$\mathbf{S\vec{e}MA}$

BOLETÍN NÚMERO 19

Diciembre 2001

sumario

FOTO DE PORTADA

edición

Dirección editorial: Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Edif. C-2, planta 3, Campus Universitario de Rabanales, 14071 Córdoba.
E-mail: `boletin_sema@uco.es`, *Fax:* 957 21 86 30

responsables de secciones

Gestión de socios
Luis Alberto Fernández Fernández
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación
Facultad de Ciencias
Universidad de Cantabria
Avda. de Los Castros, s/n
39005 SANTANDER
lafernandez@unican.es

Mantenimiento página web
J. Rafael Rodríguez Galván
Dpto. Matemáticas
Facultad de CC. EE. y Empresariales
Universidad de Cádiz
C/ Duque de Nájera, 8
11002 CÁDIZ
rafael.rodriguez@uca.es

Comentarios de libros
Francisco Javier Sayas González
Dpto. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
Plz. San Francisco, s/n
50009 ZARAGOZA
jsayas@posta.unizar.es

Remisión de artículos
José Luis Cruz Soto
Dpto. Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba
Campus Univ. de Rabanales
Edificio C-2, planta 3ª
14071 CÓRDOBA
boletin_sema@uco.es

Educación Matemática
Alicia Delibes Liniers y
Soledad Rodríguez Salazar
Dpto. de Matemática Aplicada
Facultad de Químicas
Univ. Complutense de Madrid
Avda. Complutense, s/n
28040 MADRID
delibes@sunma4.mat.ucm.es
solerodr@mat.ucm.es

Diseño de portada: Antonio Espinosa López y Antonio Osuna Abad.
Imprime: TIPOGRAFÍA CATÓLICA, S. C. A., Tfo.: 957 297 188 Córdoba.
D. L. : CO-156/2000

NOTA:

En la asamblea general de S$\vec{e}$MA celebrada en Salamanca el dia 25 de Septiembre de 2001, se acordaron los nuevos importes de las cuotas de los socios para el proximo año:

Socio ordinario: 30 Euros
Socio de reciprocidad con la RSME: 12 Euros
Socio extranjero: 25 Euros
Socio estudiante: 15 Euros
Socio institucional: 150 Euros

Todavía tenemos reciente el año 2000, que seguiremos recordando como *"Año Mundial de las Matemáticas".* Esperamos que el impulso ahí comenzado continúe redundando en la divulgación y valoración de las Matemáticas.

En cambio, hay aspectos del año 2001 que será mejor olvidar de camino que éste termina. Nos referimos tanto a las situaciones bélicas vividas en distintos lugares del mundo, como a las pérdidas que ha sufrido el mundo de las Matemáticas. Recordemos que los dos primeros Boletines de S$\vec{e}$MA editados en el presente año han comenzado con notas necrológicas referentes a Philippe Bénilan (en el n^o 17), a Jacques-Louis Lions y a Jeannine Saint Jean Paulin (en el n^o 18). En este número, que cierra el año, tenemos que manifestar nuestro pésame por la muerte de Olga A. Oleinik, expresado por M^a Eugenia Pérez.

Preferible es recordar algún aspecto positivo del año 2001, como fueron los días vividos en Salamanca durante el **"XVII C.E.D.Y.A. / VII Congreso de Matemática Aplicada".** En el marco de este Congreso se otorgaron tanto el *"Segundo Premio S$\vec{e}$MA de Divulgación de la Matemática Aplicada"* como el *"Cuarto Premio S$\vec{e}$MA al Joven Investigador"* (ambos patrocinados por IBERDROLA). Damos nuestra más cordial enhorabuena a los galardonados: Juan Luis Vázquez Suárez y Francisco Javier Sayas González, respectivamente. En este Boletín aparece el artículo de Juan Luis Vázquez que le ha hecho merecedor del premio, titulado "The importance of Mathematics in the development of Science and Technology". Esperamos que en un próximo Boletín se publique el trabajo de Javier Sayas.

Además del artículo mencionado, aparecen otros cuatro, respetando el orden de su recepción. En primer lugar, algunos resultados recientes de "controlabilidad de E.D.P. parabólicas", presentados por Manuel González Burgos. A continuación Enric Trillas desarrolla en una "carta abierta, sobre los conjuntos borrosos, a los socios de S$\vec{e}$MA" diversas opciones que se pueden adoptar bajo el término de conjunto borroso (o difuso). También contamos con el artículo de Viorel Barbu titulado "stabilizing the semilinear parabolic equation with internal feedback controllers", que contiene resultados recientes relativos tanto al caso determinístico como al estocástico. Agradecemos a Antonio Cañada Villar su mediación (aprovechando una estancia de Viorel Barbu en la Universidad de Granada) para la obtención de este tercer artículo. Por último, Jesús Beato escribe "acerca del manuscrito Bakhshsali y su fórmula para el cálculo de raíces cuadradas", completando la información aportada por el mismo autor en el Boletín 18.

Además, el presente Boletín contiene varias secciones habituales:

- El anuncio del curso *finite volume methods for hyperbolic conservation laws*, que nos ha enviado Javier de Frutos.
- El anuncio del congreso *Congrès de mathématiques appliquées à la mémoire de Jacques-Louis Lions*, que nos ha llegado a través de Enrique Zuazua.
- Los comentarios de libros, de los que es responsable Javier Sayas. Por mediación suya, hemos recibido en esta ocasión comentarios referentes a dos libros. El primero escrito por Julián López–Gómez y comentado por José Sabina de Lis. El segundo comentado por los mismos autores, Henar Herrero y Antonio Díaz–Cano.
- El anuncio de tres revistas: *"Mathematical Model & Methods in Applied Sciences", "SIAM Journal on Control and Optimization" y "Advanced Nonlinear Studies".* Sobre las dos primeras nos ha informado Enrique Zuazua y sobre la tercera Ireneo Peral.
- Los resúmenes de cuatro Tesis Doctorales leídas recientemente (en las Universidades de Almería, U.N.E.D., de Santiago de Compostela y de Zaragoza).
- La relación de nuevos socios, elaborada por Luis Alberto Fernández.

Finalmente, comentamos dos noticias relativas al Boletín de S$\vec{e}$MA. En primer lugar, la aparición de un apartado referente al mismo en la página web de nuestra Sociedad (`http://www.uca.es/sema/`), gracias a la labor de J. Rafael Rodríguez. La segunda noticia consiste en el cambio del grupo encargado de editar los Anuarios y Boletines de S$\vec{e}$MA. Esta tarea que "heredamos" de los compañeros de Málaga y Zaragoza, se traslada ahora desde Córdoba hasta Asturias. De igual forma, con el paso del tiempo, se irá completando la participación de diferentes localidades en esta tarea común de S$\vec{e}$MA.

Al despedirnos de la edición, es justo agradecer la colaboración de muchas personas que nos han ayudado a completar el contenido de los distintos Boletines y Anuarios. Personas que preferimos no relacionar individualmente por temor a dejar a alguien en el tintero, pero que tanto en su recuerdo como en el nuestro se mantendrá viva tal colaboración. Asimismo queremos agradecer a los compañeros de Asturias la mano que nos han tendido para coger el "testigo" y efectuar el relevo en la edición. Les deseamos todo lo mejor en esta nueva andadura.

Grupo editor

Olga Arsenievna Oleinik
Reseña en memoria de una gran matemática

Julio de 1925 — Octubre de 2001

El pasado 13 de Octubre, después de una larga enfermedad, falleció en Moscú la Académica Olga Arsenievna Oleinik. Dada la relevancia de sus aportaciones en materias como Ecuaciones en Derivadas Parciales y Geometría Algebraica, y en general en Matemática Aplicada, se anunció, a través de S$\vec{e}$MA (24-X-01), la triste noticia para el mundo de las Matemáticas:

Nacida en Julio de 1925, se graduó en la Universidad Estatal de Moscú en 1947, donde se doctoró y continuó su trabajo como profesora hasta el momento de su muerte. Desde hace más de 25 años era Directora del Departamento de Ecuaciones Diferenciales en dicha Universidad. Sucesora en la Cátedra de I.G. Petrowsky, de quien fue primero alumna y después colaboradora, organizaba periódicamente el conocido Seminario Internacional en honor a I.G. Petrowsky.

Miembro de la Academia de Ciencias de Rusia, y de otras seis Academias de Ciencias Europeas, ha sido galardonada con prestigiosos premios en distintos Países. Su nombre ha figurado en la lista de conferenciantes invitados en multitud de congresos internacionales. El nombre de Olga Oleinik es bien conocido en Matemáticas por sus aportaciones fundamentales en los campos de la Geometría Algebraica y de las Ecuaciones Diferenciales, entre otros. Autora de más de 360 artículos y ocho libros, es de obligada cita en numerosos ámbitos científicos. Algunos de sus últimos trabajos han supuesto un importante avance en teoría de elasticidad y de homogeneización.

Profesora invitada en Universidades de todo el mundo, realizó su última visita a Universidades españolas en Febrero-Marzo de 1997, impartiendo una serie de conferencias sobre temas de actualidad en el mundo de las ecuaciones en derivadas parciales. Los que tuvimos la suerte de conocerla en ese momento pudimos apreciar su energía y vitalidad en todos los aspectos, científicos y humanos.

En relación a temas cercanos a nuestro trabajo en elasticidad y homogeneización, y relacionados con el trabajo de la Profesora Olga Oleinik en las tres últimas décadas, nos parecen muy importantes sus aportaciones sobre regularidad de soluciones, desigualdades de Korn y comportamiento en el infinito de soluciones del sistema de la elasticidad lineal, y en general de sistemas elípticos.

Estudios sobre el comportamiento en el infinito para ecuaciones elípticas semilineales en dominios no acotados pueden encontrarse en su último libro "**Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations**" (Cambridge University Press, Roma, 1996). En este libro, entre otros temas, también aborda de manera novedosa diversos problemas sobre homogeneización de dominios y de fronteras; dichos problemas representan como la propia autora define en su prólogo, *"(...) are only just beginning to be studied"*, el comienzo de un estudio que después continuará en artículos posteriores (hasta el 2001).

En los otros dos libros publicados sobre teoría de homogeneización "**Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization**" (con A.S. Shamaev y G.A. Yosifian, North-Holland, Amsterdam, 1992) y "**Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals**" (con V.V. Jikov y S.M. Kozlov, Springer-Verlag, Berlín, 1994), se pueden encontrar resultados básicos sobre teoría de perturbaciones espectrales y sobre homogeneización en medios periódicos, y no periódicos respectivamente, así como métodos y técnicas en estas teorías utilizados por *su escuela*.

Pero sus aportaciones importantes en Matemáticas datan de finales de la década de los 40, y ya en diversos libros de prestigiosos matemáticos como I.G. Petrowsky y S.L. Sobolev, aparecen agradecimientos a su *alumna Olga Oleinik*. Para hacernos una idea de estas aportaciones, adjuntamos un resumen, traducción literal de una biografía escrita por su alumno Gregory A. Chechkin, actualmente profesor en el mismo departamento que la profesora Olga Oleinik:

"...La vida científica de Olga Oleinik, comenzó hacia 1947 bajo la supervisión de I.G.Petrowsky.

*...En su primera tesis (1950) "***On Topology of Real Algebraic Curves on Algebraic Surfaces***" Olga Oleinik obtuvo resultados que han jugado un papel muy importante en relación a la resolución del decimosexto Problema de Hilbert.*

*En 1954 Olga Oleinik defendió su segunda tesis doctoral "***Boundary -Value Problems for Partial Differential Equations with a Small Coefficient in Front of the Highest Order Derivative and Cauchy Problem for General Nonlinear Equations***".*

...En muchas áreas de la Física Matemática y de las Ecuaciones en Derivadas Parciales se le debe una considerable contribución: Elaboró una teoría completa de soluciones discontinuas de ecuaciones casilineales de primer orden; en particular, introdujo la noción de solución débil de éstas ecuaciones dando

resultados de existencia y unicidad de soluciones. También elaboró una teoría para ecuaciones lineales de segundo orden, con forma característica no negativa. En los años 50, sus trabajos sobre teoría de filtración han sido fundamentales en la teoría matemática de la filtración no estacionaria. Fué también una de las pioneras en la teoría de la homogeneización y obtuvo resultados básicos sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de problemas de contorno con pequeños parámetros. A finales de los 80, estudió el comportamiento en el infinito de las soluciones de ecuaciones semilineales elípticas, de segundo orden, en dominios cilíndricos. En relación a las ecuaciones elípticas, debemos mencionar el resultado que lleva su nombre Hopf-Oleinik Lemma...

...En 1954 era ya Catedrática del Departamento de Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Mecánica y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú...; siempre capaz de encontrar interesantes problemas para sus numerosos alumnos: bajo su dirección, 55 alumnos han defendido con éxito la tesis sobre distintos campos de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales."

Una de las pocas mujeres (unas cuatro) entre los varios centenares de miembros de la Academia de Ciencias de Rusia, ha contado con el reconocimiento de diversas Academias, Universidades e Instituciones Científicas, que la han nombrado miembro honorífico, Doctor Honoris Causa o la han otorgado premios o medallas. Por ejemplo, por citar unas cuantas instituciones, mencionemos la Real Sociedad de Edimburgo (Gran Bretaña), la Academia Nacional "dei Lincei" (Italia), Academia de Ciencias "Sachsische" (Alemania), Doctor de la Universidad de Roma "La Sapienza", premio de la Academia de Ciencias de Rusia, premio Petrowsky, medalla del College de France,...

Para más datos sobre estos reconocimientos en la labor investigadora de la Profesora Olga Oleinik, se puede consultar la siguiente dirección de la página web de *Biographies of Women in Mathematics* de la asociación AWM (*Association for Women in Mathematics*), con fecha de actualización en el 2001:

http://www.awm-math.org/noetherbrochure/Oleinik96.html

Finalmente, me queda por decir que aparte de recordarla como una persona enérgica, alegre y generosa, me sumo a las palabras sinceras que le dedican sus alumnos: "*una gran matemática, una excelente profesora y una buena amiga*".

Santander, Noviembre de 2001
María Eugenia Pérez Martínez

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o 19 (2001), 13–44.

Controlabilidad de E.D.P. Parabólicas

Manuel González Burgos
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

e-mail: burgos@numer.us.es

1 Introducción

En este trabajo presentaremos algunos resultados recientes de controlabilidad de problemas parabólicos. En concreto, presentaremos resultados de controlabilidad aproximada y exacta a cero para versiones lineales y no lineales de la ecuación del calor, así como para las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes.

De manera general, un problema de controlabilidad puede ser formulado de la siguiente forma: Supongamos fijado un intervalo temporal de observación $(0, T)$ y consideremos dado un sistema evolutivo gobernado por cierta ecuación o sistema de ecuaciones (diferenciales o en derivadas parciales) junto con determinadas condiciones iniciales y/o de contorno (sistema o problema de estado). Supongamos que podemos actuar sobre este sistema (a través de alguna condición de contorno, del segundo miembro de la ecuación, ...) mediante una función v (el control) que se toma en un cierto conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ (conjunto de controles admisibles). Fijado $v \in \mathcal{U}_{ad}$, llamaremos estado asociado al control v a la correspondiente solución $y_v = y_v(t)$ del sistema de estado. Dados dos valores y_0 e y_d en un determinado espacio de Banach H (de norma $|\cdot|_H$) donde la ecuación de estado tenga solución, diremos que el sistema de estado es exactamente controlable en H en el instante T si podemos encontrar un control $v \in \mathcal{U}_{ad}$ de tal forma que la correspondiente solución y_v con dato inicial y_0 verifique

$$y_v(T) = y_d\,.$$

Esta condición puede ser relajada de varias formas, obteniendo otras nociones de controlabilidad. En este sentido, diremos que el sistema de estado es aproximadamente controlable en H en el instante T si, en las condiciones anteriores, para cada $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que el correspondiente estado y_v verifica la condición

$$||y_v(T) - y_d||_H \leq \varepsilon.$$

Especialmente significativo resultará la controlabilidad exacta cuando $y_d \equiv 0$ (controlabilidad nula o exacta a cero), puesto que, en general, el estado 0 será un equilibrio del sistema y, desde el punto de vista físico, si somos capaces de conducir el sistema a cero en $t = T$, la solución sigue siendo nula para $t \geq T$ con tal de que tomemos como control $v \equiv 0$ para $t \geq T$.

Como pondremos de manifiesto más adelante, la irreversibilidad en tiempo de los problemas considerados hace que no se verifique la propiedad de controlabilidad exacta en ninguno de los casos. Veremos también que, al menos en las versiones lineales de estos problemas, sí se van a tener las propiedades de controlabilidad aproximada y exacta a cero (o nula) para cualquier instante de tiempo $T > 0$. Hay que destacar la gran diferencia que existe entre este tipo de sistemas y sistemas reversibles como la ecuación de ondas (prototipo de sistema reversible), ecuación para la que se dan las tres propiedades de controlabilidad mencionadas cuando el tiempo T es mayor que ciertos tiempos críticos que dependen del abierto Ω donde se plantea la ecuación y de la zona donde se ejerce el control (un subconjunto abierto de Ω o un trozo de la frontera de Ω) (cf. [18]).

En el trabajo nos centraremos básicamente en la descripción de los resultados de controlabilidad nula en cada uno de los casos pues, como hemos mencionado, no se va a verificar la propiedad de controlabilidad exacta y por otro lado, los correspondientes resultados de controlabilidad aproximada, como veremos, pueden ser obtenidos como consecuencia de los de controlabilidad nula.

Es bien conocido que la controlabilidad exacta a cero de un problema de evolución lineal equivale a la llamada desigualdad de observabilidad para el problema adjunto. La técnica que trataremos de describir pasa por demostrar esta desigualdad de observabilidad como consecuencia de una desigualdad global de tipo Carleman para el problema adjunto. Este tipo de desigualdades fueron probadas y utilizadas en [12] y [15] para obtener la controlabilidad nula de la ecuación del calor, aunque en el análisis que llevaremos a cabo, es de vital importancia la dependencia respecto de los datos de las constantes que aparecen en la desigualdad global de Carleman, dependencia que fue explicitada en [10].

Por comodidad y claridad del trabajo, estudiaremos el problema de la controlabilidad cuando el control se ejerce a través del segundo miembro de la ecuación considerada: control distribuido. Técnicamente, el estudio de la controlabilidad cuando el control se ejerce a través de la condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera es algo más complejo y será omitido en este trabajo.

Organizaremos el resto del trabajo del siguiente modo: dedicamos las Secciones 2 y 3 al estudio de los resultados de controlabilidad relativos a la ecuación del calor lineal y, en especial, probaremos la equivalencia que existe entre los conceptos de controlabilidad y ciertas propiedades del llamado sistema adjunto. En la cuarta Sección probaremos la denominada desigualdad de observabilidad para el problema adjunto y, como consecuencia, la controlabilidad nula de la ecuación del calor. De los resultados precedentes, en la Sección 5 obtendremos dos importantes consecuencias: por un lado, obtendremos de nuevo la propiedad de controlabilidad aproximada de la ecuación del calor utilizando un argumento cuantitativo y, por otro, una estimación del coste de la controlabilidad (nula y aproximada) de dicha ecuación. Acabaremos este trabajo introductorio presentando de forma somera algunos resultados de controlabilidad para versiones no lineales de la ecuación del calor y para el sistema incompresible de Stokes y Navier-Stokes.

2 La ecuación del calor. Controlabilidad Aproximada

En esta Sección y en lo que sigue, supondremos que Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$, de frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. Sean $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto no vacío de Ω y $T > 0$; denotemos $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. En el cilindro Q consideramos el problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y - \Delta y + B \cdot \nabla y + ay = v 1_{\mathcal{O}} & \text{en} \quad Q, \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

donde $1_{\mathcal{O}}$ es la función característica del conjunto $\mathcal{O}$, $v \in L^2(Q)$ es el control (siguiendo la terminología expuesta en la Sección anterior, $\mathcal{U}_{ad} = L^2(Q)$ es el conjunto de controles admisibles) e y_0, a y B están dados

$$y_0 \in L^2(\Omega), \quad a \in L^\infty(Q) \quad \text{y} \quad B \in L^\infty(Q)^N.$$

Hay que hacer notar que, debido a la presencia de la función característica $1_{\mathcal{O}}$, la acción del control sobre el sistema sólo se ejerce en el "pequeño" abierto $\mathcal{O}$ a través del segundo miembro de la EDP (control distribuido).

Es bien conocido que, bajo las condiciones anteriores, el problema (2.1) admite una única solución débil

$$y_v \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

solución que depende de forma continua de v e y_0. De esta forma podemos denotar $R(T; y_0)$ al subconjunto de $L^2(\Omega)$ dado por:

$$R(T; y_0) = \{y_v(T) : y_v \text{ solución de (2.1) con } v \in L^2(Q)\},$$

llamado conjunto de controles finales o alcanzables. Con esta notación podemos definir los distintos conceptos de controlabilidad:

Definición 1 1. *Se dice que el sistema* (2.1) *es exactamente controlable en* $L^2(\Omega)$ *en el instante de tiempo* T *si para cada* $y_0 \in L^2(\Omega)$

$$R(T; y_0) \equiv L^2(\Omega),$$

es decir, si para cada y_0, y_d *en* $L^2(\Omega)$, *existe un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que la solución de* (2.1) *verifica* $y_v(T) = y_d$.

2. *Se dice que el sistema* (2.1) *es aproximadamente controlable en* $L^2(\Omega)$ *en el instante de tiempo* T *si* $R(T; y_0)$ *es denso en* $L^2(\Omega)$ *para cada* $y_0 \in L^2(\Omega)$. *Dicho de otro modo, si para cualesquiera* y_0, $y_d \in L^2(\Omega)$ *y cada* $\varepsilon > 0$, *existe un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que la solución de* (2.1) *verifica*

$$||y_v(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon . \tag{2.2}$$

3. *Por último, se dice que* (2.1) *es controlable a cero en el instante de tiempo* T *si para cualquier* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *se tiene*

$$0 \in R(T; y_0),$$

es decir, si para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$ *existe un control* $v \in L^2(Q)$ *tal que la solución de* (2.1) *verifica* $y_v(T) = 0$. ■

Observación 2 1. Debido al efecto regularizante del operador del calor, no es difícil concluir que la controlabilidad exacta en $L^2(\Omega)$ de (2.1) no es cierta, salvo posiblemente en el caso $\mathcal{O} = \Omega$. En efecto, es conocido (cf. [16]) que el operador del calor $\partial_t - \Delta$ tiene la siguiente propiedad de regularidad: Si $y \in \mathcal{D}'(\mathcal{V} \times (0,T))$ (con $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ un abierto) verifica

$$\partial_t y - \Delta y = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{V} \times (0,T),$$

entonces, fijado $t \in (0,T]$, la aplicación

$$y(t) : x \in \mathcal{V} \mapsto y(x,t) \in \mathbb{R}$$

es analítica en $\mathcal{V}$. Sin más que aplicar el resultado al abierto $\mathcal{V} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ deducimos que sea cual sea la regularidad del dato inicial y_0 y para cualquier control $v \in L^2(Q)$, la solución y_v de (2.1) (con a y B nulas) verifica $y_v(T)$ es analítica en $\mathcal{V} = \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$. Esta propiedad, junto con la linealidad del sistema (2.1), imposibilita la controlabilidad exacta de éste en $L^2(\Omega)$. operador del

2. La controlabilidad exacta a cero de (2.1) implica la controlabilidad exacta a trayectorias de (2.1). De modo más preciso, sea $y^\star \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ solución de

$$\begin{cases} \partial_t y^\star - \Delta y^\star + B \cdot \nabla y^\star + a y^\star = 0 & \text{en} \quad Q, \\ y^\star = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y^\star(x,0) = y_0^\star(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

con $y_0^\star \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución de (2.1) verifica

$$y_v(x,T) = y^\star(x,T), \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Para comprobar este hecho, basta elegir $v \in L^2(Q)$ tal que la solución Y de (2.1) para los datos v e $y_0 - y_0^\star$ verifique $Y(\cdot, T) = 0$ en Ω. Tomando v como control y utilizando la linealidad del problema, es fácil deducir que la solución y_v de (2.1) (correspondiente a v e y_0) verifica $y_v = y^\star + Y$, de donde obtenemos (2.3). ∎

Antes de centrarnos en el problema de la controlabilidad nula de (2.1), recordemos algunos resultados sobre la controlabilidad aproximada de este sistema. Como consecuencia del Teorema de la Proyección se tiene que la controlabilidad aproximada de (2.1) en $L^2(\Omega)$ en el instante T equivale a probar la propiedad:

"Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y sea φ la solución de (problema adjunto)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi - \nabla \cdot (B\varphi) + a\varphi = 0 & \textit{en} \quad Q, \\ \varphi = 0 & \textit{sobre} \quad \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \textit{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $\varphi \equiv 0$ en $\mathcal{O} \times (0,T)$, entonces $\varphi_0 \equiv 0$ (y, así, $\varphi \equiv 0$ en Q)."

Se trata, por tanto, de probar una propiedad denominada de continuación única para el problema adjunto (2.4). Para la ecuación que nos ocupa, esta propiedad se deduce de resultados de continuación única para problemas de quasi-Stokes probados en [6]. Es interesante hacer notar que la propiedad de continuación única para el sistema (2.4) (y en consecuencia la controlabilidad aproximada de (2.1)) es válida para cualquier abierto $\mathcal{O}$ y para cualquier instante de tiempo T.

