánico es elástico: el cuerpo recupera su forma original una vez cesan las fuerzas que provocan la deformación. Esta hipótesis implica que no se consideran posibles efectos de plastificación (deformaciones permanentes) que eventualmente pudieran producirse, si bien éstas se asocian a esfuerzos muy prolongados en el tiempo, que no son los considerados aquí.

	$E(N/mm^2)$	$\nu$	$\rho(Kg/m^3)$
<i>Hueso cortical</i>	$1,37e + 04$	0,3	1.740
<i>Hueso esponjoso</i>	$7,93e + 03$	0,3	700

Tabla 1: Propiedades elásticas del hueso mandibular.

Las propiedades elásticas de un sólido se caracterizan, en general, por 21 coeficientes de elasticidad que traducen las propiedades mecánicas del material en las diferentes direcciones. Cuando estos 21 coeficientes son distintos el cuerpo

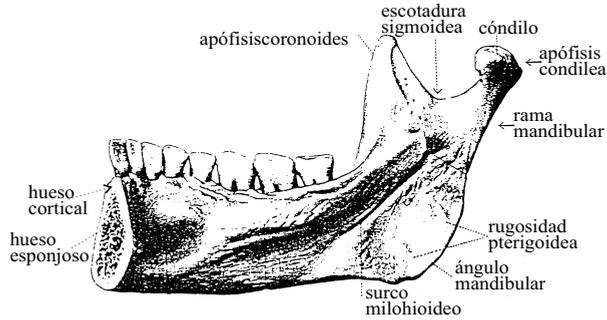


Figure 3: Mandíbula humana: vista de los huesos cortical y esponjoso.

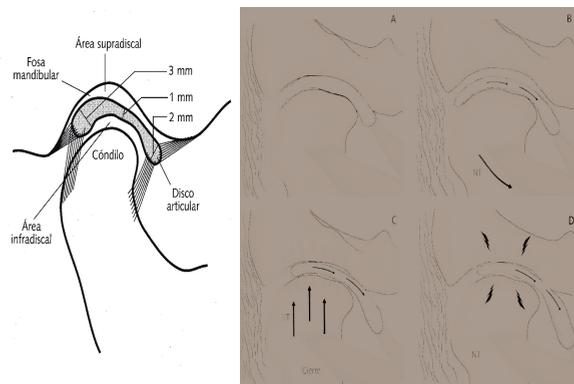


Figure 4: Esquema de la articulación temporo-mandibular (ATM).

se dice *anisotrópico*. La especial estructura macro y microscópica de muchos materiales hace que sus propiedades elásticas se repitan en algunas direcciones, lo que se traduce en la repetición de sus coeficientes de elasticidad. Es el caso, por ejemplo, de un tronco de árbol del que se dice que tiene anisotropía cilíndrica. Un caso muy especial es el de los sólidos cuyas propiedades elásticas son las mismas en todas direcciones. Se llaman *isotrópicos* y todos sus coeficientes de elasticidad pueden definirse a partir de dos constantes: el módulo de Young ( $E$ ) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Aunque existen algunos estudios en los que se considera que el hueso mandibular es anisotrópico ([32]), en la mayoría de los trabajos publicados se supone que tanto el hueso cortical como esponjoso son isotrópicos, lógicamente con propiedades distintas el uno del otro. En la Tabla 1 reflejamos los valores utilizados para el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y la densidad de ambos (véase, por ejemplo, [5, 12]).

El cóndilo es la parte de la mandíbula que se articula con el cráneo y donde se produce el movimiento de la boca (Figura 4). La longitud mediolateral del cóndilo es de 15-20 mm y el ancho frontal de 8-10 mm. La superficie de la articulación del cóndilo es muy convexa en su dirección frontal pero no en la mediolateral. La zona de unión con el cráneo se llama articulación temporomandibular (ATM) y constituye una de las articulaciones más complejas del cuerpo humano. El movimiento del cóndilo dentro de la fosa glenoidea es muy complejo, como complejos son los movimientos que los músculos pueden imprimir a la mandíbula (en la sección 4 se describen detalladamente los más importantes de estos músculos). Pero es importante destacar que dichos movimientos están restringidos por el disco articular que le separa del maxilar y que nunca puede penetrar (salvo por accidente traumático).

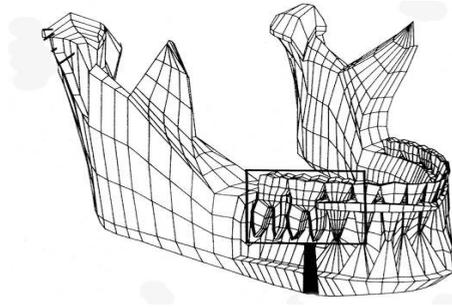


Figure 5: Malla “manual” (Korioth el alt, 1992)

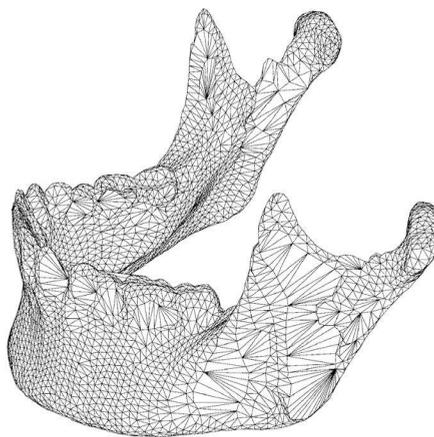


Figure 6: Malla digitalizada inicial (Kappelman y Kirk, 1997).

### 3 Modelo geométrico de la mandíbula

Tanto para su representación geométrica como para los cálculos previstos es imprescindible contar con una buena representación de la geometría de la mandíbula. El método más utilizado consiste en descomponer la mandíbula (en general, la pieza o dominio que se quiere representar) en subdominios “pequeños” llamados *elementos finitos*. Los elementos finitos más usados son tetraedros y hexaedros. El conjunto de los elementos finitos se llama una *malla* o *mallado*.

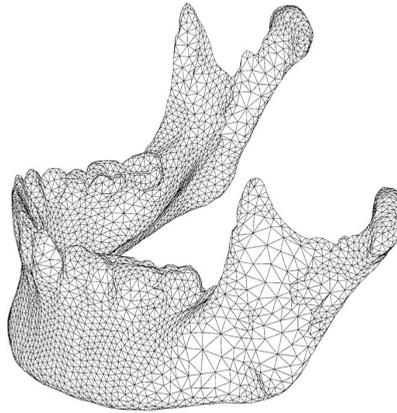


Figure 7: Malla regularizada completa (Viaño et al, 1998).

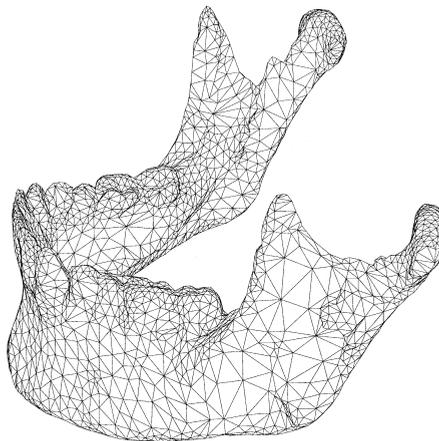


Figure 8: Malla regularizada diezmada (Viaño et al, 1998).

Debido a la complicada geometría de la mandíbula, la generación de un “buen” mallado de elementos finitos tetraédricos no es una tarea sencilla. Un “buen” mallado no sólo debe representar de forma precisa la geometría de la mandíbula sino que debe tener “buenas” propiedades para que los cálculos numéricos posteriores sean fiables. Para ello es imprescindible que los tetraedros no sean degenerados o sea que sus caras sean triángulos “lo más equiláteros posible”.

Es importante también que haya un número suficiente de tetraedros porque de ello depende la calidad de nuestra simulación. Por tanto deben ser suficientemente pequeños, pero, a su vez, debemos mantenernos en un número de nodos (vértices) razonable. En efecto, todas las simulaciones se reducen al final a resolver un número importante de sistemas lineales cuyo número de ecuaciones (e incógnitas) es igual a 3 veces el número de nodos (se calculan los desplazamientos en las tres direcciones de cada nodo). Un número muy elevado de nodos implicaría un tiempo de cálculo excesivo para la resolución de los sistemas lineales (nótese que estamos hablando de decenas o centenas de sistemas con decenas de miles de incógnitas cada uno).

En los trabajos pioneros de simulación en mandíbulas (hace 15 años), los mallados se generaban “manualmente” y, en algunos casos, con el apoyo de imágenes de radiografía y/o de escáner ([11, 21, 32, 35, 45, 46, 47]). En la figura 5 mostramos uno de los mejores mallados “manuales” que hemos encontrado. Aparece en el trabajo [32] de 1992 y tiene 5.580 nodos.

Pocos años más tarde, diferentes técnicas de iluminación con láser han permitido digitalizar la superficie de la mandíbula generando una nube de puntos y sus correspondientes coordenadas. Utilizando algoritmos de geometría computacional se genera una malla de triángulos que representa dicha superficie con enorme precisión. En la etapa inicial de nuestro proyecto, el mallado superficial fue obtenido de los datos proporcionados por J. Kappelman y C. Kirk (Departamento de Antropología, Universidad de Austin, Texas, EEUU). Fue creado usando un escáner con tecnología láser (modelo Digibotics II 3D) y el software Autodesk 3D Studios. Tiene 12.634 triángulos y 6.319 vértices (Figura 6).

Como puede observarse esta malla tiene triángulos “degenerados” (lados de proporciones muy distintas) en la rama y en el ángulo de la mandíbula. Estos triángulos, no deseables para el cálculo, fueron suprimidos mediante un proceso de regularización con sofisticadas técnicas de interpolación, utilizando software desarrollado por M. Castro (Universidad de Málaga, España) (véase [6]). El resultado final es la malla de la Figura 7. Tiene 13.019 triángulos con 6.585 vértices.

Para reducir el tiempo de cálculo, a partir de este mallado final, se ha obtenido otro más pobre o “diezmado”, formado por 7.210 triángulos con 3.819 nodos (Figura 8). El proceso de *decimación* del mallado se basa en la supresión de nodos y triángulos respetando lo más posible la geometría original, en el sentido propio del término “diezmar”: castigar (suprimir) a uno de cada diez soldados (nodos) posibles culpables de una tropa. En los algoritmos prácticos los subconjuntos no son necesariamente de 10 nodos (ver [44]).

El último paso es la generación del mallado en tetraedros del dominio tridimensional encerrado por esta superficie “triangular a trozos”. Se ha utilizado el algoritmo de mallado automático del programa *Simail* (Simulog, Francia). El resultado final es un mallado preciso que proporciona una muy buena representación geométrica de la estructura mandibular. Consta de 30.119 tetraedros con 7.073 vértices. Sin embargo, una de sus mayores desventajas es que en él no se distinguen las diferentes partes de la mandíbula tales como los dientes, el hueso cortical o el trabecular. Para los cálculos iniciales, hemos aproximado la zona de hueso cortical por el conjunto de tetraedros con algún vértice en la superficie.

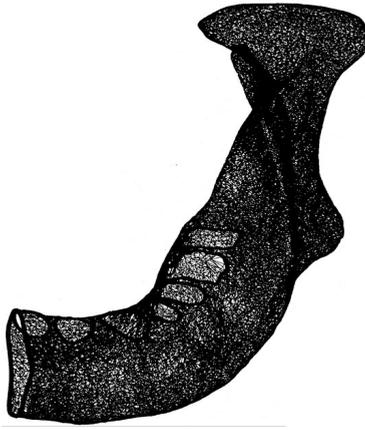


Figure 9: Nube de puntos obtenida por digitalización (Viaño et al., 1999).

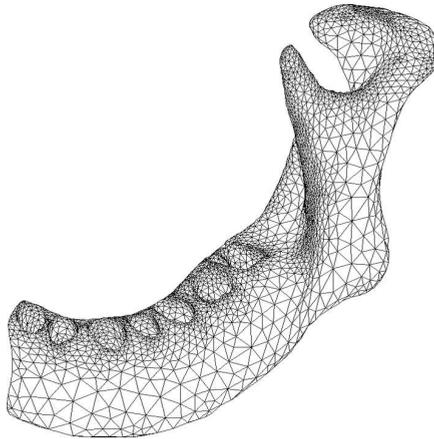


Figure 10: Malla semi-mandíbula edéntula (Viaño et al., 2000).

En las fases siguientes del trabajo, esta malla fue mejorada considerablemente mediante la digitalización láser de una mandíbula humana (edéntula) y todas sus piezas dentales (con raíces y coronas separadamente), reproducidas a gran escala por los odontólogos del equipo. Este trabajo fue realizado por investigadores del Centro de Investigación y Servicios (CIS) (Ferrol, A Coruña, España). En la Figura 9 se puede ver la nube de 52.109 puntos obtenida para la mitad de la mandíbula edéntula.

Una de las mayores dificultades para generar los mallados finales fue “hacer coincidir” las mallas superficiales en las zonas comunes de los dientes (raíces) y la mandíbula (alveolos), así como el *enriquecimiento* con elementos suplementarios en las zonas de mayores curvaturas (zona de encías, por ejemplo). La solución a este problema vino de la mano de los expertos del grupo GAMMA del Institut Nationale de Recherche en Informatique et Automatique, INRIA (París, Francia, <http://www.inria.fr/recherche/equipes/gamma.fr.html>)[24].

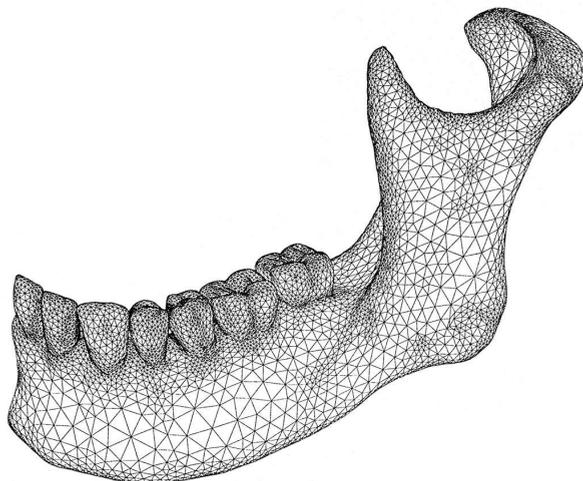


Figure 11: Malla semi-mandíbula con dientes (Viaño et al, 2000).

Tras este excitante proceso de interacción entre dispositivos ópticos, geometría computacional y visualización gráfica concluimos un mallado tridimensional de gran precisión, del conjunto mandíbula-dientes. Las mallas tridimensionales generadas pueden verse en las Figuras 10 y 11. Contienen respectivamente 41.825 tetraedros con 9.958 vértices y 324.782 tetraedros con 61.391 vértices. Por tanto, la mandíbula completa con las 14 piezas dentales tiene 649.564 tetraedros con 122.782 vértices aproximadamente (porque los vértices comunes a ambas mitades sólo se deben contar una vez). En los cálculos habituales hemos utilizado una versión diezmada de la malla que se muestra en la Figura 12. Tiene 122.314 tetraedros con 24.395 vértices (lo que supone resolver sistemas lineales con 73.185 incógnitas).

Para finalizar esta sección, indicamos el sistema de referencia y los planos

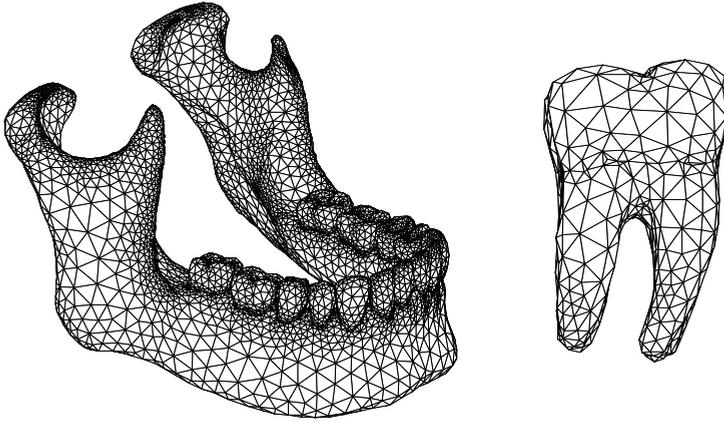


Figure 12: Malla diezmada de la mandíbula con dientes y malla del primer molar derecho (Viaño et al., 2000).

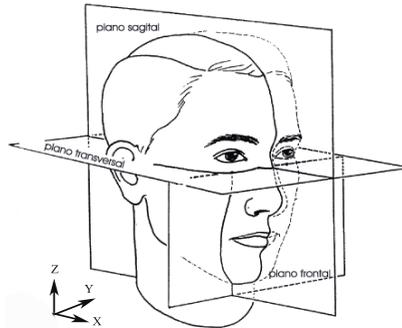


Figure 13: Sistema de coordenadas y planos principales.

principales de la mandíbula que utilizamos para establecer la dirección de las fuerzas que actúan en la mandíbula y en sus piezas (Figura 13).

#### 4 Simulación de una mordida

En esta sección, describimos algunos resultados obtenidos en la simulación numérica de una fase de mordida (véase [50] para más detalles). El objetivo del cálculo es aproximar el estado de tensiones y deformaciones que se producen en el hueso mandibular durante la mordida con el primer molar derecho de un objeto rígido (una avellana, por ejemplo). El equipo médico propone este estudio porque se trata de una situación en la que se somete a la mandíbula a un esfuerzo notablemente superior a otras situaciones de mordida o masticación.

La energía necesaria para mover la mandíbula la proporcionan los músculos

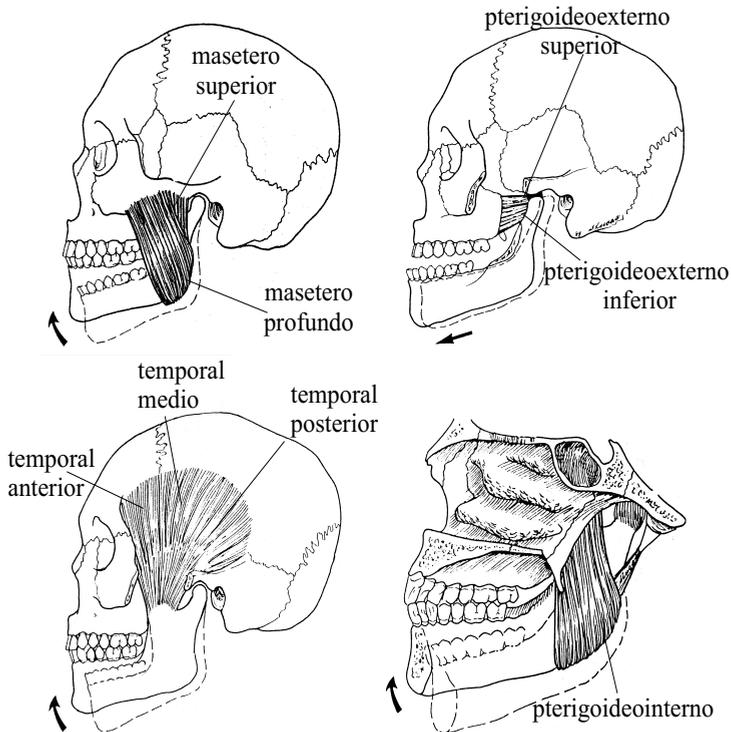


Figure 14: Músculos de la masticación con sus zonas de actuación.

de la masticación. En la Figura 14 se muestran los principales de estos músculos y se ilustra el movimiento que provocan cuando actúan. En la Tabla 2, se describen el vector de dirección ( $X, Y, Z$ ) y la intensidad de las fuerzas realizadas por los músculos que actúan de forma apreciable en la mordida con el primer molar derecho. Especial importancia para el cálculo tiene la aproximación del área de actuación de dicha fuerza, es decir, el área de inserción del músculo, cuya información es facilitada por el equipo médico.

Músculo	Intensidad(N)	X	Y	Z
Masetero profundo	81.60	-0.546	0.358	0.758
Masetero superior	190.40	-0.207	-0.419	0.885
Pterigoideo interno	174.80	0.486	-0.372	0.791
Pterigoideo externo	66.90	0.630	-0.757	-0.174
Temporal anterior	158.00	-0.149	-0.044	0.988
Temporal medio	95.60	-0.221	0.500	0.837
Temporal posterior	75.60	-0.208	0.855	0.474

Tabla 2: Fuerzas de los músculos en una mordida con el primer molar derecho.

Durante la masticación y la mordida, la boca se deforma siguiendo su eje longitudinal en el área de mordida y se producen diferentes cargas en los cóndilos debido a efectos rotacionales de la rama mandibular. Así, la distribución de tensiones en el cóndilo difiere según la tarea de masticación considerada (y, por tanto, según los músculos que entran en acción). Para determinar dónde se carga el cóndilo en cada tarea, es necesario calcular estas tensiones en la superficie completa. El método de los elementos finitos nos proporciona una solución a este problema en el que intervienen, de manera decisiva, tanto las cargas como las formas y las propiedades elásticas de sus componentes. Hemos utilizado los mismos datos que el ya citado estudio [32], con la malla de la Figura 5, publicado en 1992. Nuestros resultados corroboraron y completaron los de dicha referencia, proporcionando una validación adicional de nuestro programa de cálculo.