Es posible dar un procedimiento constructivo para calcular un control que conduzca el sistema (2.1) desde $y_0 \in L^2(\Omega)$, en el instante inicial, hasta un estado deseado $y_d \in L^2(\Omega)$, en el instante final T, con un error menor que ε. Se trata del método variacional desarrollado en [19]: Consideramos el funcional J_ε definido en $L^2(\Omega)$ dado por

$$J_\varepsilon(\varphi_0) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2\,dx\,dt + \varepsilon||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} - (\varphi_0, y_d - \widetilde{y}(T))_{L^2(\Omega)} \quad (2.5)$$

donde φ es la solución de (2.4) asociada a φ_0, $\widetilde{y}$ es la solución de (2.1) asociada al control $v \equiv 0$ y donde mediante $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ estamos denotando el producto en $L^2(\Omega)$. El funcional J_ε es un funcional convexo, continuo y, como consecuencia de la propiedad de continuación única para (2.4), coercitivo en $L^2(\Omega)$. De hecho verifica (cf. [8])

$$\liminf_{||\varphi_0||_{L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi_0)}{||\varphi_0||_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

Estas propiedades garantizan que el funcional J_ε alcance el mínimo en un único $\widehat{\varphi}_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. Tomando en (2.1) el control $v_\varepsilon = \widehat{\varphi}^\varepsilon 1_{\mathcal{O}}$, con $\widehat{\varphi}^\varepsilon$ la solución de (2.4) asociada a $\widehat{\varphi}_0^\varepsilon$, el estado $\widehat{y}_\varepsilon$—solución de (2.1) asociada a v_ε—verifica ([19, 8])

$$||\widehat{y}_\varepsilon(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Tenemos así descrito un procedimiento que construye, a partir de los datos y_0, y_d y ε, un control que resuelve el problema de la controlabilidad aproximada de (2.1) en el instante T. De hecho, el control construido v_ε es el de norma $L^2(\Omega)$ mínima entre los controles que verifican (2.2) (cf. [19]). Este procedimiento, combinado con un método de punto fijo, proporciona la demostración de la controlabilidad aproximada en $L^2(\Omega)$ de versiones no lineales de la ecuación del calor bajo condiciones de crecimiento sublineal de los términos no lineales de la ecuación (cf. [8, 22])

exacta

3 La ecuación del calor. Controlabilidad Nula o Exacta a cero

Pasemos a continuación al estudio de la controlabilidad nula de la ecuación (2.1) y para ello, supongamos dado $y_0 \in L^2(\Omega)$. Para llegar a nuestro objetivo razonaremos del siguiente modo: Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, para cada $\varepsilon > 0$, tomaremos $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_{\mathcal{O}}$ con φ_ε la solución de (2.4) asociada a $\varphi_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ y φ_0^ε el mínimo en $L^2(\Omega)$ del funcional J_ε dado por (2.5) con $y_d \equiv 0$ ($\widetilde{y}$ es la solución de (2.1) asociada a y_0 y $v = 0$). Sabemos que la correspondiente solución de (2.1) asociada al control v_ε—y_ε—verifica

$$||y_\varepsilon(T)||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (3.6)$$

De las ecuaciones verificadas por $\widetilde{y}$ y φ deducimos

$$(\varphi_0, \widetilde{y}(T))_{L^2(\Omega)} = (\varphi(0), y_0)_{L^2(\Omega)}$$

y, así, el funcional J_ε es:

$$J_\varepsilon(\varphi_0) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2\, dx\, dt + \varepsilon||\varphi_0||_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \varphi(x,0)y_0(x)\, dx.$$

En el mínimo φ_0^ε, se verifica la igualdad

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon(x,t)|^2\, dx\, dt + \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x,0)y_0(x)\, dx + \varepsilon||\varphi_0^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} = 0. \qquad (3.7)$$

Supongamos que existe una constante $C > 0$, independiente de φ_0, tal que se tenga

$$||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2\, dx\, dt, \qquad (3.8)$$

con φ solución de (2.4) asociada a φ_0. Entonces, de (3.7) obtenemos (para cada $\eta > 0$)

$$\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon(x,t)|^2\, dx\, dt + \varepsilon||\varphi_0^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \varphi_\varepsilon(x,0)y_0(x)\, dx \leq$$

$$\frac{1}{2}\eta^2||\varphi_\varepsilon(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\eta^2}||y_0||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C\eta^2}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi_\varepsilon(x,t)|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2\eta^2}||y_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Elegimos $\eta^2 = 1/C$ y, teniendo en cuenta que $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_{\mathcal{O}}$, deducimos

$$\frac{1}{2}||v_\varepsilon||^2_{L^2(Q)} + \varepsilon||\varphi_0^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{2}||y_0||^2_{L^2(\Omega)},$$

y, de aquí, una estimación (independiente de ε) de la norma en $L^2(Q)$ del control:

$$||v_\varepsilon||^2_{L^2(Q)} \leq C\, ||y_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Esta acotación uniforme respecto de ε permite extraer una subsucesión $\{v_{\varepsilon_n}\}$ (con $\varepsilon_n \downarrow 0$) débilmente convergente hacia $\hat{v} \in L^2(Q)$. Para esta subsucesión se tiene:

$$y_{v_{\varepsilon_n}} \to y_{\hat{v}} \text{ en } L^2(Q) \quad \text{e} \quad y_{v_{\varepsilon_n}}(T) \to y_{\hat{v}}(T) \text{ en } L^2(\Omega),$$

con $y_{v_{\varepsilon_n}}$ e $y_{\hat{v}}$ las correspondientes soluciones de (2.1) asociadas a v_{ε_n} y $\hat{v}$, respectivamente. Sin más que recordar (3.6), al tomar límites, obtenemos que $y_{\hat{v}}(T) = 0$ en Ω. Tenemos así:

Teorema 3 *Sea $y_0 \in L^2(\Omega)$. Supongamos que existe $C > 0$ (independiente de φ_0) tal que se verifica* (3.8). *Entonces, existe un control $\hat{v}$ de $L^2(Q)$ tal que la correspondiente solución de* (2.1) *verifica $y_{\hat{v}}(T) = 0$ en $L^2(\Omega)$. Además, el control $\hat{v}$ puede ser elegido tal que*

$$||\hat{v}||^2_{L^2(Q)} \leq C\,||y_0||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.9}$$

■

Observación 4 Es interesante hacer notar que el argumento utilizado para demostrar la controlabilidad nula de (2.1) es un argumento cuantitativo. En particular, proporciona una estimación de la norma $L^2(Q)$ del control que da la controlabilidad nula, respecto de la norma $L^2(\Omega)$ del dato inicial y_0. Basta, por tanto, con estimar la constante C que aparece en la desigualdad (3.8) para estimar el coste de la controlabilidad nula del sistema (2.1). ■

La desigualdad (3.8) del sistema adjunto (2.4) recibe el nombre de desigualdad de observabilidad. Además de ser una condición suficiente para que se tenga la controlabilidad nula del sistema (2.1), también es una condición necesaria. De hecho, se tiene:

Teorema 5 *Supongamos que para cada $y_0 \in L^2(\Omega)$ existe un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ verificando* (3.9) *(C independiente de y_0) y tal que la correspondiente solución $y_{\hat{v}}$ de* (2.1) *satisface*

$$y_{\hat{v}}(\cdot, T) = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Entonces, se tiene la desigualdad de observabilidad (3.8) *para el problema adjunto* (2.4) *con la misma constante C.*

Demostración: Sea $y_0 \in L^2(\Omega)$ y consideremos un control $\hat{v} \in L^2(Q)$ que verifique (3.9) y tal que $y_{\hat{v}}$, la solución de (2.1) asociada a $\hat{v}$ e y_0, cumpla $y_{\hat{v}}(T) = 0$ en Ω. Sea $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ y φ la solución de (2.4) asociada a φ_0. Es fácil comprobar:

$$\int_\Omega \varphi(x,0) y_0(x)\,dx = -\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \hat{v}(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt \leq$$
$$||\varphi 1_{\mathcal{O}}||_{L^2(Q)}||\hat{v}||_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C}\,||\varphi 1_{\mathcal{O}}||_{L^2(Q)}||y_0||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall y_0 \in L^2(\Omega).$$

Así,

$$||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi(x,t)|^2\,dx\,dt.$$

■

Aunque la norma que aparece a la izquierda de la desigualdad de observabilidad (3.8) es muy débil, a causa de la irreversibilidad del sistema (2.4), esta desigualdad no es fácil de probar. Varias han sido las técnicas utilizadas en la demostración de esta desigualdad, aunque la mayoría de las veces ésta ha sido demostrada como consecuencia del correspondiente resultado de controlabilidad nula. Mencionemos los trabajos de [32] y [17], donde se estudia la controlabilidad nula de la ecuación del calor ($a \equiv 0$, $B \equiv 0$). En el primero de ellos se prueba que la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas implica la controlabilidad nula de la ecuación del calor. Mediante este razonamiento se tendrá la desigualdad (3.8) si imponemos al abierto $\mathcal{O}$ y al tiempo T condiciones geométricas análogas a las que se imponen para la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas (cf. [18, 2]). El segundo de los trabajos utiliza desarrollos en series de Fourier de las soluciones de la ecuación del calor y propiedades óptimas de las autofunciones del Laplaciano. El resultado obtenido por estos autores prueba la controlabilidad nula (y, en consecuencia, la desigualdad de observabilidad para la ecuación del calor retrógrada) para cualesquiera abierto $\mathcal{O}$ y tiempo T. Sin embargo, esta técnica no puede generalizarse al caso de ecuaciones donde aparezcan coeficientes dependientes del tiempo. En el presente trabajo trataremos de describir una tercera técnica que demuestra la desigualdad de observabilidad para cualesquiera $\mathcal{O}$ y T cuando en la ecuación del sistema adjunto aparecen coeficientes en $L^\infty(Q)$ que dependen de la variable temporal. Demostraremos la desigualdad (3.8), veremos cómo depende la constante C respecto de los datos T, $||a||_\infty$ y $||B||_\infty$ y, en consecuencia, daremos una estimación de la norma $L^2(Q)$ del control de norma mínima que da la controlabilidad nula. Volveremos sobre este punto más adelante.

Como se puso de manifiesto, demostraremos la desigualdad (3.8) combinando desigualdades globales de tipo Carleman y estimaciones de energía para el problema adjunto.

4 Desigualdad global de Carleman. Desigualdad de Observabilidad

Dedicamos este apartado a demostrar la desigualdad de observabilidad (3.8) para el problema adjunto (2.4). Comenzaremos presentando una desigualdad de Carleman global para las soluciones de la ecuación del calor retrógrada cuando el segundo miembro de la ecuación está en $H^{-1}(\Omega)$.

Consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta\varphi = F_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & \text{en } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

donde $F_0, F_i \in L^2(Q)$ $(1 \le i \le N)$ y $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. Se tiene:

Lema 6 *Existen una función regular y estrictamente positiva en $\overline{\Omega}$, α_0, y dos constantes positivas C_0 y σ_0 (sólo dependientes de Ω y $\mathcal{O}$) tales que*

$$\begin{cases} s \displaystyle\iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-1}(T-t)^{-1} |\nabla\varphi|^2 \, dx\, dt + s^3 \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \, dx\, dt \\ \le C_0 \left(s^3 \displaystyle\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha} t^{-3}(T-t)^{-3} |\varphi|^2 \, dx\, dt + \iint_Q e^{-2s\alpha} |F_0|^2 \, dx\, dt \right. \\ \qquad \left. + s^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \iint_Q e^{-2s\alpha} t^{-2}(T-t)^{-2} |F_i|^2 \, dx\, dt \right), \end{cases} \tag{4.11}$$

para todo $s \ge s_0 = \sigma_0(\Omega, \mathcal{O})(T + T^2)$, siendo φ la solución de (4.10) asociada a $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. En (4.11), la función $\alpha = \alpha(x,t)$ viene dada por

$$\alpha(x,t) = \frac{\alpha_0(x)}{t(T-t)}.$$

■

Este resultado está demostrado en [15] y está basado en una desigualdad similar para la ecuación del calor retrógrada con segundo miembro en $L^2(Q)$ (cf. [12]). El estudio de la dependencia de la constante s_0 respecto de T está hecho en [10] y es fundamental en el análisis de problemas de controlabilidad nula de versiones no lineales de (2.1) (cf. [11], [5]).

Observación 7 1. La construcción de la función $\alpha_0 = \alpha_0(x)$ está hecha en [12]. Se trata de una función que, entre otras propiedades, verifica:

$$\alpha_0 \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \alpha_0 > 0 \text{ en } \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad \nabla\alpha_0 \ne 0 \text{ en } \overline{\Omega} \setminus \mathcal{O}.$$

2. Cuando el segundo miembro de la ecuación retrógrada (4.10) es más regular (está en $L^2(Q)$) se obtiene una mejor desigualdad de Carleman (cf. [12]). En concreto, es posible añadir a la izquierda de (4.11) el nuevo sumando:

$$\frac{1}{s} \iint_Q e^{-2s\alpha} t(T-t) \left(|\partial_t \varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2 \right) dx\, dt.$$

3. También es posible obtener desigualdades del tipo (4.11) para las soluciones de problemas parabólicos más generales que el presentado. En concreto, podemos sustituir el operador $-\Delta$ por un operador lineal de segundo orden de la forma

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$$

donde los coeficientes a_{ij} verifican ($\eta > 0$ es una constante fija)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{ij} \in W^{1,\infty}(Q), \qquad \forall i,j : 1 \le i,j \le N, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \eta|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.c.t. } (x,t) \in Q. \end{array}\right.$$

Para la prueba de este resultado y otros relacionados, véase [15]. ∎

En el caso particular de la ecuación adjunta (2.4) podemos escribir una desigualdad análoga:

Lema 8 *Existen dos constantes positivas C_1 y σ_1 (que sólo dependen de Ω y $\mathcal{O}$) tales que*

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt \\ \qquad\qquad \displaystyle\le C_1 s^3 \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt, \end{array}\right. \tag{4.12}$$

para $s \ge s_1 = \sigma_1(\Omega,\mathcal{O})\left(T + T^2 + T^2||a||_\infty^{2/3} + T^2||B||_\infty^2\right)$, siendo φ la solución de (2.4) asociada a $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$.

Demostración: Supongamos dados a, B y φ_0 y sea φ la correspondiente solución de (2.4). En particular, φ es solución de (4.10) con

$$F_0 = -a\varphi \quad \text{y} \quad F_i = B_i\varphi.$$

Del lema anterior deducimos,

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle s\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-1}(T-t)^{-1}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + s^3\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt \\ \displaystyle\le C_0\left(s^3\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt + \iint_Q e^{-2s\alpha}|a\varphi|^2\,dx\,dt\right. \\ \qquad\qquad \displaystyle\left.+ s^2\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-2}(T-t)^{-2}|B\varphi|^2\,dx\,dt\right) \end{array}\right.$$

para $s \geq s_0$. Acotamos los términos de la derecha de la siguiente forma:

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}|a\varphi|^2\,dx\,dt \leq 2^{-6}T^6\|a\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt,$$

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-2}(T-t)^{-2}|B\varphi|^2\,dx\,dt \leq 2^{-2}T^2\|B\|_\infty^2 \iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt.$$

Elegimos $s \geq s_0$ tal que

$$2^{-6}T^6||a||_\infty^2 C_0 \leq \frac{1}{4}s^3, \qquad 2^{-2}T^2||B||_\infty^2 C_0 s^2 \leq \frac{1}{4}s^3,$$

es decir,

$$s \geq \widetilde{s}_1 = \max\left(s_0, 2^{-4/3}C_0^{1/3}T^2||a||_\infty^{2/3}, C_0T^2||B||_\infty^2\right).$$

De esta manera deducimos (4.12) para $C_1 = 2C_0$. Observando la nueva constante $\widetilde{s}_1$, no es difícil convencerse de que podemos elegir una nueva constante $s_1 \geq \widetilde{s}_1$ de la forma

$$s_1 = \sigma_1(\Omega, \mathcal{O})\left(T + T^2 + T^2||a||_\infty^{2/3} + T^2||B||_\infty^2\right).$$

■

Observación 9 De la desigualdad (4.12) obtenemos de nuevo, como una inmediata consecuencia, la propiedad de continuación única para el problema adjunto (2.4) que habíamos mencionado anteriormente. ■

Estamos en condiciones de probar la desigualdad de observabilidad (3.8) para el problema adjunto. Por comodidad en la notación, usaremos siempre C para designar una constante positiva genérica que sólo depende de Ω y de $\mathcal{O}$ y cuyo valor puede ir variando de una línea a la siguiente. De esta forma, tenemos:

Teorema 10 *Para cada $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ se tiene*

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp\left[C\,M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)\right] \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2, \tag{4.13}$$

donde φ es la solución de (2.4) asociada a φ_0 y $M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)$ viene dada por:

$$M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty) = \left(1 + \frac{1}{T} + T\|a\|_\infty + \|a\|_\infty^{2/3} + (1+T)\|B\|_\infty^2\right). \tag{4.14}$$

Demostración: De la desigualdad global de Carleman (4.12) para (2.4) obtenemos

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3}|\varphi|^2\,dx\,dt, \tag{4.15}$$

para $s \geq s_1$. Por otro lado, es fácil comprobar

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \leq 2^6 T^{-6} \exp\left(-CsT^{-2}\right) \quad \forall (x,t) \in \overline{Q} \tag{4.16}$$

y

$$e^{-2s\alpha}t^{-3}(T-t)^{-3} \geq \left(\frac{16}{3}\right)^3 T^{-6} \exp\left(-CsT^{-2}\right) \; \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [T/4, 3T/4], \tag{4.17}$$

siempre que

$$s \geq s_2 = \max\left(s_1, 3T^2(8 \min_{x\in\overline{\Omega}} \alpha_0(x))^{-1}\right),$$

con α_0 la función introducida en el Lema 6.

Analizando la estructura de la constante s_2, observamos que podemos elegir $s_3 \geq s_2$ con s_3 de la forma

$$s_3 = \sigma_3 \left(T + T^2 + T^2\|a\|_\infty^{2/3} + T^2\|B\|_\infty^2\right)$$

y σ_3 sólo dependiente de Ω y $\mathcal{O}$. Trabajamos a partir de ahora con $s = s_3$. Teniendo en cuenta (4.16) y (4.17) y volviendo a (4.15) (escrita para $s = s_3$), deducimos

$$\iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2 \, dx \, dt \leq \exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + \|B\|_\infty^2\right)\right] \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx \, dt. \tag{4.18}$$

Probaremos a continuación

$$\|\varphi(T/4)\|_{L^2}^2 \leq \exp\left[C\left(\frac{1}{T} + T\|a\|_\infty + T\|B\|_\infty^2\right)\right] \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi|^2 \, dx \, dt. \tag{4.19}$$

Es sencillo comprobar que la solución φ de (2.4) verifica la desigualdad de energía

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left((2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2)t\right) \int_\Omega |\varphi|^2 \, dx\right) \geq 0$$

para $t \geq 0$. Si integramos esta desigualdad respecto del tiempo en el intervalo $[T/4, t]$ con $t \in [T/4, 3T/4]$ fija, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2 \, dx & \geq & \exp\left[\left(2\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2\right)(T/4 - t)\right] \displaystyle\int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx \\ & \geq & \exp\left[-\left(\|a\|_\infty + \dfrac{1}{2}\|B\|_\infty^2\right) T\right] \displaystyle\int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx \end{array}\right.$$

para todo $t \in [T/4, 3T/4]$. Integrando de nuevo esta última desigualdad respecto de t, llegamos a

$$\frac{T}{2} \int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2 \, dx \leq \exp\left[\left(\|a\|_\infty + \frac{1}{2}\|B\|_\infty^2\right) T\right] \iint_{\Omega\times(T/4,3T/4)} |\varphi(x,t)|^2, \, dx \, dt$$

y, de aquí, (4.19).

De manera análoga, utilizando la desigualdad de energía, obtenemos

$$\int_\Omega |\varphi(x,0)|^2\,dx \le \exp\left[CT\left(\|a\|_\infty + \|B\|_\infty^2\right)\right]\int_\Omega |\varphi(x,T/4)|^2\,dx,$$

que junto a (4.19) y (4.18) conducen a la desigualdad de observabilidad deseada (4.13). ■

Una vez demostrada la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto y en vista de los Teoremas 3 y 5, estamos en condiciones de enunciar el resultado de controlabilidad exacta a cero para el sistema (2.1):

Teorema 11 *Supongamos dados $T > 0$, $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe un control $\widehat{v} \in L^2(Q)$ tal que la correspondiente solución $\widehat{y}$ de* (2.1) *satisface*

$$\widehat{y}(x,T) = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Además, $\widehat{v}$ puede ser elegido de manera que se tenga la acotación

$$||\widehat{v}||_{L^2(Q)} \le \exp\left[C\,M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)\right]||y_0||_{L^2(\Omega)},$$

con $M(T,\|a\|_\infty,\|B\|_\infty)$ dada por (4.14) *(Como siempre, C es una constante que sólo depende de Ω y $\mathcal{O}$).* ■

Con la técnica que acabamos de exponer hemos sido capaces de probar el resultado de controlabilidad nula del sistema (2.1). Además, hemos dado una cota de la norma $L^2(Q)$ del control construido en función de los datos del problema. Aprovechando el efecto regularizante del problema adjunto (2.4), es posible mejorar este resultado de controlabilidad nula. Este resultado mejorado se basa en una versión refinada de la desigualdad de observabilidad para (2.1). En concreto, se puede probar:

$$||\varphi(0)||_{L^2(\Omega)} \le \exp\left[C\,K(T,||a||_\infty,||B||_\infty)\right]\left(\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\varphi|\,dx\,dt\right)^2, \tag{4.20}$$

donde

$$K(T,||a||_\infty,||B||_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + T + \left(T + T^{1/2}\right)||a||_\infty + ||a||_\infty^{2/3} + (1+T)||B||_\infty^2. \tag{4.21}$$

Trabajando con esta nueva desigualdad y cambiando ligeramente la expresión del funcional J_ε dado por (2.5), llegamos al siguiente resultado mejorado de controlabilidad nula de (2.1) (cf. [5, 10]):

Teorema 12 *Supongamos dados* $T > 0$*,* $a \in L^\infty(Q)$*,* $B \in L^\infty(Q)^N$ *e* $y_0 \in L^2(\Omega)$*. Entonces, existe un control* $\widehat{v} \in L^\infty(Q)$ *tal que la correspondiente solución* $\widehat{y}$ *de* (2.1) *satisface*

$$\widehat{y}(x,T) = 0 \quad en \quad \Omega.$$

Además, $\widehat{v}$ *puede ser elegido de tal forma que se tenga la acotación*

$$||\widehat{v}||_{L^\infty(Q)} \leq \exp\left[C\, K(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)\right] ||y_0||_{L^2(\Omega)}.$$

donde $K(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)$ *está dado por* (4.21). ∎

Observación 13 El resultado anterior y, en concreto, la acotación en $L^\infty(Q)$ del control que proporciona la controlabilidad nula de (2.1), es fundamental cuando se quiere tratar la controlabilidad exacta a cero de versiones no lineales de la ecuación del calor. Especificando algo más, esta acotación juega un papel primordial cuando se permite que la no linealidad tenga un crecimiento superlineal en el infinito (véase [11] y [5]). ∎

5 Consecuencias: Controlabilidad Aproximada, Coste de la Controlabilidad

Dedicaremos esta Sección a ver dos consecuencias del procedimiento utilizado en la prueba de la controlabilidad nula del sistema (2.1). Por un lado, probaremos de nuevo la controlabilidad aproximada de (2.1) que, como hemos visto, ha sido demostrada anteriormente utilizando una propiedad cualitativa del sistema adjunto (la propiedad de continuación única). Este primer procedimiento presentado tenía la desventaja de no proporcionar la dependencia explícita del control construido respecto de los datos y_0 (dato inicial), y_d (estado deseado), ε (distancia permitida) y a y B (coeficientes de la ecuación). La nueva prueba que proponemos está basada en la propiedad de controlabilidad nula de (2.1) y, por tanto, en una propiedad cuantitativa del sistema adjunto: la desigualdad de observabilidad. Como consecuencia, obtendremos más información de la dependencia del control que da la controlabilidad aproximada respecto de los datos. Esto nos lleva a la segunda consecuencia de la que hablábamos: el coste de la controlabilidad nula y aproximada del sistema (2.1). Nos centraremos sobre todo en el caso de la controlabilidad aproximada, pues el resultado para la controlabilidad nula ha sido obtenido en el Teorema 11 (ver también el Teorema 12).

5.1 Controlabilidad Aproximada

Supongamos dados $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo es construir un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución de (2.1) asociada a v, y, verifique (2.2).

Según pusimos de manifiesto en la Observación 2, la controlabilidad exacta a cero de (2.1) implica la controlabilidad exacta a cualquier trayectoria de este sistema. Teniendo en cuenta esta idea, vamos a dar un procedimiento que construye un control que da la controlabilidad aproximada de nuestro sistema a partir de los datos y_0, y_d y ε. Nuestra argumentación es como sigue:

- Dado ε, existe $\delta \in (0,T)$, que sólo depende de Ω, y_d, ε, a y B, tal que la solución w de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + B\cdot\nabla w + aw = 0 & \text{en} \quad \Omega\times(T-\delta,T), \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(T-\delta,T), \\ w(x,T-\delta) = y_d(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.22}$$

  verifica

$$||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

  Fijamos de este modo w y δ.

- En el intervalo $[0, T-\delta]$ dejamos que el sistema (2.1) evolucione libremente ($v \equiv 0$). Sea $y_1 \in C([0,T-\delta]; L^2(\Omega))$ la correspondiente solución, es decir, la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 + B\cdot\nabla y_1 + ay_1 = 0 & \text{en} \quad \Omega\times(0,T-\delta), \\ y_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T-\delta), \\ y_1(x,0) = y_0(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

  (En particular, $y_1(T-\delta) \in L^2(\Omega)$).

- Finalmente, en el intervalo $[T-\delta, T]$, basta conducir el sistema de forma exacta desde $y_1(T-\delta)$ hasta la trayectoria $w(T)$. En efecto, en vista de la Observación 2, sabemos que existe $v_2 \in L^2(\Omega\times(T-\delta,T))$ tal que el sistema

$$\begin{cases} \partial_t y_2 - \Delta y_2 + B\cdot\nabla y_2 + ay_2 = v_2 1_{\mathcal{O}} & \text{en} \quad \Omega\times(T-\delta,T), \\ y_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(T-\delta,T), \\ y_2(x,T-\delta) = y_1(x,T-\delta) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5.23}$$

  posee una única solución $y_2 \in C([T-\delta,T]; L^2(\Omega))$ que verifica

$$y_2(x,T) = w(x,T) \quad \text{p.c.t. } x\in\Omega.$$

Razonando así y tomando como control

$$v = \begin{cases} 0 & \text{en } [0, T-\delta], \\ v_2 & \text{en } [T-\delta, T], \end{cases}$$

el correpondiente estado asociado solución de (2.1) es

$$y = \begin{cases} y_1 & \text{en } [0, T-\delta], \\ y_2 & \text{en } [T-\delta, T], \end{cases}$$

que, evidentemente, verifica (2.2). Obtenemos de esta forma un nuevo procedimiento constructivo de demostración de la controlabilidad aproximada de (2.1) en el instante T.

5.2 Coste de la Controlabilidad

Expondremos brevemente cómo los procedimientos que prueban la controlabilidad nula y aproximada de (2.1) proporcionan una acotación superior del coste de la controlabilidad. El caso en el que el coeficiente B de la EDP de (2.1) es idénticamente nulo está estudiado en profundidad en [10]. Veamos someramente qué ocurre en el caso en el que aparecen ambos coeficientes a y B.

Dados $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, denotemos $\mathcal{U}_{ad}(y_0, y_d; \varepsilon)$ al conjunto (no vacío)

$$\mathcal{U}_{ad}(y_0, y_d; \varepsilon) = \{v \in L^2(Q) : y_v \text{ solución de (2.1) satisface (2.2)}\}.$$

Siguiendo [10], la cantidad

$$\mathcal{C}(y_0, y_d; \varepsilon) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}(y_0, y_d; \varepsilon)} ||v||_{L^2(Q)}$$

mide el coste de la controlabilidad aproximada de (2.1) en el instante T. Acotaremos superiormente este coste en el caso particular $y_0 \equiv 0$. Esto no supone ninguna restricción pues, de la linealidad de (2.1), se tiene

$$\mathcal{C}(y_0, y_d; \varepsilon) \equiv \mathcal{C}(0, z_d; \varepsilon)$$

con $z_d = y_d - y_1(T)$ e y_1 solución de (2.1) para $v = 0$.

Por otro lado, sea

$$\mathcal{U}_{ad}(y_0, 0) = \{v \in L^2(Q) : y_v \text{ solución de (2.1) satisface } y_v(T) = 0\}$$

que como sabemos, es un conjunto no vacío. El coste de la controlabilidad nula de (2.1) viene dado mediante la cantidad

$$\mathcal{C}(y_0, 0) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}(y_0, 0)} ||v||_{L^2(Q)}.$$

Observación 14 Hay que resaltar que la estimación de $\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon)$ sólo es interesante cuando $||y_d||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$. En efecto, si $||y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, es fácil comprobar que $v \equiv 0$ está en $\mathcal{U}_{ad}(0, y_d; \varepsilon)$ y que, por tanto,

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \equiv 0.$$

■

Con esta notación, se tiene:

Teorema 15 *Supongamos dados $a \in L^\infty(Q)$, $B \in L^\infty(Q)^N$ y $T > 0$. Entonces:*

1. Dado $y_0 \in L^2(\Omega)$, se tiene:

$$\mathcal{C}(y_0, 0) \leq \exp\left[C\, M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)\right] ||y_0||_{L^2(\Omega)}$$

donde $M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty)$ viene dada por (4.14).

2. Dado $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq \exp\left[C\left(M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty) + N(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d)\right)\right] ||y_d||_{L^2(\Omega)} \tag{5.24}$$

para cualquier $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, donde $N(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} N(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d) &= \frac{||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)} + ||B||_\infty \left(1 + ||B||_\infty\right) ||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon} \\ &+ \frac{\left(||a||_\infty + ||B||_\infty^2\right) ||y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Demostración: Nos centraremos en la segunda parte del resultado pues el primer apartado ha sido demostrado anteriormente. Demostraremos esta segunda parte bajo la hipótesis $||y_d||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$.

Observando la Sección 5.1, está claro que, dados y_d y ε, podemos acotar el coste

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq ||v_2||_{L^2(\Omega \times (T-\delta, T))}$$

donde v_2 es el control que conduce de forma exacta el sistema (2.1) desde 0 ($y_0 \equiv 0$), en el instante $T - \delta$, hasta $w(T)$ en el instante T. No hay que olvidar que $\delta > 0$ era tal que

$$||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

siendo, a su vez, w la solución de (5.22). Utilizamos de nuevo la linealidad de los sistemas considerados para afirmar que el control v_2 es el control que conduce de forma exacta el sistema desde $-y_d$, en $T - \delta$, hasta 0 en T. Así,

$$||v_2||_{L^2(Q)} \leq \exp\left[C\, M(\delta, ||a||_\infty, ||B||_\infty)\right] ||y_d||_{L^2(\Omega)} \tag{5.25}$$

donde M está dada por (4.14) y C es, como siempre, una constante que sólo depende de Ω y $\mathcal{O}$. Basta, para finalizar, acotar δ en función de los datos a, B, y_d y ε. La solución $w \in C([T-\delta,T];L^2(\Omega))$ de (5.22) viene dada por la igualdad:

$$w(T-\delta+t) = S(t)y_d - \int_0^t S(t-s)[a(T-\delta+s)w(T-\delta+s)+B(T-\delta+s)\cdot\nabla w(T-\delta+s)]\,ds \tag{5.26}$$

donde $S(\cdot)$ es el semigrupo generado por la ecuación del calor en Ω con condiciones de Dirichlet sobre la frontera, es decir, si $u(t) = S(t)u_0$, u es la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, entonces

$$||\partial_t u(t)||^2_{L^2(\Omega)} = ||\Delta u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\Delta u_0||^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,\infty)$$

y

$$||S(t)u_0 - u_0||_{L^2(\Omega)} \leq t||\Delta u_0||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0,\infty). \tag{5.27}$$

Volviendo a (5.26),

$$w(T) = S(\delta)y_d - \int_0^\delta S(\delta-s)[a(T-\delta+s)w(T-\delta+s)+B(T-\delta+s)\cdot\nabla w(T-\delta+s)]\,ds$$

y así,

$$||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq ||S(\delta)y_d - y_d||_{L^2(\Omega)}$$
$$+||\int_0^\delta S(\delta-s)[a(T-\delta+s)w(T-\delta+s) + B(T-\delta+s)\cdot\nabla w(T-\delta+s)]\,ds||_{L^2(\Omega)}.$$

Si utilizamos que $S(\cdot)$ es un semigrupo de contracciones en $L^2(\Omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned} ||w(T) - y_d||_{L^2(\Omega)}||_{L^2(\Omega)} &\leq ||S(\delta)y_d - y_d||_{L^2(\Omega)} + ||a||_\infty \int_0^\delta ||w(T-\delta+s)||_{L^2(\Omega)}\,ds \\ &+ ||B||_\infty \int_0^\delta ||\nabla w(T-\delta+s)||_{L^2(\Omega)}\,ds. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Acotaremos las integrales que aparecen en esta última desigualdad utilizando propiedades de w. De la desigualdad de la energía verificada por w

$$\frac{d}{dt}||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(2||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right) ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$

deducimos

$$||w(T-\delta+s)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||y_d||^2_{L^2(\Omega)} e^{\left(2||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)s}, \quad \forall s \in (0,\delta). \tag{5.29}$$

Gracias a la regularidad del dato inicial ($y_d \in H^1_0(\Omega)$), también podemos obtener

$$\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||B||^2_\infty ||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||a||^2_\infty ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)}$$

y de aquí,

$$\frac{d}{dt}\left\{||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} e^{||B||^2_\infty (T-\delta-t)}\right\} \leq ||a||^2_\infty ||w(t)||^2_{L^2(\Omega)} e^{||B||^2_\infty (T-\delta-t)},$$

para $t \in (T-\delta, T)$. Integrando respecto de t en $[T-\delta, T-\delta+s]$ y utilizando (5.29), llegamos a

$$\left\{\begin{aligned} &||\nabla w(T-\delta+s)||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||\nabla y_d||^2_{L^2(\Omega)} e^{||B||^2_\infty s} + \frac{1}{2}||a||_\infty ||y_d||^2_{L^2(\Omega)} e^{\left(2||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)s} \\ &\qquad \leq \left[||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)} e^{\frac{1}{2}||B||^2_\infty s} + \frac{1}{\sqrt{2}}||a||^{1/2}_\infty ||y_d||_{L^2(\Omega)} e^{\left(||a||_\infty + \frac{1}{2}||B||^2_\infty\right)s}\right]^2. \end{aligned}\right. \tag{5.30}$$

Llevando (5.27), (5.29) y (5.30) a (5.28), obtenemos

$$\begin{aligned} ||w(T)-y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \delta ||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2}||y_d||_{L^2(\Omega)} \left[e^{\left(||a||_\infty + \frac{1}{2}||B||^2_\infty\right)\delta} - 1\right] \\ + \frac{2}{||B||_\infty}||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)} \left[e^{\frac{1}{2}||B||^2_\infty \delta} - 1\right]. \end{aligned}$$

Acotamos cada sumando por $\varepsilon/3$ y así, elegimos δ

$$\begin{aligned} \delta = \min \Bigg(T, \frac{\varepsilon}{3||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)}}, \frac{1}{||a||_\infty + \frac{1}{2}||B||^2_\infty} \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}||y_d||_{L^2(\Omega)}}\right), \\ \frac{2}{||B||^2_\infty} \log\left(1 + \frac{||B||^2_\infty}{6||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}\varepsilon}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Bajo la hipótesis $||y_d||_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$, también se verifica

$$0 < \frac{\varepsilon}{||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{1}{\lambda_1}\frac{\varepsilon}{||y_d||_{L^2(\Omega)}} < \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{\varepsilon}{||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{1}{\lambda_1}\frac{\varepsilon}{||y_d||_{L^2(\Omega)}} < \frac{1}{\lambda_1}$$

siendo λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en $H^1_0(\Omega)$. Así, si δ viene dado por (5.31), un simple cálculo proporciona

$$\frac{1}{\delta} \leq C\left(\frac{1}{T} + \frac{||\Delta y_d||_{L^2(\Omega)} + \left(||a||_\infty + ||B||^2_\infty\right)||y_d||_{L^2(\Omega)} + ||B||_\infty (1 + ||B||^2_\infty)||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}\right)$$

donde C es una nueva constante positiva que sólo depende de Ω. Volviendo a (5.25), ahora es fácil obtener (5.24) y la prueba del Teorema. ■

Observación 16 1. En el caso del coste de la controlabilidad aproximada, la hipótesis $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ no supone ninguna restricción. Dado $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, podemos considerar $y_d^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$||y_d^\varepsilon - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon/2.$$

De esta manera, el coste se puede acotar por:

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq \mathcal{C}(0, y_d^\varepsilon; \varepsilon/2).$$

Basta, por último, estimar las normas $||\Delta y_d^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}$ y $||\nabla y_d^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}$ en función de ε y $||y_d||_{L^2(\Omega)}$.

2. Razonando de manera ligeramente distinta a como hemos hecho, es posible suponer que $y_d \in \mathcal{D}((-\Delta)^{\alpha/2})$ con $\alpha \in [1, 2]$ para obtener una acotación distinta a (5.24):

$$\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon) \leq \exp\left[C\left(M(T, ||a||_\infty, ||B||_\infty) + N_\alpha(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d)\right)\right]||y_d||_{L^2(\Omega)} \tag{5.32}$$

con

$$N_\alpha(\varepsilon, ||a||_\infty, ||B||_\infty, y_d) = \left(\frac{||(-\Delta)^{\alpha/2} y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}\right)^{2/\alpha}$$
$$+ \frac{||B||_\infty \left(1 + ||B||_\infty\right) ||\nabla y_d||_{L^2(\Omega)} + \left(||a||_\infty + ||B||_\infty^2\right) ||y_d||_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon}.$$

Para la demostración en el caso en que el coeficiente B es nulo, véase [10].

3. Observando (5.32), es claro que la mejor potencia, respecto de ε, se obtiene cuando $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y, así, la estimación del coste de la controlabilidad aproximada es del orden de $\exp(K/\varepsilon)$, con K una constante positiva que depende de Ω, $\mathcal{O}$, T e y_d. En [10] se demuestra que, en el caso de la ecuación del calor con coeficientes constantes, la estimación del coste de la controlabilidad aproximada es del orden de $\exp(K/\sqrt{\varepsilon})$. En este último caso, además se prueba que, en algún sentido, la estimación obtenida es óptima.

4. La cota superior (5.24) dada para el coste de la controlabilidad aproximada no puede ser óptima respecto de y_d. Sabemos que si y_d es una trayectoria del sistema (2.1), es decir, si $y_d = y^\star(T)$ siendo $y^\star$ la solución de

$$\begin{cases} \partial_t y^\star - \Delta y^\star + B \cdot \nabla y^\star + a y^\star = 0 & \text{en} \quad Q, \\ y^\star = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y^\star(x, 0) = y_0^\star(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

con $y_0^\star \in L^2(\Omega)$, el sistema (2.1) es exactamente controlable a y_d en el instante T. En consecuencia, el coste asociado $\mathcal{C}(0, y_d; \varepsilon)$ debe permanecer acotado respecto de ε, cuando $\varepsilon \to 0$.

5. Cuando $B \equiv 0$, en [10] se obtiene también una estimación del coste de la controlabilidad finito-aproximada de (2.1). Dado un subespacio de dimensión finita E de $L^2(\Omega)$, se dice que (2.1) es finito-aproximadamente controlable en el instante T si, para cada $y_0, y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in L^2(Q)$ tal que la solución y_v de (2.1) verifica

$$||y_v(T) - y_d||_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \qquad \Pi_E(y_v(T)) = \Pi_E(y_d),$$

siendo Π_E el operador de proyección ortogonal de $L^2(\Omega)$ en E. Este resultado de controlabilidad se demuestra cambiando ligeramente el funcional J_ε dado por (2.5) (cf. [21]). La estimación del coste de la controlabilidad finito-aproximada dada en [10] se basa, de nuevo, en la desigualdad de observabilidad para el problema adjunto (2.4) ($B \equiv 0$). ■

6 Controlabilidad de otros problemas parabólicos

Acabaremos el trabajo presentado algunos resultados recientes de controlabilidad para otros problemas parabólicos. En concreto, nos centraremos en versiones no lineales de la ecuación del calor y en las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes. En [4] (y en las referencias que allí aparecen) pueden encontrarse otros interesantes resultados de controlabilidad para otros problemas no lineales (ecuación del calor con términos no lineales discontinuos, con condiciones de contorno no lineales, ...).

6.1 Ecuación del calor casilineal

Con la misma notación de la Sección 2, consideramos el problema parabólico no lineal

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + f(y, \nabla y) = v 1_{\mathcal{O}} & \text{in} \quad Q, \\ y = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{6.33}$$

donde y_0 y v están dados y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función localmente lipschitziana. Bajo estas hipótesis, podemos escribir

$$f(s,p) = f(0,0) + g(s,p)s + G(s,p) \cdot p \quad \forall (s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

para ciertas funciones g y G de L^∞_{loc}.

La controlabilidad de (6.33) ha sido analizada en varios artículos recientes. Destacamos los trabajos [12], [9], [15], [11], [1] y [5] en lo referente a la controlabilidad nula y [8], [22], [11] y [5] en lo que se refiere a la controlabilidad aproximada.

Para no extendernos excesivamente, nos centraremos en la descripción de los resultados de controlabilidad y no controlabilidad más generales demostrados. Éstos son los resultados probados en [11] y [5], donde se permite que la no linealidad f tenga un crecimiento superlineal en el infinito y donde no se imponen condiciones de buen signo a f. En concreto, en [11] se trata el caso de la ecuación del calor semilineal, es decir, el caso $f = f(s)$, mientras que en [5] se analiza el caso más general $f = f(s, p)$.

En [5] se prueba:

Teorema 17 *Supongamos que $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que f es una función localmente lipschitziana verificando $f(0,0) = 0$ y*

$$\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{|g(s,p)|}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} = 0, \qquad \lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{|G(s,p)|}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} = 0. \quad (6.34)$$

Entonces, existe un control $v \in L^\infty(Q)$ tal que el problema (6.33) admite una solución $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ que verifica

$$y(x,T) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

■

Observación 18
1. En particular, el Teorema 17 afirma que, bajo la hipótesis (6.34), para cada $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ existe un control v tal que (6.33) admite una solución global definida en $[0,T]$. Hay que destacar que esto no es cierto para cualquier segundo miembro y cualquier dato inicial pues estamos en el rango de no linealidades para las que se dan fenómenos de explosión en tiempo finito para (6.33).
2. En la prueba del Teorema 17 se construye un control regular que hace que (6.33) admita solución en el espacio $C([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, espacio donde se puede asegurar la unicidad de solución. ■

La versión mejorada de la desigualdad de observabilidad para (2.4), (4.20), juega un papel crucial en la demostración del Teorema 17. Usando (4.20) se prueba un resultado de controlabilidad nula para una versión linealizada de (6.33) con controles en L^∞ y en un adecuado intervalo temporal (intervalo que depende inversamente del tamaño de los potenciales g y G puestos en la función alrededor de la cual se linealiza). Aplicamos posteriormente un argumento de punto fijo para obtener el resultado deseado.

El mismo método de demostración del Teorema 17 permite probar para (6.33) un resultado de controlabilidad nula local para cualquier no linealidad considerada:

Teorema 19 *Sea f una función localmente lipschitziana en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, \mathcal{O}, T, f)$) tal que si $y_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $p > N$, verifica*

$$||y_0||_{W^{2,p}(\Omega)} \le \varepsilon_0,$$

existe un control $v \in L^\infty(Q)$ tal que el problema (6.33) *admite una solución global $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ que verifica*

$$y(x,T) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

■

Una consecuencia del Teorema 17 es la controlabilidad aproximada de (6.33). Para ello supondremos una hipótesis ligeramente distinta a (6.34). También supondremos que, para ciertos $y_0^\star \in W^{1,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ y $v^\star \in L^\infty(Q)$, el sistema (6.33) admite una solución global $y^\star \in C([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$. Se tiene ([5]):

Teorema 20 *Supongamos que $y_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que f es una función localmente lipschitziana que verifica*

$$\begin{aligned}
&\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{1}{\log^{3/2}(1+|s|+|p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s_0+\lambda s, p_0+\lambda p)\, d\lambda \right| = 0,\\
&\lim_{|(s,p)|\to\infty} \frac{1}{\log^{1/2}(1+|s|+|p|)} \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p_i}(s_0+\lambda s, p_0+\lambda p)\, d\lambda \right| = 0,
\end{aligned} \tag{6.35}$$

uniformemente en $(s_0, p_0) \in K$, para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ (con $f(0,0)$ no necesariamente nulo). Supongamos también que (6.33) *admite al menos una soución global $y^* \in C^0([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega))$, correspondiente a los datos $y_0^* \in W^{1,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ y $v^* \in L^\infty(\mathcal{O}\times(0,T))$. Entonces, para cada $y_d \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, existe $v \in L^\infty(Q)$ tal que* (6.33) *admite una solución que verifica* (2.2).

■

Observación 21 1. La hipótesis de existencia de al menos una solución global impuesta al sistema (6.33) es, evidentemente, una condición necesaria para que haya controlabilidad aproximada. Esta condición se tiene inmediatamente cuando $f(0,0) = 0$, si tomamos $y^\star \equiv 0$, solución de (6.33) asociada a los datos $y_0^\star = 0$ y $v^\star = 0$.

2. La condición (6.35) se puede escribir de forma más simple cuando f sólo depende de s (caso semilineal). En este caso, en la expresión (6.35) no aparece la variable p y se puede demostrar (cf. [11]) que equivale a

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{|s|\log^{3/2}(1+|s|)} = 0$$

y que ésta, a su vez, equivale a

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{\log^{3/2}(1+|s|)} = 0.$$

■

En el caso más simple $f = f(s)$ se pueden establecer resultados de no controlabilidad de (6.33). En [11] se demuestra:

Teorema 22 *Existen funciones localmente Lipschitz $f = f(s)$ tales que $f(0) = 0$, satisfaciendo*

$$|f(s)| \sim |s| \log^p (1+|s|) \quad \textit{con} \quad |s| \to \infty \tag{6.36}$$

con $p > 2$, para las cuales, para cualquier T, el sistema (6.33) *no es exactamente controlable a cero en el instante T.* ■

Se llega a un resultado análogo para la controlabilidad aproximada de (6.33):

Teorema 23 *Existe una función localmente Lipschitz que verifica* (6.36)*, con $p > 2$, para la que el sistema* (6.33) *no es aproximadamente controlable en ningún tiempo $T > 0$.* ■

Observación 24 1. La demostración de los Teoremas 22 y 23 está basada en la elección de no linealidades f para las que se dan, por un lado, fenómenos de explosión en tiempos arbitrariamente pequeños (lo que impide la controlabilidad nula de (6.33)) y, por otro, no linealidades para las que se dan fenómenos de obstrucción (lo que imposibilita la controlabilidad aproximada). En concreto, en el Teorema 22 se utiliza la función

$$f(s) = \int_0^{|s|} \log^p (1+|\sigma|)\, d\sigma \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

(con $p > 2$) y se prueba que el control no puede compensar el fenómeno de explosión que se produce en $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$. En el caso del Teorema 23 se elige, para $p > 2$,

$$f(s) = \int_0^{s} \log^p (1+|\sigma|)\, d\sigma \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para la que se demuestra que el conjunto de estados alcanzables $R(T; y_0)$ está uniformemente acotado (en norma L^1) en $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ independientemente del control v.

2. En vista de los resultados de controlabilidad y no controlabilidad para (6.33) expuestos en el caso más simple $f = f(s)$ está claro que, respecto de las funciones f que verifican la condición de crecimiento en el infinito (6.36), hay un intervalo de valores de p para los que se desconoce si se dan o no las propiedades de controlabilidad aproximada o nula: No sabemos qué ocurre cuando f satisface (6.36) con $p \in [3/2, 2]$.

3. En relación con el comentario anterior, la hipótesis de crecimiento en el infinito impuesta a $f(s,p)$ para que el sistema (6.33) sea exactamente controlable a cero (hipótesis (6.34)) es una consecuencia de la expresión del coste de la controlabilidad nula para la ecuación del calor lineal (2.1) que se vio en el Teorema 12. En concreto, es consecuencia de la presencia del factor
$$\exp\left[C\left(||a||_\infty^{2/3} + ||B||_\infty^2\right)\right]$$
en dicha expresión. Hay que resaltar que esta expresión también contiene factores de orden
$$\exp\left[C\left(\left(T + T^{1/2}\right)||a||_\infty + T||B||_\infty^2\right)\right],$$
factores que no imponen restricciones de crecimiento en el infinito adicionales a f, puesto que pueden ser "controlados" eligiendo tiempos de control suficientemente pequeños (cf. [11], [5]). ■

6.2 Ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes

Seguimos manteniendo la misma notación anterior e introducimos el espacio de funciones
$$\mathcal{V} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^N : \nabla \cdot \phi = 0 \text{ en } \Omega\}.$$
Denotamos por H y V, respectivamente, las clausuras de $\mathcal{V}$ en $L^2(\Omega)^N$ y en $H_0^1(\Omega)^N$. Se tiene:
$$H = \{u \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } u \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$
y
$$V = \{u \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot u = 0 \text{ en } \Omega\}.$$
Mediante n estamos representando el vector normal unitario y exterior a la frontera de Ω.

Para cada $v \in L^2(\Omega)^N$ y cada $y_0 \in H$, consideramos el sistema incompresible de Navier-Stokes con condiciones de no deslizamiento sobre la frontera

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = 1_{\mathcal{O}} v, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \quad y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.37}$$

donde $y = (y_1, y_2, ..., y_N)$ es el campo de velocidades del fluido y p es la presión. Por comodidad suponemos que la constante de velocidad cinemática es igual a 1.

Dos son las principales dificultades que complican el estudio de las propiedades de controlabilidad del sistema (6.37). Por un lado, está la presencia del término no lineal $(y \cdot \nabla)y$ y, por otro, la presencia del término de gradiente de presión ∇p. Estas dos dificultades hacen que la controlabilidad nula y aproximada de (6.37) sean cuestiones abiertas y que sólo hayan sido obtenidas respuestas parciales por parte de algunos autores.

Una interesante simplificación de (6.37) es el sistema de tipo Stokes

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla) a + (b \cdot \nabla) y + \nabla p = 1_{\mathcal{O}} v, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \quad y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.38}$$

donde $a, b \in L^\infty(Q)^N$. Se trata de un sistema más simple que (6.37) (es un sistema lineal) pero que aún conserva algunas dificultades importantes: por un lado, sigue apareciendo el término de gradiente de presión ∇p y por otro, el término $(b \cdot \nabla)y$ que crea problemas cuando b no es regular. Trataremos de describir algunas de las más importantes aportaciones sobre la controlabilidad de (6.37) y (6.38).

6.2.1 Controlabilidad Aproximada

Con respecto a la controlabilidad aproximada en H de los problemas (6.37) y (6.38), el estudio más completo ha sido llevado a cabo en [6] y [13]. En estos trabajos se estudian problemas de continuación única en $\mathcal{O} \times (0, T)$ del sistema adjunto de (6.38)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi - a^T \nabla \varphi - \nabla \cdot (\varphi b^T) + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot \varphi = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \quad \varphi(T) = \varphi_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.39}$$

con $\varphi_0 \in H$. Como consecuencia de estas propiedades de continuación única se obtienen los resultados de controlabilidad siguientes:

1. Cuando el coeficiente a está en $L^\infty(Q)^N$ y b es suficientemente regular (por ejemplo, $b \in L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$ si $N = 3$) se tiene un resultado de controlabilidad aproximada de (6.38) en H en el instante T para cualquier abierto $\mathcal{O}$.

2. Cuando el coeficiente b es menos regular, en concreto, cuando $a, b \in L^\infty(Q)^N$ se tiene que el sistema (6.38) es aproximadamente controlable en H en el instante T cuando el pequeño abierto $\mathcal{O}$ es un entorno de la frontera de Ω.

3. Bajo condiciones especiales sobre los coeficientes a y b se demuestra un resultado de controlabilidad aproximada de (6.38) utilizando controles v que tienen una componente nula.

4. Combinando la propiedad de continuación única de (6.39) (y los resultados de controlabilidad aproximada del sistema lineal (6.38)) con un argumento de punto fijo (como en [8]), se llega a la controlabilidad aproximada de un sistema no lineal como (6.38), pero donde se ha sustituido el término no lineal $(y \cdot \nabla)y$ por $(\mathbf{T}_M(y) \cdot \nabla)y$ o por

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{T}_M(y)_k y\right)$$

siendo $M > 0$ y $\mathbf{T}_M(s_1, ..., s_N) = (T_M(s_1), ..., T_M(s_N))$ y

$$T_M(s) = \begin{cases} M & \text{si} \quad s > M, \\ s & \text{si} \quad |s| \leq M, \\ -M & \text{si} \quad s < -M. \end{cases}$$

En el caso particular del término $(\mathbf{T}_M(y) \cdot \nabla)y$, hay que volver a suponer que $\mathcal{O}$ es un entorno de la frontera de Ω. ■

Hay que resaltar que para que se tengan las propiedades de controlabilidad mencionadas, sobre el coeficiente b y sobre el abierto $\mathcal{O}$ se han impuesto hipótesis especiales (o bien b regular, o bien, $\mathcal{O}$ un entorno de $\partial\Omega$). El problema está en que, para poder aplicar los resultados de continuación única a (6.39), es necesario probar previamente que la solución (φ, π) es suficientemente regular. La dificultad radica en que hay que probar que el término de presión π está en $L^2_{loc}(Q)$. Las hipótesis impuestas a b y $\mathcal{O}$ son hipótesis suficientes que aseguran esta regularidad a π.