Denotamos por  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  el dominio ocupado por la mandíbula y por  $\Gamma = \partial\Omega$  su superficie exterior. Sea  $\Gamma_F \subset \Gamma$  la unión de las partes de la superficie donde actúan los diferentes músculos y  $\mathbf{g} = (g_i) = (g_1, g_2, g_3)$  la densidad de las fuerzas ejercidas por dichos músculos en  $\Gamma_F$  (Tabla 2).

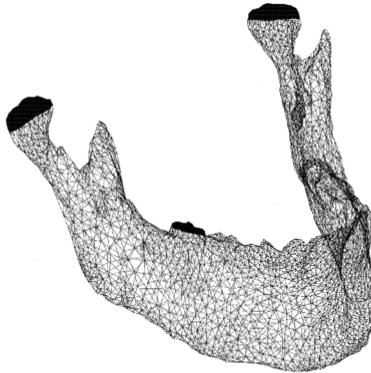


Figure 15: Zonas de contacto en la mordida.

Debido a las características de la ATM y a la rigidez del hueso temporal, hemos utilizado una condición de contacto unilateral sin rozamiento en la parte superior del cóndilo izquierdo (denotada por  $\Gamma_C^{cond}$ ). Esto significa que el contacto se puede producir pero no hay penetración (el desplazamiento está restringido por la fosa glenoidea), y que los desplazamientos en las direcciones tangenciales se producen libremente (sin tensiones de rozamiento). Esta es la clásica condición de contacto sin rozamiento en elasticidad conocida como *condición de Signorini*. Suponemos la misma condición de contacto del molar con el objeto mordido y denotamos por  $\Gamma_C^{dient}$  la parte superior de dicho molar que entra o puede entrar en contacto con el objeto. Así pues,  $\Gamma_C := \Gamma_C^{cond} \cup \Gamma_C^{dient}$  representa la zona superficial donde el contacto se puede producir, es decir, donde la mandíbula puede presionar o se puede separar del cuerpo rígido (el

objeto mordido o la fosa glenoidea). Por otra parte, denotamos por  $\Gamma_D = \Gamma_D^{cond}$  la parte de la frontera de  $\Omega$  en la que suponemos que no hay desplazamiento: en nuestro caso,  $\Gamma_D$  es la superficie superior del cóndilo derecho, dado que es conocido que, durante la mordida, este permanece en contacto permanente con el maxilar. En la Figura 15 se muestran las 3 zonas de contacto.

En cuanto al modelo, admitimos el echo evidente de que la deformación producida en la mandíbula por efecto de su propio peso es despreciable frente a las deformaciones provocadas por las fuerzas de mordida. Esto es equivalente a decir que el peso de la mandíbula no tiene influencia en la deformación (si así fuese, la fuerza del peso habría que “sumarla” a la de los músculos). Finalmente, ponemos de manifiesto que la mordida se produce tan lentamente que no existen efectos de inercia (relacionados con la aceleración) y el proceso es estacionario: no hay variaciones importantes de las fuerzas en el intervalo de tiempo considerado y se trata de calcular el estado de equilibrio final.

Para cada punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , denotamos por  $u_i(\mathbf{x})$  el desplazamiento de este punto en la dirección  $Ox_i$ , de modo que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_i(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^3$  es el vector desplazamiento de este punto. Esto significa que el punto  $\mathbf{x}$  antes de la deformación ocupará la posición  $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Asimismo, denotamos por  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , la  $(i, j)$ -ésima componente del tensor de tensiones de Cauchy en el punto  $\mathbf{x}$  del sólido  $\overline{\Omega}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}_S^9 := \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{R}^9 : \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3\}.$$

La cantidad  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  representa la  $j$ -ésima componente de la fuerza ejercida, en el punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , por el volumen del sólido situado a un lado de un plano perpendicular al eje  $Ox_i$ , sobre la otra parte del mismo sólido. Dado que hemos supuesto que el hueso mandibular es elástico, homogéneo e isótropo, se verifica la siguiente ley de Hooke (véase [9]):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \right) \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}),$$

para  $1 \leq i, j \leq 3$ , donde  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$  es la  $(i, j)$ -ésima componente del tensor de deformaciones linealizado:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y  $\delta_{ij}$  representa el símbolo de Kronecker.

En estas condiciones, el problema anterior se puede formular en términos del clásico problema de contacto de Signorini en elasticidad, que ha sido estudiado, desde diferentes puntos de vista, en muchos trabajos de mecánica o matemática aplicada (véase por ejemplo [9, 17]). Sea  $\mathbf{n} = (n_i) = (n_1, n_2, n_3)$  el vector unitario exterior y normal a  $\Gamma$ . A partir de las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de equilibrio mecánico, el problema descrito se escribe matemáticamente bajo la forma del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas

parciales y condiciones de frontera (utilizamos el convenio de la suma de índices repetidos):

$$-\partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j = g_i \text{ en } \Gamma_F, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u_n = u_i n_i \leq 0, \quad \sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \leq 0, \quad u_n \sigma_n = 0, \\ \sigma_{\tau i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \end{aligned} \right\} \text{ en } \Gamma_C. \quad (4)$$

Sea  $V$  el espacio de desplazamientos admisibles, definido por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in [L^2(\Omega)]^3 : \partial_j v_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\},$$

donde  $L^2(\Omega)$  designa el conocido espacio de (las clases de) funciones de cuadrado integrable en  $\Omega$  y las derivadas parciales se consideran en el sentido de las distribuciones introducido en 1944 por el matemático francés Laurent Schwartz (1915-2002).

Denotamos por  $a(\cdot, \cdot)$  la siguiente forma bilineal:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

y la forma lineal:

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} g_i v_i d\gamma, \quad \text{para todo } \mathbf{v} = (v_i) \in V.$$

La condición (4) implica la siguiente definición del convexo de desplazamientos admisibles:

$$K = \{\mathbf{v} \in V; v_n = v_i n_i \leq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_C\}. \quad (5)$$

$K$  es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $V$ . El problema (1)-(4) admite la siguiente formulación variacional que expresa la igualdad del trabajo de las fuerzas aplicadas y la energía potencial (véase [17] para más detalles):

$$\mathbf{u} \in K, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in K. \quad (6)$$

Puesto que  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal  $V$ -elíptica y continua y  $L(\cdot)$  es una formula lineal continua, se puede aplicar el Lema de Lax-Milgran para deducir que el problema (6)–de dimensión infinita– tiene una única solución ([17, 25]).

Nuestro objetivo es calcular una aproximación de dicha solución y, de esta manera, simular numéricamente los efectos mecánicos de la mordida. El primer paso consiste en aproximar la inecuación variacional (6) por un problema de dimensión finita, siguiendo las ideas de [25, 26, 28, 48, 49].

El conjunto  $\bar{\Omega}$  se aproxima por el conjunto poliédrico  $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ , siendo  $\mathcal{T}_h$  una malla tipo elementos finitos compuesta por tetraedros y compatible con la partición  $\Gamma = \Gamma_C \cup \Gamma_D \cup \Gamma_F$  (véase [8]).

Definimos el siguiente espacio de funciones continuas y polinómicas en cada tetraedro:

$$V_h = \{ \mathbf{v}_h \in [C^0(\overline{\Omega}_h)]^3; \mathbf{v}_h|_T \in [P_1(T)]^3, \text{ para todo } T \in \mathcal{T}_h, \\ \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D^h \},$$

donde  $\Gamma_D^h$  es la parte de la frontera de  $\Omega_h$  que aproxima a  $\Gamma_D$  y  $P_1(T)$  es el espacio de funciones polinómicas en las variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$  con grado total menor o igual que 1 en  $T$ .

El convexo de desplazamientos admisibles  $K$  se aproxima por

$$K_h = \{ \mathbf{v}_h \in V_h : v_{hn} \leq 0 \text{ en } \Gamma_C^h \},$$

siendo  $\Gamma_C^h$  la parte de la frontera de  $\Omega_h$  que aproxima a  $\Gamma_C$ . También denotamos por  $\Gamma_F^h$  la aproximación de  $\Gamma_F$ .

Por tanto, el problema variacional (6) se aproxima en la forma:

$$\mathbf{u}_h \in K_h, \quad \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\mathbf{u}_h) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega_h} f_i(v_{ih} - u_{ih}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Gamma_F^h} g_i(v_{ih} - u_{ih}) d\gamma, \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in K_h. \tag{7}$$

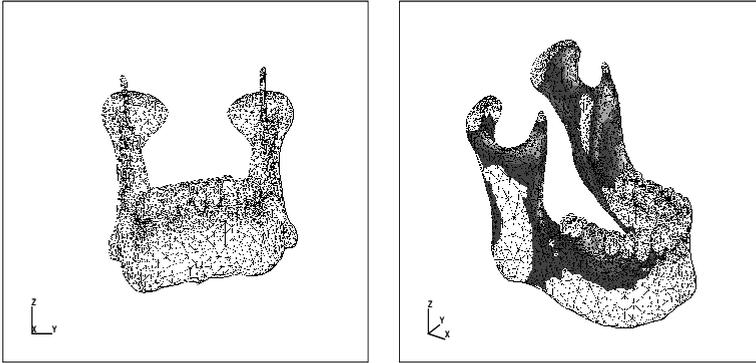


Figure 16: Mordida: deformación y zonas de mayor tensión.

El problema (7) es un problema de dimensión finita (igual a 3 veces el número de nodos del mallado) equivalente a un problema de minimización de un funcional cuadrático sobre un conjunto convexo cerrado. Tiene por tanto una y una sola solución. Para aproximar su solución, se utilizó un algoritmo de optimización (búsqueda de mínimos) de tipo penalización-dualidad introducido en [2] y estudiado en [48, 49].

Los desplazamientos se suelen representar visualmente mostrando la malla deformada, es decir, la malla que se obtiene de la inicial sumando a las coordenadas de sus vértices las de su correspondiente vector de desplazamiento. En este caso, el campo de desplazamientos resultante es un movimiento vertical

de la parte izquierda de la mandíbula y una compresión de su parte derecha, que produce una rotación como puede observarse en la Figura 16 (lado izquierdo). Estos resultados coinciden con los obtenidos en [32].

En ingeniería existen diferentes formas de presentar gráficamente el campo de tensiones  $\sigma_{ij}(\mathbf{u}_h)$ . Uno de los más utilizados es el criterio de von Mises, introducido en 1913 por Richard von Mises (n. Viena-1883, m. Nueva York-1953). Con este criterio, también conocido como criterio de la máxima energía de distorsión o teoría de Maxwell-Huber-Hencky-von Mises, se representa gráficamente (relleno de color, curvas de nivel,...) la función de la energía de distorsión asociada a los cambios de forma en el material (en contraposición a otros que utilizan la energía asociada a los cambios de volumen). Matemáticamente, la energía de distorsión es el cuadrado de la norma von Mises del tensor de tensiones ([30],[34]):

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^D\|_2,$$

donde  $\|\cdot\|_2$  designa la norma euclídea en  $\mathbb{R}^9$  y  $\boldsymbol{\sigma}^D$  denota el tensor desviador  $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\mathbf{I}$ . Por tanto, la energía de distorsión toma la siguiente expresión final:

$$\mathcal{E} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{VM}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}.$$

En la Figura 16 (derecha) podemos ver que las principales áreas de acumulación de tensiones están localizadas en el cóndilo izquierdo, debido al movimiento rotacional generado por el contacto con el objeto mordido. Las áreas de tensión restantes se producen debido a la acción directa de la fuerza de los músculos.

## 5 Simulación de un implante dental

Los implantes endoóseos constituyen, hoy en día, un método de eficacia probada para corregir deficiencias dentarias. El implante, que debe estar compuesto de un material biomédicamente aceptable (esto es, que no provoque problemas de oxidación, infección, ...), se inserta mediante una rosca en el hueso de la mandíbula y se recubre con una corona de material cerámico que hace las funciones de diente (Figura 17). En este caso, nuestro objetivo es determinar los efectos de la transmisión de tensiones al resto de la mandíbula al ejercer diversas fuerzas sobre el implante (simulando, por ejemplo, tareas de mordida).

Dado que se produce rápidamente la oseointegración del implante con la mandíbula, se ha considerado que la unión del implante con el hueso es perfecta y que no existe ningún fenómeno de separación o contacto. Esto nos permite realizar una simulación básica mediante un clásico problema de elasticidad tridimensional, en un dominio que comprende el implante y la porción de hueso de la mandíbula en el entorno del mismo.

En la Figura 18 mostramos los mallados del implante utilizado, que se ha supuesto formado por una aleación de níquel y titanio, y de una porción de

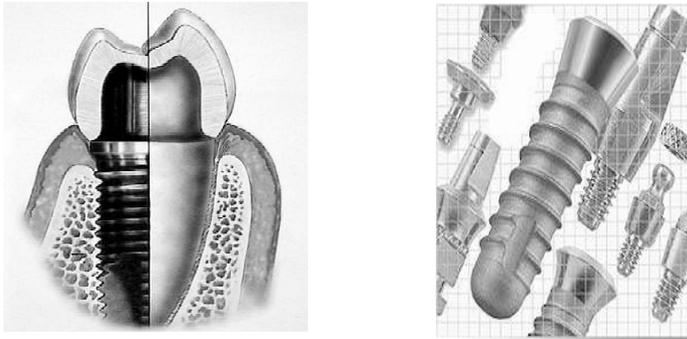


Figure 17: Esquema de un implante dental y tornillo endoóseo con distintas roscas para la corona

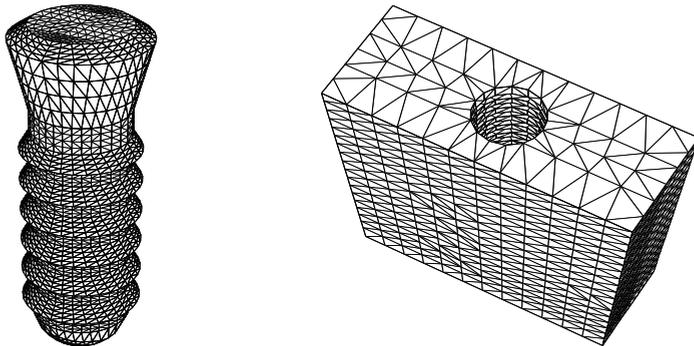


Figure 18: Mallas del tornillo de un implante y la parte del hueso mandibular en el que se inserta.

hueso mandibular en el que se supone insertado. En la Figura 19 se muestra un corte vertical y el campo de tensiones en el complejo implante-mandíbula en el caso de fuerzas verticales (dibujo izquierdo) y oblicuas –actuando de izquierda a derecha– (dibujo derecho), aplicadas en la cara superior del implante (véase [23] para más detalles). En ambos casos, las zonas de mayor tensión están localizadas en la superficie externa del hueso que está en contacto con la cabeza del tornillo. En el primer caso, como es lógico, aparecen distribuidas simétricamente alrededor del implante, mientras que en el segundo la máxima tensión se produce en la parte de hueso presionada por el tornillo.

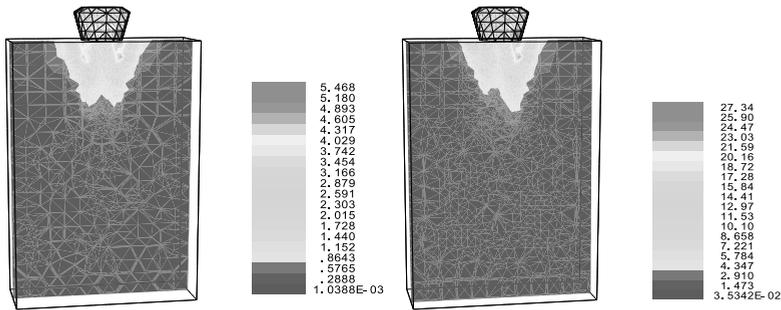


Figure 19: Tensiones en el entorno de un implante.

## 6 Localización de las fracturas mandibulares

Las fracturas mandibulares son muy usuales, representando un 10-25% de las fracturas faciales. Según su localización, las podemos clasificar en los siguientes grupos ([39], véase la Figura 20): 1. fracturas de la región de la sínfisis, entre los caninos (14%), 2. fracturas de la línea canina (1%), 3. fracturas del cuerpo de la mandíbula, entre el canino y el ángulo de la mandíbula (21%), 4. fracturas de la región alveolar (3%), 5. fracturas del ángulo de la mandíbula en la región del tercer molar (20%), 6. fracturas de la rama mandibular, entre el ángulo de la mandíbula y la fosa sigmoidea (3%), 7. fracturas del proceso coronoideo (2%) y 8. fracturas de cóndilo (36%).

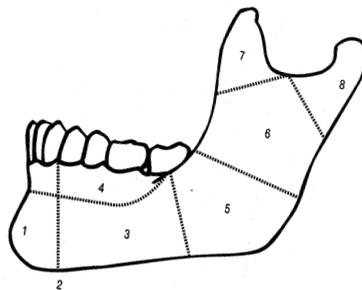


Figure 20: Fracturas de mandíbula más usuales.

Es importante destacar que las fracturas se pueden producir, bien por aplicación directa de la fuerza o bien por las tensiones inducidas en otra área alejada (véase la Figura 21, lado izquierdo). Se llaman *fracturas directas* o *indirectas*, respectivamente.

El objetivo de esta sección es localizar las zonas de máxima tensión (por tanto, susceptibles de fracturarse), asociadas a la deformación producida en la mandíbula al ser impactada en la región  $\Gamma_F$  por un objeto a gran velocidad. La fuerza por unidad de superficie en cada punto  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_F$  y en

cada instante  $t$  es conocida y denotada por  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = (g_i(\mathbf{x}, t))$ . Para simular el impacto, supondremos una densidad de fuerza exponencialmente creciente durante un intervalo de tiempo muy corto, denotado por  $[0, T]$ ,  $T > 0$ .

En los ejemplos hemos tomado un fuerza de la forma (8), donde  $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{R}^3$  es la máxima intensidad del impacto alcanzada en el instante  $t_0 > 0$ :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} e^{10(t-t_0)}\mathbf{g}_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0, \end{cases} \quad (8)$$

No consideraremos la presencia de tejidos blandos (como pueden ser los músculos o ligamentos) y, como en el caso anterior, la mandíbula se supondrá un cuerpo elástico. En este caso, la variación de las cargas es muy rápida en el tiempo y los efectos de inercia asociados a la aceleración deben ser considerados. Por ello, es preciso utilizar un modelo elastodinámico (desplazamientos y tensiones dependen del tiempo  $t$ ) que, teniendo en cuenta las condiciones de frontera (cóndilos) se escribe en la forma siguiente ([17, 40]):

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_i(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que :} \\ & \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad 1 \leq i \leq 3, \\ & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Gamma_D \times [0, T], \\ & \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))n_j(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{en } \Gamma_F \times [0, T], \quad 1 \leq i \leq 3, \\ & u_n(\mathbf{x}, t) \leq 0, \sigma_n(\mathbf{x}, t) \leq 0, u_n(\mathbf{x}, t)\sigma_n(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \Gamma_C \times [0, T], \\ & \sigma_\tau(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{en } \Gamma_C \times [0, T], \\ & \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Aplicando una fórmula de Green y usando las condiciones frontera de (9), se obtiene la siguiente formulación variacional:

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \mathbf{u} : t \in [0, T] \rightarrow \mathbf{u}(t) \in K \text{ tal que} \\ & \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{0}, \\ & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t)(v_i - u_i(t))d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}(t))\varepsilon_{ij}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))d\mathbf{x} \\ & \geq \int_{\Omega} f_i(t)(v_i - u_i(t))d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} g_i(t)(v_i - u_i(t))d\gamma := L(t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \quad (10)$$

para todo  $\mathbf{v} = (v_i) \in K$  y para casi todo  $t \in (0, T)$ .

Observamos que la formulación anterior corresponde a una inecuación variacional de segundo orden en tiempo. La existencia y unicidad de solución de (10) permanece como un problema abierto. Sin embargo, se han escrito varios trabajos sobre su resolución numérica. Hemos seguido las ideas presentadas en [41] para obtener un esquema completamente discretizado que nos permitiera realizar diferentes simulaciones numéricas.