Mediante un procedimiento completamente distinto, en [3] se ha probado la controlabilidad aproximada en $W^{-1,\infty}(\Omega)$ del problema incompresible bidimensional de Navier-Stokes con condiciones de deslizamiento sobre la frontera de tipo Navier:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 1_{\mathcal{O}} v, \quad \nabla \cdot y = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ y \cdot n = 0, \quad \sigma y \cdot \tau + \nabla \times y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ y(0) = y_0 \quad \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.40}$$

donde σ es una función suficientemente regular definida sobre $\partial\Omega$, mediante τ estamos denotando el vector unitario tangente a la frontera ($N = 2$) e $y_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$ verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla \cdot y_0 = 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}, \\ y_0 \cdot n = 0, \quad \sigma y_0 \cdot \tau + \nabla \times y_0 = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.41}$$

En [3] se prueba:

Teorema 25 *Sea $T > 0$ y sean $y_0, y_d \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$ verificando* (6.41)*. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un control $v \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])^2$ tal que el problema* (6.40) *admite una (única) solución*

$$(y, p) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])^2 \times C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$$

que verifica

$$||y(T) - y_d||_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

∎

El método utilizado en la prueba del Teorema 25 (método de retorno) fue introducido por Coron para el estudio de un problema de estabilización y fue utilizado para la prueba de la controlabilidad exacta del sistema de Euler bidimensional. Este método tiene importantes limitaciones: Por un lado, sólo es aplicable en el caso bidimensional y cuando consideramos condiciones de deslizamiento de tipo Navier sobre la frontera del dominio. Por otro, sólo da la controlabilidad aproximada de (6.40) en $W^{-1,\infty}(\Omega)$ aunque, para $K \subset \Omega$ un compacto fijo, el mismo procedimiento proporciona la controlabilidad aproximada de (6.40) en $W^{1,\infty}(K)$.

6.2.2 Controlabilidad exacta a cero

Finalizamos este trabajo comentando los resultados de controlabilidad obtenidos en [13] y [14]. En concreto, en estos trabajos se demuestra un resultado de controlabilidad exacta local para el sistema de Navier-Stokes. De manera más precisa (y con la notación previa), sea $(\widehat{y}, \widehat{p})$ una trayectoria regular del sistema de Navier-Stokes, es decir, $(\widehat{y}, \widehat{p})$ solución (regular) de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \widehat{y} - \Delta \widehat{y} + (\widehat{y} \cdot \nabla)\widehat{y} + \nabla \widehat{p} = 0, \qquad \nabla \cdot \widehat{y} = 0 \quad \text{en} \quad Q, \\ \widehat{y} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right. \tag{6.42}$$

Se tiene:

Teorema 26 *Supongamos que* $y_0 \in V$ *y que*

$$(\widehat{y}, \widehat{p}) \in W^{1,\infty}(0,T; V \cap W^{1,\infty}(\Omega)^N) \times L^2(0,T; H^1(\Omega))$$

es solución de (6.42)*. Entonces, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que si*

$$||y_0 - \widehat{y}(0)||_V \le \varepsilon,$$

existe un control $v \in L^2(Q)^N$ *tal que* (6.37) *admite una solución fuerte* (y, p) *que verifica*

$$y(x,T) = \widehat{y}(x,T) \quad p.c.t.\ x \in \Omega.$$

■

Usando una versión apropiada del Teorema de la función implícita, el Teorema 26 se reduce a la prueba de un resultado de controlabilidad exacta a cero para la linealización del sistema de Navier-Stokes alrededor de la trayectoria $\widehat{y}$. Como ya hemos visto en la ecuación del calor, este problema de controlabilidad nula equivale a una desigualdad de observabilidad para el problema adjunto, problema que adquiere la forma del problema (6.39), pero donde los coeficientes son muy regulares. Esta desigualdad de observabilidad se obtiene combinando, por un lado, una desigualdad global de Carleman para la ecuación del calor (que tiene en el segundo miembro, entre otros sumandos, un término de gradiente de presión) y por otro, estimaciones de la presión π en términos del campo de velocidades φ. Desde el punto de vista técnico, es en este segundo paso donde se concentra gran parte de la dificultad de la prueba del Teorema 26.

Referencias

[1] S. Anita, V. Barbu, *Null controllability of nonlinear convective heat equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **5** (2000), 157–173.

[2] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim. **30** (1992), no. 5, 1024–1065.

[3] J.M. Coron, *On the controllability of the* 2*-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **1** (1995/1996), 35–75.

[4] A. Doubova, *Análisis y Control de Algunas EDP No Lineales con Origen en Mecánica*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2000.

[5] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, enviado a SIAM J. Control Optim.

[6] C. Fabre, *Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **1** (1995/1996), 267–302.

[7] C. Fabre, G. Lebeau, *Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes*, Comm. Partial Differential Equations **21**, no. 3-4, (1996), 573–596.

[8] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **125A** (1995), 31–61.

[9] E. Fernández-Cara, *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), 87–103.

[10] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case*, Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 4–6, 465–514.

[11] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal.Ñon Linéaire **17** (2000), no. 5, 583–616.

[12] Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Lecture Notes Series 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Seoul, 1996.

[13] O. Yu. Imanuvilov, *On exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 97–131.

[14] O. Yu. Imanuvilov, *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **6** (2001), 39–72.

[15] O. Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto, *On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, to appear.

[16] F. John, *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1982.

[17] G. Lebeau, L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. P.D.E. **20** (1995), 335–356.

[18] J.L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30**, (1988), 1–68.

[19] J.L. Lions, *Remarks on approximate controllability*, J. Analyse Math. **59**, (1992), 103–116.

[20] D. L. Russel, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Appl. Math. **52**, (1973), no. 3, 189–211.

[21] E. Zuazua, *Finite dimensional null-controllability of the semilinear heat equation*, J. Math. Pures et Appl. **76**, (1997), 237–264.

[22] E. Zuazua, *Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities. Recent advances in control of PDEs*, Control Cybernet., **28** no. 3, (1999), 665–683.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 19 (2001), 45–55.

Carta abierta, sobre los conjuntos borrosos, a los socios de S$\vec{e}$MA

Enric Trillas
Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

e-mail: etrillas@fi.upm.es

Estimados colegas:

Los editores de este Boletín me escribieron para darme a conocer S$\vec{e}$MA a través de tres de sus ejemplares y pedirme gentilmente un artículo. Ante todo quiero decirles que si bien acostumbro a contestar afirmativamente a este tipo de peticiones, en este caso se ha dado algo más que ha hecho que me sintiese inmediatamente obligado con ellos. No había visto (pese a haber estudiado sus textos y haberlos explicado posteriormente en varias escuelas técnicas superiores) ninguna fotografía de don Pedro Puig Adam; por ello la que aparece en el Boletín número 16 de S$\vec{e}$MA me ha mostrado por vez primera a alguien de quien, teniéndole en alto concepto, no conocía su aspecto físico. S$\vec{e}$MA me ha enseñado algo nuevo y, por ello, y para ofrecerles unas reflexiones sobre los conjuntos borrosos he preferido usar el género epistolar que me parece a la vez más cordial y más personal.

En mi opinión, en la teoría naïve de conjuntos, la llamada paradoja del Sorites no es sino un contraejemplo (en realidad, muchos contraejemplos) de que las álgebras de Boole no permiten especificar como subconjuntos a las propiedades imprecisas o graduables. Sin embargo, el uso de predicados graduables es extraordinariamente frecuente en la expresión de gran parte del conocimiento ordinario y, por lo tanto, la representación de las propiedades imprecisas (y de las palabras que las designan, los predicados graduables) es de gran importancia para la inteligencia artificial. De ahí que los conjuntos borrosos puedan verse desde dos puntos de vista; el del interés altruista de ampliar la teoría de conjuntos para disponer de objetos matemáticos capaces de especificar propiedades imprecisas y el del interés egoísta de una ciencia experimental que necesita representar conocimientos tanto precisos, como inciertos, como imprecisos. Pienso que desde el primer punto de vista las teorías de conjuntos borrosos ya han mostrado que aquellas ampliaciones de la teoría de conjuntos son posibles y que, desde el segundo punto de vista, esas ampliaciones han probado ser útiles. Al fin, en palabras de Karl Menger, “la única justificación de las definiciones científicas -la forma en que las palabras se usan en la ciencia- reside en su fertilidad; es decir, en la posibilidad de que sean usadas en otras muchas proposiciones, preferiblemente prácticas”.

Como es bien conocido, las teorías de conjuntos borrosos son, propiamente, teorías de subconjuntos borrosos de un conjunto (referencial o universo del discurso). Como también es bien conocido, dado un conjunto X no vacío, la estructura ordenada $(\mathbb{P}(X), \subset; =)$ es isomorfa a la $(\{0,1\}^X, \leq; =)$, donde$\{0,1\}^X$ es el conjunto de todas las funciones $f, g, \ldots$ entre X y $\{0,1\}$, $\leq$ es el orden parcial heredado punto a punto de $\{0,1\}$, y la identificación $f = g$ equivale a $f \leq g$ y $g \leq f$. Es obvio que tal isomorfismo no depende del carácter numérico de los símbolos 0,1: con cualesquiera símbolos diferentes α, ω ordenados en la forma $\alpha < \omega$, es $(\mathbb{P}(X), \subset; =)$ isomorfo a $(\{\alpha, \omega\}^X, \leq; =)$.

Por consiguiente, como estructura ordenada, ampliar $\mathbb{P}(X)$ no es si no ampliar el conjunto $\{\alpha, \omega\}^X$. Es decir, considerar las funciones de cierto L^X con L tal que $\{\alpha, \omega\} \subset L$, de manera que en el nuevo orden de L se mantenga $\alpha < \omega$. Por ejemplo, L puede ser bien cualquier cadena numérica tal que $\{0,1\} \subset L \subset [0,1]$, bien un álgebra de Boole con mínimo α y máximo ω. De la misma forma que las funciones de $\{\alpha, \omega\}^X$ pueden llamarse subconjuntos de X, las de L^X pueden llamarse L-subconjuntos de X y, en general, se llaman conjuntos borrosos en X a los $[0,1]$-subconjuntos de X. Naturalmente, L puede ser una estructura ordenada que no sea ni una cadena ni un álgebra de Boole (p. ej., un retículo ortocomplementado, un álgebra de De Morgan, etc).

Pero L^X debe dotarse de una estructura que por lo menos comprenda como caso particular a la del conjunto las funciones que sólo toman los valores α y ω, a la que es natural en $\mathbb{P}(X)$, y ésta es el retículo que se obtiene a partir del orden parcial $\subset$; es decir, $(\mathbb{P}(X), \cap, \cup)$ convertido en álgebra de Boole con el complemento de conjuntos $A^c = \{x \in X; x \notin A\}$. Y a partir de aquí es cuando surgen las diversas teorías de las que, en lo que sigue, voy a limitarme a hablarles de aquellas que se construyen con $L = [0,1]$ provisto del orden total de la recta real.

Una teoría de conjuntos imprecisos se obtiene cada vez que en un subconjunto no vacío $F(X)$ de $[0,1]^X$ (ordenado puntualmente como se ha dicho) se definen dos operaciones binarias $\wedge, \vee$ (respectivamente, la intersección y la unión) y una monaria ' (negación, pseudo-complemento o complemento) y se verifican los axiomas:

1. $f \wedge g = g \wedge f$; $f \wedge g \leq f$; $f \wedge g \leq g$; $f \wedge f_0 = f_0$; $f \wedge f_1 = f$; si$f \leq g$, entonces $f \wedge h \leq g \wedge h$ para todo $h \in [0,1]^X$.

2. $f \vee g = g \vee f$; $f \leq f \vee g$; $g \leq f \vee g$; $f \vee f_1 = f_1$; $f \vee f_0 = f$; si$f \leq g$, entonces $f \vee h \leq g \vee h$ para todo $h \in [0,1]^X$.

3. $f'' = f$; $f_0' = f_1$; $f \leq g$ implica $g' \leq f'$,

   para cualesquiera f, g de L^X e indicando con f_k la función que es constantemente igual a k. Con estos axiomas es fácil probar que, para todo $x \in X$ se verifica:

   - $(f \wedge g)(x) \leq Min(f(x), g(x)) \leq Max(f(x), g(x)) \leq (f \vee g)(x)$
   - Si $(f \wedge g)(x) = 1$, entonces $f(x) = g(x) = 1$, pero no recíprocamente
   - Si $(f \vee g)(x) = 0$, entonces $f(x) = g(x) = 0$, pero no recíprocamente
   - $f_0 \leq f \leq f_1$

   Con ello, una teoría de conjuntos imprecisos se llama *regular*, si además de los axiomas 1, 2 y 3, valen los:

4. Si $f(x) = g(x) = 1$, entonces $(f \wedge g)(x) = 1$

5. Si $f(x) = g(x) = 0$, entonces $(f \vee g)(x) = 0$

6. $f(x) = 0$ si y sólo si $f'(x) = 1$.

En toda teoría de conjuntos imprecisos regular, el subconjunto $\{0,1\}^X$ resulta, con las restricciones de las operaciones $\wedge, \vee, '$ un álgebra de Boole isomorfa al álgebra de Boole $\mathbb{P}(X)$. Por eso, las teorías regulares se llaman de conjuntos borrosos y, de momento, nos ocuparemos de aquellas en las que $F(X) = [0,1]^X$. Tales teorías pueden ser funcionales o no; una teoría es funcional, si existen funciones $F, G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, y $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, tales que:

- $f \wedge g = F \circ (f \times g)$

- $f \vee g = G \circ (f \times g)$
- $f' = N \circ f$

para cualesquiera $f, g \in F(X)$. Las funciones F, G, N verifican, como consecuencia de los axiomas 1,2 y 3:

- $F \leq Min \leq Max \leq G$
- $F(a,0) = 0, F(a,1) = a$; $G(a,0) = a, G(a,1) = 1$, para todo $a \in [0,1]$
- $N^2 = id$, $N(0) = 1, N$ es decreciente
- $F(a,b) = F(b,a), G(a,b) = G(b,a)$, para cualquier $a, b \in [0,1]$
- F es creciente en sus dos variables; $F(a,b) = 1$ si y sólo si $a = b = 1$.
- G es creciente en sus dos variables; $G(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b = 0$.
- $([0,1]^X, \wedge, \vee)$ es un retículo si y sólo si $F = Min, G = Max$.

Por consiguiente, toda teoría funcional de conjuntos borrosos es regular. Además, las funciones de negación N vienen caracterizadas de la forma $N(x) = N_g(x) = g^{-1}(1 - g(x))$, siendo g un automorfismo de orden en $[0,1]$, es decir, una función $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ estrictamente creciente y tal que $g(0) = 0, g(1) = 1$. Obviamente, el único punto fijo de N_g es el valor $g^{-1}(\frac{1}{2}) \in (0,1)$.

Una teoría de conjuntos imprecisos puede verificar o no las leyes de De Morgan $(f \wedge g)' = f' \vee g', (f \vee g)' = f' \wedge g'$. Obviamente, si verifica una de ellas también verifica la otra y, para que una teoría funcional de conjuntos borrosos con $F(X) = [0,1]^X$ las verifique, es condición necesaria y suficiente que $F = N \circ G \circ (N \times N)$ o que $G = N \circ F \circ (N \times N)$, en cuyo caso se dice que F y G son N-duales.

Así como en la teoría de conjuntos los conceptos de contradicción y de incompatibilidad son equivalentes ($A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \subset B^c$), en las teorías de conjuntos borrosos en general se trata de dos conceptos distintos. Análogamente, si en la teoría de conjuntos el único conjunto que es autocontradictorio es el $\emptyset$ ($A \subset A^c$ si y sólo si $A = \emptyset$), en las teorías de conjuntos borrosos hay muchos. Por ejemplo, en una teoría funcional es $f \leq f'$ si y sólo si $f \leq f_n$, con $n = g^{-1}(\frac{1}{2}) \in (0,1)$ el punto fijo de la función de negación $N = N_g$.

Por consiguiente, en las teorías de conjuntos borrosos se hace necesario distinguir dos formas de expresar los principios de no-contradicción (NC) y del tercero excluido (TE):

Forma 1) $f \wedge f' \leq (f \wedge f')'$, $f \wedge f'$ es auto-contradictorio (NC)
$(f \vee f')' \leq f \vee f'$, $(f \vee f')'$ es auto-contradictorio (TE)

Forma 2) $f \wedge f' = f_0$, f y f' son incompatibles (NC)
$f \vee f' = f_1$, f y f' "llenan" f_1 (TE)

Obviamente, si valen las leyes de De Morgan, $f \wedge f'$ es auto-contradictorio si y sólo si lo es $(f \vee f')'$, y f y f' son incompatibles si y sólo si "llenan" f_1. También es obvio que las formas 2 implican, respectivamente, las formas 1

No todas las teorías funcionales de conjuntos borrosos verifican los principios NC y TE en sus formas 2; sin embargo, con independencia de las leyes de De Morgan todas los verifican en la forma 1. En efecto, es inmediato probar que si $F \leq Min$ la función $G_N = N \circ F \circ (N \times N)$ verifica $Max \leq G_N$. Con ello:

$$f \wedge f' = F \circ (f \times N \circ f) \leq Min \circ (f \times N \circ f) \leq$$

$$\leq Max \circ (f \times N \circ f) \leq G_N \circ (f \times N \circ f) =$$

$$= N \circ F \circ (N \circ f \times f) = N \circ F \circ (f \times N \circ f) = (f \wedge f')'$$

Análogamente, si $G \geq Max$, entonces $N \circ G \leq N \circ Max = Min \circ (N \times N)$, y:

$$(f \vee f')' = N \circ G \circ (f \times N \circ f) \leq Min \circ (N \circ f \times f) = Min \circ (f \times N \circ f) \leq$$

$$\leq Max \circ (f \times N \circ f) = f \vee f'.$$

Debe observarse que las pruebas anteriores no dependen, estrictamente, del carácter funcional de la teoría; es decir, que todas las teorías de conjuntos imprecisos verifican los principios NC y TE en sus formas 1.

No todas las teorías de conjuntos borrosos verifican las leyes asociativas

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h, f \vee (g \vee h) = (f \vee g) \vee h$$

cualesquiera que sean f, g, h de $[0,1]^X$. La condición necesaria y suficiente para que una teoría funcional (con $F(X) = [0,1]^X$) las verifique es que las funciones F y G sean asociativas:

$$F(a, F(b,c)) = F(F(a,b),c); G(a, G(b,c)) = G(G(a,b),c)$$

cualesquiera que sean a, b, c de $[0,1]$. En tal caso F es una t-norma y G una t-conorma que, a su vez, pueden ser N-duales o no y es usual designar a F por T

y a G por S. Las teorías funcionales de conjuntos borrosos que son asociativas con F y G continuas y $F(X) = [0,1]^X$ se llaman teorías estándar.

Como sea que la ecuación $(f \wedge f')(x) = T(f(x), N(f(x))) = 0$, para toda f de $[0,1]^X$ y todo x de X, implica que la t-norma continua T esté en la familia de la t-norma de Lukasiewicz, $W = Max(0, Sum - 1)$, es fácil probar que la ley NC ($f \wedge f' = f_0$) se verifica si y sólo si $T = g^{-1} \circ W \circ (g \times g)$ y $N \leq N_g$ con g un automorfismo de $[0,1]$. Es decir, las únicas teorías estándar que verifican la ley NC en su forma 2 son aquellas con $T = g^{-1} \circ W \circ (g \times g)$ y $N \leq N_g$ para algún automorfismo de orden g.

Análogamente, como $(f \vee f')(x) = S(f(x), N(f(x))) = 1$ para toda f de $[0,1]^X$ y todo $x \in X$, implica que la t-conorma continua S sea de la forma $g^{-1} \circ W^* \circ (g \times g)$, con $W^* = Min(1, Sum)$, es fácil probar que la ley TE ($f \vee f' = 1$) se verifica si y sólo si $S = g^{-1} \circ W^* \circ (g \times g)$ y $N_g \leq N$. Es decir, las únicas teorías estándar que verifican esa ley en la forma 2 son aquellas con $S = g^{-1} \circ W^* \circ (g \times g)$ y $N_g \leq N$ para algún automorfismo de orden g.

Por lo tanto, las únicas teorías estándar que verifican las dos leyes NC y TE en la forma 2 son aquellas en las que $T = g_1^{-1} \circ W \circ (g_1 \times g_1)$, $S = g_2^{-1} \circ W^* \circ (g_2 \times g_2)$ y $N_{g_2} \leq N \leq N_{g_1}$. En particular, ambas leyes valen si $g_1 = g_2 = g$ y $N_g = N$. Está claro que sólo en esos casos la negación ' es un complemento, aunque la estructura $([0,1]^X, \wedge, \vee, ')$ resultante no llegue a ser la de un retículo ya que "fallan" las leyes de idempotencia $f \wedge f = f$, $f \vee f = f$.

La condición necesaria y suficiente para que, en una teoría funcional con $F(X) = [0,1]^X$, valgan las leyes distributivas $f \wedge (g \vee h) = (f \wedge g) \vee (f \vee h)$, $f \vee (g \wedge h) = (f \vee g) \wedge (f \vee h)$ es que valgan las ecuaciones $F(a, G(b,c)) = G(F(a,b), F(a,c))$ y $G(a, (F(b,c)) = F(G(a,b), G(a,c))$ ecuaciones que, si F es una t-norma y G una t-conorma, equivalen a $F = Min$, $G = Max$. Por consiguiente, las únicas teorías funcionales con $F(X) = [0,1]^X$ en las que valen las leyes distributivas son aquellas con $T = Min$, $S = Max$ y cualquier negación fuerte. Y todas ellas son isomorfas a la que se obtiene con $T = Min$, $S = Max$ y $N = N_{id} = 1 - id$, que es un álgebra de De Morgan y no es un álgebra de Boole.

Análogamente, las leyes de idempotencia valen en una tal teoría funcional si y sólo si $F(a,a) = a$ y $G(a,a) = a$ para todo a de $[0,1]$, respectivamente. En el caso de las teorías estándar ello equivale a $F = Min$, $G = Max$. Por consiguiente, las únicas teorías estándar que en las que valen las leyes de idempotencia son aquellas con $T = Min$, $S = Max$.

Está claro que ninguna teoría funcional llega a ser un álgebra de Boole, y una de las manifestaciones de ello es la existencia de más de un objeto auto-contradictorio, algo que insinúa la posibilidad de que $[0,1]^X$ tenga demasiados objetos. ¿Sería posible suprimir los elementos auto-contradictorios dejando sólo a f_0 como tal? Bien, es evidente que las funciones $f \in [0,1]^X$ que no son auto-contradictorias para ninguna negación son las que tienen su supremo igual a 1 ($Sup\ f = Sup_{x\in X}\ f(x) = 1$) y, para que las correspondientes $f' = N \circ f$ también verifiquen $Sup\ f' = 1$, debe ser además $Inf\ f = Inf_{x\in X}\ f(x) = 0$. El conjunto

$$F_{01}(X) = \{f \in [0,1]^X, Sup\ f = 1, Inf\ f = 0\} \cup \{f_0, f_1\}$$

que no tiene más funciones constantes que f_0 y f_1, es cerrado para la operación ', pero no lo es para las t-normas ni las t-conormas. Sin embargo, contiene a todas las funciones de $\{0,1\}^X$ y es cerrado para las operaciones definidas por:

$$f \wedge g = \begin{cases} T \circ (f \times g), & si\ \ Sup\, T \circ (f \times g) = 1 \\ 0, & si\ \ Sup\, T \circ (f \times g) < 1 \end{cases}$$

$$f \vee g = \begin{cases} S \circ (f \times g), & si\ \ Inf\ S \circ (f \times g) = 0 \\ 1, & si\ \ Inf\ S \circ (f \times g) > 0 \end{cases}$$

para cada t-norma continua T y cada t-conorma continua S. La teoría así obtenida es regular, no funcional y verifica $f \wedge f' = f_0$, $f \vee f' = f_1$; en ella valen las leyes asociativas pero, sin embargo, no valen las leyes distributivas.

Dicho todo esto, y para ir concluyendo esta carta, permítanme hacer un comentario sobre la relación de las teorías de conjuntos imprecisos con el lenguaje. La teoría $(\mathbb{P}(X), \cap, \cup, ')$ fue introducida inicialmente para dar extensión a los predicados nítidos, es decir, a los nombres atribuidos a las propiedades binarias de los elementos de X. Para tales predicados (P) de los enunciados simples "x es P" sólo se considera su carácter como verdaderos/falsos y, por tanto, sólo se les suponen los valores de verdad 1/0, respectivamente. Ahora bien, el establecimiento de tal carácter requiere mucha información (potencialmente por lo menos) y, además (y en parte por ello) en el lenguaje habitual los enunciados no sólo se califican gradualmente entre verdadero/falso si no entre, por ejemplo, posible/imposible, probable/improbable, creíble/increíble, fiable/no fiable, etc. Por tanto un posible axioma de especificación para las teorías de conjuntos imprecisos debe contemplar la forma en que, para cada predicado graduable P, los elementos del conjunto de enunciados $\{x\ es\ P; x \in X\} = X(P)$ estén cualificados y donde tal cualificación pueda representarse. Así, si la cualificación es numérica es que existe una función $X(P) \longrightarrow [0,1]$, pero si la cualificación es lingüística debe existir una función $X(P) \longrightarrow \{\alpha, \omega, r_1, r_2, ...\}$ con, por ejemplo, α= falso, ω= verdadero, r_1 = más bien falso que verdadero , r_2= más bien verdadero que falso, etc. En el primer caso, es $L = [0,1]$ y en el segundo $L = \{\alpha, \omega, r_1, r_2, ...\}$.

Por ello un posible *axioma de especificación* debería ser enunciado en una forma parecida a la siguiente:

7. Si X es un universo del discurso y $\mathcal{P}$ una familia de predicados en X, para cada función $t : X(\mathcal{P}) \longrightarrow [0,1]$, con $X(\mathcal{P}) = \{x\ es\ P; P \in \mathcal{P}; x \in X\}$, existe una teoría de conjuntos imprecisos $(F(X), \wedge, \vee, ')$ tal que:

- Para cada $P \in \mathcal{P}$, existe $f_P \in F(X)$ tal que $f_P(x) = r$ si y sólo si $t(x\,es\,P) = r$, para todo $x \in X$.
- $f_{P\ y\ Q} = f_P \wedge f_Q$, cualesquiera que sean $P, Q \in \mathcal{P}$
- $f_{P\ o\ Q} = f_P \vee f_Q$, cualesquiera que sean $P, Q \in \mathcal{P}$
- $f_{no\ P} = f'_P$, cualquiera que sea $P \in \mathcal{P}$

Está claro que esa forma del axioma de especificación es meramente tentativa, ya que otros aspectos importantes del uso de los predicados en el lenguaje no aparecen en ella; es el caso del antónimo y de los modificadores lingüísticos como "muy" y "moderadamente". Sólo daré un apunte para el antónimo (*ant P*) y, para ello, conviene recordar que un antónimo de P es un predicado opuesto a P en X que implica a la negación de P, pero que generalmente no es implicado por ella y que, de ordinario, se considera único en un contexto discursivo determinado acerca de los objetos de X de tal manera que $ant(ant\ P)$ es P. Es decir, que si P se especifica en f_P y $ant\ P$ en $f_{ant\ P}$, debe ser $f_{ant\ P} \leq f'_P$, $f_{ant(ant\ P)} = f_P$, y debe existir una relación entre f_P y $f_{ant\ P}$ que refleje la oposición entre P y $ant\ P$.