La discretización de (10) se realiza en dos pasos. En primer lugar, se aproxima la variable espacial como en la sección anterior. En segundo lugar,

para discretizar las derivadas de orden 2 en tiempo, de acuerdo a [1, 41, 43], se ha propuesto un esquema numérico basado en el método de Newmark. Para simplificar la escritura, hemos eliminado el subíndice  $h$  en la descripción del problema. Dada una discretización en tiempo  $t_m = m\Delta t$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , y denotando por  $u^m$  la aproximación calculada para  $u(t_m)$  y  $L^m := L(t_m)$ , el problema completamente discretizado queda de la forma siguiente:

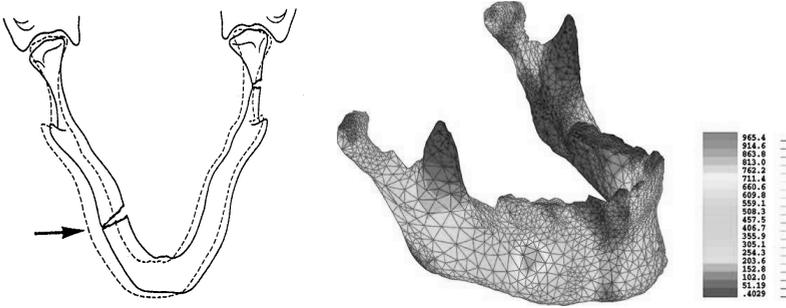


Figure 21: Impacto en el cuerpo mandibular: norma von Mises de las tensiones después de 1 seg.

$$\begin{aligned}
 & \text{Dados } \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \in K, \text{ para } m = 0, 1, \dots, M - 2, \\
 & \text{Encontrar } \mathbf{u}^{m+2} \in K \text{ tal que:} \\
 & \bar{a}(\mathbf{u}^{m+2}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^{m+2}) \geq \bar{L}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^{m+2}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in K,
 \end{aligned} \tag{11}$$

con

$$\begin{aligned}
 \bar{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \left( \frac{\rho}{\Delta t^2} \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \frac{1}{4} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\
 \bar{L}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \langle \sigma_n(\mathbf{u}^{m+1}), v_n \rangle + \frac{1}{4} \langle \sigma_n(\mathbf{u}^m), v_n \rangle + \frac{1}{4} L^{m+2}(\mathbf{v}) \\
 &+ \frac{1}{2} L^{m+1}(\mathbf{v}) + \frac{1}{4} L^m(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v}) - \frac{1}{4} a(\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) \\
 &- \left( \frac{\rho}{\Delta t^2} \mathbf{u}^m, \mathbf{v} \right) + \left( \frac{2\rho}{\Delta t^2} \mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v} \right), \quad \mathbf{v} \in V,
 \end{aligned}$$

donde  $(\cdot, \cdot)$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotan los productos escalares en  $L^2(\Omega)$  y  $L^2(\Gamma_C)$ .

Dado que  $\rho/\Delta t^2 > 0$  y  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica, la forma bilineal  $\bar{a}$  es simétrica y  $V$ -elíptica. Por tanto, el problema anterior admite una única solución ([4, 25]).

Notamos que este problema discreto es una inecuación variacional elíptica de primera clase como la que describimos en la sección 4. Por tanto, podemos aplicar el mismo algoritmo de tipo penalización-dualidad en cada paso de tiempo.

El ejemplo que hemos simulado consiste en un impacto lateral en la dirección normal al plano sagital (Figura 21, lado izquierdo). Nuestro objetivo es obtener las zonas de máxima tensión después del impacto ya que éstas son las zonas de posible fractura ([22, 51]).

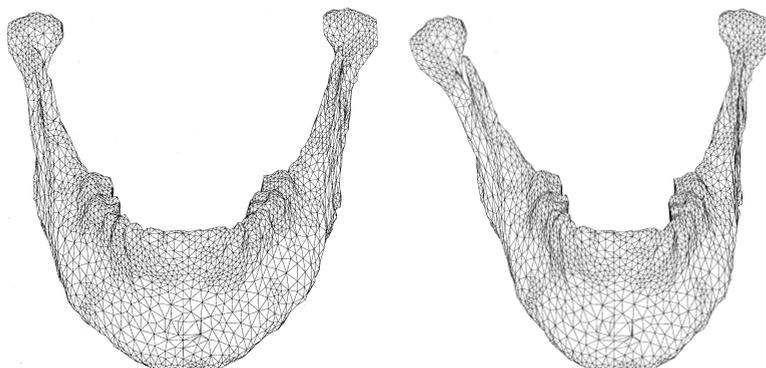


Figure 22: Impacto en el cuerpo mandibular: malla inicial y deformada 1 seg. después del impacto.

Hemos supuesto un área de impacto de tamaño  $0.655\text{ cm}^2$  en el cuerpo mandibular derecho y usado los datos  $t_0 = 1$ ,  $|\mathbf{g}_0| = 1000\text{ N/cm}^2$ . Para el cálculo hemos elegido  $T = 1$  seg. y  $\Delta t = 0.01$  seg.

En la Figura 22, se pueden observar el mallado inicial y el deformado en el tiempo final. Además, en la Figura 21 (lado derecho) se muestran las zonas de mayor tensión. Como podemos observar, estas se ajustan a las observaciones experimentales (Figura 21, lado izquierdo) tanto en la zona condilar (fractura indirecta) como en la zona impactada (fractura directa).

## 7 Reducción de fracturas de mandíbula con miniplacas

Durante la última década el tratamiento de las fracturas mandibulares ha estado influenciado y modificado por diversos estudios experimentales. Tratando de encontrar una técnica de osteosíntesis que garantizara la curación de la fractura (reducción) sin compresión intermaxilar, la técnica de osteosíntesis con miniplacas corticales de [36] fue modificada, mejorada y convertida en un método clínico aplicable por Champy y sus colaboradores ([7]). La idea del método es asegurar la estabilidad de la mandíbula fracturada mediante la aplicación de las llamadas miniplacas de osteosíntesis (miniplacas de titanio muy delgadas que se fijan con tornillos monocorticales, es decir, que se atornillan al hueso cortical y, por tanto, son de muy poca longitud). En la Figura 23 se muestra el proceso de estabilización. En nuestro estudio, suponemos que la fijación de los tornillos a las miniplacas, y de estas a la mandíbula, es perfecta (lo que permite identificar los puntos de engarce respectivos).

Nuevamente, suponemos un comportamiento elástico lineal para las dos partes de la mandíbula fracturada y para las miniplacas. Además, aunque no es del todo realista, hemos supuesto en este primer estudio que no existe rozamiento entre las miniplacas y el hueso cortical ni entre las dos partes de la mandíbula fracturada, que tampoco se pueden interpenetrar mutuamente.

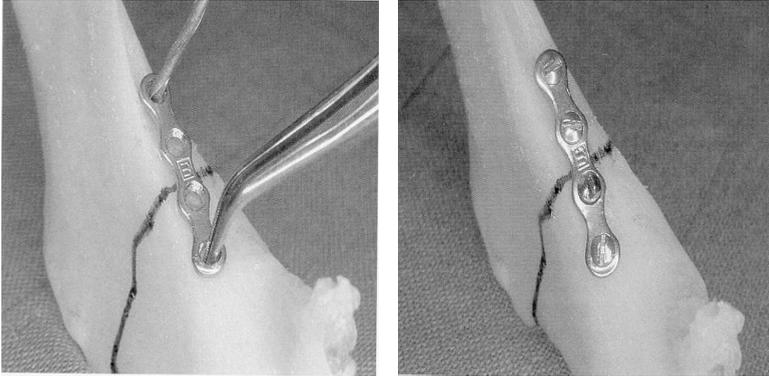


Figure 23: Fijación de una miniplaca con tornillos monocorticales.

Denotamos por  $\Omega^1$  y  $\Omega^2$  las dos partes de la mandíbula y por  $\Omega^3$  las miniplacas (véase la Figura 24). En el caso de dos miniplacas,  $\Omega^3 = \Omega^{3,1} \cup \Omega^{3,2}$ , donde  $\Omega^{3,1}$  y  $\Omega^{3,2}$  son los dominios de las dos miniplacas.

Sea  $\Gamma^k$  la frontera de  $\Omega^k$  que suponemos dividida en cuatro partes disjuntas  $\Gamma^k = \Gamma_D^k \cup \Gamma_F^k \cup (\bigcup_{l \neq k} \Gamma_C^{k,l})$ , donde  $\Gamma_C^{k,l}$  representa la zona de contacto entre los dominios  $\Omega^k$  y  $\Omega^l$ . Entonces,  $\Gamma_C^{k,l} = \Gamma_C^{l,k}$ , y denotamos por  $\Gamma_C = \bigcup_{1 \leq k < l \leq 3} \Gamma_C^{k,l}$  la parte común de la frontera de contacto.

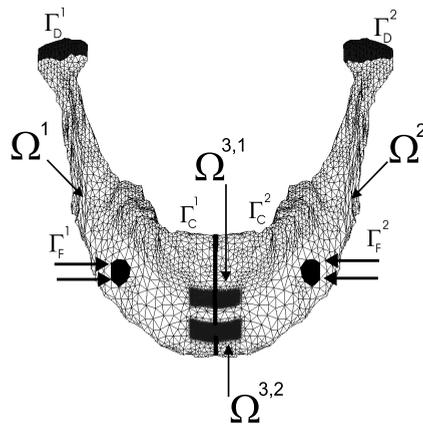


Figure 24: Miniplacas y áreas de acción de las fuerzas.

Sea  $\Gamma_D^k$  la parte de la frontera de  $\Gamma^k$  donde se conocen los desplazamientos. En este caso, el conjunto  $\Gamma_D^3$  es vacío y los conjuntos  $\Gamma_D^1$  y  $\Gamma_D^2$  representan las superficies condilares en contacto con la fosa glenoidea (Figura 24) en las que, por las condiciones de carga, ahora suponemos que no se desplazan en ninguna dirección.

Denotamos por  $\Gamma_F^k$  la parte de la frontera de  $\Gamma^k$  donde las fuerzas externas

actúan en el sólido  $\Omega^k$ . La densidad de fuerzas superficiales en  $\Gamma_F^k$  se denota por  $\mathbf{g}^k = (g_i^k)$ . En esta sección, éstas representan una presión constante actuando con la misma intensidad en ambos lados de la mandíbula. Son las únicas fuerzas consideradas, ya que las fuerzas de los músculos en reposo y el peso de la mandíbula son despreciables en cuanto a los efectos de deformación que pueden producir en el hueso.

Para una función  $\phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  denotamos por  $\phi^k$  su restricción a  $\overline{\Omega}^k$ , e identificamos  $\phi$  y  $(\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ . Entonces, sea  $\mathbf{u}^k = (u_i^k)$  el campo de desplazamientos producido en  $\Omega^k$ , y  $\boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{u}^k) = (\sigma_{ij}^k(\mathbf{u}^k))_{i,j=1}^3$  su tensor de tensiones asociado. Además, denotamos por  $\mathbf{n}^k = (n_i^k)$  el vector unitario normal y exterior a  $\Gamma^k$ .

El problema descrito hasta aquí admite una formulación matemática del mismo tipo que (1)-(3) y se escribe de la forma siguiente teniendo en cuenta que está compuesto por 3 materiales distintos: ([28, 3]):

$$\left. \begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij}^k(\mathbf{u}^k) &= 0, \quad 1 \leq i \leq 3, & \text{en } \Omega^k, \\ u_i^k &= 0, \quad 1 \leq i \leq 3, & \text{en } \Gamma_D^k, \\ \sigma_{ij}^k(u^k)n_j^k &= g_i^k, \quad 1 \leq i \leq 3, & \text{en } \Gamma_F^k, \end{aligned} \right\} 1 \leq k \leq 3. \quad (12)$$

Sea  $\sigma_n^k = \sigma_{ij}^k n_i^k n_j^k$  la tensión normal producida en la dirección del vector normal  $\mathbf{n}^k$ , y  $u_n^k = u_i^k n_i^k$  la componente normal del desplazamiento en  $\Gamma^k$ . Definimos la tensión tangencial en  $\Gamma_C$  como

$$\sigma_{\tau i}^k = \sigma_{ij}^k n_j^k - \sigma_n^k n_i^k, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Las condiciones de contacto unilateral sin rozamiento en  $\Gamma_C$  y la no interpenetración mutua de las distintas partes se escriben en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} u_n^k + u_n^l &\leq 0; \quad \sigma_n^k(\mathbf{u}^k) = \sigma_n^l(\mathbf{u}^l) \leq 0, \\ \sigma_n^k(\mathbf{u}^k)(u_n^k + u_n^l) &= 0, \\ \sigma_{\tau i}^k(\mathbf{u}^k) &= \sigma_{\tau i}^l(\mathbf{u}^l) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \end{aligned} \right\} \text{en } \Gamma_C^{k,l}, \quad 1 \leq k < l \leq 3. \quad (13)$$

Sea  $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (\varepsilon_{ij}^k)_{i,j=1}^3$  el tensor de tensiones linealizado asociado con el dominio  $\Omega^k$  y definido por

$$\varepsilon_{ij}^k(\mathbf{u}^k) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^k + \partial_j u_i^k).$$

Ya que suponemos que los 3 materiales son elásticos, homogéneos e isotrópicos, se verifica la ley de Hooke para cada uno de ellos:

$$\sigma_{ij}^k(\mathbf{u}^k) = \frac{E^k \nu^k}{(1 - 2\nu^k)(1 + \nu^k)} \left( \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^k(\mathbf{u}^k) \right) \delta_{ij} + \frac{E^k}{1 + \nu^k} \varepsilon_{ij}^k(\mathbf{u}^k), \quad (14)$$

donde  $E^k$  y  $\nu^k$  son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material que ocupa el dominio  $\Omega^k$ , respectivamente.

Aplicando las fórmulas de Green de integración por partes, se prueba, sin demasiada dificultad, que  $\mathbf{u}$  es la (única) solución de una inecuación variacional que tiene la forma (6).

La aproximación numérica se realiza de una forma análoga a (7). La diferencia más importante es que necesitamos considerar espacios producto (del tipo  $L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2) \times L^2(\Omega^3)$ ) para calcular la solución y la principal dificultad está en la resolución numérica del problema discreto, es decir, la forma en que se implementan las condiciones de contacto. Para ello, hemos seguido las mismas ideas de [3, 48, 49].

Como primer ejemplo de cálculo hemos considerado una mandíbula fracturada y reducida con dos miniplacas en la zona de la sínfisis (véase [19] para más detalles). Hemos supuesto una fractura en el plano sagital medio (que divide la mandíbula en dos partes iguales) y dos miniplacas transversales fijadas con dos tornillos monocorticales. La fractura se supone “limpia”, es decir, las superficies de fractura son planas, lo que simplifica la construcción de los mallados correspondiente mediante un algoritmo que “corta” en dos la malla de la mandíbula completa. Otros casos de fractura “en sierra” se pueden calcular con el mismo método sin más dificultades que la de obtener las mallas.

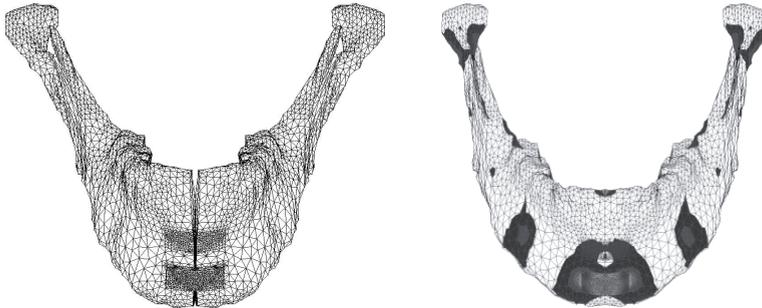


Figure 25: Reducción con 1 miniplaca: deformaciones y zonas de tensión intermedia.

Nuestro objetivo principal, sugerido por el equipo médico, es comparar las tensiones máximas obtenidas con una y dos miniplacas. Es conocido, por resultados experimentales, que las zonas de máxima tensión se localizan en la sínfisis, donde se implantan las miniplacas, y en las propias miniplacas en la zona de los tornillos. En los cálculos hemos supuesto que la presión ejercida en ambos cuerpos de la mandíbula es de 0.5 MPa y que las zonas presionadas tienen un área de 1.087 cm<sup>2</sup> cada una (véase la Figura 24).

En la Figura 25, podemos ver las deformaciones (amplificadas por un factor 100) en una mandíbula fracturada y reducida con una miniplaca y las zonas coloreadas que corresponden a las de tensión intermedia. El punto de máxima tensión se localiza en la zona de los tornillos y alcanza un valor de la norma von Mises igual a 7.845. En la Figura 26 se pueden observar los mismos resultados pero con 2 miniplacas. Ahora el valor máximo de la norma de von Mises es 6.395. Debemos remarcar que, por comodidad, se ha utilizado en ambos casos

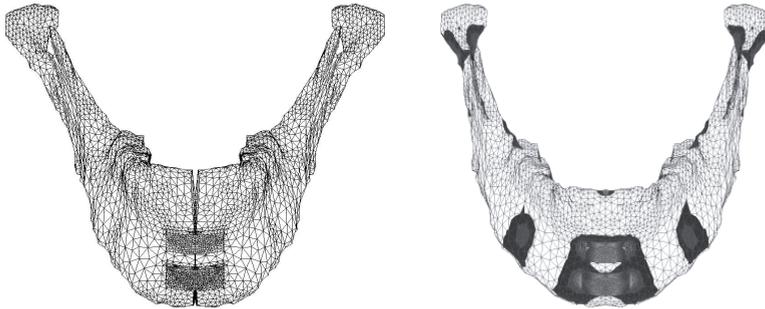


Figure 26: Reducción con 2 miniplacas: deformaciones y zonas de tensión intermedia.

la misma malla de la mandíbula. Esa es la justificación del parecido de las Figuras 25 y 26. Una mirada más atenta permite descubrir que en la malla de la Figura 25 no está presente la miniplaca superior como lo revela la visible separación de ambas partes de la mandíbula en esa zona y que no se produce en la Figura 26.

## 8 Un estudio comparativo de “brackets”

Los brackets ortodóncicos y los alambres se usan para obtener una correcta distribución de los dientes en el arco mandibular mediante deslizamiento de los mismos. Como ya hemos mencionado, en nuestro trabajo no hemos contemplado la simulación del movimiento dentario, para el que no existen todavía modelos fiables ([29, 42]). El deslizamiento o recolocación de los dientes se consigue mediante la imposición de movimientos adecuados en el alambre que se transmiten por contacto al cuerpo del bracket que a su vez mueve el diente al que está pegado. Los movimientos más usuales que el ortodoncista practica en el alambre son la tracción (para conseguir traslación de los dientes), alabeo y torsión (ambos para conseguir rotación del diente). En las Figuras 27 y 28 se puede ver un esquema simplificado de su funcionamiento. Nuestro interés se ha centrado en el comportamiento mecánico del conjunto bracket-alambre. Su funcionamiento se basa en la presión de contacto que el alambre ejerce sobre el cuerpo del bracket. En un funcionamiento correcto, el bracket debe deslizarse por el alambre sin rozamiento (o con un rozamiento despreciable). Sin embargo, eran, y todavía son, frecuentes los fenómenos mecánicos que provocan resistencia al deslizamiento y pueden causar inhibición en el movimiento de los dientes o la ruptura de alguna parte del bracket (en general, las *alas*). Los más importantes de estos fenómenos son el rozamiento clásico, el *binding* (el alambre se queda pegado al bracket) y el *notching* (el alambre produce muescas en el bracket).

La ortodoncia actual incorpora los últimos avances en el desarrollo de nuevos materiales y formas, para obtener tipos de alambres que están cambiando completamente los tratamientos clínicos. Sin embargo, estos grandes avances en el campo de los alambres u otros elementos elásticos (como las fijaciones o las



Figure 27: Dentadura con un aparato de ortodoncia de brackets-alambres. Detalle de un bracket con alambre actuando en tracción (vista frontal).

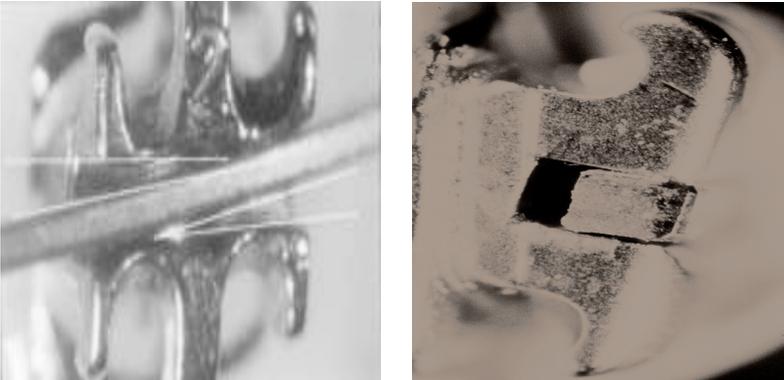


Figure 28: Detalle de un bracket con alambre actuando en alabeo (izquierda) y en torsión –vista de un corte transversal–(derecha).

uniones brackets-alambres) no han estado acompañadas de mejoras en el campo de los brackets, cuyo obsoleto diseño estaría limitando su efectividad.

Una de las mayores novedades en este campo se han alcanzado con los brackets de baja fricción. Su diseño ha mejorado algunas variables mecánicas, en comparación con los brackets clásicos. Un miembro de esta familia es el bracket Sinergy© desarrollado por Rocky Mountain Orthodontic. Fue diseñado para mejorar la efectividad al usar los nuevos alambres superelásticos y termoelásticos y tratar de reducir la fricción. Las principales diferencias entre el bracket Sinergy© y el bracket estandard son las siguientes:

- Tiene tres *alas* en lugar de dos, en cada lado. Esto mejora el trabajo con las gomas que sujetan el alambre.
- Presenta zonas más grandes entre las alas, para prevenir el contacto entre el alambre y las gomas.

- Los extremos de la ranura (“slot”) se han suavizado para reducir las tensiones en los procesos ortodóncicos.
- Las paredes del “slot” no son planas sino biconvexas, para reducir el rozamiento y permitir un mejor deslizamiento.

En colaboración con el grupo de ortodoncistas, hemos estudiado los efectos de las diferencias morfológicas entre estas dos clases de brackets cuando son sometidos a diversos test de desplazamientos impuestos en el alambre, típicos en ortodoncia (alabeo y torsión, esencialmente).

Para realizar las simulaciones numéricas, se decidió escoger dos brackets, uno estandard y el otro de baja fricción, para un diente incisivo izquierdo superior. Las empresas fabricantes, tras los análisis morfológicos y de composición necesarios, proporcionaron los siguientes valores para los coeficientes elásticos que fueron usados en las simulaciones: módulo de Young=  $2 \times 10^5$  MPa, coeficiente de Poisson= 0.27.

Hemos supuesto que el bracket y el alambre son dos sólidos tridimensionales que pueden entrar en contacto en su superficie común, esto es, la ranura o slot. Hemos supuesto un funcionamiento correcto del mismo, de modo que se admite que el rozamiento es despreciable en el proceso.

Supongamos que  $\Omega^1$  y  $\Omega^2$  son los dominios de  $\mathbb{R}^3$  que representan el espacio ocupado por el bracket y el alambre antes del experimento, respectivamente. Utilizaremos el superíndice  $m$  para indicar que una variable o subconjunto está relacionado con el dominio  $\Omega^m$ ,  $m = 1, 2$ .

Para cada dominio  $\Omega^m$ , suponemos que su frontera  $\Gamma^m$  está dividida en tres partes disjuntas  $\Gamma_D^m$ ,  $\Gamma_F^m$  y  $\Gamma_C^m$ , siendo  $\Gamma_D^m$  de medida positiva y denotamos  $\mathbf{n}^m = (n_i^m)$  el vector normal unitario exterior a  $\Gamma^m$ . Estamos interesados en el estudio del problema de deformación de ambos cuerpos bajo los efectos de desplazamientos impuestos  $\mathbf{u}^m$  en  $\Gamma_D^m$  de tipo alabeo. Se ha supuesto que no hay fuerzas externas actuando en el proceso y que los cuerpos pueden entrar en contacto en su zona común  $\Gamma_C^1 = \Gamma_C^2 = \Gamma_C$ , que corresponde al surco del bracket y a la frontera exterior del alambre. El contacto es, pues, sin rozamiento y modelado según las condiciones de no penetración que hemos descrito en las secciones previas.

En estas condiciones, el problema mecánico se escribe matemáticamente de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \partial_j \sigma_{ij}^m &= 0, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Omega^m, \\
 u_i^m &= \bar{u}_i^m, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Gamma_D^m, \\
 \sigma_{ij}^m n_j^m &= 0, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Gamma_F^m, \\
 u_n^1 + u_n^2 &\leq 0, \quad \sigma_n = \sigma_n^1 = \sigma_n^2 \leq 0, && \text{en } \Gamma_C, \\
 \sigma_n(u_n^1 + u_n^2) &= 0, \quad \sigma_{\tau i}^m = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Gamma_C.
 \end{aligned}$$

El problema anterior da lugar a una inecuación variacional análoga a la presentada en las secciones anteriores y, por tanto, se ha utilizado el

método de elementos finitos para su aproximación y el mismo algoritmo de tipo penalización-dualidad para su resolución. Nuestro interés se concentró en la realización de diferentes simulaciones numéricas, su interpretación y su comparación.

A partir de las medidas reales, se describe la geometría y se realizan los correspondientes mallados del alambre y del bracket usando el programa *Simail 6.4* (Simulog, Francia). Los mallados finales tienen 31.276 tetraedros para el conjunto alambre-bracket standard y 58.616 tetraedros para el alambre-bracket de baja fricción.

En todos los experimentos el alabeo se ha impuesto en base a un desplazamiento de  $d$  mm. en la dirección del eje  $X$  en un extremo y  $-d$  mm. en el sentido opuesto en el otro extremo del alambre. Las simulaciones numéricas se realizaron tomando  $d = 0.2, 0.4, \text{ y } 0.8$  mm.

En las Figuras 29 y 30 se puede observar la distribución de tensiones en el alambre y en el cuerpo del bracket. Se observa que las tensiones en los extremos del slot son mucho mayores en el caso del bracket standard que en el de baja fricción, lo que justificaría el uso de éste.

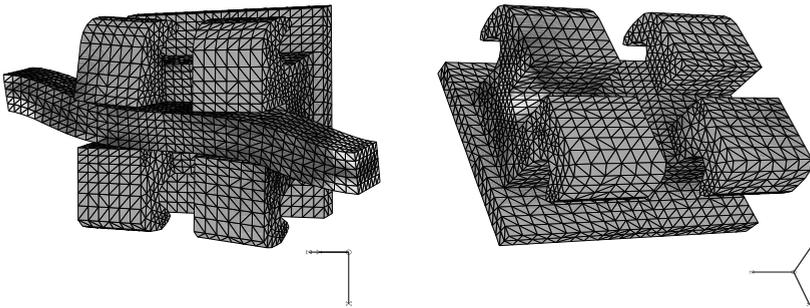


Figure 29: Deformaciones y tensiones en un bracket standard.

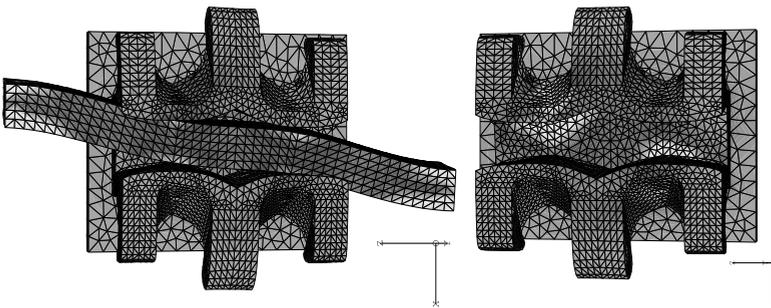


Figure 30: Deformaciones y tensiones en un bracket de baja fricción.

## 9 Conclusiones

Se ha presentado de manera sucinta varios ejemplos de simulación numérica (con programas de cálculo propios) en procesos mecánicos en odontología y ortodoncia: efectos de mordida, implantes dentales, localización de zonas susceptibles de fracturas mandibulares y su reducción con miniplacas de titanio, y conjuntos brackets-alambres ortodóncicos. Se han descrito también, de manera resumida, las dificultades técnicas y matemáticas para obtener modelos y geometrías precisas (elementos finitos) e imponer las condiciones físicas más apropiadas dentro de las posibilidades que el cálculo nos permite. Aunque los modelos utilizados son, en algunos casos, muy básicos, los resultados obtenidos han sido de gran valor desde el punto de vista médico. De hecho, podemos afirmar que la interacción con los técnicos informáticos y con los médicos dentistas para la realización de las mallas, la discusión de las hipótesis, de los modelos y las conclusiones de los resultados, constituyen uno de los aspectos más importantes de esta investigación en la que, una vez más, la simulación numérica muestra su enorme potencial.

## References

- [1] K. J. Bathe. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [2] A. Bermúdez y C. Moreno. Duality methods for solving variational inequalities. *Computers and Mathematics with Applications*, 7: 43–58, 1984.
- [3] M. Burguera y J.M. Viaño. Numerical solving of frictionless contact problems in perfectly plastic bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121:303–322, 1995.
- [4] H. Brezis y G. Stampachhia. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96:153-180, 1968.
- [5] D.R. Carter y W.C. Hayes. The compressive behaviour of bone as a two-phase porous structure. *Journal Bone Joint Surgery*, 591:954-962, 1977.
- [6] M. Castro. *Generación y adaptación anisótropa de mallados de elementos finitos para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales. Aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, 1996.
- [7] M. Champy, H.D. Pape, K.L. Gerlach y J.P. Lodde. The Strasbourg miniplate osteosynthesis. *Oral and Maxillofacial Traumatology*, 2, Quintessence Books, 1986.
- [8] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.

- [9] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [10] P.G. Ciarlet y J.L. Lions, Edts: *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XII: Computational Models for the Human Body*, North Holland, 2004.
- [11] J. Cobo, A. Sicilia, J. Argüelles, D. Suárez y M. Vijande. Initial stress induced in periodontal tissue with diverse degree of bone loss by an orthodontic force. Three-dimensional analysis by means of the finite element method. *American Journal Orthodontics Dentofacial Orthopedics*, 104:448-454, 1993.
- [12] S.D. Cook, A.M. Weinstein y J.J. Klaswitter. Parameter affecting the stress distribution around LTI carbon and aluminium oxide dental implants. *Journal of Biomedical and Material Research*, 16:875-885, 1982.
- [13] S.C. Cowin. Structural adaptation of bones. *Applied Mechanics Reviews*, 43(5): 126-133, 1990.
- [14] S.C. Cowin y D.H. Hegedus. Bone remodelling I: theory of adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 6:313-326, 1976.
- [15] S.C. Cowin y R.R. Nachlinger. Bone remodeling III: uniqueness and stability. *Journal of Elasticity*, 8:285-295, 1978.
- [16] M. Doblare, J.M. García y L. Gracia. Un modelo de remodelación ósea interna basado en los principios de la mecánica del daño. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 16:513-551, 2000.
- [17] G. Duvaut y J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [18] J.R. Fdez-García, M. Burguera y J.M. Viaño: FEM simulation of location and reduction of mandibular fractures. En *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering-3*, J. Middleton, M.L. Jones, N.G. Shrive y G.N Pande Edts. Gordon and Breach Science Publishers, pp. 649-654, 2001.
- [19] J.R. Fernández, M. Gallas, M. Burguera y J. M. Viaño. A three-dimensional numerical simulation of mandible fracture reduction with screwed miniplates. *Journal of Biomechanics*, 36:329-337, 2003.
- [20] M.A. Fernández. *Resolución numérica de modelos de elasticidad adaptativa en formación de huesos*. Tesina de Licenciatura. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela. 1999.
- [21] J.C. Ferre, L. Legoux, J.L. Helary, F. Albugues, C. Lefloch, J. Boutheyre, J.P. Lumineau, C. Chevalier, A. Y. Le Cloarec, E. Orio, F. Marquet y J.Y. Barbin. Study of the deformations of the isolated mandible under

- static constraints by simulation on a physics mathematical model. *Anatomy Clinical*, 7:183-192, 1985.
- [22] M. Gallas y J.R. Fernández, A 3d numerical simulation of the human mandible in standard trauma situations, *Journal of Craneo Maxillofacial Surgery*, 32(5):303-307, 2004.
- [23] M. Gallas, M.T. Abeleira, J.R. Fernández y M. Burguera. A three-dimensional numerical simulation of dental implants as orthodontic anchorage. *European Journal of Orthodontics*, 27:12-16, 2005.
- [24] P.-L. Georges. *Automatic mesh generation: applications to finite element methods*. John Wiley, 1991.
- [25] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [26] R. Glowinski, J. L. Lions y R. Tremolières. *Analyse numerique des inequations variationnelles*. Dunod-Bordas, Paris, 1976.
- [27] D.H. Hegedus y S.C. Cowin. Bone remodeling II: small strain adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 6:337-352, 1976.
- [28] J. Haslinger, I. Hlavacek y J. Necas. Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. En *Handbook of Numerical Analysis*. IV:313-477, North Holland, Elsevier Science, 1996.
- [29] M.L. Jones, J. Hickman, J. Middleton, J. Knox y C. Volp. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject. *Journal of Orthodontics*. Vol.28, 29-38, 2001.
- [30] L. Kachanov. *Foundations of the theory of plasticity*. North-Holland, 1971.
- [31] J.H. Keyak y H.B. Skinner. Three-dimensional finite element modelling of bone: effects of element size. *Journal of Biomedical Engineering*, 14:483-489, 1992.
- [32] T.W.P. Koriath, D.P. Romilly y A.G. Hanna. Three dimensional finite element stress analysis of the dentate human mandible. *American Journal Physics Anthropology*, 80:429-445, 1992.
- [33] E. Krüger. Mandibular fractures, 1. Classification, Diagnosis, and Fundamentals of Treatment. *Oral and Maxillofacial Traumatology*, 1, Quintessence Books, 1986.
- [34] J. Lemaitre y J.L. Chaboche. *Mechanics of materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [35] N.J.P. MacGuinnes, A.W. Wilson, M.L. Jones y J. Middleton. A stress analysis of the periodontal ligament under various orthodontic loadings. *European Journal of Orthodontics*, 13:231-242, 1991.

- [36] F. X. Michelet, J. Deymes y B. Dessus. Osteosynthesis with miniaturized screwed plates in maxillofacial surgery. *Journal of Maxillo Facial Surgery*, 1-79, 1973.
- [37] J. Middleton, M.L. Jones, N.G. Shrive y G.N Pande Edts: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering-3*. Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
- [38] J. Monnier y L. Trabuco. An existence and uniqueness result in bone remodeling theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151:539-544, 1998.
- [39] V. J. Oikarinen y M. Malmström. Jaw fractures. A roentgenological and statistical analysis of 1284 cases including a special study of the fracture lines in the mandible drawn from orthopantomograms in 660 cases. *Suom Hammaslääk*, Toim, 65-95, 1969.
- [40] P.D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in mechanics and applications*. Birkhäuser. London, 1985.
- [41] P.D. Panagiotopoulos y D. Talaslidis. A linear finite element approach to the solution of the variational inequalities arising in contact problems of structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1505-1520, 1982.
- [42] C.G. Provatidis. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament. *Medical Engineering and Physics*, 22:359-370, 2000.
- [43] P. Raviart y J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [44] W. Schroeder, J. Zarge y W. Lorensen. Decimation of triangle meshes. *Computer Graphics*, 25(3), 1992.
- [45] K. Tanne, Lu Chieh-li, E. Tanaka y M. Sakodu. Biomechanical changes of the mandible from orthopaedic chin cup force studied in a three-dimensional finite element model. *European Journal of Orthodontics*, 15:527-533, 1993.
- [46] K. Tanne, M. Sakuda y C. Burstone. Three-dimensional finite element analysis for stress in the periodontal tissue by orthodontic forces. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 92:499-505, 1987.
- [47] K. Tanne, T. Nagataki, Y. Inoue, M. Sakuda y C. Burstone. Patterns of the initial tooth displacements associated with various root lengths and alveolar bone heights. *Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 100:66-71, 1991.

- [48] J. M. Viaño. Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Formulación física y matemática de los problemas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 1:79-93, 1985.
- [49] J. M. Viaño. Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Aproximación y resolución de los problemas discretos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2:63-86, 1986.
- [50] J. M. Viaño, M. Burguera y J.R. Fernández. Three-dimensional finite element simulation of some mechanical processes in the human mandible. *Publicaciones del Centro Internacional de Matemática*, 6, Coimbra, 1999.
- [51] J. M. Viaño, M. Burguera y J.R. Fernández. A 3d-fem simulation of highest stress lines in mandible fractures by elastic impact. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 3:273-285, 1999.
- [52] H. Weinans, R. Huiskes y H.J. Grootenboer. The behavior of adaptive bone-remodeling simulation models. *Journal of Biomechanics*, 25: 1425-1441, 1992.



## ¿Fué Arquímedes matemático aplicado?

JOSÉ M. VEGAS

Universidad Complutense de Madrid

### 1 Introducción.

En el número 32 de este Boletín, J. I. Díaz hizo una semblanza muy completa de una de las cabezas “matemáticamente mejor amuebladas” del siglo XX: John von Neumann. Entre otras muchas cosas, quedaba claro en ese artículo que tanto matemáticos *puros* como *aplicados* reivindicaban como “suyo” al gran matemático húngaro, y que ambas *facciones* tenían razón en sus argumentos.

Vamos ahora a dirigirnos al otro extremo de la línea del tiempo, a la antigüedad griega, y analizar a un personaje tan genial y versátil como von Neumann: Arquímedes de Siracusa. Sin entrar a fondo en la importante cuestión de la -discutible- vigencia de la dicotomía *puro-aplicado* en esta remota época, intentaremos demostrar que, como a von Neumann, le cuadran bien las dos denominaciones. Eso sí, lo haremos en un estilo más bien informal y sin pretensión de agotar el tema, que da mucho de sí.

La gran figura de Arquímedes llena buena parte de la historia de las matemáticas. Fue “el Maestro” ya en su época<sup>1</sup>, como Aristóteles era “el Filósofo” en la suya, y, cuando decayó la geometría griega, las sucesivas traducciones de sus obras mantuvieron viva la llama de su obra, mostrando a los matemáticos, árabes primero y europeos después, un mundo elaboradísimo de figuras geométricas de complejas propiedades demostradas mediante series de proposiciones de un nivel matemático y un rigor inigualado hasta entonces, con las únicas excepciones, quizá, de Euclides y Apolonio.

En la Baja Edad Media y el Renacimiento, Arquímedes volvió así a ser el *modelo* de matemático genial, capaz de las mayores proezas matemáticas, tanto en la concepción, variedad y selección de la temática como en el rigor y concisión en las demostraciones.

Pero, aparte de ser el más grande matemático (a secas) de la antigüedad, ¿fue Arquímedes también un matemático aplicado?

La metodología que proponemos en este artículo para abordar esta cuestión es muy sencilla: pongamos de lado las muchas definiciones y teorías que se pueden dar sobre la matemática aplicada, y limitémonos a considerar algunos

---

<sup>1</sup>Aunque la terminología específica “el Geómetra” se aplicó más bien a Apolonio de Perga, unos veinte años más joven que Arquímedes y autor del tratado *Las Cónicas*, sólo comparable en virtuosismo a las obras de Arquímedes.

de los estereotipos a los que nos vemos sometidos los “aplicados” por parte de algunos de nuestros colegas (y, sin embargo, amigos) del área “pura” del asunto. Esperamos convencer a los lectores de que, además de matemático “puro” genial, la figura de Arquímedes se ajusta bastante bien a algunos de dichos estereotipos, de forma que podremos concluir que nuestro protagonista fue, quizá a la fuerza, *un matemático aplicado igualmente genial*.

Sin pretensiones de ser exhaustivos, fijémonos solamente en tres de estos rasgos supuestamente *vox populi* del matemático aplicado:

1. Afición por la práctica del “ojímetro”, incluso sin llevar la regla de cálculo encima (¡otros tiempos!). Poca pasión por la exactitud en los cálculos.
2. Uso frecuentemente acríptico de “indivisibles”, “rodajas infinitesimales”, “volúmenes elementales” y demás *freaks* del animalario infinitesimal.
3. Afición por la modelización y otras formas de “criptoingenierismo”.

Analizaremos, por orden, tres obras de Arquímedes en las que nuestro protagonista practica estas actividades sin complejo aparente (con una excepción), y concluiremos que, para bien o para mal, la tipificación de “matemático aplicado” se le puede aplicar perfectamente a Arquímedes.

Buena parte de la información que tenemos acerca de la vida y actitudes de Arquímedes procede de Plutarco, como parte del capítulo *Vida de Marcelo* de sus famosas *Vidas Paralelas*:

*”... sus palancas, poleas y catapultas fueron naderías en comparación con los bellos teoremas que descubrió. [...] Arquímedes poseía un espíritu tan elevado, un alma tan profunda y con tales tesoros de conocimientos científicos que, aunque estos inventos le han traído hasta ahora el renombre de una gran sagacidad sobrehumana, no se ha dignado dejarnos ningún comentario o escrito sobre estas materias; sino que repudiando como sórdido e innoble el mundo de la ingeniería y toda clase de técnica que sólo sirve para mero uso y provecho, situó sus afectos y ambiciones en aquellas especulaciones más puras en las que no puede haber ninguna referencia a las vulgares necesidades de la vida”*

¿No nos dice esta cita lo contrario de lo que queremos probar? ¿Estamos ante un típico *purista* que desprecia sus propias obras en cuanto éstas sirvan para mejorar la condición humana, o simplemente para evitar que invadan y saqueen su ciudad? ¿Es ésta la única interpretación de la frase de Plutarco?

Las 27 obras de Arquímedes que nos han llegado abordan cuestiones muy diversas, sintetizadas perfectamente por E.T. Bell ([2]):

*“Inventó métodos generales para encontrar las áreas de figuras planas curvilíneas y los volúmenes limitados por superficies curvas, y aplicó estos métodos a muchos casos especiales, incluyendo el círculo, la esfera, segmentos de una parábola, el área limitada entre dos radios y dos pasos sucesivos*

*de una espiral, segmentos de esfera y segmentos de superficies engendradas por la revolución de rectángulos (cilindros), triángulos (conos), parábolas (paraboloides), hipérbolas (hiperboloides) y elipses (esferoides), alrededor de sus ejes principales. Ideó un método para calcular  $\pi$  (la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro) y fijó su valor entre  $3 \frac{1}{7}$  y  $3 \frac{10}{71}$ "*

pero...