Para encontrar $f_{ant\ P}$ por oposición (o involución) con P, hay que tener en cuenta qué representan las funciones f_P. Representan el significado de P en X en el contexto y manera en que P se emplea en los enunciados "x es P". Pero, para usar P, antes hay que saber comparar los enunciados elementales; es decir, saber si "x es menos P que y", para cada par x, y de elementos de

X; conocer el orden $\leq_P$ así inducido en X. Conocido este orden (generalmente parcial), la función f_P verificará: 1) Si x es minimal, $f_P(x) = 0$; 2) si x es maximal, $f_P(x) = 1$; 3) Si $x \leq_P y$, entonces $f_P(x) \leq f_P(y)$. Es decir, $f_P(x)$ es, para cada $x \in X$, una evaluación numérica de cuán P es x (coincidente con $t(x$ es $P))$; una "medida" generalizada de cuán x es P.

Con ello, el orden $\leq_P$ en X es el que es natural en relación con P, y su orden opuesto $\leq_P^{-1}$, será el que es natural para *no* P. Por tanto, el orden $\leq_{antP}$ estará contenido en $\leq_P^{-1}$, y habrá que elegir una involución $\sigma : X \longrightarrow X$ para obtener $f_{antP}(x) = f_P(\alpha(x))$. Por ejemplo, si $P =$ *cerca de* 4 se usa en $X = [0, 10]$ en la forma triangular:

$$f_P(x) \quad = \begin{cases} 0, & si \;\; 0 \leq x < 3 \\ x-3, & si \;\; 3 \leq x < 4 \\ 5-x, & si \;\; 4 < x \leq 5 \\ 0, & si \;\; 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

con $f_{noP} = f'_P = (1 - id) \circ f_P$, el orden parcial $\leq_P$ es el orden total $\leq$ (el de la recta real) entre 0 y 4, y el orden total $\leq^{-1}$ entre 4 y 10. Con ello, la involución definida por $\sigma(x) = 4 - x$ entre 0 y 4, y $\sigma(x) = 14 - x$ entre 4 y 10, dará el antónimo:

$$f_{antP}(x) \quad = \begin{cases} 1-x, & si \;\; 0 \leq x < 1 \\ 0, & si \;\; 1 \leq x < 9 \\ x-9, & si \;\; 9 < x \leq 10 \end{cases}$$

que, en efecto, como es fácil ver haciendo las gráficas correspondientes, responde a un uso de "lejos de 4" en $X = [0, 10]$, con $\leq_{antP} \subset \leq_P^{-1}$ y $f_{antP} \leq f'_P$ (definido con N=$1 - id$).

Cualquiera que sea su forma definitiva, un axioma de especificación sólo podrá asegurar que para cada P existe f_P, pero no que el problema de hallar P sea decidible; ni siquiera si P nombra a una propiedad binaria. Tampoco podrá asegurar que para cada $h \in [0, 1]^X$ exista un único predicado P tal que $h = f_P$. Cada función f_P representa un uso concreto de P en X; por tanto, representa su significado actual y f_P sólo podrá *diseñarse* de acuerdo con la información disponible de ese uso de P. En cada caso, con P graduable, tal diseño deberá congelarse en algún momento en función de la precisión requerida.

Lo mismo hay que decir respecto a la especificación de los conectivos $\wedge(y), \vee(o)$ y $'(no)$: su uso concreto indicará sus propiedades estructurales y de ellas podrá llegarse a las funciones F, G y N. Por ejemplo, en el marco de las teorías estándar, aceptar que (“x es P” y “x es P”) siempre equivale a “x es P”, implicará $T = Min$; aceptar que (“x es P” ó “x es Q”) puede ser verdadera sin que lo sean “x es P” y “x es Q”, implicará $S = g^{-1} \circ W^* \circ (g \times g)$; aceptar que el grado en que “x es *no* P” es una función lineal del grado en que “x es P”, implicará $N = 1 - id$. Naturalmente, como en todo proceso empírico, habrá que efectuar más contrastes con el uso antes de congelar el diseño del “sistema”. No debe olvidarse que, con los conjuntos borrosos, se pretende representar conocimiento sin imponer una sintaxis totalmente extraña a la semántica del discurso.

Todavía, antes de finalizar, permítanme tres notas breves. La primera referida al punto de vista relativo a la conveniencia de ampliar $\mathbb{P}(X)$ a $[0,1]^X$, la segunda a un aspecto didáctico y la tercera a un ejemplo.

El conjunto $\{0,1\}$, si bien es cerrado para la media geométrica en general no lo es para las medias casi-lineales. Así, de considerar una media ponderada $M(a,b) = \alpha a + (1-\alpha)b$ ($\alpha \in [0,1]$), sus valores serían $M(0,0) = 0, M(1,0) = \alpha, M(0,1) = 1-\alpha, M(1,1) = 1$, que no están todos en $\{0,1\}$. Por lo tanto, como la agregación de conjuntos no da conjuntos, parece conveniente ampliar $\{0,1\}^X$ a $[0,1]^X$. Es decir, ya que la agregación de información precisa y completa no es precisa, se hace conveniente considerar $[0,1]^X$ a tal efecto. Naturalmente, sucede lo mismo si la información es precisa pero incompleta y no digamos si la información es inicialmente imprecisa. Para agregar o sintetizar información también se requiere pasar de $\mathbb{P}(X)$ a algún $F(X)$.

En mi opinión, la teoría de conjuntos borrosos y la lógica borrosa (de la que aquí no se ha dicho nada) ofrece una oportunidad para la cooperación entre profesores de materias diversas; al menos entre los de matemáticas, lenguaje y física. Por ejemplo, el estudio (y hasta la construcción o simulación) de un péndulo invertido controlado computacionalmente, permite la interrelación de las tres materias si se aborda desde el punto de vista del control borroso. Creo que la teoría de los conjuntos borrosos permitiría, en el bachillerato, algunos trabajos didácticos en temas relacionados con la tecnología, ya que lo dicho para el péndulo invertido puede decirse para cámaras fotográficas auto-foco, medidores de tensión arterial, etc. La teoría de conjuntos borrosos ofrece un instrumento para el estudio de la imprecisión de la forma más precisa posible; un instrumento que, además, ha probado su utilidad en diversos tipos de aplicaciones y que, mezclado con otros instrumentos teóricos, tiene muchos campos de aplicación abiertos ya que es enorme el número de fenómenos que muestran incertidumbre y, en el lenguaje, aquella que proviene de la imprecisión.

El ejemplo es el siguiente. La teoría $([0,1]^{[0,1]}, \wedge, \vee, ')$, con $f \wedge g = Min \circ (f \times g)$, $f \vee g = Max \circ (f \times g)$, y $'$ definido por $f'(x) = 1 - f(1-x)$, es un álgebra de De Morgan pero no es una teoría estándar al no existir ninguna función de negación N tal que $f' = N \circ f$. Se trata de una teoría no regular ya que $f'(x) = 1$ no equivale a $f(x) = 0$, sino a $f(1-x) = 0$; como es fácil comprobar hay "conjuntos" $f \in \{0,1\}^{[0,1]}$ cuyo complemento $(1-f)$ no coincide con f'.

En la confianza de haber satisfecho su petición, con el deseo de que esta carta pueda ser útil a los lectores de S$\vec{e}$MA, creyendo con Luis Santaló que por lo menos "se educa para el bien, para la verdad, para conocer y entender el universo", y con la esperanza de que la educación matemática llegue algún día a serlo efectivamente, les saluda cordialmente,

Enric Trillas.

PS. Olvidaba decirles que buena parte de esta carta está inspirada en los artículos:

- E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas, 1999, On contradiction in Fuzzy Logic, *Softcomputing,* 3/4, 197-199.
- E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas, 2000, On Logical connectives for Fuzzy Set Theory with or without non-empty selfcontradictions, *Int. Jour. of Intelligent Systems,* 5, 155-164.
- E. Trillas, C. Alsina, 2000, An Outline of a Naïve Loose-Set Theory, *Proc. 8th. IPMU,* Vol. II, 857-863.

Además, de tener que recomendar un texto sobre conjuntos borrosos a un matemático, le aconsejaría el libro de H.T. Nguyen y E.A. Walker, *"A First Course in Fuzzy Logic"* (2000, Chapman Hall—CRC, Boca Raton, Flor.)

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *19 (2001), 57–67.*

Stabilizing the semilinear parabolic equation with internal feedback controllers

Viorel Barbu
"Al.I. Cuza" University, 6600 Iaşi, Romania

Abstract

This paper surveys some recent results pertaining the feedback internal stabilizability of the semilinear parabolic equations, both deterministic and stochastic. Roughly speaking, the conclusion is that the steady state solutions of this type are exponentially stabilizable by internal controllers with the support in subdomains which are sufficently close of the boundary.

1 Introduction

Consider the controlled semilinear equation

$$
\begin{aligned}
&y_t(x,t) - \Delta y(x,t) + a(x,t)y(x,t) + b(x,t)\cdot\nabla y(x,t) + \\
&\qquad\qquad + f(x,y(x,t)) = m(x)u(x,t),\ \ x\in\Omega, t\geq 0 \\
&y(x,0) = y_0(x),\ \ x\in\Omega \\
&y = 0 \text{ on } \Sigma = \partial\Omega\times(0,\infty)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

where

$$a\in L^\infty(\Omega\times(0,\infty)),\ \ b\in C^1(\overline{\Omega}\times[0,\infty);R^n)$$

and $f:\Omega\times R\to R$ is continuous, monotonically nonincreasing in y, $f(x,0)\equiv 0$ and

$$|\nabla_x f(x,y)| \leq C\,d(x)(|y|+1), \quad \text{a.e. } x\in\Omega,\ y\in R \tag{1.2}$$

where $d\in L^\infty(\Omega)$.

Here m is the characteristic function of an open domain $\omega\subset\Omega$ and $u\in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$ is an input controller; Ω is an open and bounded domain of R^n, with a smooth boundary $\partial\Omega$ (of class C^2 for instance).

We shall briefly discuss here the exponential stabilizability of system (1.1), i.e., the existence for each $y_0 \in L^2(\Omega)$ of a controller u such that the corresponding solution y^u satisfies the estimate

$$\|y^u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-\delta t} \quad \forall\, t > 0. \tag{1.3}$$

This happens for instance if the system (1.1) is null controllable on $[0,T]$, i.e., if there is $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ such that $y^u(T) \equiv 0$. However, the class of functions f for which (1.1) is null controllable is not very large. One knows that this happens for instance (see [3], [8]) if

$$|f(x,y)| \leq L|y|\varphi(y)(1+\ln|y|)^{3/2},\ \forall\, y \in R,\ x \in \Omega,$$

where $\lim\limits_{|y|=\infty} \varphi(y) = 0$ and there are strong reasons to believe that this result is almost optimal.(See for instance the works [6],[8] ,[9] for counterexamples and discussions on the growth order of the nonlinearity f for which the system is exactly null controllable.)

In general, under suitable regularity assumptions on f, system (1.1) is locally null controllable only (see e.g. [2], [7]), i.e., for $\|y_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta$ sufficiently small there is a controller u^* such that $y^{u^*}(T) \equiv 0$. Of course this implies the stability of the null solution to system (1.1) with $u = u^*$ but neither its exponential stability nor absolute stability.

However, we shall see below that under suitable conditions on ω for uncontrolled systems (1.1) there are feedback controllers $u = u(y)$ which stabilize exponentially system (1.1). This problem will be treated using spectral arguments and the Carleman inequality in Section 2 below. In Section 3 we shall study by similar methods the exponential stabilizability of the stochastic heat equation with multiplicative noise.We shall also briefly discuss in Section 4 the stabilizability of the Navier–Stokes equations in $3--D$.

2 Stabilizing feedback controllers for equation (1.1)

We shall denote by $\lambda_1^*(\omega)$ the first eigenvalue of the operator $-\Delta$ with the Dirichlet boundary value conditions on $\Omega \setminus \overline{\omega}$,i.e.,

$$\lambda_1^*(\omega) = \inf\,\{\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega\setminus\overline{\omega})};\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega\setminus\overline{\omega})} = 1\}.$$

We shall consider here equation (1.1) with the feedback controller

$$u = -ky \tag{2.1}$$

where k is a natural number. Besides the above assumptions on f and a, b we shall further assume that either

$$a - \frac{1}{2}\mathrm{div}_x b + \lambda_1^*(\omega) \geq \rho > 0, \quad \text{a.e. in } \Omega \times R^+ \tag{2.2}$$

or

$$a - \mathrm{div}_x b \geq 0, \quad \text{a.e. in } \Omega \times R^+. \tag{2.3}$$

We note that neither (2.2) nor (2.3) imply the exponential stability of the uncontrolled system (1.1). Moreover, conditions (2.2) and (2.3) are independent.

THEOREM 1. *Under assumption* (2.2) *for* $k > k_0$ *suficently large and independent of* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *the closed loop system*

$$\begin{aligned} &y_t - \Delta y + ay + b \cdot \nabla y + f(x, y) + kmy = 0 \quad \text{in } \Omega \times R^+ \\ &y(0) = y_0 \quad \text{in } \Omega; \quad y = 0 \ \text{on } \partial\Omega \times R^+ \end{aligned} \tag{2.4}$$

is exponentially stable in $L^2(\Omega)$, *i.e.,*

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y_0\|_{L^2(\Omega)} e^{-\delta t}, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{2.5}$$

where $\delta > 0$. *If* (2.3) *holds, then*

$$\|y(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|y_0\|_{L^1(\Omega)} e^{-\delta_1 t}, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{2.6}$$

for some $\delta_1 > 0$.

It should be said that linear feedback controllers of the form $u = -B^* y$ were already used to stabilize linear control dissipative systems

$$y' + Ay = Bu$$

in a Hilbert space H where $-A$ is the infinitesimal generator of a contraction semigroup in H and B is a linear continuous operator from a controller Hilbert space U to H. However, in the special case we consider here the result obtained in this way is sharper.

Proof. Consider the linear equation

$$\begin{aligned} &z_t - \Delta z + az + b \cdot \nabla z + kmz = 0 \ \text{ in } \Omega \times R^+ \\ &z(0) = |y_0| \text{ in } \Omega; \quad z = 0 \text{ on } \partial\Omega \times R^+. \end{aligned} \tag{2.7}$$

By comparison technique It is readily seen that

$$z(x, t) \geq 0, \quad \text{a.e. } (x, t) \in \Omega \times R^+ \tag{2.8}$$

and

$$|y(x,t)| \le z(x,t), \quad \text{a.e. } (x,t) \in \Omega \times R^+ \tag{2.9}$$

where $y \in L^2_{\rm loc}(0,\infty; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ with $y_t \in L^2_{\rm loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ is the solution to (2.4). (It is well known that under the above assumptions on f the Cauchy problem (2.4) has a unique strong solution y with the above properties.)

Assume now that condition (2.3) is satisfied. If multiply equation (2.7) by $\operatorname{sgn} z$, integrate on Ω and recall the Kato inequality

$$\Delta z \operatorname{sgn} z \le \Delta|z| \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

we obtain by (2.3) that

$$\|z(t+1)\|_{L^1(\Omega)} + k\int_t^{t+1}\int_\Omega m|z|dx\,ds \le \|z(t)\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.10}$$

On the other hand, the Carleman inequality in $L^1(\Omega)$ for system (2.7) (see [2], [4] ,[8]) yields

$$\|z(t+1)\|_{L^1(\Omega)} \le C\int_t^{t+1}\int_\omega |z(x,s)|dx\,ds,\ \forall\, t \ge 0.$$

Then by (2.10) we see that

$$\|z(t+1)\|_{L^1(\Omega)} \le (C+k)^{-1}C\|z(t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Hence

$$\|z(t+1)\|_{L^1(\Omega)} \le e^{\delta_1 t}\|z(0)\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall\, t \ge 0$$

and this implies (2.6) as desired.

Assume now that condition (2.2) holds. Then the desired conclusion follows from the following lemma

Lemma 1 *For each $\varepsilon > 0$ there is $k_0(\varepsilon) > 0$ such that for $k > k_0$ the following inequality holds*

$$\int_\Omega (|\nabla y|^2 + kmy)ydx \ge (\lambda_1^*(\omega) - \varepsilon)\|y\|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall y \in H^1_0(\Omega). \tag{2.11}$$

Proof Let λ_1^k be the first eigenvalue of the operator $y \to -\Delta y + kmy$ with Dirichlet homoheneous conditions on Ω. We have

$$\lambda_1^k = \inf\{\int_\Omega (|\nabla y|^2 + kmy^2)dx; y \in H^1_0(\Omega), \|y\|_{L^2(\Omega)} = 1\} \tag{2.12}$$

and this implies that $\lambda_1^k \le \lambda_1^*(\omega)$ and the sequence $\{\lambda_1^k(\omega)\}$ is increasing in k. Let φ_1^k be the eigenfunction corresponding to λ_1^k. We take $\|\varphi_1^k\|_{L^2(\Omega)} = 1$.Then it is readily seen that

$$\|\nabla\varphi_1^k\|^2_{L^2(\Omega)} + k\|\varphi_1^k\|^2_{L^2(\omega)} \le \lambda_1^k, \ \forall k.$$

Thus on a sequence $k \longrightarrow +\infty$ we have $\lambda_1^k \to \mu_1$ and

$$\varphi_1^k \longrightarrow \varphi_1, \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \text{ strongly in } L^2(\Omega)$$

where $\varphi_1 = 0$ in $\Omega \setminus \omega$. Clearly we have

$$-\Delta\varphi_1 = \mu_1\varphi_1 \text{ in } \Omega \setminus \overline{\omega}\ ; \varphi_1 = 0 \text{ on } \partial(\Omega \setminus \overline{\omega}).$$

Hence $\mu_1 = \lambda_1^*(\omega)$ and the desired inequality (2.11) follows by (2.12).
Proof of Theorem 1 If multiply equation (2.7) by z and integrate on Ω it follows by Green's formula and (2.3), (2.11) that

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|_{L^2(\Omega)} \le -\delta\|z(t)\|_{L^2(\Omega)}, \text{ a.e. } t > 0$$

which implies (2.5) for k sufficently large. This completes the proof.

We note that by the Poincare inequality it is easily seen that

$$\lambda_1^*(\omega) \to +\infty \text{ as } \mu(\Omega \setminus \omega) \to 0$$

where μ is the Lebesgue measure. Then by Theorem 1 it follows that "closer" is ω of $\partial\Omega$ "better" is the stabilizing controller. In particular, each system of the form (1.1) is exponentially stabilizable if ω is "sufficently close" of $\partial\Omega$. More precisely, we have

Corollary 1*Let a, b, f satisfy the above regularity conditions.Then there is $\mu_0 > 0$ such that if $\mu(\Omega \setminus \omega) \le \mu_0$ there is a feedback controller $u = -ky$ which exponentially stabilizes system (1.1).*

If a, b are independent of f and y_e is a steady–state solution to (1.1), i.e.,

$$\begin{aligned} &-\Delta y_e + ay_e + b \cdot \nabla y_e + f(x, y_e) = 0 \quad \text{in } \Omega \\ &y_e = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.13}$$

then applying Theorem 1 to system (1.1) where f is replaced by $f(x, y + y_e) - f(x, y_e)$ one finds that under assumptions (2.2) or (2.3) the solution y_e is exponentially stable with a feedback controller of the form

$$u = -k(y - y_e).$$

Though in general the function $f(x, y+y_e) - f(x, y_e)$ does not satisfy condition (1.2) the above argument applies as well because the corresponding closed loop system (2.4) has a unique solution.

We note that by Theorem 1 it follows also that under assumption (2.2) there is a boundary controller $v \in L^2(0,\infty; L^2(\partial\Omega))$ such that system

$$\begin{aligned} &y_t - \Delta y - ay + b\cdot\nabla y + f(x,y) = 0 && \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\ &y(x,0) = u_0 && \text{in } \Omega \\ &y = v && \text{in } \partial\Omega\times(0,\infty) \end{aligned} \tag{2.14}$$

is exponentially stable.

This follows in an usual way by imbedding the domain Ω into a bigger one $\widetilde{\Omega}$ and applying Theorem 1 on $\widetilde{\Omega}$ where $\omega = \widetilde{\Omega}\setminus\Omega$ (see [2], [9] for the description of this "trick" to boundary controllability problems).

It should be said that using different feedback laws one might obtain sharper results as far as concerns the properties and performances of the stabilizing controller.

For instance if one chooses in system (1.1) the feedback controller

$$u = -\rho \,\mathrm{sgn}\, y,\ \ \rho > 0 \tag{2.15}$$

it follows as above via Carleman inequality (see [4]) in $L^1(\Omega)$ that

$$\|y(t)\|_{L^1(\Omega)} \le e^{-\delta_1 t}\|y_0\|_{L^1(\Omega)},\ \ \forall\, t>0.$$

Moreover, one has in this case

$$\int_t^{t+1} \mathrm{meas}\{x\in\omega;\ |u(x,s)|>0\}ds \le e^{-\delta_1 t}\|y_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Roughly speaking this means that there is a stabilizing controller u with the support in $\omega\times(0,\infty)$ which for t large enough is zero excepting a set of measure arbitrarily small. In [1] it is studied in a similar way the stabilizability of semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions.

Theorem 1 remains true for multivalued nonlinear systems of the form

$$\begin{aligned} &y_t - \Delta y + ay + b\cdot\nabla y + \beta(y) \ni mu \ \ \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\ &y(0) = y_0 \ \ \text{in } \Omega;\quad y=0 \text{ on } \partial\Omega\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{2.16}$$

where β is a maximal monotone graph in $R\times R$ such that $0\in\beta(0)$. Indeed, we have as in the previous case that for $u=-ky$,

$$|y(x,t)| \le z(x,t),\ \ \forall\,(x,t)\in\Omega\times(0,\infty)$$

where z is the solution to (2.7) and conclude therefore that under assumption (2.2) or (2.3) the system (2.16) is exponentially stabilizable.

In particular, for $\beta(r) = 0$ if $r > 0$, $\beta(0) =]-\infty, 0]$ it follows the stabilizability of the obstacle free boundary problem

$$\begin{aligned} & y_t - \Delta y + ay + b \cdot \nabla y = mu && \text{in } \{y > 0\} \\ & y \geq 0 && \text{in } \Omega\times(0,\infty) \\ & mu \leq 0 && \text{in } \{y = 0\} \\ & y = 0 && \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty) \end{aligned} \tag{2.17}$$

As regards assumption (1.2) it should be said that it is too restrictive and was imposed along with monotonicity condition only to assure the existence of the closed loop system (2.4). However, there are other weaker conditions which can be used instead but we do not give details.

We shall consider now the equation

$$\begin{aligned} & y_t - \text{ div } g(\nabla y) + ay + b \cdot \nabla y + f(y) = mu \text{ in } \Omega \times (0,\infty) \\ & y(0) = y_0 \text{ in } \Omega; \quad y = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Here $g \in C^1(R^n),\ g(0) = 0,\ g = \nabla j$ where j is a continuous convex function and the functions a, b, f satisfy the above conditions. The typical example is the pseudo–Laplace operator $g(\nabla y) = |\nabla y|^{p-2}\nabla y$. We shall further assume that

$$j(y) \geq C|y|^p, \forall y \in R^n$$

where $p \geq 2, C > 0$ and set

$$\lambda^* = \min \{\int_{\Omega\setminus\omega} j(\nabla y)dx; |y|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} = 1\}.$$

We have

THEOREM 2 *Assume that*

$$\lambda^* + a - \frac{1}{2}\text{div} \geq \rho > 0.$$

Then for $k \geq k_0$ sufficently large the feedback controller $u = -ky$ stabilizes esponentially system (2.18) *in* $L^2(\Omega)$.

In particular, for ω sufficently " close " of $\partial\Omega$ the system is exponentially stabilizable.

The proof is similar to that of Theorem 1 and relies on the fact that

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k = \lambda^*$$

where

$$\lambda_k = \min \{\int_\Omega (j(\nabla y) + kmy^2)dx; |y|_{L^2(\Omega)} = 1\}.$$

The details are left to the reader.

3 Stabilizability of the semilinear stochastic heat equation

Consider here the stochastic equation

$$(3.1)\quad \begin{aligned} & dy(x,t) - \Delta y(x,t)dt + (ay(x,t) + b\cdot\nabla y)dt + g(y(x,t))dt = \\ & \qquad = m(x)u(x,t)dt + b_0(x)y(x,t)dw_t \text{ in } D\times\Omega\times(0,\infty) \\ & y(x,0) = y_0(x) \text{ in } D \\ & y = 0 \text{ in } \partial D\times[0,\infty) \end{aligned}$$

on a probability space $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ with the filtration $\{\mathcal{F}_t;\ t\geq 0\}$.

Here D is a bounded and open set of R^n with smooth boundary, $D_0\subset D$ is an open subdomain, w is a brownian motion adapted to $\mathcal{F}$ and $a\in C(\overline{D})$, $b_0\in C^1(\overline{D})$. As above m is the characteristic function of D_0. The initial datum y_0 is in $L^2(D)$ and the controller u is adapted to $\mathcal{F}$ and belongs to $L^2(\Omega\times[0,\infty); L^2(D))$.

The function $g: R\to R$ is continuous, monotonically nondecreasing and $g(0) = 0$.

Theorem 3. *Assume that*

$$(3.2)\quad \lambda_1{}^*(\omega) + a - \frac{1}{2}(\mathrm{div}_x b + b_0^2) \geq \rho > 0,\ \ a.e.\ in\ D\times(0,\infty).$$

Then for $k\geq k_0$ sufficently large the feedback controller $u = -ky$ exponentially stabilizes system (3.1)*, i.e.,*

$$(3.3)\quad E\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\delta t}\|y_0\|_{L^2(\Omega)},\quad \forall\, t>0$$

where $\delta > 0$.

This result seems to be new even in the linear case $g\equiv 0$ because so far the null controllability of linear stochastic heat equation with multiplicative noise is still an open problem (see however [5] for a partial result on this line).