*también encontró métodos para hallar las **raíces cuadradas** aproximadas, lo que muestra que se anticipó a la invención hecha por los hindúes, respecto a las fracciones continuas periódicas. En Aritmética sobrepasó extraordinariamente la incapacidad del método no científico griego de simbolizar los números al escribir o incluso escribir grandes números, e **inventó un sistema de numeración** capaz de tratar números tan grandes como se deseara. En mecánica estableció algunos de los postulados fundamentales, descubrió las **leyes de la palanca**, y aplicó sus principios mecánicos para calcular las áreas y centros de gravedad de diversas superficies planas y sólidos de diversas formas. **Creó toda la ciencia de la hidrostática**, y la aplicó para encontrar las posiciones de reposo y de equilibrio de cuerpos flotantes de diversos tipos.*

Aunque hay algunas exageraciones e imprecisiones en este párrafo, escrito hace ya hace mucho tiempo, es importante reseñar que un historiador tan importante e influyente como E.T. Bell haya dedicado casi el mismo espacio a las contribuciones estrictamente geométricas que a las que podrían contabilizar como “aplicadas”, junto con otras simplemente “prácticas”.

El método empleado en las obras geométricas es el que había consagrado ya Euclides medio siglo antes: empieza por las definiciones (si se necesitan), sigue con los postulados (si se necesitan) y empieza la faena con sus famosos encadenamientos de lemas y proposiciones que conducen a los resultados. A diferencia de Euclides, bien parco en explicaciones, Arquímedes enuncia en el prólogo de cada libro (generalmente dedicado a alguno de sus amigos de Alejandría, o a algún político importante) los resultados principales que se contienen en la obra, incluyendo además comentarios sobre el trabajo de otros matemáticos sobre la cuestión tratada. Estas indicaciones nos son utilísimas para rellenar las muchas lagunas que sigue habiendo en la historia de la matemática griega

Hay también un par de obras en las que Arquímedes, siguiendo el método axiomático, trata (matemáticamente) objetos físicos: la palanca o balanza, y los cuerpos sumergidos en fluidos. De ellos trataremos después.

## 2 El Arenario

Empecemos por una de las obras más curiosas de Arquímedes y de toda la matemática universal. El *Arenario* está dedicado a su amigo Gelón, rey de Siracusa, y afirma en su prólogo (lo que es propiamente la dedicatoria dirigida a Gelón) que el número de granos de arena de las playas de Siracusa, y de las del mundo entero, es *finito*, en contra de lo que afirman algunos (no especifica

quiénes, pero debía ser una opinión bastante generalizada en su época), que insisten en que ha de ser *infinito*. Dice Arquímedes [7]):

“Creen algunos, oh rey Gelón, que el número de granos de arena es **infinito**; mas no ya el de los que rodean a Siracusa y cubren las distintas playas de Tinacria [Sicilia], sino el de las que puede haber en todas las regiones habitadas y desiertas, está lejos de serlo. Hay otros que juzgan **no ser infinito su número, pero dicen que es imposible asignarle ninguno determinado que lo exprese**. ¿Qué juzgarían los que tal opinan, al considerar semejante masa de arenas, si imaginaran que la Tierra entera, levantada hasta la cumbre de los más altos montes, con los mares y todas sus cavidades, se hallase repleta de ellas, y todavía pusieran la consideración en el conjunto de una multitud de moldes iguales a la supuesta? Ciertamente que no vacilarían en afirmar que el número de granos de arena contenidos en dicho conjunto habría de exceder con mucho, y en gran manera, a todo número”.

Cuesta trabajo ponerse en la mentalidad de la época, y nos puede parecer extraño que un griego “cultivado” pudiera llegar a tal conclusión. Es posible que la intención de este libro tenga que ver con la cuestión “infinitesimal”: Arquímedes se vio en la obligación de convencer a su generación de que, por muy pequeños que sean los granos de arena y muy grande que sea el universo, sólo puede haber un *número finito* de objetos pequeños en el grande. La versión geométrica de este enunciado se conoce actualmente con el nombre de *Axioma de Eudoxo-Aquímedes*, y, en términos analíticos se expresa diciendo que si  $0 < a < b$ , existe un entero  $N$  tal que  $Na > b$ . Como es bien conocido, ésta es la propiedad que *impide* la existencia de magnitudes infinitesimales, y permite el cálculo de áreas y volúmenes por el método de exhaustión<sup>2</sup>.

Por otra parte, la forma de respuesta de Arquímedes a esta cuestión da a entender que tiene un diagnóstico, al menos parcial, de la “enfermedad”: quizá el problema sea que el número  $N$  es tan enorme que no es “expresable” de ninguna forma dentro del sistema griego de numeración (y, en términos prácticos, en el nuestro). Este problema es mucho más serio y menos “práctico” de lo que pudiera parecer, pues no olvidemos que la exclusión de los irracionales del universo numérico griego se debe a su *inexpresabilidad*, que es lo que literalmente significa “álogon”, “irracional”. Y Arquímedes aborda la solución de este problema como sólo él sería capaz de hacer: *¿No se trata de un problema de expresión? Pues inventemos una forma nueva de expresión*. No está mal, ¿verdad? Pero... ¿puede considerarse “digna” esta aventura matemática cuya única utilidad es de tipo práctico, cuando Plutarco nos dice que nada práctico<sup>3</sup> le parecía digno a Ar? Entonces, ¿por qué y para qué escribió este libro?

<sup>2</sup>A través del llamado “lema de exhaustión” o “de Eudoxo”, que afirma, en términos modernos, que la sucesión  $1/2^n$  tiende a 0. El “axioma de Eudoxo-Aquímedes” equivale a decir que  $1/n$  tiende a 0.

<sup>3</sup>Peor aún, las cuestiones dedicadas a los cálculos numéricos eran de las más despreciadas por Platón, que distinguía entre la *logística*, o estudio de las operaciones ente números, y digna sólo para comerciantes y otras clases inferiores, y la *aritmética*, que hoy llamamos *teoría de números*, la única que debe estudiar un *gentleman*.

La obra tiene dos partes: En la segunda, introduce Arquímedes su sistema de *octadas* basadas en el uso de  $10^8$  como unidad de numeración, mostrando así al lector de que los números grandes deben tratarse mediante unidades grandes, y que no debe asustarnos tener que usar muchas de éstas para describir el número que necesitemos. Es un poco larga de explicar, y remitimos al lector, por ejemplo, a <http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/ideas/reckoner.shtml>.

En la primera parte, lo que más nos interesa aquí, Arquímedes procede paso a paso para convencer a un amigo “de letras” (“de ciencias” no parecía, desde luego) de la falsedad de la postura “infinitista”, obteniendo diversas *estimaciones superiores* del número de granos de arena de todas las playas de la Tierra (incluyendo la *terra incognita* de cuya existencia sabían los geógrafos griegos).

En la obtención de esas estimaciones aparece una mención muy interesante sobre el “universo heliocéntrico de Aristarco”[7]:

*“Aristarco de Samos publicó un libro basado en ciertas hipótesis y en el que parece [...] que **el universo es muchas veces mayor que el que ahora recibe ese nombre**. Sus hipótesis son que las estrellas fijas y el Sol permanecen inmóviles, que la tierra gira alrededor del Sol siguiendo la circunferencia de un círculo con el Sol en medio de la órbita, y que la esfera de las estrellas fijas también con el Sol como centro, es tan grande que el círculo en el que supone que la tierra gira guarda la misma proporción a la distancia de las estrellas fijas que el centro de la esfera a su superficie”.*

Esta cita de Arquímedes es de las pocas referencias que tenemos de aquel ilustre antecesor (310-230 a.C.) de Copérnico, y sin ella quizá hubiésemos desconocido su propia existencia, ya que, por sus muchas dificultades teóricas, no fue aceptado por los astrónomos griegos<sup>4</sup>. Este universo es el que adopta Arquímedes como “máximo” posible, pues es, en efecto, mucho mayor que los modelos geocéntricos aceptados en aquella época en el mundo helénico.

Vayamos con las estimaciones:

- En una semilla de amapola caben a lo sumo 10.000 granos de arena.
- La semilla de amapola es una esfera cuyo diámetro la 40-ava parte del dedo pulgar.
- Un estadio (la medida habitual de distancias, aproximadamente igual a 150 metros) contiene no más de 10.000 dedos.
- El diámetro de la tierra no es mayor de 100 miríadas = 1 millón de estadios. (En realidad, Arquímedes afirma que el *perímetro* de la Tierra es menor de

---

<sup>4</sup>“La proposición de una Tierra en movimiento era descabellada y contraria a las observaciones; no se sentía el movimiento de la Tierra, ni se generaban los fortísimos vientos que se esperarían si girara; los objetos lanzados verticalmente hacia arriba volvían a caer en el mismo lugar sin ser dejados atrás por el desplazamiento del suelo, y la posición de las estrellas no cambiaba como era de esperarse que pasara si la Tierra recorriera una gran órbita alrededor del Sol”. (Véase [http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/38/html/sec\\_7.html](http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/38/html/sec_7.html)).

3 millones de estadios, lo cual implica evidentemente lo anterior. Además, la estimación habitual en su época era de unos 300.000 estadios, con lo cual Arquímedes está dando un margen de seguridad realmente grande).

- El diámetro del sol es unas 30 veces el de la luna, y no mayor. (De nuevo, Arquímedes da un buen margen por encima de la estimación mayor existente, la de Aristarco (19 veces), renunciando incluso a la obtenida por su propio padre, el astrónomo Fidias, que era de 12 veces).
- El ángulo visual del sol está entre  $1/164$  y  $1/200$  del ángulo recto. Arquímedes parte aquí de una observación “a ojo” de Aristarco, y la mejora mediante un aparato diseñado por él, consistente en una regla larga en cuyo extremo se fija un pequeño cilindro o disco, enfocando al sol en el crepúsculo y deslizando el cilindro para que oculte exactamente el disco solar.
- El diámetro del sol es mayor que el lado del kilígono (polígono de mil lados) inscrito en la esfera del Universo. Esta es la parte más “geométrica” del trabajo.
- El diámetro del Universo es menor de 10.000 veces el diámetro de la Tierra, y, por tanto, menor de 10.000 millones de estadios.

De esta manera, Arquímedes calcula la relación entre los volúmenes del grano de arena y de la esfera del Universo, llegando a la conclusión de que el número de granos de arena que llenarían este universo es inferior a  $10^{63}$ . En cualquier caso, es *finito*.

Aun sin llegar a semejantes niveles de virtuosismo, es este dominio del análisis “grosso modo” el que todo ingeniero, todo científico, es más, todo matemático debería poseer, aunque sólo fuese para disponer de un “semáforo rojo” que detecte meteduras de pata de gran calibre en los cálculos. Como decía el gran economista E. F. Schumacher en su libro *Small is Beautiful: A Study in Economics as if People Mattered*, (Harper & Row, 1973) “*Why use the computer if you can make the calculation on the back of an envelope?*”. En otras palabras, estos son los tipos de cálculos “en el dorso de un sobre usado” (con o sin calculadora) que todo científico ejerciente debería saber efectuar para hacerse idea del *orden de magnitud* de las cifras con las que trata a diario.

Volviendo al tema que nos ocupa, dado que los griegos no disponían de ningún procedimiento razonable para expresar números tan gigantescos, Arquímedes procedió a inventar el suyo propio, que es esencialmente equivalente a lo que hoy llamamos “notación científica”. Como indica Gauss, “¡a qué alturas no habría llegado la ciencia si Arquímedes hubiese descubierto el sistema decimal!”. Y, efectivamente, le faltó poco para ello. Pero se *ensució* las manos tratando con números concretos, y encima para *contar*, no para *filosofar*... ¡si Platón levantara la cabeza!

### 3 El Método

Por si este pecado de lesa platonismo fuera poco, tampoco falta el Arquímedes practicante de argumentos infinitesimales o, más bien, de *indivisibles*. Pareció mentira, efectivamente, cuando, en 1906, el gran historiador y filólogo danés Heiberg tuvo noticia de un *palimpsesto*<sup>5</sup> propiedad de la Iglesia del Santo Sepulcro de Jerusalén, en el cual, una vez borrado el texto superficial, aparecieron varias obras de Arquímedes. Una de las cuales era desconocida, y se llamaba *El Método*. Es fácil imaginar la excitación que ello produjo en el mundo matemático, máxime cuando se descubrieron en dicha obra prácticas algo discutibles (por no decir *ilegales*) por parte del *Maestro*.

La obra está dedicada a su amigo Eratóstenes de Cirene<sup>6</sup>, y en ella presenta Arquímedes una idea más o menos equivalente a la que, dieciocho siglos más tarde, constituirá el *principio de Cavalieri*. De la misma manera que el gran geómetra milanés deduce la igualdad de dos áreas o volúmenes como consecuencia de la igualdad de sus secciones paralelas a un plano o recta dados, Arquímedes considera a las figuras planas o sólidas como compuestas de líneas o secciones verticales, y, basándose en la *ley de la palanca*, enuncia un “principio mecánico”: “Si dos figuras son tales que cada sección vertical de una de ellas, suspendida desde la posición en la que se halla, equilibra una sección de la otra figura, suspendida en su posición, entonces las dos figuras tienen el mismo peso” (es decir, la misma área o el mismo volumen). En otras ocasiones, Arquímedes comprueba que cada sección de la primera figura, en su sitio, equilibra a una de la segunda, pero no en su sitio, sino suspendida en el centro de gravedad. En tal caso, usando la teoría de la palanca, la segunda figura puede suponerse “concentrada” en su centro de gravedad, y por tanto las dos figuras tendrían la misma medida (área o volumen).

Usualmente las secciones son figuras “sencillas” (triángulos, segmentos) de pesos fáciles de determinar, de forma que la comprobación de la fórmula anterior es, en principio, directa. Lo que supone un “salto en el vacío” es la *agregación* o *integración* de las secciones y el salto dimensional de pasar de longitudes a áreas o de áreas a volúmenes. A diferencia de sus sucesores de posteriores milenios, Arquímedes reconoce la dificultad, y confiesa a Eratóstenes en el prólogo que ha descubierto un método

*“según el cual será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geoméricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo.”*

<sup>5</sup>Pergamino en el que aparece un texto escrito encima de otro, previamente borrado. Véase <http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/palimpsest.html>

<sup>6</sup>Encargado de la famosa Biblioteca de Alejandría, un par de años menor que Arquímedes y llamado “Beta” por sus amigos (?). “Alfa” era, por supuesto, Arquímedes.

Es éste uno de los pocos casos<sup>7</sup> en que un investigador nos cuenta cómo se le ocurrió alguno de sus resultados. Gauss y Newton están merecidamente en el panteón matemático junto con Arquímedes por poseer un talento comparable al de éste, pero no, desde luego, por molestarse en explicar al pobre lector su *tren de razonamiento*...

Los *lemas previos* con que comienza la obra juegan el papel de Postulados, aunque están demostrados en otras obras de Arquímedes, y tratan de diversas propiedades de los centros de gravedad de figuras sencillas. Curiosamente, la propia definición de centro de gravedad no aparece, razón por la cual (y por citas de otros autores) se da por seguro que debe faltarnos algún libro previo de Arquímedes con el concepto, propiedades básicas y la obtención de centros de gravedad de figuras regulares.

Para ilustrar cómo se aplica el "método mecánico", veamos el ejemplo más sencillo: el cálculo del área del *segmento de parábola*, la figura limitada por una parábola y una secante a la misma (la "base"). En la *Cuadratura de la parábola* Arquímedes ya la había obtenido por el método de exhaustión<sup>8</sup>, creado por Eudoxo y consagrado por Euclides como "procedimiento oficial" en los cálculos de áreas y volúmenes de los libros XI al XIII de los *Elementos de Geometría*. En *El Método*, Arquímedes da la "demostración" mecánica siguiente:

Con las simplificaciones y actualizaciones oportunas para facilitar la lectura, consideremos, por una parte, el segmento de parábola  $y = px(1-x)$  comprendido entre la curva y el eje  $Ox$ , con  $x$  entre 0 y 1, y, por otra, el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, p)$ , formado por los ejes y la tangente a la parábola en el punto  $(1, 0)$ , que tiene por ecuación  $y = p(1-x)$ , expresión a la que llamaremos  $z$ .

Para cada  $x$  entre 0 y 1, el segmento vertical  $z = p(1-x)$  del triángulo, *en su sitio*, es decir, apoyado en el punto  $(x, 0)$ , equilibra exactamente al segmento vertical  $y = px(1-x)$  de la parábola, pero *no en su sitio*, sino apoyado en el punto  $(-1, 0)$ . Obsérvese, en efecto, que el *momento* que ejerce  $z = p(1-x)$  en la vertical de  $(x, 0)$ , en valor absoluto, es  $zx = px(1-x) = y = y \times 1$ , que es exactamente el momento (en valor absoluto) de  $y$  sobre la vertical de  $(-1, 0)$ .

Consideremos ahora la "unión" o "integración" de todos los segmentos verticales del triángulo: como cada uno ha mantenido su posición, el peso de todos ellos puede concentrarse en el centro de gravedad del triángulo, que, como ya había obtenido Arquímedes antes, tiene abscisa  $1/3$ . Del otro lado de la balanza, como todos los segmentos verticales de la parábola se han desplazado al punto  $(-1, 0)$ , actúan todos ellos conjuntamente en este lugar.

Por tanto, el área del triángulo, a  $1/3$  de distancia del origen, equilibra al

---

<sup>7</sup>Leibniz sí lo intentaba repetidamente en sus cartas, pero no es fácil seguir sus explicaciones.

<sup>8</sup>Usando, por cierto, una "exhaustión" *de verdad*: aquí la figura curvilínea no aparece como "límite" de polígonos cada vez más aproximados (que es lo habitual), sino como una *unión numerable de triángulos de interiores disjuntos* que realmente cubren o *agotan* (*exhaustio* = agotamiento) el segmento parabólico, obteniendo el área como la suma de la serie de las áreas de dichos triángulos; lo que, curiosamente, resulta ser lo más fácil, pues es geométrica (de razón  $1/4$ ). Es la única vez en la antigüedad (y probablemente después) en que el desafortunado término *exhaustio*, introducido en el siglo XVII, tiene sentido literal.

segmento de parábola concentrado en  $(-1, 0)$ . Por la ley de la palanca, el área del segmento de parábola es igual a  $1/3$  del área del triángulo; y como ésta es  $p/2$ , resulta, en total,  $p/6$ , que equivale al resultado obtenido por el método de exhaustión<sup>9</sup>.

Dos observaciones: En primer lugar, es inmediato comprobar que

$$\int_0^1 px(1-x) dx = \frac{p}{6}$$

En general, si sustituimos el triángulo por la figura limitada por  $y = f(x)$  para  $x$  entre 0 y 1, y reflejamos con respecto al eje  $Oy$ , el mismo “razonamiento de indivisibles” nos llevaría a la fórmula:

$$\int_0^1 xf(x) dx = \bar{x} \cdot \int_0^1 f(x) dx$$

donde  $\bar{x}$  es la abscisa del centro de gravedad. Esta es la forma que usamos actualmente para obtener (e incluso *definir*) el centro de gravedad, que suele ser la incógnita del problema, al contrario que en el caso de Arquímedes. El libro de Edwards [5] contiene una discusión muy interesante sobre este tema (y, en general, todo lo que tiene que ver con Arquímedes), desde un punto de vista actual.

Quizá lo más interesante, bajo el punto de vista de este artículo, de *El Método* es el reconocimiento que hace el propio Arquímedes de su incapacidad de *demonstrar* rigurosamente la validez del argumento. La frase antes mencionada, “*la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración*”, ha pasado a la historia y muestra bien a las claras la dificultad insalvable de elaborar una teoría “atómica” o “infinitesimal” coherente de las magnitudes geométricas. La moraleja de Arquímedes es que, aunque poco riguroso, le ha dado resultados correctos; es, pues, un método *heurístico* que conviene conocer. Este punto de vista es muy diferente de los posteriores de Kepler y Cavalieri, entre otros, que creían en el *valor probatorio* de los indivisibles, aunque con grandes dudas. Y el *método* se ve libre, además, de críticas como la efectuada por Guldin a Cavalieri<sup>10</sup>, que resultaría inaplicable a las balanzas de Arquímedes, pues es éstas no sólo influye la longitud o área de las secciones paralelas, sino su *momento*.

<sup>9</sup>En realidad, la fórmula de Arquímedes dice que el área del segmento de parábola es  $4/3$  del área del triángulo de la misma base y la misma altura, que, en nuestro caso, sería el de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1/2, p/4)$ . El propio Arquímedes hace el comentario de que el área de este triángulo es la cuarta parte de la del triángulo grande, formado por la base, la tangente y la paralela a la directriz de la parábola.

<sup>10</sup>Guldin comentó que, según el método de Cavalieri, dos triángulos de la misma altura *con bases diferentes* siempre tendrían la misma área, pues a cada segmento paralelo a la base del primero se le puede asociar biunívocamente uno de la misma longitud en el segundo. A ello contestó Cavalieri de forma confusa, afirmando que los indivisibles debían estar todos igualmente espaciados, “como las páginas de un libro”. En cualquier caso, la crítica de Guldin movió a Cavalieri a escribir en 1635 su *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* que tanta influencia posterior tuvo, aunque sólo sea, en palabras de A. Koyré, porque “*la obra de Buenaventura Cavalieri goza entre los historiadores del pensamiento una bien establecida reputación de oscuridad a toda prueba*”

En fin, la actitud de Arquímedes queda muy bien reflejada en sus propias palabras al final del prólogo del libro:

*“Como el teorema que voy a publicar ahora lo descubrí de la misma manera que los anteriores, he creído necesario exponer el método [...] porque no se crea que he dicho palabras vanas y porque estoy igualmente persuadido de que haré un no pequeño servicio a los matemáticos, pues comprendo que algunos de mis contemporáneos o sucesores podrá por medio del método descubrir otros teoremas que yo no he encontrado todavía”.*

Y, aunque no lo dice, quizá con la esperanza de que alguno de sus discípulos de Alejandría sea capaz de *fundamentar* el método mecánico... ¿quizá *Beta*?

#### 4 Equilibrio de los planos y cuerpos flotantes

Donde Arquímedes se muestra más próximo a lo que llamaríamos ahora *modelización* es en su tratado *Sobre el equilibrio de los planos* y, algo menos, en *Sobre los cuerpos flotantes*. En ambos libros se refleja, por primera vez en la historia, cómo los objetos geométricos pueden emplearse como *modelos de la realidad* en un sentido mucho más directo y preciso que la más bien metafórica “teoría de las ideas” de Platón. Arquímedes considera a las figuras geométricas como verdaderos *cuerpos planos* o *sólidos* dotados tanto de *forma* (geométrica) como de *materia*, que es la que les dota de *peso*, y que son susceptibles de suspenderse de los brazos de una *balanza ideal* (es decir, rígida, de peso nulo y sin rozamiento), o de sumergirse en un líquido también ideal.

Arquímedes basa su teoría general de la palanca en siete postulados, que afirman:

1. *Pesos iguales a distancias iguales del fulcro se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia.*
2. *Si a uno de dos pesos iguales se le añade algo, se rompe el equilibrio y el peso añadido queda más bajo.*
3. *Si se quita algo a uno de ellos, se rompe el equilibrio, y el peso no disminuido queda más bajo.*
4. *Los centros de gravedad de dos figuras que coinciden, también coinciden.*
5. *Los centros de gravedad de dos figuras desiguales, pero semejantes, están situados semejantemente.*
6. *Si dos pesos se equilibran a cierta distancia, otros dos pesos **equivalentes** a aquellos también se equilibran a la misma distancia.*
7. *El centro de gravedad de una figura cuya superficie es cóncava en la misma dirección esta en el interior de la figura.*

A diferencia de otros libros de Arquímedes, éste no contiene definiciones, ni siquiera la de centro de gravedad, como decíamos antes a propósito de *El Método*.

De esos postulados deduce Arquímedes la conocida ley general de la palanca: “*Dos pesos, conmensurables o no, se equilibran a distancias inversamente proporcionales a dichos pesos*”. Primero la demuestra en el caso conmensurable mediante un ingenioso argumento (muy discutido, como veremos después) que implica subdivisiones de pesos y desplazamientos de los mismos a lo largo de la balanza. Y efectúa después el paso a lo inconmensurable mediante un impecable razonamiento por doble reducción al absurdo en el más perfecto estilo de sus famosos “libros geométricos”.

En el resto de la obra determina Arquímedes el centro de gravedad de paralelogramos, triángulos y trapecios, y llega a determinar el centro de gravedad de un segmento de parábola y de un trapecio parabólico, determinación esta última que constituye una de las aplicaciones más brillantes del “álgebra geométrica” [6].

*Sobre los Cuerpos Flotantes*, en dos tomos, es la otra obra relativa a la Estática, y otra joya de virtuosismo geométrico, en la que Arquímedes introduce su famoso principio hidrostático. Postulando que “*la naturaleza del fluido es tal que estando sus partes dispuestas en forma uniforme y continua, las partes menos comprimidas son desplazadas por aquellas que lo están más, mientras que cada parte está comprimida por el fluido situado encima de ella según la dirección de la vertical, salvo que ese fluido esté encerrado en alguna parte o esté comprimido por alguna otra cosa*”, deduce con todo rigor las posiciones de equilibrio de los cuerpos sumergidos en un fluido, según que sean más o menos densos que éste. Concretamente, 1) *Un cuerpo tan pesado como el fluido y abandonado en él, se sumerge hasta que ninguna parte de él emerja de la superficie, pero sin descender más*; 2) *un cuerpo menos pesado que el fluido no se sumergirá totalmente en él al ser abandonado libremente, sino sólo hasta que el volumen de fluido desalojado por la parte sumergida tenga igual peso que el de todo el cuerpo. Si ese cuerpo es sumergido forzosamente recibirá un empuje hacia arriba igual a la diferencia entre el peso del fluido desalojado y su propio peso*; y 3) *un cuerpo más pesado que el fluido y abandonado en él se sumergirá hasta el fondo, y en el fluido el peso del cuerpo disminuirá de un peso igual al del fluido desalojado*.

En el segundo libro, Arquímedes postula que *en un fluido todos los cuerpos que se dirigen hacia arriba lo hacen según la vertical trazada por su centro de gravedad*. Es el primer caso conocido en que se analiza una fuerza cuyo punto de aplicación no es puntual, sino que es está *distribuido*, pues cada elemento del fluido ejerce su fuerza sobre el cuerpo. Con este postulado y un análisis geométrico que aún hoy causa asombro, obtiene Arquímedes las distintas posiciones de equilibrio de un paraboloide de revolución sumergido parcialmente en un fluido más denso [6].

Desde el punto de vista de lo que hoy llamaríamos “modelización”, *Sobre el equilibrio de los planos* ha sufrido diversos comentarios críticos a lo largo de la historia, cosa realmente única en la obra de Arquímedes. El problema es la

demostración de la ley de la palanca, considerada incompleta por algunos.

La esencia del argumento de Arquímedes es la siguiente: Consideremos dos pesos iguales a  $A$  suspendidos de los puntos  $P_d$  y  $P_i$  situados a derecha e izquierda del fulcro  $F$  de la balanza y a la misma distancia  $d$  de éste. Dividamos el peso de la derecha en dos partes iguales a  $A/2$ , y separémoslas una distancia  $d$  a ambos lados de  $P_d$ . Por los postulados de Arquímedes, se debe mantener el equilibrio<sup>11</sup>, y como el peso  $A/2$  de la izquierda está exactamente sobre el fulcro, su momento es nulo, y sólo actúa efectivamente el peso  $A/2$  de la derecha, que se halla ahora a distancia  $2d$  de  $F$ .

La crítica más dura a este argumento procede de Ernst Mach, físico e historiador de la física, que señala que la mera posibilidad de sustituir  $A$  por dos pesos  $A/2$  a distancias iguales ya implicaría directamente la ley de la palanca, sin ninguna demostración, tachando así de tautológico el argumento de Arquímedes. Como bien indica Dijksterhuis [4]), aquí hay en realidad *dos* críticas: la primera, relativa al carácter tautológico de la afirmación de Arquímedes, no se sostiene, pues, al fin y al cabo, toda demostración matemática es la explicitación de una tautología inherente a las premisas y postulados. La segunda tiene más calado, y hace referencia a la falta de algún postulado que garantice la posibilidad del proceso de subdivisión y desplazamiento de que hemos hablado. Aquí es donde la mayoría de los historiadores coinciden en señalar que es el extraño y aparentemente redundante Postulado VI el que debe interpretarse en el sentido siguiente: dos cuerpos con el mismo peso y el mismo centro de gravedad producen el mismo efecto (“momento”) si se suspenden del mismo lugar. Si aceptamos esto, lo que hace Arquímedes es *demostrar* que de ahí se deduce lógicamente la ley de proporcionalidad inversa de la distancia. En términos actuales, si  $f(d)$  representa el momento de un peso  $p$  a distancia  $d$  del fulcro, y se verifica la *ecuación funcional*

$$\frac{1}{2}f(d-h) + \frac{1}{2}f(d+h) = f(d)$$

para todo  $h$  suficientemente pequeño, entonces  $f$  es *lineal*. Según Mach, eso constituiría una tautología; de hecho, su comentario es un tanto apriorístico, pues expresa que *es imposible deducir una ley cuantitativa de propiedades cualitativas*, luego dicha ley *ha de estar* contenida, de alguna manera, en los postulados. Según Arquímedes, no hay tal tautología, la ley de la palanca es *consecuencia* de los postulados, y eso hay que demostrarlo. Lo más curioso de todo es que, si Arquímedes hubiera decidido incluir la ley cuantitativa como un *postulado* más, tendríamos sin duda la correspondiente crítica de Mach, esta vez dirigida a su *apriorismo* y *falta de experimentación*.

Con independencia de esta importante discusión (véase [4]), volvamos al punto de vista de este artículo, y analicemos en qué medida podría contabilizarse

---

<sup>11</sup>Este es el punto más conflictivo, pues el Postulado VI relativo a los *cuerpos equivalentes* no es fácil de interpretar a la luz del texto original. Precisamente para salvar la demostración de Arquímedes, se supone usualmente que la mencionada equivalencia significa que, mientras se mantengan el peso total y el centro de gravedad en el mismo sitio, la sustitución de un cuerpo por otro mantiene el equilibrio. Este es el caso de los pesos  $A/2$  a ambos lados de  $P_d$ .

esta obra como “aplicada”, tanto desde el punto de vista de entonces como del actual.

En primer lugar, hemos de tener en cuenta que el punto de vista de un físico de la antigüedad no es necesariamente el de un matemático “aplicado”. De hecho, el concepto de *física matemática* es ajeno al mundo griego antiguo, *con la única excepción de Arquímedes*<sup>12</sup>. En efecto, el punto de vista dominante, el de Aristóteles, autor de la primera obra con el título de “Física”, es que ésta debe ocuparse de los *cuerpos inanimados y sus propiedades*<sup>13</sup>; y como estos cuerpos son *reales*, han de ser necesariamente imperfectos y, por tanto, no cabe para ellos tratamiento matemático, que versa de *figuras perfectas e ideales*. Este punto de vista se mantendrá durante buena parte de la Edad Media europea, hasta los siglos XIV y XV, en que los grandes *calculatores* dan el *impulso cuantificador* fundamental que permite sacudirse el rígido esquema aristotélico y empezar, con bastante éxito, a preguntarse *¿cómo?* y *¿en qué medida?*, en vez (o además) del *¿por qué?* aristotélico. Será finalmente Galileo quien dé el espaldarazo definitivo a la *nueva ciencia*.

Ahora bien, volviendo a la obra de Arquímedes, es importante observar que los comentarios anteriores sobre la física en general no se aplican directamente a la *Estática*, que ocupó un lugar *intermedio* entre la “física pura” y las matemáticas. Un comentarista medieval (véase [3]) (probablemente de tendencia aristotélica) escribe que *“la ciencia de los pesos está subordinada tanto a la geometría como a la filosofía natural”*. Esta “excepción” se debe, sin duda, a que, por su propia definición, la estática trata del equilibrio, eliminando así el *problema del movimiento*, grave escollo en la filosofía griega desde sus orígenes, incluyendo al propio Aristóteles, que lo reduce a su definición metafísica de “paso de la potencia al acto”. Esto se ve muy bien en los postulados de Arquímedes, que, como postulados típicamente matemáticos, no se ocupan de las *causas* del equilibrio o desequilibrio de la balanza, sino de los *efectos* de los pesos suspendido de sus brazos [3]. Estos aspectos también se dan en los contenidos de *Sobre el equilibrio de los cuerpos flotantes*, que analizan las condiciones de equilibrio y desequilibrio de estos cuerpos, sin plantearse la cuestión ni las causas de su movimiento (en el caso de desequilibrio).

Quizá por esta situación especial de la estática dentro de la física, y por el tratamiento axiomático que da Arquímedes a sus investigaciones en este campo, se da la circunstancia de que, a lo largo de la historia, no todos los físicos han considerado a Arquímedes como “uno de los suyos”, a diferencia de Galileo, que siempre ha sido “el primer físico” en sentido estricto. Conviene recordar, sin embargo, que el propio Galileo cambió sus aficiones (médicas) iniciales por las matemáticas precisamente a raíz de su lectura de las obras de

<sup>12</sup>Podríamos añadir a Herón de Alejandría, un par de siglos posterior a Arquímedes, pero su punto de vista es mucho más práctico... y útil, dicho sea de paso. Su *Mecánica* fue libro de texto durante siglos. Figura usualmente considerada “menor” y bastante chapucera en sus libros, está actualmente mucho mejor considerada, como inventor genial y como matemático competente. Que diese las fórmulas (áreas, volúmenes, centros de gravedad...) sin demostración no significa que no las conociese, sino que no las consideraba parte necesaria de sus *manuales prácticos* (formularios).

<sup>13</sup>Es decir, aparte de la Biología, que estudiaría los procesos de *generación y corrupción*.

Arquímedes, convirtiéndose en admirador incondicional suyo; y no cabe duda de que le tenía como un *físico de verdad*. Y es que la postura de Galileo entronca perfectamente con la idea central de los trabajos físicos de Arquímedes: insistir en el carácter esencial de la *abstracción*, en el hecho de que las palancas y balanzas de sus libros son *ideales*, de peso nulo y sin rozamiento, y las esferas, elipsoides, paraboloides y demás sólidos sumergidos se suponen perfectamente regulares. Y que las propiedades que se deducen de estas hipótesis extremas, y que son las que *permiten el uso de la geometría*, representan *modelos* (en el sentido literal de la palabra) de sus propiedades reales como objetos del mundo real. Si a esto añadimos el carácter puramente *fenomenológico, no explicativo*, no preocupado por las *causas...* en una palabra, tan *antiaristotélico*, de los postulados arquimedianos de la palanca, no nos debe extrañar que, en época tan crítica de los planteamientos de Aristóteles como la de Galileo, causasen a éste y sus contemporáneos una enorme impresión.

De todas formas, hay una diferencia importante entre las *posturas* de Galileo y de Arquímedes respecto de la física en general. Galileo fue un consumado experimentador, autor de *experimentos cruciales* en la demostración de sus teorías. Para Galileo, la abstracción resultaba una consecuencia inevitable de la imprecisión inherente a cualquier proceso experimental, de forma que, creyendo Galileo como creía en un *principio universal* de simplicidad de las leyes de la naturaleza, las desviaciones de dicha simplicidad eran interpretadas como “error experimental”. En el caso de Arquímedes, no nos consta que llevase a cabo experimentos de forma sistemática, aunque algunos expertos consideran que las famosas máquinas de guerra que diseñó en la defensa de Siracusa contra el asedio romano precisaron, sin duda, de algo más que puras fórmulas. Aun así, las palabras de Plutarco parecen indicar que la experimentación no estaba en su “agenda” científica, quizá porque su mayor interés estaba en los aspectos matemáticos de la física, más que en la utilización de la geometría para entender mejor la física, como era el caso de Galileo.

Para terminar estas reflexiones sobre las actitudes de Arquímedes acerca de los aspectos “prácticos” de las matemáticas tal y como nos han llegado a través de la obra de Plutarco, vamos a citar algunos párrafos de un artículo muy interesante ([1]) de Michel Authier<sup>14</sup>, en el que defiende la idea de que la biografía de Plutarco no está pensada en términos de fidelidad histórica, sino que es más bien una “hagiografía” en la que Plutarco pretende plasmar *el canon del sabio*, la figura del *sabio perfecto*, por tanto, despistado, impráctico... y “teórico”, o sea: *platónico*, como el propio Plutarco.

Dice Authier:

[...] Lo real es el texto de Plutarco, es él quien organiza lo imaginario cuyo fundamento buscamos, no se trata pues de recrear una hipotética verdad histórica. [...] Cómo el uso que hace de sus conocimientos filosóficos y científicos le permite **trazar la imagen que desea de las relaciones entre la ciencia**

---

<sup>14</sup>Matemático, “ciberfilósofo”, sociólogo y, según confesión propia, “mal alumno especializado en aprobar exámenes”. Creador, con Pierre Lévy, de la teoría de los “árboles de conocimientos”, fue nombrado por la primera ministra francesa Edith Cresson (1991-93) para organizar la “Université de France” sobre esos principios.

**pura y las fuerzas materiales.** Cómo al ponderar los diversos episodios de la historia, las múltiples facetas de la producción de Arquímedes, ha podido, **mediante torsiones, reforzamientos y aflojamientos,** concluir en lo que se llamará el **canon del sabio**[...] Plutarco, por etapas sucesivas, va a elevarse hasta la esfera en la que sitúa a su héroe. Afirma ante todo que las invenciones militares no tienen importancia para el sabio, que no son más que divertimentos para hacer sensibles las nociones abstractas:

*“Este gran hombre no consideraba obras serias a sus propias invenciones. Eran para él simples juegos de geometría, que había ejecutado sólo por ceder a las instancias de Hierón [...]. Éste había comprometido a Arquímedes a **desviar el impulso de su alma de las cosas inteligibles hacia las corporales, y a hacer sus razonamientos inteligibles al vulgo**”*

[...] Pero **la excelencia de la geometría preconizada por Platón prohibía su utilización,** sin duda porque lo material no puede ser un medio de acceder a las leyes trascendentales de las matemáticas. [Según Plutarco,]

*“Platón se indigna y les reprocha enérgicamente (a Arquitas y Eudoxo que las utilizaron) que **hubieran perdido y arruinado la excelencia de la geometría,** que con ellos abandonaba las nociones abstractas e inteligibles para pasar a los objetos sensibles, y retornaba a la utilización de elementos materiales, que exigen un largo y basto trabajo manual [...] Es así como **la mecánica defenestrada fue separada de la geometría; y, largo tiempo despreciada por la filosofía, se convirtió en una de las artes militares**”*

[...] Vemos enunciada, probablemente por primera vez en un texto de historia, la **demasiado famosa separación, ciencia “pura”,** abstracta, inteligible y “técnica” sensible, instrumental, grosera. Es el primer grito de un conflicto que acompañará al desarrollo de la ciencia occidental. Condenada de esta forma, la mecánica caía en el ámbito del genio militar. Al señalar este problema, Plutarco pasa en algunas líneas del estrépito de las batallas a la música de las esferas. Su proyecto es persuadirnos de que quien oiga ésta dominará a aquél. ¡Las ideas dominan el mundo!... **Las invenciones técnicas no son sino aplicaciones de la geometría.** La teoría domina a la práctica, lo abstracto a lo concreto, el artista al ingeniero. Si el sabio debe mezclarse con los objetos materiales, no es sino por cortesía hacia el monarca y por la preocupación de educar a la masa...: es el monarca quien lo compromete en esas prácticas, “rebajándolo” a las trivialidades mecánicas... **El sabio de Siracusa debía estar en el lado bueno de la separación impuesta por Platón.** Allí está Arquímedes, disculpado y venerable, su ciencia no deriva del armamento sino que, por la voluntad del príncipe, el armamento deriva del poder. *El sabio no tiene nada que ver...*

[...] no hay elementos que no estén presentes en el cuadro pintado por Plutarco. En el retrato, aparece claramente la *voluntad del moralista.* Hay que hacer necesaria e irresistible la espiritualidad del mundo, imponer el espíritu en la cumbre de la jerarquía de los valores. Luego, *rechazando las necesidades de*

*la vida, haciendo el elogio de la belleza, definir un dominio en el que la ciencia demostrativa será su summum. En este último pedestal reposará la excelencia absoluta: Arquímedes y su obra matemática.*

Disculpe el lector esta larga cita de un artículo que merece la pena leer completo, pero el punto de vista que sostiene Authier explicaría muchos aspectos contradictorios de la figura de Arquímedes, tanto en la propia obra de Plutarco como en otras fuentes: despreocupado por las aplicaciones utilitarias pero corriendo en traje de Adán por Siracusa celebrando un descubrimiento eminentemente práctico y matemáticamente sin complicaciones; insensible a la vana fama humana que siempre le rodeó, pero presumiendo ante el rey Hierón (padre del Gelón del *Arenario*) de que “*con un punto de apoyo moveré el mundo*”; preocupado exclusivamente por alta geometría, pero sin dejar de construir una “esfera armilar” para visualizar los movimientos planetarios, o de inventar instrumentos de medición astronómica; trazando sus figuras en la arena haciendo caso omiso del soldado romano que va a matarlo, pero, según otras versiones, corriendo con sus esferas, escuadras y demás instrumentos astronómicos al encuentro del general invasor Marcelo. . .

Si aceptamos la hipótesis de Authier, si la biografía de Plutarco es la de un moralista que destaca sólo los aspectos que le interesa destacar, podremos encajar tantas facetas en un mismo genio, cuya versatilidad y amplitud de visión no se han repetido muchas veces en la historia.

## Referencias

- [1] Authier, M. [1989]: *Arquímedes: el canon del sabio*, en “Historia de las Ciencias”, ed. Michel Serres, Cátedra. pp. 119-149.
- [2] Bell, E.T. [1992]: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica.
- [3] Benvenuto, E. [1991]: *An Introduction to the History of Structural Mechanics*, Part I. Springer-Verlag.
- [4] Dijksterhuis, E.J. [1987]: *Archimedes*, Princeton University Press.
- [5] Edwards, C.H. [1979]: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag.
- [6] Rey Pastor, J. y Babini, J. [1985] *Historia de la Matemática I*, Gedisa.
- [7] Vera, F. [1970]: *Científicos griegos*, vol. II. Aguilar.