Proof of Theorem 3. We shall argue as in the proof of Theorem 1. However, only a sketch of proof will be given and refer the reader to [6] for complete proof.

Namely, consider the linear stochastic equation

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} & dz - \Delta z\, dt + (az + b\cdot\nabla z + kmz)\, dt = b_0 z\, dw \text{ in } D\times(0,\infty)\times\Omega \\ & z(0) = |y_0| \text{ in } D,\ z = 0 \text{ on } \partial D\times(0,\infty). \end{aligned}$$

By comparison techniques it follows as in the deterministic case that

$$(3.5)\qquad |y(x,t,\omega)| \le z(x,t,\omega) \text{ a.e. } (x,t,\omega)\in D\times(0,\infty)\times\Omega$$

where y is the solution to (3.1) with the feedback controller $u=-ky$. On the other hand, by Ito's lemma we have

$$E\|z(t)\|^2_{L^2(D)} + 2\delta E\int_0^t\int_D (|\nabla z(x,s)|^2 + az^2 - \frac{1}{2}\text{ div }_x bz^2 + kmz^2)dx\, ds =$$
$$= E\int_0^t\int_D b_0^2 z^2 dx\, ds + E\|z_0\|^2_{L^2(D)}$$

and therefore by Lemma 1 and by condition (3.2) we obtain

$$(3.6)\qquad E\|z(t)\|^2_{L^2(D)} + 2\rho E\int_0^t\int_\omega z^2 dx\, ds \le E\|z_0\|^2_{L^2(D)}.$$

This implies (3.3) as claimed.

4 Remarks on stabilizability of Navier–Stokes equation

The previous argument can be used to stabilize the steady–state solutions y_e to Navier–Stokes equations

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} & y_t - \nu\Delta + y\cdot\nabla y = mu + \nabla p \text{ in } \Omega\times R^+ \\ & \nabla\cdot y = 0 \text{ in } \Omega\times R^+, y = 0 \text{on } \partial\Omega\times R^+ \\ & y(x,0) = y_0(x) \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

where Ω is a bounded open subset of $R^n, n = 2,3$ and m is as above the characteristic function of an open subset ω of Ω. Let $\lambda_1^*(\omega)$ be the first eigenvalue of the Stokes operator $-\Delta$ on the domain $\Omega\setminus\overline{\omega}$. We set

$$\rho(y_e) = \sup\{|b(y,y,y_e)|; \|y\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$$

where (see e.g. [12])

$$b(y,y,w) = \int_\Omega y_i D_i y_j w_j dx.$$

Theorem 4 *Assume that* $y_e \in (H^m(\Omega))^n$, $m > \frac{5}{2}$ *and*

$$\nu\lambda_1^*(\omega) > \rho(y_e).$$

Then for $k \geq k_0$ *sufficently large and independent of* y_0 *the feedback controller* $u = -k(y-y_e)$ *stabilizes exponentially system* (4.1)*, i.e., there is a weak solution* $y \in L^\infty(R^+; H) \cap L^2_{loc}(R^+; V)$ *to corresponding closed loop equation* (4.1) *such that*

$$|y(t)|_H \leq e^{-\delta t}|y_0 - y_e|_H$$

for some $\delta > 0$.

Here $H = \{y \in (L^2(\Omega))^n; \nabla \cdot y = 0, y \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ and $V = \{y \in (H^1_0(\Omega))^n; \nabla \cdot y = 0\}$.

This theorem is proved in [6]. As in the previous situations it implies in particular, that each steady–state solution y_e is stabilizable if the domain ω is sufficently "close " of $\partial\Omega$. It should be said that the local controllability results for the Navier–Stokes equations (see [9],[10],[11] and the bibliography given therein) imply the stability of steady–state solutions only and not their absolute asymptotic stability.

References

[1] Gh. Aniculăesei, S. Aniţa, Stabilization of heat equation via internal feedback, Nonlinear Funct. Anal. (to appear).

[2] V. Barbu, Controllability of Parabolic and Navier Stokes Equations (preprint).

[3] V. Barbu, Exact controllability of the superlinear heat equations, *Appl. Math. Optimiz.* 42 (2000), 13–89.

[4] V. Barbu, The Carleman inequality for linear parabolic equation in L^q norm (to appear).

[5] V. Barbu, A. Rascanu, M. Tessitore, Carleman Estimates and Controllability of Linear Stochastic Heat Equations(to appear)

[6] V. Barbu, C.Lefter,Internal stabilizability of the Navier–Stokes equations (to appear).

[7] V. Barbu, C.Lefter, M. Tessitore, Stabilizability of Stochastic Heat Equations with Multiplicative Noise (To appear).

[8] E. Fernandez–Cara, E. Zuazua, Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations, Annales I.H.P.: Analyse Nonlinéaire 6 (2000), .

[9] A.V. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes #34, Seoul University, Korea, 1996.

[10] O.Yu.Imanuvilov, On exact controllability for Navier–Stokes equations, ESAIM, COCV 3(1998),97–131.

[11] O.Yu.Imanuvilov, Remarks on controllability of Navier–Stokes equations, ESAIM, COCV 6(2001),49–97.

[12] R.Temam, *Navier–Stokes Equations*, North–Holand, Amsterdam 1979.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 19 (2001), 69–112.

The Importance of Mathematics in the development of Science and Technology

JUAN LUIS VÁZQUEZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIV. AUTÓNOMA DE MADRID

Do not worry too much about what is Mathematics
Before you try your luck with them. Then you'll see.

ABSTRACT

Mathematicians often say that the essence of Mathematics lies in the beauty of numbers, figures and relations, and there is truth in that. But the driving force of mathematical innovation in the last centuries has been the desire to understand how Nature works. This aspect often goes unmentioned.

Together with the experimental method, Mathematics forms the conceptual scheme on which modern science is based and which supports technology, with close interactions among them. Upon these bases the Industrial Society was born some centuries ago, and the new Information Society is built in the present along the same lines.

In the article we give a brief outline of this scientific connection and how it came to work and the heroes that made it what it is, a view to the future, and a short comment on Mathematics in Spain.

1 Introduction. Essence and role of Mathematics

Mathematics is an autonomous intellectual discipline, one of the clearest exponents of the creative power of the human mind. On the other hand, it plays a fundamental role in modern Science, has a strong influence on it and it has been influenced by it in an essential way. Here are, briefly presented, two conceptions that symbolize different ways of seeing the great edifice that is present-day Mathematics. These options are reflected in the denominations of

Pure and Applied Mathematics. But then, are there two different Mathematics? and, if this true, can they healthily co-exist and interact, or do they actually exist separated from, even hostile to each other? In the present article we will see that, today as in the past, both views of Mathematics are faces of the same coin, looking at times so different, at times so similar.

A first dimension of Mathematics is in fact the **pure** aspect, Mathematics as an art in its own right, a game that is played in our minds. Indeed, Mathematics is an art that expresses beauty in the form of axioms, theorems and logical or numerical relations; it attracts the researcher precisely because of its logical perfection, by being one of the most compelling examples of the human capacity for reasoning and analysis, by imposing order and harmony where formerly we only saw disorder and chaos. This is the dimension which lies closest to the researcher and, as every pure form of art, it has a fascination that explains why professionals devote an enormous and quite exclusive part of their lives to it. It is natural for professional mathematicians to tend to see their science from the point of view of the art in itself, with its concepts, conjectures, results and methods of proof, with its time-honored areas: arithmetic, algebra, geometry and analysis, and the new sprouts: statistics, calculus of probabilities, mathematical logic, computation,... and above all, with its perfect logical deductions. Great scholars, from Pythagoras and Plato to Gauss, have even seen in Mathematics a world of order, more perfect that the everyday physical world. In fact, few professional mathematicians have missed the feeling that the true Mathematics inhabits somewhere beyond, in an ideal world, waiting to be discovered by the artist. Some could go very far in these ideal directions: thus, Carl G. J. Jacobi sustained that Mathematics exists only "for the honour of the human mind". Hence, the popular conception, at the same time romantic and misleading, of the mathematician as a distracted *savant* with little or no practical mind.

Is this the whole picture of Mathematics? Indeed, Mathematics is much more, there is whole new way of looking at them, and doing them: next to the experimental method, it is the basis upon which modern Science has been built and, as a consequence, the modern technological development rests. It permeates today all aspects of contemporary society from engineering to information, management business and finance, not forgetting the movement of the social disciplines toward the status of sciences, which amounts, in other words and with the proper nuances, to the use in these disciplines of the mathematical and experimental methods in combination.

Now, the practical importance of Mathematics in Science is indisputable, and it is not under discussion to a certain level, since the overwhelming majority of scientists are well aware of the *instrumental value* of some Mathematics. Thus, a quantitatively very important part of the Mathematics that is taught at universities all over the world is devoted to the education of engineers, physicists, chemists, computer scientists, economists and professionals of several other disciplines. However, the "applied" role of Mathematics goes far beyond this description, is more *essential*. In fact:

(i) Mathematics has played a fundamental role in the formulation of modern Science since the very beginning; a scientific theory is a theory that has an adequate mathematical model;

(ii) the Mathematics that can be applied today covers all the fields of the mathematical science and not only some special topics; it concerns Mathematics of all levels of difficulty and not only simple results and arguments;

(iii) the sciences continue to require today new results from ongoing research and present multiple new directions of inquiry to the researchers, but the rhythm of the contemporary society makes the time lapse substantially shorter and the request more urgent;

(iv) the capabilities of scientific computation have made *numerical simulation* an indispensable tool in the design and control of industrial processes.

In this article we will deal with this aspect whereby *Mathematics is the language* in which the pages of Science are written. thanks to it there has been a development of the combination Science-Technology that has changed the life of the citizen of technologically advanced societies in the last four centuries in a more radical way than the Neolithic revolution had done in the ninety previous centuries, and the change has been more dramatic in the last decades than in whole centuries before. Indeed, the daily practice of the physical sciences and engineering hides huge amounts of higher mathematics. Moreover, the very concepts on which their theories are based are essentially *mathematical concepts*. In the last decades we have seen the trend towards mathematization reach other disciplines, like Economics, particularly the financial market, branches of Chemistry, Biology and Medicine, and even the social sciences. It is true that the mathematical machinery, imposing or not, is most often carefully concealed from the public eye.

In the hands of the scientist, *Mathematics should permit to assimilate the data and to understand the phenomena.* In the hands of the engineer, it is the tool that makes possible to build a numerical or qualitative *model* whose analysis allows to *make decisions and design artifacts in an efficient and reliable way*. This activity is what, lacking a better name, we call **Applied Mathematics**. It covers the classical areas like Mathematical Physics and Mathematical Methods for Engineering, but it has today broader contours with the advent of scientific computation and numerical simulation. Modeling, computational simulation and data analysis are essential tools in modern science and industry. Applied Mathematics is just the **Mathematics of Reality**, i.e., the real world, whatever this sentence means to each individual reader.

Let us point out that there are other complementary visions of Mathematics: its cultural aspect, its importance in teaching and education as a vehicle for rational thought, its importance in understanding the daily world ("the Mathematics for the common man"), its aspect as a challenging intellectual game. It is at the same time the science of the exact and the calculation of the probable. It is the science of abstract and symbolic reasoning, and it is also today synonymous to computational virtuosity, of capacity to effectively process information, such an important quality in the present world. It tells us about the pure scientist who works with a piece of paper, and also about the world of modelization, computation and control of industrial processes. The layman thinks that Mathematics is tied to the quest of infinite precision. In practice, much of the art of contemporary mathematics is based on estimating. All of these aspects are part of the multiple legacy of Mathematics[1].

We turn next our attention toward the past and present of Applied Mathematics. The reader may find it convenient in a first reading to skip the information contained in the footnotes. Besides, a number of famous and important formulas and equations will appear scattered through the pages. They are not meant to be studied as part of this text! The purpose is rather to remind the initiated reader of their beauty and relevance, and at the same time to make the point that there is no *royal way* to Mathematics, namely that a real understanding of the topics outlined here implies serious study.

2 Galileo's and Newton's heirs

Two great historical figures fixed the *key role* of Mathematics in the moments in which modern Science was being born. *Galileo formulated it, Newton demonstrated it.* We ought to add that back in History Pythagoras of Samos (569bC-475bC) sustained that *All is number* and found the wonderful connections between Music and Arithmetic, while Archimedes of Syracuse joined Geometry and Mechanics in the IIIrd century b.C (d. 212 b.C.). And one century before Galileo, the universal genius of *Leonardo da Vinci guessed the role* of Mathematics in Science. A pleiad of great mathematicians, the heroes of our story, followed them[2]. The mathematicians who are busy with the application

[1] We have written about these subjects in [41].

[2] In the story that follows the names of Galileo and Newton are accompanied by other eminent mathematicians, some of which will be assigned a prominent role in the narrative.

of their art stand truly upon the shoulders of giants[3].

Let us proceed in parts: it is true that from the oldest times Mathematics has been related, even motivated, by practical problems. Arithmetic originates from the activities of counting and adding, Geometry stems from measuring lines, surfaces and bodies. But it is also true that Mathematics as a logico-deductive science, just as it was elaborated and bequeathed to us by the Greeks from Pythagoras to Euclides, had a net intellectual, we could say ideal, basis that it has always conserved since then and that is a fundamental part of pure Mathematics, that is to say, of Mathematics in itself. This intellectual process lives in its own world and does not owe anything of its merit or beauty to the possible utility or practical application, not more than a poem or a painting do. An easy and frequently made syllogism would lead from here to conclude that the authentic Mathematics lives essentially alien to the adventure of science and technology. We contend that this syllogism is false by a great deal, even if it has been sustained by many mathematicians, and we will make our case clear in what follows by using opinions of famous scientists, but mainly by presenting a record of factual evidence. Indeed, *History shows us that the symbiosis with Science and Technology has been fundamental and fruitful and that Mathematics owes a great deal of its present being and of its main topics to its adventure companions, and conversely the latter to the former.*

As is well known, modern Science appeared in Europe at the end of the Renaissance. It is not based upon Mathematics alone. The fundamental pillar of the building in germ was aptly formulated by the English philosopher and politician Francis Bacon circa 1620 and consists of the *experimental method*[4]. Nature becomes the preferential object of philosophical investigation, we should learn to read and to understand it, and eventually to control it; observation is the means for comprehension and experiment is the test of our predictions. The sciences were formed around this method, first Physics, then Biology, Geology, Chemistry and so on.

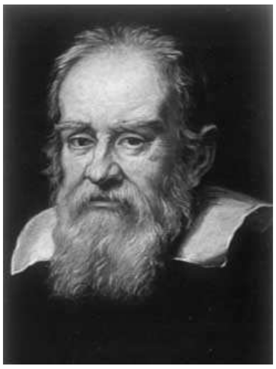
Mathematics is, since the very beginning, the other pillar of the sciences. It was Galileo GALILEI (1564-1642) who pointed out in the clearest form that course for the budding sciences at the beginning of the XVII century. His is the

Such a selection has been useful to set the main hits and to get to know the heroes of our private adventure, but is no doubt unfair from a strictly historical point of view with personalities like Fermat, Leibniz or Gauss, and we want to make it clear at this point. We hope to be excused because of the brevity of the text (the famous *narrow margin* referred to by Fermat) and also because the purpose we have in mind is not the history of science.

[3]Newton's opinion on his predecessors in a letter to R. Hooke, 1675: "If I have seen farther than others, it is by standing on the shoulders of giants". I have endeavoured to include in the text and notes some of the most celebrated phrases of mathematicians and scientists about Mathematics and its application.

[4]The inductive method is presented in his work *Novum Organum* or *New Instrument*, 1620.

famous quotation taken from his letter "Il saggiatore"[5] that we reproduce in detail: *"Philosophy is written in that great book that stands constantly open to our gaze, the Universe, but it cannot be understood unless one first learns to comprehend the language in which it is written and its characters. It is written in the language of Mathematics, and its characters are triangles, circles and other geometrical figures,..."*[6]



Galileo Galilei

Galileo was of course a committed defender of the experimental method, to which he contributed his famous astronomical and mechanical observations [7]. The attitude of Galileo had precedents, the most remarkable being as we said Pythagoras and Archimedes in the Ancient Times and Leonardo da Vinci (1452-1519)[8] a century before, but his formulation was determined and put to practice, and it happened in a suitable historical context; it eroded the bases of Aristotelism and Scholastics dominant until then in the intellectual world. It bore fruit in a short time and the scientists see themselves reflected in it.

Indeed, philosophies are a small thing if they remain words and polemics, if they are not carried out. The glory of the XVIIth century resides in a series of great philosophers-scientists (called at that time *natural philosophers*), who, without forgetting metaphysics, threw themselves determinedly to the pursuit of the knowledge of Nature and of mathematical invention: René Descartes studied the principles of reasoning, as well as mechanics and the universe; he

[5]1623, cf. Opere, VI, p. 232; "The Assayer", translated into English by S. Drake, Doubleday Anchor Books, New York, 1957.

[6]The famous words are not usually printed in the original Italian: *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*

[7]He wrote down his ideas on Physics, Mathematics and Engineering in the book *Discourses and mathematical proofs concerning the two new sciences*, written in Florence before 1633 but only published abroad in 1638 after the problems with the Church. The two new sciences are mechanics and the science of motion. In 1995 the space probe *Galileo* reached Jupiter and with it the 4 planets discovered by him in 1610.

[8]The interests of Leonardo, a truly universal genius, cover painting and sculpture, engineering and architecture, Physics and Mathematics. Scientist and visionary, he drew the plans of a flying object (forerunner of the helicopter) and coined the term turbulence. Here is a relevant quotation from Leonardo: "No certainty exists where it is not possible to apply the mathematics or in what cannot be related to mathematics".

tied geometry to algebra and wrote "The Discourse of the Method"[9]; Blaise Pascal wrote his "Pensées" but also investigated the principles of fluids (like pressure), geometry, calculus and probabilities. And so did Pierre de Fermat, Edmond Halley, Christiaan Huygens and Gottfried W. Leibniz, a most renowned mathematician, logician and philosopher.

We are ready to meet one of the crucial characters and moments in the history of science. Indeed, the century reaches its culmination with the figure of Isaac NEWTON (1642-1727), who shows the incontestable success of Galileo's proposal as applied to mechanics. He attacks the basic problems debated during the century and

ISAAC NEWTON

(i) concludes that the movement of solid bodies follows a simple mathematical law that relates the second derivative of space to an invisible *but real* entity, the force. In mathematical words, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;

(ii) upon applying this theory to the heavenly bodies, he concludes that they move along their orbits in agreement with the law of universal attraction. In formulas, $F = Gmm'/r^2$.

In order to mathematically support the movements resulting from these laws he discovers what we know as infinitesimal calculus and solves differential equations. Moreover, the very formulation of his laws is not possible without the new concepts taken from Differential and Integral Calculus, that carries the names of Newton and Leibniz, and was invented by combining the intuitions of mechanics and geometry[10].

In 1687, when his monumental work, the *Principia*, is published[11], Mechanics is solidly founded upon the same bases it still has. Mathematics is not only an indispensable tool, *it is the language in which Science is conceived and expressed*, this is the reason of the book's title. ¿From that moment on, the description of the dynamics and evolution of mechanical systems are an essential part of Mathematics. An enormous period of development follows during which Mathematics tries to fulfill this new fundamental role.

[9] *Le Discours de la Méthode*, Leiden, 1637, a capital work in the history of science. His work *Les Météores* is considered to be the first attempt to put the study of weather on a scientific basis.

[10] In placing Newton in proper perspective we have to combine his mathematical formation with the astronomical knowledge he inherited from Tycho Brahe, Johannes Kepler and Galileo.

[11] *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, i.e., "Mathematical Principles of Science".

Newton is generally considered the most influential scientist in the history of mankind, cf. [36]. Let us provide some additional data in order to better understand the greatness of his legacy. If to his credit we may list the foundations of Mechanics and Astronomy, of Differential and Integral Calculus and Differential Equations, he also studied the nature of light, laid the foundations to Optics and contributed remarkable technical advances, like the refraction telescope. On top of this, he studied the fluids that are today called Newtonian, explained the operation of tides, computed the velocity of sound (and was also interested in Theology, Alchemy and Astrology, a quite common feature of the times)[12]. His prestige among his contemporaries was enormous and the most brilliant philosophers of the XVIIIth century (Hume, Kant, Voltaire[13]) studied his work and thought about expanding his fabulous success to all fields of philosophy, a task that turned out to be of a higher difficulty. Indeed, we are still busy with it.

The immensity of the task of understanding Nature did not escape a penetrating person like Newton, with all his success. One of his most celebrated opinions runs as follows: "I do not know what I will look like to others; to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me".

3 The century of reason and lights

During the following three centuries, a part of that ocean has been filled with truth, science and mathematics. Science and Technology, the basis of the Industrial Revolution, have advanced with theories, reasoning and experiments. As a consequence, the society of the XXth century has changed more radically with respect to the XVIIth century than anything that had happened in several thousand years before, since the onset of the great agricultural civilizations. The comfort of house, transportation and communications, and the health of the present-day citizen rest upon technical bases completely unknown to the people of the XVIIth century.

Starting with G.W. Leibniz, a great philosopher and Newton's rival in the famous and a bit sad "dispute of the Calculus", a series of brilliant

[12] He was quite confident in his powers. Here is a quotation from Principia: "From the same principles, I now demonstrate the frame of the System of the World".

[13] It is worth remembering that the Principia were translated into French by the friend of the latter, the Marquise de Châtelet, with his collaboration, 1756. She is described in Encyclopaedia Britannica as "Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Ch., French mathematician and physicist who was the mistress of Voltaire", and only in the text of the article her many accomplishments are described.

mathematicians (we would say physicist-mathematicians), like the Bernoulli family, Euler, D'Alembert,... exploited the potential of the new Calculus and formulated mathematically all types of mechanical problems: shooting problems, problems concerning the fall of bodies, the motion of fluids, mechanical vibrations, minimization,...

Infinitesimal methods are likewise powerful in their application to geometry, a discipline that lives in close symbiosis with mechanics. Scholars study the Calculus of Variations, a name for the calculus of minimum values of so-called "functionals", that will bloom in the XXth century as a fundamental topic of Functional Analysis, by then not even foreseen. Jean Le Rond D'Alembert[14] studied the vibration of a string and wrote the wave equation, that led him to decompose a function into a sum of elementary waves, a task also undertaken by Leonhard Euler (1707-1783) who carried out the decomposition into a possibly infinite sum of sinusoidal functions. Euler is perhaps the most prolific mathematician in history, he made fundamental contributions to Geometry, Analysis and Number Theory, but also to the different branches of Mechanics, Elasticity, Hydrodynamics, Acoustics, and even Music. His Latin is not difficult and his textbooks can be read today with profit and pleasure (preferably after translation!). He lived a great part of his life in St Peterburg, so he is credited with the foundation of Russian Mathematics, together with Daniel Bernoulli.

Leonhard Euler

The problem of infinite sums will worry mathematicians in the near future, but not in these moments of discovery and euphoria, and even less L. Euler whose intuition seems to know no limits.

Some of the glories and griefs of Mathematics as the language of Mechanics can be observed in the study of fluids. A systematic theory escaped even the genius of Newton. Indeed, the most difficult aspect of this theory consisted precisely in finding the exact mathematical hypothesis that permit to build a mathematical model, i.e., to mathematize it *just as it really is* [15]. Toward the year 1738 Johann and Daniel Bernoulli establish the theoretical science of Hydrodynamics on the idealized basis of the so-called *perfect fluids.* The study

[14] a well-known representative of the French *Illustration*, who combined a brilliant mathematical career with the publication of the famous Encyclopedia, jointly with D. Diderot.

[15] we recall here Newton's saying about his mechanics: *hypotheses non fingo*, I do not invent the hypothesis or axioms.

is continued by Euler, who writes the famous equations (1755)

$$\rho\,(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

(in today's notation) whose analytical solution turns out to be intractable at the time[16]. Moreover, D' Alembert exposes the limitations of the idealization implicit in the concept of perfect fluid by showing that a solid obstacle submitted to a "perfect wind" would suffer no net *drag* and no net *lifting force*. Indeed, this happens because theoretical mechanics does not deal with Nature, that escapes in its pure essence our curiosity, but it rather deals with the mathematical model that we are able to form about it. Experimental agreement allows us to confirm that a theory is good as a model of the physical world, but never that it is perfect[17].

In spite of the relative failure with the fluids, a feeling of optimism invades the minds of the best mathematicians - mechanicians at the end of the XVIIIth century, like Joseph Louis Lagrange[18] or Pierre Simon LAPLACE. The latter publishes his monumental book "Mécanique céleste" (1788).

PIERRE S. LAPLACE

He is also the author of the "Théorie Analytique des Probabilités", 1812, a most important reference in the development of probability theory[19]. Based on his mechanical studies he thought that the universe functions like a clock (determinism) and declared that the most important mathematical problems were already posed and solved, or about to be solved in a short time. Fortunately, History would prove the great man wrong on these issues. Does this bring to our minds recent heated debates about the end of Physics or History?

4 The XIXth century, the great century of Science

The contribution of the XIXth century to Mathematics, both pure and applied, is surprising by its novelty, by its richness and multiplicity of topics, and by its

[16] and they keep some of their mystery today: the existence of classical solutions given smooth initial data in 3 space dimensions is still an open problem.

[17] we will return to this subject when speaking of Einstein.

[18] Author of a *Mécanique analytique*, where the general equations of motion, Lagrange equations, are described

[19] Engineers and applied scientists are used to the Laplace Transform.

very unexpectedness. Let us begin our review with the Mathematics that came from Physics.

• ELECTRICITY AND MAGNETISM: From Michael Faraday to J.C. Maxwell, experiments and partial laws cover a road that counts the names of Gauss, Ampère, Biot, Savart, Lenz, ... till we arrive at the system of partial differential equations that relates the electric and magnetic fields (1863), the work of James Clerk MAXWELL[20] Maxwell's equations are one of the major achievements of Mathematics in the 19th century. Thanks to J.C. Maxwell the new branch of science, whose existence was unsuspected a century before, reached the level of mathematical perfection which Newton accorded to Mechanics. As a consequence, the wave equation is the tool that allows us to describe the propagation of electro-magnetic phenomena in the form of waves characterized by three parameters: first, the amplitude A; second, the speed c that depends on the medium (and is therefore constant in the vacuum); third, the frequency ω of oscillation, that is a variable quantity. In short,

JAMES C. MAXWELL

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u = A\cos(kx - \omega t),$$

where $k = \omega/c$ is called the wave number. Do we need this formula to proceed? The answer is yes, since soon afterwards, and as reflection of the generality of the parameter ω in the mathematical model, Heinrich R. Hertz predicts and discovers electro-magnetic waves outside of the visible range (radio waves, 1888), and Guglielmo Marconi discovers wireless telegraphy, that is to say, the radio (1895), introducing us to the world of communications, which is the soul of the XXth century. On the other hand, an incompatibility appears with Newton's mechanics, about which we will speak in a moment. Let this be said about the consequences of the mathematical formulation on the evolution of science[21].