<b>Título:</b>	ALGUNAS CONTRIBUCIONES EN OPTIMIZACIÓN MULTI-OBJECTIVO.
<b>Doctorando:</b>	Lucelina Batista dos Santos.
<b>Director/es:</b>	Marko Antonio Rojas Medar y Rafaela Osuna Gómez.
<b>Defensa:</b>	26 de Febrero de 2004, Universidad Estatal de Campinas.
<b>Calificación:</b>	Aprobado (máxima calificación).

**Resumen:**

En este trabajo se estudió el problema de optimización vectorial entre espacios de Banach en lo que se refiere a las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. Para esto, empleamos distintas nociones de convexidad generalizada.

En la Primera Parte consideramos el Problema con datos Fréchet diferenciables. Probamos que las soluciones débilmente eficientes de dichos problemas pueden ser completamente caracterizadas en términos de condiciones estacionarias y de convexidad generalizada (pseudoinvexidad en el caso sin restricciones y KT-invexidad para el problema con restricciones de desigualdad)

En la Segunda Parte, discutimos el problema no diferenciable. Establecemos un resultado de existencia de soluciones débilmente eficientes a través de una caracterización de las soluciones débilmente eficientes vía desigualdades casi-variacionales. También discutimos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad a través de los conos de aproximación local y de las llamadas K-derivadas y, además, mostramos condiciones de segundo orden a través de las nociones de Hessiano generalizado.

Finalmente, en la Tercera parte, consideramos dos problemas particulares de optimización multiobjetivo no diferenciable. Son ellos, el problema fraccionario multiobjetivo y el problema de tiempo continuo multiobjetivo.

<b>Título:</b>	ALGUNAS CONTRIBUCIONES EN LA TEORÍA FUZZY MULTÍVOCA.
<b>Doctorando:</b>	Yurilev Chalco Cano.
<b>Director/es:</b>	Marko Antonio Rojas Medar y María Dolores Jiménez Gamero.
<b>Defensa:</b>	26 de Febrero de 2004, Universidad Estatal de Campinas.
<b>Calificación:</b>	Aprobado (máxima calificación).

### Resumen:

En este trabajo de tesis, presentamos algunos resultados obtenidos en la teoría fuzzy multívoca.

En la primera parte, damos un resultado de densidad. Probamos que los conjuntos fuzzy Lipschitzianos son densos en los conjuntos fuzzy compactos. Damos algunas aplicaciones a la integral de Choquet definidas para medidas fuzzy.

Además hacemos un estudio del espacio de conjuntos fuzzy compactos. Como es bien conocido, este espacio no tiene una estructura lineal, pero probamos que este espacio es un espacio casilineal normado. Después, introducimos la teoría de operadores casilineales fuzzy, estudiamos sus propiedades y obtenemos una teoría de dualidad asociada a esta. Como demostramos, en este contexto, la casilinealidad substituye la linealidad del análisis funcional. Extendemos al contexto fuzzy algunos de los resultados básicos del análisis funcional, tal como el célebre Teorema de Banach-Steinhaus . Así, logramos construir un análisis fuzzy consistente.

Usando el concepto de operador casilineal, introducimos una nueva definición de derivada para multifunciones fuzzy. De esta forma, recuperamos la idea básica del cálculo diferencial clásico, a saber, la aproximación local de operadores no lineales. También estudiamos propiedades de esta derivada. Aplicamos esta noción de derivada a problemas de inclusiones diferenciales fuzzy. Mostramos un resultado de estabilidad del tipo de Lyapunov. Finalizamos esta primera parte con una aplicación a la dinámica poblacional.

En la segunda parte de este trabajo, damos una extensión de la “Ley fuerte de los grandes números” para conjuntos aleatorios no acotados. También, mostramos una extensión del “Teorema central del límite” para variables aleatorias fuzzy.

En la última parte, introducimos el concepto de procesos fuzzy s-convexos, estudiamos sus propiedades, damos ejemplos y obtenemos algunos desigualdades del tipo Hadamard y Jensen.

<b>Título:</b>	NUMERICAL ANALYSIS OF SECOND ORDER LAGRANGE-GALERKIN SCHEMES. APPLICATION TO OPTION PRICING PROBLEMS.
<b>Doctorando:</b>	María Rodríguez Nogueiras.
<b>Director/es:</b>	Alfredo Bermúdez de Castro, Carlos Vázquez Cendón.
<b>Defensa:</b>	24 de Junio, Universidad de Santiago.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

**Resumen:**

En esta tesis se estudia la resolución numérica de ecuaciones lineales, y no lineales, bastante generales de tipo convección-difusión-reacción mediante un método de Lagrange-Galerkin de orden dos. La motivación surge en una aplicación en finanzas: la valoración de opciones financieras mediante ecuaciones de tipo Black-Scholes.

Más detalladamente, el método de Lagrange-Galerkin se introduce usando el formalismo de la mecánica de los medios continuos y formulaciones débiles. En su análisis numérico, se establecen rigurosamente las propiedades de estabilidad y consistencia (orden dos) del método, analizando previamente el esquema semidiscretizado en tiempo. Además, se aborda el problema de la cuadratura numérica, proponiendo fórmulas de cuadratura para elementos finitos de Lagrange, lineales y cuadráticos, que preservan la estabilidad del método (como se comprueba mediante un análisis de Fourier). Finalmente, se muestran algunos ejemplos numéricos obtenidos mediante un código informático original, que ilustran y completan nuestro análisis.

Con respecto a la aplicación en finanzas, se realiza una introducción a la modelización en finanzas en el marco de Black-Scholes, centrándonos en un tipo particular de opciones financieras: las opciones asiáticas sobre la media aritmética de tipo *fixed strike*, para las que se deducen algunas propiedades originales y se formula el problema matemático de valoración de las mismas. En el caso de las opciones asiáticas de tipo europeo, tras establecer resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución, se realiza la resolución numérica del problema de valoración empleando los métodos de Lagrange-Galerkin analizados numéricamente, atendiendo a las particularidades del problema concreto (por ejemplo, se optimiza la estructura algebraica del algoritmo). En el caso de las opciones asiáticas de tipo americano, su resolución numérica combina un algoritmo iterativo con el método de Lagrange-Galerkin. En concreto, se han comparado dos algoritmos basados en la formulación mixta del problema: los algoritmos de Bermúdez-Moreno y de conjunto activo basado en la lagrangiana aumentada. Tanto en el caso europeo como en el americano, los resultados numéricos son muy satisfactorios cuando se comparan con los obtenidos mediante métodos de Lagrange-Galerkin clásicos o con los que aparecen en la literatura con otros métodos.

<b>Título:</b>	DISCRETIZACIÓN MEDIANTE MÉTODOS RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN EN TIEMPO.
<b>Doctorando:</b>	M <sup>a</sup> Jesús Moreta Santos.
<b>Director/es:</b>	Isaías Alonso-Mallo, Begoña Cano Urdiales.
<b>Defensa:</b>	27 de julio de 2005, Universidad de Valladolid.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente Cum Laude.

**Resumen:**

En este trabajo se estudia la discretización completa de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) lineales de segundo orden en tiempo, que incluyen como ejemplos la ecuación de ondas y la ecuación de Euler-Bernoulli. La discretización espacial se realiza mediante diferencias finitas y métodos espectrales. Para la integración en tiempo se usan métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN) que surgen de manera natural como una generalización de los métodos Runge-Kutta (RK), cuando éstos son aplicados en la discretización de EDPs de segundo orden en tiempo que han sido previamente transformadas en un sistema de primer orden en tiempo.

La norma en la cual el problema continuo está bien puesto es la norma de la energía y es en esta norma donde debe estudiarse la estabilidad numérica, si bien este estudio no se ha hecho hasta ahora en la literatura. Se obtienen condiciones sobre los coeficientes del método RKN para que sea estable para problemas arbitrariamente rígidos, para los cuales es esencial imponer estabilidad en intervalos infinitos. Puesto que en la literatura no existen métodos RKN satisfaciendo estas condiciones (salvo aquellos que vienen de métodos RK), se construyen varios métodos satisfaciéndolas. También se ha realizado una generalización del estudio de la estabilidad para problemas de segundo orden en tiempo cuando el operador espacial es el generador de una función coseno y cuando el integrador en tiempo es un método racional diseñado para integrar ecuaciones de segundo orden en tiempo.

Se estudia también la reducción de orden en tiempo que ocurre al usar métodos RKN y que puede ser severa si el orden de etapas es bajo. El uso de técnicas para evitar la reducción de orden conduce a una mejora sustancial de los resultados. Hemos tratado el problema de manera diferente para métodos explícitos e implícitos debido en primer lugar a que las hipótesis necesarias para estabilidad son distintas. En segundo lugar, aunque la técnica para evitar la reducción de orden es básicamente la misma, para los métodos explícitos los valores de las etapas intermedias en la frontera se pueden calcular de manera exacta a partir de los datos del problema, mientras que esto no ocurre con los métodos RKN implícitos.

<b>Título:</b>	ESTUDIO MATEMÁTICO Y NUMÉRICO DEL MODELO DE REYNOLDS-KOITER Y DE LOS MODELOS TRIBOLÓGICOS EN LECTURA MAGNÉTICA.
<b>Doctorando:</b>	J. Jesús Cendán Verdes.
<b>Director/es:</b>	Iñigo Arregui Álvarez, Carlos Vázquez Cendón.
<b>Defensa:</b>	8 de Julio, Universidad de Vigo.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

**Resumen:**

El objetivo de la memoria es realizar algunas contribuciones originales al modelado matemático, mediante sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, de dos tipos de dispositivos: eje-cojinete y lectura magnética, aportando resultados de existencia de solución para los modelos, y técnicas numéricas eficientes para la simulación de casos reales.

En la primera parte de la tesis se plantea un problema elastohidrodinámico original basado en el modelo de Elrod–Adams, que gobierna la presión y la saturación del fluido, y en un modelo de Koiter para láminas delgadas, que gobierna la deformación del cojinete elástico. La originalidad fundamental, con respecto a trabajos previos, proviene de la incorporación del modelo de Koiter en la parte elástica, que se justifica para tener en cuenta los efectos de curvatura asociados a la geometría cilíndrica del cojinete. Se obtiene un resultado de existencia de solución, mediante un teorema de punto fijo de Schauder, cuya demostración presenta tres dificultades fundamentales: el carácter acoplado de las ecuaciones, el operador no lineal multívoco asociado al modelo de Elrod–Adams y el planteamiento de los problemas elástico e hidrodinámico en dos dominios diferentes. Se propone un algoritmo iterativo para aproximar la solución, basado en los pasos de la demostración de existencia. Las principales técnicas numéricas son: un proceso iterativo entre el subproblema elástico e hidrodinámico, el método de las características combinado con el algoritmo de Bermúdez–Moreno para tratar el término convectivo no lineal, la discretización espacial con elementos finitos de Lagrange  $P_1$  para la parte hidrodinámica, una formulación mixta para el modelo de Koiter, la discretización espacial con elementos finitos  $P_1$  con burbuja para la aproximación de la rotación de la normal y los desplazamientos tangenciales para la parte elástica, y la implementación numérica de la prolongación de la presión y de la restricción del desplazamiento normal. También se han integrado las técnicas numéricas anteriores en un algoritmo para problemas con carga impuesta y se presentan simulaciones con datos reales de dispositivos de acero y aluminio.

En la segunda parte, primero se aporta un algoritmo numérico original para aproximar la solución de la ecuación de Reynolds compresible de primer orden en una dimensión espacial, que gobierna la presión del aire en dispositivos de almacenamiento magnético de gran anchura. En concreto, se propone el algoritmo de Bermúdez–Moreno con parámetros constantes y variables para tratar el término de difusión no lineal, utilizando parámetros óptimos, que maximizan la velocidad de convergencia.

Además, se usa el método de las características para el término convectivo. Para la aproximación de la solución de la inecuación variacional, que define el problema elástico, se utilizan elementos finitos cúbicos de Hermite y un algoritmo de Uzawa. En segundo lugar, se introduce un modelo original 2D acoplado entre la ecuación de Reynolds compresible de primer orden, para la presión del aire, y el modelo de Koiter, para el desplazamiento de la cinta, demostrando un resultado de existencia de solución. Finalmente, se presentan los resultados de simulación numérica para un dispositivo real.

<b>Título:</b>	ANÁLISIS VARIACIONAL Y NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE CONTACTO EN VISCOELASTICIDAD CON MEMORIA LARGA.
<b>Doctorando:</b>	Ángel Daniel Rodríguez Arós.
<b>Director/es:</b>	Mircea Sofonea y Juan Manuel Viaño Rey.
<b>Defensa:</b>	18 de Marzo de 2005, Universidade de Santiago de Compostela.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente Cum Laude con mención de Doctorado Europeo.

**Resumen:**

Los fenómenos de contacto involucrando cuerpos deformables abundan en los procesos industriales y en la vida cotidiana. Por esta razón, con gran impulso desde los años 60, se han realizado importantes contribuciones al estudio de distintos problemas de contacto para una amplia variedad de materiales.

El presente trabajo pretende aportar una contribución en este campo, realizando el análisis matemático y numérico de varios problemas de contacto con y sin rozamiento para una clase concreta de materiales, los viscoelásticos de memoria larga (cuya principal característica es que la evolución de tensiones y deformaciones depende de su historia mecánica o memoria). Para ello, se estudia en un marco abstracto la existencia y unicidad de solución, las propiedades de esta y su aproximación numérica para dos clases de inecuaciones variacionales evolutivas con término integral de Volterra (utilizando para ello argumentos de la teoría de operadores monótonos en espacios de Banach y estrategias de punto fijo) y posteriormente estos resultados teóricos son aplicados al análisis variacional y numérico de una variada gama de problemas de contacto con y sin rozamiento para sólidos viscoelásticos de memoria larga. Entre estos podemos destacar el problema de contacto unilateral sin rozamiento entre un cuerpo y una fundación rígida (Signorini) o deformable (con respuesta normal), el problema de contacto entre dos cuerpos deformables con condiciones de no interpenetración ni rozamiento, el problema de contacto bilateral con rozamiento de Tresca entre un cuerpo deformable y una fundación rígida o el problema de contacto unilateral sin rozamiento entre un cuerpo deformable y una fundación semirígida. Todos los problemas de contacto se consideran cuasiestáticos.

En general, para cada problema de contacto, se ha partido del modelo mecánico para cubrir en sus aspectos teóricos y prácticos el estudio de la existencia y unicidad de solución débil, su aproximación numérica y el análisis del error (utilizando para ello el método de los elementos finitos, diferencias finitas e integración numérica) y eventualmente la implementación en ordenador de un algoritmo que permita realizar simulaciones numéricas.

<b>Título:</b>	CONTROLABILIDAD DE ALGUNAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES NO LINEALES DE TIPO PARABÓLICO E HIPERBÓLICO.
<b>Doctorando:</b>	Sergio Guerrero Rodríguez.
<b>Director/es:</b>	Enrique Fernández Cara y Manuel González Burgos.
<b>Defensa:</b>	13 de Mayo de 2005, Universidad de Sevilla.
<b>Calificación:</b>	Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

### Resumen:

Muchos han sido los avances del control de ecuaciones en derivadas parciales en los últimos tiempos. Clásicamente, podemos dividir el campo del control en dos grandes subdominios: Control Óptimo y Controlabilidad. Esta memoria trata sobre el segundo. De forma general, un problema de controlabilidad para una ecuación de evolución completada con condiciones iniciales y condiciones frontera consiste en elegir un control que actúe sobre nuestro sistema, de forma que la solución asociada tenga un comportamiento preciso al final de la evolución.

En las dos primeras partes de esta memoria demostramos la *controlabilidad exacta global* hacia las trayectorias de la ecuación del calor semilineal con condiciones de contorno de tipo Fourier no lineales. En concreto, en una primera parte incluimos un trabajo en el que probamos la controlabilidad a cero de un problema lineal asociado con pocas hipótesis de regularidad sobre los coeficientes que intervienen en el problema. A continuación y a través de una aplicación de punto fijo, deducimos el resultado de controlabilidad deseado.

En una tercera parte estudiamos los sistemas de Navier-Stokes y Bousinesq con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Los resultados establecidos en este apartado deben ser vistos como continuación de algunos resultados de *controlabilidad exacta local* sobre dichos sistemas, que fueron establecidos con anterioridad por los mismos autores. El objetivo principal de este trabajo es la deducción del mismo tipo de propiedades de controlabilidad pero con un número reducido de controles escalares. En concreto, los resultados precedentes de controlabilidad necesitaban de la presencia de  $N$  (resp.  $N + 1$ ) controles para el sistema de Navier-Stokes (resp. Bousinesq), mientras que en el trabajo contenido en esta tercera parte sólo necesitamos  $N - 1$  controles. Esto será posible para determinados abiertos de control.

En una cuarta parte, nos interesamos por las propiedades de controlabilidad exacta del sistema de elasticidad de Lamé anisotrópico. Este resultado puede verse como extensión de resultados previos para el sistema de Lamé isotrópico que se han establecido recientemente. La herramienta fundamental que usamos para demostrar este resultado son las *desigualdades globales de Carleman* combinadas con el análisis microlocal. En concreto, comenzamos trabajando con variables asociadas a la solución cuyos valores sobre el contorno no son conocidos para las que establecemos estimaciones en función de sus valores sobre la frontera. Por último, estos términos frontera se estiman usando técnicas clásicas de análisis microlocal.

*Design of Adaptive Finite Element Software:  
The Finite Element Toolbox ALBERTA*  
Alfred Schmidt, Kunibert G. Siebert  
Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 42  
ISBN: 3-540-22842-X (315 páginas) – 2005

Por J. M. Cascón



El objetivo de un método de elementos finitos adaptativo es conseguir la aproximación de una EDP de un modo eficiente. En este tipo de métodos las estimaciones a-posteriori son un componente fundamental. Las estimaciones a-posteriori son cantidades calculables que dependen de datos del problema y de la solución discreta, y que proporcionan información de la calidad de la aproximación obtenida. El uso de estas estimaciones permite realizar un control en la distribución de los grados de libertad, del método de elementos finitos, en busca de un resultado óptimo.

La principal dificultad en la implementación de este tipo de algoritmos es la administración de los grados de libertad durante los procesos de refinamiento y desrefinamiento de la malla. En la actualidad, existe un gran número de códigos que permiten trabajar con métodos de elementos finitos adaptativos, entre ellos ALBERTA.

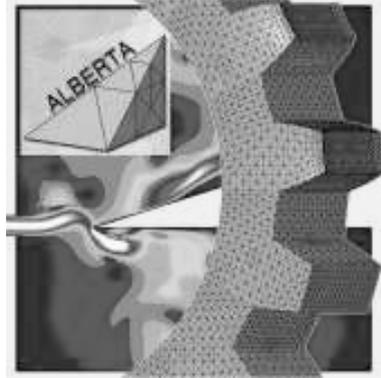
Algunas de sus grandes ventajas: es código abierto (para estudiantes e investigadores), excelentemente documentado, lo que facilita la incorporación de nuevos módulos, y de gran potencia computacional.

Esta librería desarrollada en C, proporciona estructuras de datos para problemas de elementos finitos, métodos adaptativos para problemas estacionarios y evolutivos, herramientas para el ensamblaje, así como *solvers* iterativos para problemas lineales y no lineales y métodos multimalla. La organización del código permite una programación casi independiente de la dimensión. Las mallas 2D y 3D son almacenadas en árboles binarios y el proceso empleado para el refinamiento/desrefinamiento de la malla es la bisección.

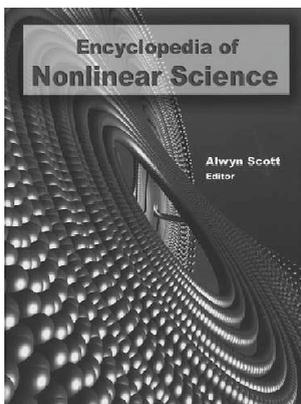
Este libro, además de un excelente manual de ALBERTA en el que se describen de forma exhaustiva cada una de las estructuras y funciones de la librería, incluye una recapitulación de conceptos y algoritmos necesarios para la implementación del método de elementos finitos.

El libro incorpora un CD con una distribución completa de ALBERTA (Version 1.2) y varios ejemplos. ALBERTA requiere un entorno Unix/Linux con compiladores de C y Fortran, gráficos OpenGL y GNU make.

<http://www.alberta-fem.de/>



*Encyclopedia of Nonlinear Science*  
 Alwyn Scott (editor)  
 Routledge, Taylor & Francis Group 2005  
 ISBN: 1-57958-385-7



Por Luis Vázquez Martínez

La enciclopedia presenta 438 descripciones de conceptos básicos y fundamentales de la Ciencia No Lineal. Algunas de las presentaciones son históricas o descriptivas mientras que otras presentan conceptos e ideas que requieren elementos de matemáticas, física, química, biología o ingeniería. Las presentaciones fueron planificadas para tener una extensión promedio de mil palabras, pero en algunos casos se supera dicha extensión dada la generalidad o importancia del tema. Cada contribución contiene bibliografía seleccionada y sugerencias de lecturas posteriores. El libro está dirigido a estudiantes de licenciatura y doctorado así como a investigadores en Matemáticas, Física, Química y las Ciencias de la Vida en general como

es el caso de la Neurociencia.

Los autores de las contribuciones proceden de aproximadamente 30 países diferentes, lo cual pone de manifiesto el carácter internacional de la ciencia no lineal. La participación española está representada a través de nueve contribuciones: (1) *Charge density waves*, por Luis Vázquez, Pedro Pascual y Salvador Jiménez; (2) *Dispersion relations*, por Luis Vázquez y Salvador Jiménez; (3) *FitzHugh-Nagumo equation*, por Luis Vázquez y María-Paz Zorzano; (4) *Virial theorem*, por Luis Vázquez y María-Paz Zorzano; (5) *Wave propagation in disordered media*, por Luis Vázquez y Vladimir V. Konotop; (6) *Aubry-Mather theory*, por Luis Mario Floría; (7) *Commensurate-incommensurate transition*, por Luis Mario Floría; (8) *Frenkel-Kontorova model*, por Luis Mario Floría y Pedro Jesús Martínez; (9) *Ball lightning*, por Antonio Fernández-Rañada, José Luis Trueba y José María Donoso.

El Editor y responsable de esta obra es Alwyn Scott, figura de gran prestigio en el campo de la Ciencia No Lineal. Ha sido el fundador y primer director del Centro de Estudios No Lineales del Laboratorio nacional de Los Álamos y, por otra parte, ha sido editor fundador de la revista *Physica D: Nonlinear Phenomena*.



**Tipo de evento:** Congreso  
**Nombre:** 12TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC GAMES AND APPLICATIONS  
**Lugar:** Sophia-Antipolis, Francia  
**Fecha:** del 3 al 6 de julio de 2006  
**Organiza:** The International Society of Dynamical Games; Inria-Sophia Antipolis, I3S, MBDA  
**E-mail:** ISDG2006@unisa.edu.au  
**WWW:** [www-sop.inria.fr/coprin/Congress/ISDG06](http://www-sop.inria.fr/coprin/Congress/ISDG06)

**Tipo de evento:** Congreso  
**Nombre:** CARLES SIMÓ FEST FOR HIS 60TH BIRTHDAY  
**Lugar:** S'Agaró, Barcelona  
**Fecha:** del 29 de mayo al 3 de junio de 2006  
**Organiza:**  
**E-mail:** [csfmaia.ub.es](mailto:csfmaia.ub.es)  
**WWW:** [www.maia.ub.es/csf](http://www.maia.ub.es/csf)

**Tipo de evento:** Congreso  
**Nombre:** POSITIVE SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS, POSTA06  
**Lugar:** Grenoble, Francia  
**Fecha:** del 30 de agosto al 1 de septiembre de 2006  
**Organiza:** LAG - Laboratoire d'Automatique de Grenoble - France  
**E-mail:** [POSTA06@lag.ensieg.inpg.fr](mailto:POSTA06@lag.ensieg.inpg.fr)  
**WWW:** [www.lag.ensieg.inpg.fr/POSTA06](http://www.lag.ensieg.inpg.fr/POSTA06)

**Tipo de evento:** Congreso  
**Nombre:** TRENDS AND CHALLENGES IN THE CALCULUS OF VARIATIONS AND ITS APPLICATIONS  
**Lugar:** Toledo  
**Fecha:** del 16 al 19 de agosto de 2006  
**Organiza:** Ernesto Aranda, José Carlos Bellido y Pablo Pedregal (Universidad de Castilla-La Mancha)  
**E-mail:** [JoseCarlos.Bellido@uclm.es](mailto:JoseCarlos.Bellido@uclm.es);  
[Pablo.Pedregal@uclm.es](mailto:Pablo.Pedregal@uclm.es)  
**WWW:** <http://matematicas.uclm.es/toledo2006>

<b>Tipo de evento:</b>	Congreso
<b>Nombre:</b>	RECENT ADVANCES IN NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS. A CONFERENCE IN HONOR OF PETER D. LAX AND LOUIS NIRENBERG
<b>Lugar:</b>	Toledo
<b>Fecha:</b>	del 7 al 10 de junio de 2006
<b>Organiza:</b>	L. L. Bonilla (UC3M), A. Carpio (UCM), J. M. Vega (UPM), S. Venakides (Duke)
<b>E-mail:</b>	ln06@mat.ucm.es
<b>WWW:</b>	www.mat.ucm.es/~ln06

**Boldrini, José Luiz**

Professor. *Líneas de investigación:* – UNIV. ESTADUAL DE CAMPINAS – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Dpto. de Matemática Aplicada – UNICAMP-IMECC; 6065 Campinas, SP, Brasil.

*Tlf.:* 551937886036. *Fax:* .

*e-mail:* boldrini@ime.unicamp.br

<http://www.ime.unicamp.br/~boldrini>

**Brauer, Uwe**

Contratado Doctor. *Líneas de investigación:* Ecuaciones en Derivadas Parciales, Ecuaciones Hiperbólicas no Lineales – UNIV. COMPLUTENSE DE MADRID – Fac. de Químicas – Dpto. de Matemática Aplicada – Avda. Complutense, s/n; 28040 Madrid.

*Tlf.:* 913944232. *Fax:* 913944102.

*e-mail:* oub@mat.ucm.es

**Fernández Méndez, Sonia**

Lectora. *Líneas de investigación:* Métodos Numéricos. Mecánica Computacional. Elementos Finitos – UNIV. POLITÉCNICA DE CATALUNYA – E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos – Dpto. de Matemática Aplicada III – C/ Jordi Girona s/n, módulo C2, 211; 08034 Barcelona.

*Tlf.:* 934011625. *Fax:* 934011825.

*e-mail:* sonia.fernandez@upc.edu

<http://www-lacan.upc.es>

**García Guirao, Juan Luis**

Prof. Ayudante de Universidad. *Líneas de investigación:* – UNIV. POLITÉCNICA DE CARTAGENA – E.U.T.S. Ingeniería Civil – Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística – Paseo de Alfonso XIII; 30203 Cartagena (Murcia).

*Tlf.:* 968325912. *Fax:* 968325694.

*e-mail:* juan.garcia@upct.es

**García Rodríguez, José Antonio**

Estudiante. *Líneas de investigación:* – UNIV. DE MÁLAGA – Fac. de Ciencias – Dpto. de Análisis Matemático – Campus de Teatinos, s/n; 29071 Málaga.

*Tlf.:* 952131898. *Fax:* .

*e-mail:* joseanto@anamat.cie.uma.es

**López García, Juan Antonio**

Estudiante. *Líneas de investigación:* Análisis Numérico, EDP, Método de Volúmenes Finitos, Leyes de Conservación, Sistemas Hiperbólicos no Conservativos, Mecánica de Fluidos Computacional – UNIV. DE MÁLAGA – Fac. de Ciencias – Dpto. de Análisis Matemático – Campus de Teatinos, s/n; 29071 Málaga.

*Tlf.:* 952132016. *Fax:* 952131894.

*e-mail:* lopez@anamat.cie.uma.es

<http://webdeptos.uma.es/anamat/>

**Maestre Caballero, Faustino**

Estudiante. *Líneas de investigación:* Cálculo de variedades. Diseño óptimo – UNIV. DE CASTILLA-LA MANCHA – E.T.S.I. Industriales – Dpto. de Matemáticas – Avda. Camilo José Cela, s/n; 13071 Ciudad Real.

*Tlf.:* 926295300 Ext.6376. *Fax:* 926295361.

*e-mail:* Faustino.Maestre@uclm.es

**Martínez Aparicio, Pedro Jesús**

Contratado de Investigación. *Líneas de investigación:* Ecuaciones no lineales en derivadas parciales de tipo elíptico. Métodos topológicos y variacionales – UNIV. DE GRANADA – Fac. de Ciencias – Dpto. de Análisis Matemático – Severo Ochoa, s/n; 18071 Granada.

*Tlf.:* 958242996. *Fax:* 958243272.

*e-mail:* pedrojma@ugr.es

**Moretti, Antonio Carlos**

Professor. *Líneas de investigación:* Optimizaçáo – UNIV. ESTADUAL DE CAMPINAS – Instituto de Matemática, Estatística e Computaçáo Científica – Dpto. de Matemática Aplicada – UNICAMP-IMECC; 6065 Campinas, SP, Brasil.

*Tlf.:* 553785471. *Fax:* .

*e-mail:* moretti@ime.unicamp.br

<http://www.ime.unicamp.br/~moretti>

**Pardo Milanés, Alberto**

Estudiante. *Líneas de investigación:* Análisis Numérico, EDP, Método de Volúmenes Finitos, Leyes de Conservación, Sistemas Hiperbólicos no Conservativos, Mecánica de Fluidos Computacional – UNIV. DE MÁLAGA – Fac. de Ciencias – Dpto. de Análisis Matemático – Campus de Teatinos, s/n; 29071 Málaga.

*Tlf.:* 952132016. *Fax:* 952131894.

*e-mail:* pardo@anamat.cie.uma.es

[www.ciencias.uma.es](http://www.ciencias.uma.es)

**Rández García, Luis**

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Resolución numérica de P.V.I. – UNIV. DE ZARAGOZA – Fac. de Ciencias – Dpto. de Matemática Aplicada – Plz. de San Francisco, s/n; 50009 Zaragoza.

*Tlf.:* 976761122. *Fax:* 976761125.

*e-mail:* randez@unizar.es

<http://pcmap.unizar.es/~pilar>

**Rapún Banzo, M<sup>a</sup> Luisa**

Prof. Ayudante de Universidad. *Líneas de investigación:* Elementos de Contorno, Scattering de Ondas Acústicas y Térmicas – UNIV. PÚBLICA DE NAVARRA – – Dpto. de Matemática e Informática – Campus de Arrosadía; 31006 Pamplona.

*Tlf.:* 948168052. *Fax:* 948169521.

*e-mail:* mluisa.rapun@unavarra.es

**Sevilla Cárdenas, Rubén**

Estudiante. *Líneas de investigación:* Métodos numéricos en Ingeniería computacional. Elementos finitos, elementos finitos discontinuos, problemas de transporte – UNIV. POLITÉCNICA DE CATALUNYA – E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos – Dpto. de Matemática Aplicada III – C/ Jordi Girona s/n, módulo C2, 208; 08034 Barcelona.

*Tlf.:* 934017241. *Fax:* 934011825.

*e-mail:* ruben.sevilla@upc.edu

<http://www-lacan.upc.edu>



## Direcciones útiles

### Consejo Ejecutivo de SēMA

#### Presidente:

**Juan Ignacio Montijano.** ([monti@unizar.es](mailto:monti@unizar.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Facultad de Ciencias. Edificio de Matemáticas. Ciudad Universitaria s/n. 50016 Zaragoza. *Tel:* 976 761 120.

#### Secretario:

**Carlos Castro Barbero.** ([ccastro@caminos.upm.es](mailto:ccastro@caminos.upm.es)).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

#### Tesorera:

**María Pilar Laburta Santamaría.** ([laburta@unizar.es](mailto:laburta@unizar.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Pol. Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. *Tel:* 976 762 006.

#### Vocales:

**Rafael Bru García.** ([rbru@mat.upv.es](mailto:rbru@mat.upv.es))

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Agrónomos. Univ. Politécnica de Valencia. Camí de Vera, s/n. 46022 Valencia. *Tel:* 963 879 669.

**José Antonio Carrillo de la Plata.** ([carrillo@mat.uab.es](mailto:carrillo@mat.uab.es))

Dpto. de Matemáticas. Univ. Autónoma de Barcelona. Edifici C. 08193 Bellaterra (Barcelona). *Tel:* 93 581 2413.

**Javier Chavarriga Soriano.** ([chava@eup.udl.es](mailto:chava@eup.udl.es)).

Dpto. de Matemática. E.U. Politécnica. Univ. de Lleida. Avda. Jaume II, 69. 25001 Lleida. *Tel:* 973 702 777.

**Inmaculada Higuera Sanz.** ([higuera@unavarra.es](mailto:higuera@unavarra.es)).

Dpto. de Matemática e Informática Univ. Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. *Tel:* 948 169 526. 31006 Pamplona.

**Pablo Pedregal Tercero.** ([Pablo.Pedregal@uclm.es](mailto:Pablo.Pedregal@uclm.es)).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real.

**Ireneo Peral Alonso.** ([ireneo.peral@uam.es](mailto:ireneo.peral@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

**José Javier Valdés García.** ([valdes@orion.ciencias.uniovi.es](mailto:valdes@orion.ciencias.uniovi.es)).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. de Oviedo. Avda. de Calvo Sotelo, s/n. 33007 Oviedo. *Tel:* 985 103 340.

**Enrique Zuazua Iriondo.** ([enrique.zuazua@uam.es](mailto:enrique.zuazua@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

## Comité Científico del Boletín de SēMA

**Enrique Fernández Cara.** ([cara@us.es](mailto:cara@us.es)).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

**Alfredo Bermúdez de Castro.** ([mabermud@usc.es](mailto:mabermud@usc.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus Univ.. 15706 Santiago (A Coruña) *Tel:* 981 563 100.

**Eduardo Casas Rentería.** ([eduardo.casas@unican.es](mailto:eduardo.casas@unican.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada y C.C.. E.T.S.I. Ind. y Telec. Univ. de Cantabria. Avda. de Los Castros s/n. 39005 Santander. *Tel:* 942 201 427.

**José Luis Cruz Soto.** ([jlacruz@uco.es](mailto:jlacruz@uco.es)).

Dpto. de Informática y An. Numérico. Univ. de Córdoba. Campus de Rabanales. Edificio C-2. 14071 Córdoba. *Tel:* 957 218 629.

**José Manuel Mazón Ruiz.** ([Jose.M.Mazon@uv.es](mailto:Jose.M.Mazon@uv.es)).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

**Ireneo Peral Alonso.** ([ireneo.peral@uam.es](mailto:ireneo.peral@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

**Luis Ferragut Canals.** ([ferragut@usal.es](mailto:ferragut@usal.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1522.

**Juan Luis Vázquez Suárez.** ([juanluis.vazquez@uam.es](mailto:juanluis.vazquez@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 935.

**Luis Vega González.** ([mtpvegol@lg.ehu.es](mailto:mtpvegol@lg.ehu.es)).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

**Enrique Zuazua Iriondo.** ([enrique.zuazua@uam.es](mailto:enrique.zuazua@uam.es)).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

## Grupo Editor del Boletín de SĒMA

**Luis Ferragut Canals.** ([ferragut@usal.es](mailto:ferragut@usal.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. Tel: 923 294 400, ext. 1522.

**Enrique Fernández Cara.** ([caraus.es](mailto:caraus.es)).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. Tel: 954 557 992.

**Francisco Andrés Pérez.** ([franc@usal.es](mailto:franc@usal.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. Tel: 923 294 400 ext. 1537.

**M. Isabel Asensio Sevilla.** ([mas@usal.es](mailto:mas@usal.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias Químicas. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. Tel: 923 294 400 ext. 1537.

**M. Teresa de Bustos Muñoz.** ([tbustos@usal.es](mailto:tbustos@usal.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S. Ing. Ind. de Béjar. Univ. de Salamanca. Avda. Fernando Ballesteros, 2. 37700 Béjar, Salamanca. Tel: 923 408 080 ext. 2263.

**Antonio Fernández Martínez.** ([anton@usal.es](mailto:anton@usal.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. E. Politécnica Superior Zamora. Univ. de Salamanca. Avda. Requejo, 33. Campus Viriato. 49022 Zamora. Tel: 980 545 000 ext. 4459.

## Responsables de secciones del Boletín de SĒMA

### Artículos:

**Enrique Fernández Cara.** ([caraus.es](mailto:caraus.es)).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. Tel: 954 557 992.

### Matemáticas e Industria:

**Mikel Lezaun Iturralde.** ([mpleitm@lg.ehu.es](mailto:mpleitm@lg.ehu.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e I. O. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Apto. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). Tel: 944 647 700.

### Educación Matemática:

**Roberto Rodríguez del Río.** ([rr\\_delrio@mat.ucm.es](mailto:rr_delrio@mat.ucm.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Químicas. Univ. Compl. de Madrid. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid. Tel: 913 944 102.

### Resúmenes de libros:

**Fco. Javier Sayas González.** ([jsayas@posta.unizar.es](mailto:jsayas@posta.unizar.es)).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza. C/María de Luna, 3. 50015 Zaragoza. Tel: 976 762 148.

### Noticias de SĒMA:

**Carlos Castro Barbero.** ([ccastro@caminos.upm.es](mailto:ccastro@caminos.upm.es)).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. Tel: 91 336 6664.

**Anuncios:**

**Óscar López Pouso.** ([oscarlp@usc.es](mailto:oscarlp@usc.es)).  
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus sur, s/n. 15782 Santiago de Compostela Tel: 981 563 100, ext. 13228.

**Responsables de otras secciones de SĒMA****Gestión de Socios:**

**María Pilar Laburta Santamaría.** ([laburta@unizar.es](mailto:laburta@unizar.es)).  
Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. Tel: 976 762 006.

**Página web:** [www.sema.org.es/](http://www.sema.org.es/):

**J. Rafael Rodríguez Galván.** ([rafael.rodriguez@uca.es](mailto:rafael.rodriguez@uca.es)).  
Dpto. de Matemáticas. Fac. de CC. EE. y Empresariales. Univ. de Cádiz. C/ Duque de Nájera, 6. 11002 Cádiz. Tel: 956 015 478.

1. Los artículos publicados en este Boletín podrán ser escritos en español o inglés y deberán ser enviados por correo certificado a

Prof. E. FERNÁNDEZ CARA  
Presidente del Comité Científico, Boletín SĒMA  
Dpto. E.D.A.N., Facultad de Matemáticas  
Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA

También podrán ser enviados por correo electrónico a la dirección

`boletin_sema@usal.es`

En ambos casos, el/los autor/es deberán enviar por correo certificado una carta a la dirección precedente mencionando explícitamente que el artículo es sometido a publicación e indicando el nombre y dirección del autor corresponsal. En esta carta, podrán sugerirse nombres de miembros del Comité Científico que, a juicio de los autores, sean especialmente adecuados para juzgar el trabajo.

La decisión final sobre aceptación del trabajo será precedida de un procedimiento de revisión anónima.

2. Las contribuciones serán preferiblemente de una longitud inferior a 24 páginas y se deberán ajustar al formato indicado en los ficheros a tal efecto disponibles en la página web de la Sociedad (<http://www.sema.org.es/>).

3. El contenido de los artículos publicados corresponderá a un área de trabajo preferiblemente conectada a los objetivos propios de la Matemática Aplicada. En los trabajos podrá incluirse información sobre resultados conocidos y/o previamente publicados. Se anima especialmente a los autores a presentar sus propios resultados (y en su caso los de otros investigadores) con estilo y objetivos divulgativos.

## Ficha de Inscripción Individual

### Sociedad Española de Matemática Aplicada SēMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,  
Universidad Complutense. 28040 Madrid.  
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

#### Datos Personales

- Apellidos: .....
- Nombre: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....
- Teléfono: ..... DNI/CIF: .....
- Fecha de inscripción: .....

#### Datos Profesionales

- Departamento: .....
- Facultad o Escuela: .....
- Universidad o Institución: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....
- Teléfono: ..... Fax: .....
- Correo electrónico: .....
- Página web: <http://> .....
- Categoría Profesional: .....
- Líneas de Investigación: .....
- .....

**Dirección para la correspondencia:**  **Profesional**                       **Personal**

---

Cuota anual para el año 2005

- Socio ordinario: 30 EUR.       Socio de reciprocidad con la RSME: 12 EUR.
- Socio estudiante: 15 EUR.       Socio extranjero: 25 EUR.

**Datos bancarios**

...de ..... de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean pasados al cobro en la cuenta cuyos datos figuran a continuación

Entidad (4 dígitos)	Oficina (4 dígitos)	D.C. (2 dígitos)	Número de cuenta (10 dígitos)

- Entidad bancaria: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....

Con esta fecha, doy instrucciones a dicha entidad bancaria para que obren en consecuencia.

Atentamente,

Fdo. ....

**Para remitir a la entidad bancaria**

...de ..... de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean cargados a mi cuenta corriente/libreta ..... en esa Agencia Urbana y transferidas a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244  
Bankinter  
C/ Hernán Cortés, 63  
39003 Santander

Atentamente,

Fdo. ....

## Ficha de Inscripción Institucional

### Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,  
Universidad Complutense. 28040 Madrid.  
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

#### Datos de la Institución

- Departamento: .....
- Facultad o Escuela: .....
- Universidad o Institución: .....
- Domicilio: .....
- C.P.: ..... Población: .....
- Teléfono: ..... DNI/CIF: .....
- Correo electrónico: .....
- Página web: **http://** .....
- Fecha de inscripción: .....

#### Forma de pago

La cuota anual para el año 2005 como Socio Institucional es de 150 EUR.  
El pago se realiza mediante transferencia bancaria a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244  
Bankinter  
C/ Hernán Cortés, 63  
39003 Santander