• THE REAL FLUIDS, from Claude Louis Navier to George Gabriel Stokes, 1821 to 1856 and later. The Navier-Stokes equations describe real fluids and they govern the behavior of atmospheric phenomena (climate, Meteorology,

[20] publication in final form in *Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873.

[21] Maxwell is considered the major theoretical physicist of the XIXth century, Einstein sustained that Maxwell's work represented the most significant revolution in the study of physics since Newton. The theory of wave propagation is one of the classical branches of applied mathematics nowadays in its multiple variants. An excellent mathematician, Maxwell was an advocate of the probabilistic approach to Science, which he applied to the study of gases, and is credited with saying that "the true Logic for this world is the Calculus of Probabilities"

Hydrology, the future Aeronautics). The correct formulation of the equations describing the movement of real fluids took therefore some 180 years, after the attempts by Newton. A brilliant series of mathematicians figure among the modelers, like S. Poisson and J. C. Saint Venant, as well as the medical doctor J.L.M. Poiseuille, who investigated the blood flow. Lord Kelvin and H. Helmholtz set the bases for the mathematical study of vortices and turbulent fluids, already mentioned by Leonardo, but the full mathematical understanding of the latter is *still an open problem.*

In order not to extend our text excessively we will only mention two further physical theories of great mathematical significance:

• THERMODYNAMICS, which studies the exchange of heat, acquires solid mathematical foundations with James Joule, Saadi Carnot, J.R. Mayer, ... It has strong influence on the calculus with partial derivatives and the concept of exact differential. This theory includes the famous Second Law of Thermodynamics (law of entropy growth in the universe), a fundamental law in science. While its mathematical statement is simple, its practical interpretation has deep implications and puzzles generation after generation of scientists[22].

• Finally, let us mention STATISTICAL MECHANICS, associated to the names of L. Boltzmann and W. Gibbs[23], who carved a branch of Mathematical Physics on the basis of the calculus of probabilities, a discipline that had remained very much at the margin of this scientific adventure[24]. Indeed, the mathematical idealization of chance had been elaborated in the fabulous XVIIth century (ca. 1650) by B. Pascal, P. Fermat and C. Huygens to understand games of chance, and advanced later by Buffon, Bernoulli, De Moivre and Laplace among others. Suddenly, the concept of probability acquires a life of its own in Physics when attempting to model the behavior of huge quantities of particles[25]. This is why the need arises: particles obey of course Newton's mechanical law, but given that Avogadro's number[26] is so huge, approx. 6×10^{23}, it is absolutely impossible to follow individual particle trajectories. Statistical mechanics proposes an average behavior with surprising effectiveness: the prediction of the ideal relationship between temperature, energy and

[22] with unsuspected consequences: entropy is nowadays a central concept in Information Theory after the work of C. Shannon, *The mathematical theory of communication*, Bell. Syst. Techn. Journal **27**, pp. 379-423, 623-658 (1948).

[23] not to forget Maxwell, cf. the Maxwell-Boltzmann distribution.

[24] Boltzmann's tomb in Vienna has as sole ornament the entropy formula of statistical mechanics $S = k \log W$.

[25] This was not a trivial step. Boltzmann relied on his belief in atoms, a view strongly opposed at the time by famous scientists like E. Mach. The bitter controversy seriously affected his health.

[26] that measures the number of molecules of a gas per unit volume (22.4 l) under normal temperature and pressure conditions.

pressure for a perfect gas is immediate and turns out to be quite accurate!

BERNHARD RIEMANN

We change the scene to portray another of our heroes, an "exemplary life", Bernhard RIEMANN (1826-1866), one of those surprising figures whose work contains the best of pure and applied mathematics. The great German mathematician, who died quite young, is well known as a giant of pure mathematics. He bequeathed to us the hypothesis about the zeros of the "Zeta function" (*Riemann's Hypothesis*) whose proof is considered to be the most famous open problem of Mathematics upon entering the XXI century, after the recent solution of Fermat's conjecture. The Riemann hypothesis asserts that all interesting solutions of the equation $\zeta(s) = 0$ lie on a straight line in the complex plane, precisely at $Re(s) = 1/2$. This has been checked for the first 1,500,000,000 solutions. A proof that it is true for every integer solution would shed light on many mysteries, from the distribution of prime numbers to theoretical Physics. Riemann was a scholar with a geometrical mind who thought of complex analysis in terms of conformal transformations and had the vision of general spaces of several dimensions defined in terms of their local geometry[27]. Today we call them *Riemannian geometries* and they are the foundation upon which theoretical physics is built. Now, the same Riemann studied the propagation of compressible gases and arrived at the conclusion that the mathematical model[28], understood in the sense of classical solutions, is contradictory (because it predicts characteristic lines that intersect each other, so that on them the physical variables - density, pressure and speed - would take on several values simultaneously). However, he ventured that the theory was correct if *the point of view were radically changed*; as solutions of the differential equations we must admit functions that are not differentiable, not even continuous. Such boldness, so typical of the best Mathematics of the XIXth and XXth centuries, reminds us again of Newton: Riemann was not "inventing" a theory. The theory of shock waves is today a fundamental topic in gas dynamics with its application to Aeronautics, and is therefore one of the most active areas of mathematical research in partial differential equations, ... and engineering.

[27] his famous article *On the hypotheses which lie at the foundations of Geometry*, in German *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854, published in 1868.

[28] a nonlinear system of partial differential equations of hyperbolic type.

Inner Evolution. But, even after mentioning Riemann, the present vision would be totally inaccurate if it did not take more explicitly into account the internal evolution of Mathematics, that had by then attained a high level of maturity. We will comment only briefly on this issue since it is better known by the mathematical public. The following are some of the star topics. Many of them appeared unexpectedly, but they were meant to have a brilliant future. Let us mention non-Euclidean geometries by J.C.F. Gauss[29], J. Bolyai and N.I. Lobachevski, the rigorous foundation of Infinitesimal Calculus by Augustin L. Cauchy, the theory of functions by Karl Weierstrass, mathematical logic by George Boole and followers, set theory by Georg Cantor, where we mention only a relevant name next to each chapter.

There are research fields in which Mathematics clearly takes the relay from Physics in the task of extracting the substance contained in a concept. This happens with the problem of representing a function as a sum of simple functions, solved by Brook Taylor and Colin McLaurin for sums of powers and posed by Daniel Bernoulli (1753) and Leonhard Euler for trigonometric sums as they appear in the wave and heat equations. Thanks to the insistence of Joseph Fourier (1822)[30] mathematicians enlisted in the adventure of giving a clear rigorous sense to general infinite sums of trigonometric functions,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega x) + b_n \sin(\omega x)\}.$$

This is the origin of a major area of the theory of functions, known as Fourier Analysis. The task was fraught with baffling difficulties and great successes. Thus, when Paul du Bois Raymond constructed (1873) a continuous and periodic real function whose Fourier series does not converge at all points it seemed that something was quite wrong with the mathematics of wave analysis. On close inspection three options lay open to the researcher: (i) modify the notion of function, (ii) modify the definition of convergence, (iii) replace the basis of sine and cosine functions by better-suited candidates. It is to the credit of mathematicians that *all three courses* have been pursued with amazing success. The fundamental theorem about summation of Fourier series is due to Lennart Carleson, 1966[31], and needs *almost everywhere convergence*, L^2 spaces and the impressive analysis machinery developed in the XXth century[32].

[29] the "Prince of Mathematicians".

[30] article of 1807, memory presented to the Paris Academy of Sciences and published in 1822.

[31] *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966), pp. 135–157.

[32] Here are two quotations from Fourier that will help kindle the debate on Pure versus Applied Mathematics: The first is "The differential equations of the propagation of heat

Social Context. It may be interesting to say some words on the social evolution of Science in the XIX century. This is the century in which the bourgeois, industrial and democratic revolutions take root in Europe, bringing along the extension of scientific and industry-related studies in universities and in other specialized centers centers, like the technical schools. That development enlarged the body of professors and researchers at an exponential rate. Progress was so impressive that at the end of the century we find again a frank optimism in the mathematical opinion, if we for instance let ourselves be led by the history written by the German geometer Felix Klein[33]. Another characteristic of this period is the deep separation taking place between mathematicians and physicists and engineers, a consequence of the enormous growth of their respective fields of study. Such a separation will have serious consequences on the evolution of Mathematics in the XXth century, and even on the very concept of Mathematics.

5 An agitated turn of the century

In any case, the turn of the century is spectacular in Physics as in Mathematics. Two extraordinary figures appear in the mathematical arena, Henri Poincaré (1854-1912) and David Hilbert (1862-1943). They make a deep imprint in the Mathematics of the XXth century. But a great part of the retrospective brilliance is due to the fact that the turn of century was *a time of crisis*, since the evidence of phenomena that did not fit into the "great explanation" at hand kept mounting.

express the most general conditions, and reduce the physical questions to problems of pure analysis, and this is the proper object of theory". Now the second one: "The profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries".

[33] *Lectures on the development of mathematics in the 19th century.* Here is a significant quote from Klein: "The great mathematicians like Archimedes, Newton or Gauss always united theory and applications in equal measure".

Henri Poincaré

David Hilbert

• The experiment of Michelson-Morley (1887) showed that the speed of light is really constant, as predicted by the wave theory based on Maxwell's equations. The mechanical model of the world of Euclides-Newton sees a first huge crack.

• The movement of particles suspended in gases reveals a highly irregular movement, the Brownian movement (Robert Brown, 1827). This is a blow for Euclides' geometry based on points, straight lines and smooth curves (or at least piece-wise smooth).

• The surprises of the theory of functions lead to the Theory of Sets (Georg Cantor) that together with Logic (George Boole, Gottlieb Frege, Giuseppe Peano) form the basis in the attempt to provide rigorous foundations to Mathematics once for all. Mathematics proposes to Science the concepts of *consistent* and *complete* theory. Disputes and different schools arises: logicism (Alfred N. Whitehead and Bertrand Russell[34]), intuitionism (Luitzen Brouwer), formalism (D. Hilbert). Then paradoxes appeared (Russell, Burali-Forti, Richard) and that sowed a notable chaos in weak and not so weak spirits.

• No efficient analytical or computational tools are available to tackle the complexities of the equations governing continuous media, like fluids. Consequently, the practical Mathematics of engineering plunges into a series of approximations and rules that divorce them from the theory.

• Even the classical questions of the general integration of the equations of movement for three or more (heavenly) bodies turns out to be impossible[35]. Big problems, big remedies: H. Poincaré proposes the qualitative methods and opens the doors to algebraic geometry and topology (called then Analysis Situs, 1895). But, at the time he discovers with his theoretical methods the tremendous complexity hidden in the mathematical model (i.e., the dynamical

[34] their famous book *Principia Mathematica* dates from 1910.

[35] as exposed by H. Poincaré in his book *Méthodes nouvelles of the mécanique céleste,* Paris, 1899.

systems). The hidden monsters are called homoclinical orbits and they will infest with *chaos* the whole body of celestial mechanics when Poincaré is finally well understood (this took several decades)[36].

• Let us add some optimistic notes. Thus, the theory of integration of functions is crowned in the works of E. Borel and H. Lebesgue. Now Calculus possesses a concept of integral where the process of taking limits is natural. Functional Analysis is born (Hilbert spaces) and the famous Dirichlet Problem has a solution (in a sense seen then as quite unusual). The price to pay is the construction of a sophisticated mathematical theory that students of science and engineering must absorb, or at least learn to live together with, paraphrasing J. von Neumann.

• Main discoveries of a mathematical nature occur in other sciences and will bear fruit in the next century. The Russian scientist Dmitri I. Mendeleev found order in the chaos of chemical elements and proposed the Periodic Table in 1869, the basis of today's physico-mathematical treatment of Chemistry. On the other hand, the Austrian monk, botanist and plant experimenter Gregor J. Mendel formulated the rational laws of inheritance, thus laying the mathematical foundation of the science of Genetics[37].

6 The XXth century, a century of wonders

At this height, we expect to have impressed upon the reader a feeling of the deep symbiosis of Mathematics with Physics, of their surprising and in many cases unexpected interactions. By this time this symbiosis includes advanced technological applications, a prelude of what the new century will be. The explosion of Mathematics and Science in the XXth century makes it advisable to reduce our text to some of the most important items. A main feature that stands out is the progressive mathematization of other sciences, which makes them appear as new horizons for Applied Mathematics.

New Mathematics that came from Physics

• THE THEORY OF RELATIVITY. Albert EINSTEIN, the Man of the Century according to *Time magazine* (year 2000), proposed the two versions of relativity in 1905[38] (special relativity) and in 1916 (general relativity).

[36] In order to measure the stature of our hero the following quotation could be useful: "in his courses at the Faculté des Sciences de Paris since 1881, and later at the Sorbonne since 1886, Poincaré changed subject every years, touching upon Optics, Electricity, Astronomy, the equilibrium of fluids, Thermodynamics, Light and Probability".

[37] *Versuche über Pflanzenhybriden* (Experiments with Plant Hybrids), published 1886.

[38] 1905 was the *annus mirabilis* for Einstein. In three separate papers he explained the photoelectric effect, Brownian motion and the theory of relativity. It is unlikely that such a feat will be repeated.

It will be small surprise to the reader if we say that in both cases it is a matter of an in-depth reflection upon the Mathematics that lie at the basis to Physics. Special relativity has as precursors Lorentz, Poincaré and Minkowski, who studied the invariance group that corresponds to the new geometry of space-time. General relativity uses the geometrical concepts that Riemann elaborated more than a century earlier as a pure *Gedankenexperiment*, i.e., a thought exercise upon the "hypotheses which lie at the foundations of Geometry", and that were developed by the Italian differential geometry school of Ricci, Levi-Civita and Bianchi. Relativity was destined to be a great ball-game for differential geometry in the XXth century. We go from Einstein's equations to the Big Bang and to black holes (Oppenheimer and Snyder, 1939; Penrose and Hawking). All can be seen as a piece of pure mathematics building a model for a branch of Physics. It is befitting however not to forget the other face of Relativity: since the first experimental confirmation by Sir Arthur Eddington in 1919, an incessant number of experiments have served to confirm (or rather, with Einstein's modesty, not to refute) the theory of Relativity. Indeed, hypotheses are not invented in real science[39].

Albert Einstein

Let us pause to take a look at some of the main formulas. In September 1905 Einstein published a short paper in which he proved the fundamental formula $E = m\,c^2$ about the mathematical equivalence of mass and energy, which has become a classic in the popular culture of the XXth century. On the other hand, the transformation laws of Special Relativity that replace the Galilean transformation laws at high relative velocities, known as Lorentz transformation laws, are:

$$x = \gamma x' + \gamma v t', \qquad t = \gamma t' + \frac{v}{c^2}\gamma x',$$

where the constant γ is called the time dilation factor. It depends on the relative velocity v and is given by the expression: $\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Consequently,

[39]Here is a significant opinion of Einstein on the role of mathematics: "Mathematics deals exclusively with the relation of concepts to each other without consideration of their relation to experience. Physics too deals with mathematical concepts; however, these concepts attain physical content only by the clear determination of their relation to the objects of experience", in *The theory of Relativity*, 1950. Einstein's opinions are all the more interesting since, contrary to other outstanding figures in the history of Physics, like Newton or Maxwell, he was not himself an outstanding mathematician, at least technically. He left however an impressive legacy to Mathematics through his theories.

the addition of velocities follows the surprising rule

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

very much against what we were used to believe (i.e., $u = u' + v$). All in all , Einstein's most recognized formula is of course $E = m\,c^2$, which forms with Planck's quantum formula $E = h\,\nu$ the new vision of energy at the beginning of the century. Precisely, quanta are our next subject.

• QUANTUM MECHANICS. The second magical tour[40] takes us from Max Planck's Hypothesis of the Quanta, 1900, to the Schrödinger Equation (Erwin Schr., 1926) passing by Niels Bohr, Louis de Broglie, Max Born, Werner Heisenberg and Paul Dirac. The door to the atomic world is coded in the marvelous equation

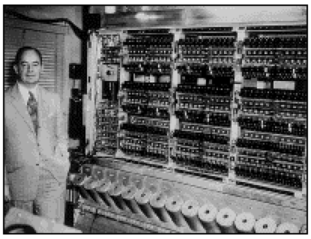
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\,\psi,$$

where $\hbar$ is the reduced Planck constant, $\hbar = h/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, Δ is the Laplacian operator and $V = V(x, y, z, t)$ is the potential. All this may really seem like a piece of Kabbala, and at first the experts discussed heatedly about the meaning to be given to the variable $\psi(x, y, z, t)$ called "wave function". Such is the power of Mathematics, these great physicists had found a piece of the Mathematical Code of the Universe but did not know how to interpret the cipher. In 1928 the probabilistic interpretation was proposed by Max Born, where $|\psi|^2$ is the probability density of finding a particle at the location (x, y, z) at the instant t, and this is widely accepted, not without resistance, following Einstein in that[41]. Because Quantum Mechanics is a fundamental challenge to the previously admitted way of looking at the world, to traditional determinism and causality. We may say that Determinism is based on the assumption that "the exact knowledge of the present allows the future to be calculated". Is it not that the dream of the exact sciences, and does not Quantum Mechanics subvert that belief? Pondering on the issue, W. Heisenberg found in 1927 the following answer: "not the conclusion [of the deterministic assumption], but the initial hypothesis is false".

Leaving the world of interpretations aside, we must report that this theory, based on the highest level of mathematical abstraction, will be confirmed by a century of experiments. Its magical part has a stellar moment when Paul A.M. Dirac, using the relativist formulation, proposes the existence of a particle, called today positron (1932), because "the equations admit the sign change

[40] quotation in homage to "The Magical Mystery Tour", Lennon and McCartney, 1967.
[41] his famous comment: "God does not play dice".

with respect to the solution describing the electron",... and the positron was duly discovered[42] by experimental physicists shortly afterwards (Anderson and Blacket, 1932-33). Dirac predicted the existence of the antiproton that was confirmed by Segrè in 1955, and also of the magnetic monopole, but this time existence went without confirmation up to the present day. Dirac's predictions are a remarkable example, in no way unique, where mathematical modeling goes ahead of the experimental evidence[43]. Does this remind us of Hertz?



J. V. Neumann

The mathematical harvest is not scarce: the theory of self-adjoint operators in Hilbert spaces with the corresponding spectral theory were developed by John von Neumann (Janos v.N., 1903-1957), one of most versatile geniuses of the century[44], with the purpose of giving sense to the operators that appear in the Schrödinger equation, Laplacians and the rest. He is based on the work of S. Banach and the Italian experts in the Calculus of Variations, but Quantum Mechanics has its whims: it needs some sophisticated mathematical objects, so-called "unbounded linear operators in Hilbert spaces". We are therefore at the edge or beyond the syllabus of undergraduate Mathematics. This is interesting information for those who claim *that all useful mathematics is necessarily easy*[45]. Together with the Calculus of Variations, Quantum Mechanics has been a continuous source of problems for Functional Analysis, a

[42] should we said found? or recognized?

[43] On the other hand, science based solely on mathematical arguments or analogies can be wrong science. Thus, there is strong mathematical tendency to assert that in the realm of particles certain mathematical symmetries are "laws" of nature. A telling counterexample is provided by the law of conservation of parity that specifies that elementary particles and their mirror images *must* behave identically; in 1956-57 three sino-americans T. D. Lee, C. H. Yang and C. S. Wu first conjectured and then proved that there are subatomic processes that violate that law.

[44] J. von Neumann, *Mathematische Grundlage der Quantenmechanik,* "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", Springer, 1932. Von Neumann's trajectory travels through the most diverse areas of Mathematics, pure and applied: in his youth he modified the ZF set theory, he creates the v.N. algebras in operator theory, he is the father of Game Theory ("Theory of games and economic behaviour", J. von Neumann and O. Morgenstern, 1944) and we will see him later at the Institute for Advanced Studies in Princeton as one of the fathers of the first modern computer. After the war he was busy with hydrodynamics, numerical methods (Monte Carlo, stability for finite difference schemes), the theory of automata, and so on.

[45] I refer specifically to the opinions of the famous English mathematician G.H. Hardy in his book *A Mathematician's apology*, [15], that reflects very different points of view from the ones maintained in this article, cf. specially his section 26. It is a well-known book, of great interest, but time does not seem to have proven the author right. It is to be considered that in 1940 the practical relevance of sophisticated theories like Quantum Mechanics could very well not be clear, as it is today.

branch of Mathematics that takes on its own flight.

Mathematics that came from Engineering

• Aeronautics. After the impressive advances of Mathematical Physics in the XIXth century, and in particular of fluid mechanics, it could seem that the old problem of flight, that had already occupied Leonardo da Vinci, had to be solved for good. And the experiments with balloons had been conducted with success a century before[46]. Moreover, the theory of complex variables and of potential and vortex flows had obtained remarkable progress. But with all this progress, real *propelled flight* was not understood nor practiced, and a discouraged W. Thomson Lord Kelvin recognized towards the end of the century that the dream of propelled flight was maybe impossible[47]. Then, and after a number of partial successes in different countries, the experimental method was vindicated by the brothers Wilbur and Orville Wright, manufacturers of bicycles and accomplished experimenters with no academic training. They were able to fly a propelled artifact in the inhospitable beaches of Kitty Hawk, North Carolina, in the cold morning of December 17, 1903. An Engineering discipline is born, Aeronautics.

The reaction of the scientific community was immediate and up to the challenge. During the period 1905-10 the main mathematical ingredients missing in the theoretical model were understood (L. Prandtl, M. Kutta, N. E. Zhukovski, S.A. Chaplygin). They deal with the concepts of sustentation, circulation, boundary layer, separation, laminar and turbulent regime. In 30 years the new scientific discipline carries us beyond the sound barrier. And with this discipline new branches of applied mathematics see the light, such as the theory of singular perturbations, the theory of supersonic and transonic flows and the mathematical theory of combustion[48].

We restrain here from listing other branches of Engineering that have had a similarly active interaction with Mathematics, but see Section 8.

Great news coming from Mathematics

Mathematics have lived throughout the XX century quite focused on the internal development of the ideas received from the fabulous previous century. Fortunately, the always difficult and generally failed attempt to predict the main lines of the future has had an exceptional counterexample in the famous proposal

[46] Brothers Montgolfier, 1783.

[47] "heavier-than-air flying machines are impossible", he said in 1895.

[48] More toward theoretical mathematics we have the mathematical theories of front propagation and that of singularity formation, like blow-up for nonlinear differential equations. Let us add that, though the engineering practice of aeronautics rests on firm theoretical foundations, the deep mathematics involved are far from being well understood and research is quite active

by D. Hilbert at the II International Congress of Mathematicians, celebrated in Paris in 1900. Hilbert summarized in 23 problems the main challenges faced by Mathematics, going from the most theoretical aspects of pure mathematics to the problems of mathematical physics[49], cf. reference [17]. Those 23 problems have been of great importance in the course of the century, but other lines have come to compete for the limelight, and how! Let us point out three important developments among many others.

• THE CALCULUS OF PROBABILITIES. It may look like an answer to the needs presented by Quantum Mechanics, but in reality it happened independently. In the 30's Andrei N. Kolmogorov put in Moscow the foundations of axiomatic probability[50] upon set theory, and abstract measure theory is born. The names of P. Levy in France and N. Wiener in the USA are usually associated with this discovery. We should not forget the precedents: Boltzmann studied Brownian motion, L. Bachelier wrote his thesis in 1900 in an (unsuccessful at the time) attempt to model financial markets, and Einstein obtained the Nobel Prize in 1921, not for the theory which made him famous, but for his studies on the photo-electrical effect and... on Brownian motion. Markov chains had been studied since 1900 by A.A. Markov.

Nowadays, the theory of Stochastic Processes is a main area of this booming branch of Mathematics, and the Itô Calculus is an essential tool of continuous stochastical analysis to be compared to the classical infinitesimal calculus of Newton and Leibnitz. All this development was completely unknown, even unsuspected, to older ages and it takes upon itself the task of informing us about uncertain and random events and their probable outcome or evolution. As usual in our narrative, it is not just an academic pursuit, it has very important applications in scientific, industrial and financial processes.

• DETERMINISTIC CHAOS. The study of chaos generated by differential equations, already announced by Poincaré, whose Mathematics had matured thanks to the efforts of different mathematicians, especially G. Birkhoff, had to wait for the work of a physicist devoted to the study of weather to acquire a dramatic impulse. In effect, this merit is attributed to Edward Lorenz, from MIT [51]. Interested in the study of convective processes in the atmosphere, he proposed a very simplified model consisting of three ordinary differential

[49] Though it must be said that the latter were relatively under-represented, and Hilbert worked on the subject in subsequent years.

[50] His book *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, “Foundations of the Calculus of Probabilities”, was published in 1933.

[51] his famous publication is *Deterministic non-periodic flow*, J. Atmos. Sci **20** (1963), 130–141.

equations and I will not resist the temptation of reproducing it for you

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y, \\ y' = 28x - y + xz, \\ z' = \frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

For this particular choice of parameters he found to his surprise that the numerical trajectories produced by the computer did not converge to a fixed point or a periodic solution. The 12 page paper dates from 1963. Deterministic chaos was born, along with strange attractors and a whole branch of Mathematics, at the beginning quite experimental, then theoretical, a great novelty made possible by the advent of the computer. Authors like S. Smale, D. Ruelle and M. Feigenbaum become world-famous[52]. Objects like the *fractal sets* of B. Mandelbrot[53], already announced in the work of G. Julia in the 1920's, enter the scene. The study of fractal, chaotic and turbulent processes is one of the border-lines of present mathematical thought, the relation of deterministic chaos to natural chaotic and turbulent phenomena still being largely unknown.

• NEW CONCEPTS OF SOLUTION IN DIFFERENTIAL EQUATIONS. Toward the 1930's it was clear for many researchers that the concept of classical solution was not sufficient to build a theory of differential equations for use in mathematical physics which would satisfy the requirements of the applied science. In effect, it is natural in this discipline to work with *problems*, i.e., with sets of equations and additional data, and to require them to be *well posed*. Following J. Hadamard, this means that such problems should have a solution, that this one has be to unique if sufficient data are given, and finally that the solution should depend continuously on the data. Now, it may happen in the real science that classical solutions do not to exist and this fact can even be proved in a rigorous way, and even then the problem could be reasonable from the physical point of view. Or it may simply happen that the concept of solution whose existence turns out to be natural and simple to show is not the classical concept.

Faced with this challenge mathematicians have developed a diverse set of notions of *generalized solutions* with physical meaning. A remarkable example arises in Dirichlet's problem of energy minimization already mentioned[54]. Another basic example arises with Riemann's problem of gas dynamics. Yet

---

[52] cf. Ian Stewart, *Does God play dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin, London, 1989.

[53] cf. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature,* 2nd ed., San Francisco, 1982.

[54] It deals with minimizing the energy integral $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ among all the admissible functions $u = u(x)$ defined in a domain of the space, Ω, and which take assigned values on the border of Ω; ∇u denotes the gradient of u. The crucial question in order to envisage the correct solution, is to decide what is understood under the label *admissible* function. The answer motivates Hilbert spaces.

another similar problem is tackled by J. Leray (1933)[55] in the study of the solutions of the Navier-Stokes equations for real (viscous) fluid in tri-dimensional space. Thanks to the work of functional analysts (S.L. Sobolev, L. Schwartz, ...) the concepts of *weak solution* and *solution in the sense of distributions* are developed to suit those needs. Summarizing a great deal, the main idea is not to ask the solutions to possess all the derivatives implicit in the equation, but rather to comply with a family of tests. With the experts in conservation laws (P. Lax, O. A.Oleinik, S.N. Kruzhkov) we arrive at the concept of *entropy solutions*, needed for gas dynamics where weak solutions are insufficient. Entropy solutions of gas dynamics equations "solve" the differential equations but may not even be continuous (and thus we recover the legacy of Riemann, Rankine and Hugoniot and their shock waves).

In our days new concepts of solution appear to suit new needs, such as the *viscosity solutions* of M.G. Crandall, L.C. Evans and P.L. Lions. L. Caffarelli extends the concept to the problems of phase transition or free boundary, in which the discontinuity is a fundamental part of the mathematical setting. And the saga continues with so-called mild solutions, semigroup solutions, renormalized solutions,...

One of the most striking aspects of these new concepts is their compatibility with the *numerical solutions* produced by the discrete methods of numerical calculus. We find thereby a surprising alliance of the abstract and the numerical concepts against "the unflexibility of the classical concepts".

7 Engineering and Mathematics in the last revolution of the century. Computers and computational mathematics

The practical realization of the old dream of building a calculating machine takes shape in form of the modern computer that originates from two sources, Technology and Mathematics. Both combine towards a fabulous invention in the year 1946[56]. ¿From one side, we have the old project of the calculating machine, already thought of by B. Pascal[57] and G. Leibniz in the XVIIth century[58], which owes so much to Ch. Babbage at the beginning of the XIXth century, and finally is to be realized in the XXth century in an efficient form thanks to the progress

[55] Jean Leray published three papers on the subject in 1933-34. The last is *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux emplisssant l'espace*, Acta Math, **63**, 1934.

[56] with this date I refer to the ENIAC computer.

[57] his *machine à calculer*, the *Pascaline*, is famous.

[58] Leibniz thought in the direction of algebra and symbolic logic. Recent investigations indicate that the first of such calculating machines is due to a German, Schickard, 1623.

of electronics: first, the vacuum tube and then a line of impressive technical progress that leads to semiconductors, miniaturization and the *chip*[59].

But the computer is not born as a passive calculating machine, it is born with a program. This is the legacy of mathematical logic, from G. Boole with his algebra to the program of formalization of Mathematics by D. Hilbert, that leads to Kurt Gödel's incompleteness proof in 1931[60], one of the absolute Mathematical Hits in the XXth century. Which in turn provokes the interest of a mathematical genius,

A. Turing

Alan Turing (1912-1954), who translates the program of formalization to the language of machines (*On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, 1937), and invents, together with Alonzo Church, Computability theory. All this happened years before a physical computer was to see the light. There follows a historical moment: the war effort, deciphering the German code Enigma,... Enters von Neumann with the idea of the stored program and ENIAC is built in 1946[61]. The modern computer appears as an effective calculating machine with four characteristics: general purpose, electronic, digital and programmable; *the two latter are directly related to mathematics*. The first commercial computer, UNIVAC, was released in 1951. In the short period of a bit more than 50 years we have seen the evolution from huge machines, that could handle kilobytes to megabytes, to the personal computer with capacity of several gigas and to the World Wide Web. Duality in the computer world continues in the form of the famous couple Hardware and Software[62].

The computational world, a new world for Mathematics. The computer world is changing little by little the daily life of the citizen: banking transactions, electronic mail, ticket reservations,... Its effect upon Mathematics,

[59] the integrated circuit was invented by R. Noyce and J. Kilby in 1958.

[60] the incompleteness of formal systems, was published in *Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and other related systems".

[61] ENIAC stands for Electronic Numerical Integrator and Computer, built by J.W. Mauchly and J.P. Eckert at the Univ. of Pennsylvania; today the pioneering work of J.V. Atanasoff is recognized. Mention should be made of the English Colossus, 1942, and the German Z1 to Z4 machines, cf. ref. [24]. All of these machines had a military purpose.

[62] Personal computers appear in 1977 and, against the predictions of the gurus, have taken up the scene, thanks no doubt to the impressive progress of hardware: a chip may contain at the end of the century up to 10^9 transistors

less known by the general public, is even more dramatic. On the one hand, new branches appear like theoretical Computational Mathematics, or the theory of automata and formal languages. But all branches of Mathematics, pure and applied, are affected by the sudden ability to actually calculate what before could only be imagined, and this works like an infection on the everyday practice of mathematics: mathematicians, scientists and engineers calculate orbits of satellites or trajectories of dynamical systems, numerical distributions or time series of real processes, weather maps or mathematical studies of singularities, temperature distributions in a furnace or statistical properties of the zeros of Riemann's Zeta function, ...

Among the most remarkable novelties, Mathematics has an important role in industrial and other applied processes in which laboratory experiments are combined with the new tools derived from Mathematics: there appears the combination of **mathematical modelization - mathematical and numerical analysis - simulation - visualization - control,** that forms a usual tool in the most diverse fields: communications, weather prediction, astrophysics, mining, industrial engineering, the car industry, the oil industry, environmental problems, economy and finance, communications, and quite recently biology and medicine, as we will see with some detail in Section 8. This area of mathematics has the task of approximating in an effective way the solutions of mathematically sophisticated models. Interest in its development and application gives rise to big institutes and computation centers all over the world. New disciplines arise, like CFD, i.e., Computational Fluid Dynamics, or CB, Computational Biology.

The new concepts: numerical model, computer simulation, numerical experiment or exploration, dynamical visualization,... have become daily practice in scientific and industrial media. The development of methods of numerical formulation of the continuous models of physics, like differential and integral equations, is a fundamental branch of computational mathematics (viz, the methods of finite differences, finite elements[63], finite volumes,...). The study of the properties and convergence of these methods constitutes Numerical Analysis, that has a deep connection to Algebra. On the other hand, the computation capacity gives new life to the branches of discrete mathematics, as graph theory, with its important applications (for example, to the telephone networks and in general to the world of communications).

[63]Finite elements are a wonderful example of the development of a mathematical-numerical tool by the parallel but separate efforts of mathematicians and engineers, see an interesting historical account in [2]. The phenomenon is not isolated, cf. the recent history of wavelets. These examples should lead us to think a bit more about the benefits of communication.

In summary, a view has emerged where **Computational Science** is now the third leg of the scientific method together with Theory and Experiment, and this view is nowadays strongly practiced in Physics, Chemistry and Engineering.

8 Trends at the beginning of the XXIth century. Mathematics in the Sciences, Industry, Management and Business

We have seen the recent evolution of pure and applied mathematics towards theoretical consistency and universality of interests. In consonance with this, the panorama of current interests and future trends in the world of Mathematics offers an impressive variety. Using a somewhat rhetorical language, we may say that Mathematics is today *ubiquitous*, it is everywhere, and *relevant,* it matters. Mathematical modeling plays a bigger role than ever in science, engineering, business and the social sciences.

We will mention next some of the main applied topics as they appear in the literature, in conferences, in programs of major research institutes. We have also benefitted from different sources like [11, 12, 13, 26, 31] and others. We point out in italics related mathematical aspects for the reader's convenience.

• Celestial Mechanics. Problems of aerospatial science. *Stability and chaos in dynamical systems. Strange attractors.* Mechanics of solids and fluids in zero gravity.

• Theory of fluids. Application to meteorology and climatology. Ocean engineering. Complex Environmental Problems, global warming and other geo-social issues. *Global circulation models, balance models; stochastic climate modeling; hierarchies of intermediate complexity models, like the geostrophic model.* Glaciology. Acoustics and application to the sound industry. Industrial fluids, lubrication. Turbulence. *Predictability and chaos. Stability, bifurcation. Free boundary problems.* Cross-areas, like fluid-structure interaction.

• Aeronautics. Hydrodynamical problems, supersonic and transonic flight. Airfoil design. Problems of combustion (flame propagation, detonation). *Shock waves and hyperbolic equations. Boundary Layers and asymptotic developments. Traveling Waves.*

• Modern Physics. The Mathematics of the atomic world and of elementary particles. The standard model, quantum electro-dynamics, quantum chromodynamics. *Group theory, renormalization and gauge theories, supersymmetry, Yang-Mills equations, instantons, dilatons, branes,... exotic geometries and topologies in higher dimensions.*

• Astrophysics. General relativity, stellar models. Mathematics of plasma physics, magnetohydrodynamics. *Kinetic equations (Boltzmann, Landau, Fokker-Planck, Vlasov, ...).*

• Geosciences. Problems of resources and mining. Environmental Problems: climate research. Pollution transport in air, water, and soil. Computational hydrology. *The equations of oil extraction, of groundwater filtration, of contaminant dispersal: nonlinear systems of PDEs and free boundary problems.* Mathematics of seismic phenomena, *wave propagation, inverse problems.*

• Materials Science. Modeling and simulation of composite materials, magnetic material, polymers, glass, and paper. Crack propagation and further failure mechanisms. *Linear and nonlinear Elasticity. Calculus of variations. Homogenization theory.* Phase transitions, crystal growth, superconductivity and hysteresis.

• Nanotechnology. Integrated optics, optical networks. Quantum electronics and optics. Nanoscale techniques in medicine, porous materials. *Coupling of quantum states, mesoscopic and continuous models. Semiclassical Boltzmann theory, Wigner equation.*

• Industrial Engineering. Steel industry, blast furnaces. Prototypes for the car industry (fluids, aerodynamics, materials and fracture theory).

• Communications. Telecommunication and optical networks: analysis, simulation, optimization, transmission rate optimization, network design. Antennae, radar and sonar. *Electromagnetic field theory.* Microwave ovens couple Maxwell equations with Fourier heat theory.

• Discrete Mathematics. *Graph theory, combinatorics.* Applications to management, scheduling, routing,...

• Computer Science. *Mathematical logic, algorithmics, computational complexity, parallelization.* Finite automata, formal languages, *algebra.* Machine learning, data mining, artificial intelligence, natural language processing.

The design of the quantum computer would open a new world to computation.

• Control. Optimal control, robust control, nonlinear control. Predictive control. Fuzzy control systems. Neural networks, Fault Detection and Diagnosis in Industrial Processes. Modeling and Control of Economic Systems. Constraint Based Scheduling. Communication and Control of Distributed Hybrid Systems.

• Automation and Robotics. *Algebraic geometry and computation.* Computer Vision and Virtual Reality. Biological and Computational Learning.

• Information theory. Coding of messages, error-correcting codes. Surprising applications of *number theory and algebra.* Image Processing and Compression. *Wavelets, fractals, nonlinear PDE theories.* Speech and image recognition.

• Statistics in Science, Industry, Government and Business. Estimation and hypothesis testing, design of experiments. Reliabilitiy, survival analysis. Stochastic processes. Time series. Epidemiology. Quality control. Analysis of Variance. Multivariate analysis. Survey sampling, polls.

• Optimization Theory and Mathematical Programming. Integer Programming: Facets, Subadditivity, and Duality. Nonlinear programming, convex programming. Iterative Methods. Industrial Design Optimization. *Numerical methods, partial differential equations, calculus of variations, combinatorics, linear algebra.*

• Problems of optimal transportation. Problems of traffic (with continuous and discrete modeling). Network planning. Traffic in the *Web.*

• Economy. Financial mathematics (option pricing, derivative trading, risk management,...) unites *stochastic differential equations, partial differential equations and free boundary problems.* Models for the global economy.

• Chemistry. Quantum Chemistry: *simulation of atomic and molecular structures through fundamental equations.* Reaction dynamics, combustion. *Mathematics of nucleation, growth of crystals and chemotaxis. Front propagation, traveling waves, chemical oscillators. Chaos.* Drug design.

Life Sciences and Medicine:

• Biology: Mathematical Ecology, Epidemiology, Biometrics, Bioinformatics. Mathematics of Genetics, Computational phylogenetics. Nucleic Acid structure and function. Molecular evolution. Proteomics. Regulatory and developmental pathway inference. *DNA computation.* Sequence alignment, fuzzy reasoning. Mathematical modeling in biopolymerization.

• Medicine: interaction fluid-structure as a model for the blood flow. Modelization and simulation of the function of other organs: brain, lungs and liver. *Self-organization and fractal geometries.* Computational assistence of surgery. Pharmacokinetics, tumor growth modeling. Computational neuroscience. The Mathematics of infectious diseases and epidemic spreading. Artificial organs, immune system modeling.

• Medical imaging methods. Tomography: computerized tomography, 3D image reconstruction. *Fourier and Radon Transforms, inverse problems.*

• Though Computational Mathematics (as different from Computer Science) permeates all fields of application, it deserves a mention in itself: numerical methods and codes; efficient algorithms; approximation, (a priori and a posteriori) error estimates, adaptive methods and adaptive models, multigrid and domain decomposition, multiscale analysis, numerics of random processes,

...

• On the other hand, Mathematical Modeling in its different variants (deterministic, continuous, discrete, ...) leads to the problems of Model Validation and the techniques of obtaining and elaborating data on which validation is based (see Statistics above), as well as the quite important (and debated) concept of hierarchy of models, a progressive way of approaching "reality" that is nowadays recognized and embedded into the toolkit of the applied scientist (the old idealists with their eternal truth will revolve in their graves; or will they not?).

We shall stop here and take a much needed break with some comments. The list is loosely organized by affinity of topics; however, the close interconnection of the branches of applied mathematics forces us to indulge in repetitions, or otherwise to place a subject under one of various possible headings. On the other hand, we are leaving without proper comment a number of fields of application: the theory of complex systems, self-similarity in the natural world, pattern formation and recognition, the global positioning systems (GPS), mathematics of electoral systems, Architecture, the textile or the food industry. And there is the strong trend for Mathematics to play an important role in the visual Arts, as it already does in the Entertainment Industry combined with the formidable progress of computer technology. And how could I forget talking to you about Knot theory, G. Dantzig's Simplex Method or the Kalman Filter? In conclusion, this long list is incomplete, mostly because of the limited knowledge of the author, but I hope that it will impress upon the reader the enormous variety of interests of today's applied mathematics.

I would like to add a final personal reflection on the trends I see underlining all the above diversity. The mathematics that are to come will be much more **stochastic** and **algorithmic** than they used to be in the XXth century, and **mathematical modeling** will come to be considered an essential part of the mathematical education and activity, alongside with computation and simulation. But whatever happens, it looks to me that a clear and complete **proof**, and elegant if possible, will always be the heart of the matter, as it has been since good old Euclid, and future mathematicians will still get excitement from **problems and conjectures,** and as Galileo did, from **looking at the world** (or the stars). And they will build, perched on the shoulders of former giants, these delicate, intricate and elusive objects called **theories,** some of them destined to oblivion, some to eternity, or to the daily wear-and-tear. Who marvels anymore at the surprising existence of electromagnetic waves filling the air, now that they have even become a form of pollution? But so much for philosophy at this moment.

9 From Hilbert's 23 problems in 1900 to the Clay Millenium Problems in 2000

We have already pointed out the deep impact that the list of problems proposed by D. Hilbert in 1900 had upon his contemporaries and successors. One hundred years later different initiatives try to follow the example of the great man, see e.g. the books by Arnold-Atiyah-Lax-Mazur, and by Engquist-Schmid[64]. On Wednesday March 24th, 2000 at the Collège of France in Paris the official announcement was made of the collection of seven mathematical problems that constitute the Millennium Prize Problems, sponsored by the Mathematics Clay Institute. Remembering Hilbert, it tries to reflect seven of the most important open problems of the mathematical science at the beginning of the new century[65]. These problems cover quite different areas of pure and applied mathematics. Here is the list

1. P versus NP (Computation theory)
2. The Hodge Conjecture (Algebraic geometry)
3. The Poincaré Conjecture (Geometry and topology)
4. The Riemann Hypothesis (Number theory)
5. Yang-Mills Existence and Mass Gap (Theoretical Physics)
6. Navier-Stokes Existence and Smoothness (Fluid Mechanics and PDEs)
7. The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture (Algebraic arithmetic geometry)

Let me add my personal mixed feelings about the list that seems destined to be famous and influential. Fortunately, it includes important open problems that cover varied topics of pure and applied mathematics. However, it does not do full justice to the vision of mathematics as the language and tool of science and engineering.

10 Examples of new courses

After two sections devoted to enumeration, it is time to take a closer look at some of the novelties of present-day mathematics. Among the many options, the following three examples are taken from Finance, Communications and Fundamental Physics.

[64]For more information see the article by A. Jackson cited in the final references. See also vol. 3, no. 1 (2000) of Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, article by J. L. Fernńdez and M. de León.

[65]the solution of each problem would mean for the author a prize of 1 million of dollars. All the information about the prize and the problems can be obtained from the website `http://www. claymath.org/prize_problems`.

The Mathematics of financial uncertainty and risk

A remarkable example of the practical applications of Mathematics developed in the last decades is the so-called financial mathematics. The new financial instruments of *derivatives* are based on, and at the same time motivate this new branch of applied mathematics, which combines stochastic processes, partial differential equations and free boundary problems. The most famous result is the *Black-Scholes model*[66] for the option market, which reduces the pricing of an option to the solution of a heat equation (backwards in time). I would like to record this reduction in the (would I say famous?) sequence of formulas

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma\, dB_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + b\, S\, \frac{\partial P}{\partial S} - r\, P = 0,$$

which passes from a stochastic integral, representing random uncertainty, to a deterministic PDE, that allows for price valuation. This is a surprising example of *concept and technique transfer*, made possible by the common mathematical code (and by the fact that F. Black graduated in Quantum Physics). Since there is an inherent instability in those markets, and they have enormous consequences on the economy, both public and private, it is very important to try to apply mathematical methods to find the mathematical clue to the mechanisms that govern the evolution of such phenomena, and to replace guesswork by mathematics in the financial practice. This is a real-world challenge for the new century.

From Fourier analysis to wavelets

We have discussed a while ago the problem faced by Fourier analysis when Du Bois Raymond proposed his example of non-convergent Fourier series, and we want to recall here that the third option out of the problem consisted in changing the basis of functions used in the representation. This is what A. Haar did in 1909[67], thus solving the difficulty in principle, and we can say that this is the remote origin of wavelets, an idea that took a whole century to come of age. Prior to World War II investigation on the issue seems to have followed an exclusively mathematical interest with no application in mind whatsoever. But after the war engineers and applied scientists landed on the idea led by applications, notably in the information theory of Claude Shannon. Eventually the two strands merged and wavelet analysis has become

[66] F. Black, M.Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, 1973. Merton and Scholes received the Nobel Prize for Economy in 1997. A first version of the model had been proposed by L. Bachelier in 1900! it took seven decades for the more realistic model and the application to occur.

[67] "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Annalen* **69** (1910), pp. 331-371

an important intersection of the frontiers of mathematics, scientific computing and signal processing[68].

The mathematical models of Theoretical Physics

The two great scientific revolutions in XXth century Physics, i.e., Relativity and Quantum Mechanics, have impressed on the discipline a strong connection with pure mathematics and the enormous challenge of building a theory to unite both models into a consistent whole. Experimenters and theoreticians have taken up the quest for the "ultimate theory" which would explain all, from the constitution of the atom to the farthest recesses of the Universe. A final theory is still pending (and might be for a time) but great achievements have been obtained. Here are some milestones, all of them deep mathematics. Quantum Electrodynamics (QED) was developed to describe electromagnetic interaction in the framework of Quantum Mechanics, and deals with charges, photons and uses the beautiful Feynman diagrams. Next, Quantum Chromodynamics[69] does a similar job to describe the strong forces among *quarks*, the particles postulated by M. Gellmann and G. Zweig in 1964 as the building blocks of neutrons and protons. Out the four fundamental forces of Nature (gravitational, electromagnetic, weak and strong) the two intermediate have been given a unified theory in 1967 by S. Weinger, Sh. Glashow and Abdus Salam. *Symmetry*, *gauge* and *renormalization group* are keywords in this highly mathematical world. Maxwell's, Schrödinger's and Dirac's equations cede the place to Yang-Mills equations. The work crystallized in the early 70'sin the Standard Model of elementary particles, which explains atomic reality in terms of three generations of quarks and *leptons*. These particles interact through the $SU(2) \times U(1)$ theory for the electroweak force and the $SU(3)_{color}$ theory for the strong force. Mathematics is therefore at the core of the model, in the form of Lie groups, differential geometry (more specifically, connections on a fibre bundle) and partial differential equations.

Grand Unified Gauge Theories attempt to combine both group theories into one. In String Theory the old basic idea of point particles is replaced by the idea of elementary vibrating strings. At the end of the century Superstring Theory proposes a mathematical model for the unification of all forces, hence of all physics. It lacks however sufficient experimental verification; without it a theory is just a theory. And the quest continues. These ideas have motivated quite important mathematical developments associated to names like Atiyah, Donaldson and Witten.

Physicists believe that the combination models-and-experiments will allow

[68] Most of the data are taken from the book [19], cf. also [16]

[69] The name refers to the picturesque denomination for the conserved charge, called "color".

us to understand a strange world in which matter, space and time are not what we use to think, where empty space is full of activity and even there could exist many additional space dimensions curled up in ridiculously small distances (a typical distance would be 10^{-35}m, so that we do not see them, *voilà l'astuce*; but we see the mathematics, and in due time will see the consequences, so they say).

11 Facts and opinions

In the words on John Milnor, "pure mathematicians tend to judge any work in the mathematical sciences on the basis of its mathematical depth, the extent to which it introduced new mathematical ideas and methods, or it solves long standing problems". To which I would add that new ideas and methods are tested by their productivity, and mention elegance of proof and insight. He continues thus: "However, when mathematics is applied to other branches of human knowledge, a quite different question must be asked first: to what extent does it increase our understanding of the real world"[70]. Not long ago there was a movement towards separation in Mathematics that seemed to move farther and farther away from each other the cultivators of both genres, pure and applied. And we should not forget the prejudice of many pure scientists against a type of applied mathematics more intent on profit than on scientific standards, and, on the other hand, the prejudice of many applied scientists towards the very artificial worlds of certain pure mathematics. Fortunately, we are witnessing a series of simultaneous events - namely, the explosion of the vitality of theoretical and computational mathematics, the successes of Mathematics in the formulation and solution of the key problems of contemporary Physics, Economy and Engineering, and the unsuspected variety of applications of all branches of Mathematics. These events are deeply modifying the vision of both fields, that tend to merge in one, in the best tradition of the past, as expressed in the words of the XIXth century Russian mathematician P.L. Chebyshev: "Bringing together theory and practice leads to the most favorable results; not only does practice benefit, but the sciences themselves develop under the influence of practice, which reveals *new subjects* for investigation, as well as *new aspects* of familiar subjects"[71].

It is a great mystery for professionals that pure and applied mathematics work like the faces of the same coin. That they are not exactly the same is very well reflected in the words of Albert Einstein: "As far as the laws of

[70] See Notices Amer. Math. Soc., 1998.

[71] Taken from [20]. My emphasis.

mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality"[72]. But the ideal and the practical meet with striking results. The amazement before the practical power of Mathematics is most vividly expressed by E. Wigner in a famous statement, where he wondered about "the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"[73].

A word has to be said about the changes in the way mathematics is being done, specially when it is applied. The emergence of the *computer era* has given mathematics new wings, *we can compute!* Efficient and fast computation has become available and cheap at the beginning of the XXIth century, and society needs more. Theorems will always be theorems and a logical derivation is the key to understanding, but the way to discovery will never be the same, and numerical performance is now central to most of mathematics (all of the applied mathematics). The effects on teaching will be no less drastic, but they are still being developed.

Another key feature of modern applied mathematics is *mathematical modeling*, the art of devising sensible *representations* of different phenomena of the real world in mathematical terms, based on rational *assumptions* that simplify reality to make it computable. J.L. Lions, the late French mathematician who contributed so much to the present relevance of Mathematics in the industrial world, said in 1991: "Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir." And he added: "De toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure." We must bear in mind that a model is only a model and reflects reality in the conflicting way that Einstein describes. But it is everything we have, unless we consider a better model (or even a hierarchy of them). This is the glory and the danger of modeling, a crucial aspect of today's applied mathematics. The current discussion about the predictions of mathematical climate models on global warming on the Earth show how important the issue is and how difficult is to manipulate partial evidence based on partial models and backed up by huge datasets of difficult interpretation. Which brings us back to the merit of the giant modelers of the past like Newton, Maxwell, Einstein and the Quantum people.

As we have seen, a large part of the best Mathematics have originated to explain the working of the physical world. But it must be observed that very often the important consequences of Mathematics have not manifested

[72] From *Geometry and Science*, 1921. Included in *Sidelights of Relativity*, Dover, 1983.

[73] Conference in New York, 1959. Published in *Comm. Pure Applied Math.* **13** (1960), 1-14

immediately. The formulation of physical processes in mathematical key in the sense of Galileo requires a maturing process, and this process has its own rules and rhythm, that go from a few years to a one or a few centuries. It would be a blessing if both the administration and education authorities were conscious of this fact in their decision-making.

On a more speculative level, the well-known mathematician and science writer Ian Stewart asserts that it is possible that Mathematics are efficient "because they represent the underlying language in the human brain". In that case we revert Galileo's bet in the sense that we maybe understand the world in mathematical terms because that is precisely the coding system in our mind. But this is a different debate.

Let me summarize some opinions I sustain for the sake of the everlasting debate:

- Only good Mathematics can be good Applied Mathematics. Applied Mathematics as an art which is different and separated from Mathematics as such, simply does not exist[74]. By putting Mathematics to use, application changes them.

- Mathematics is really applied only if it answers an important problem of science, technology, economy, or more generally, society. And we have seen how varied these problems can be.

- Though we can come to judge with a certain degree of reliability what is important today, the task of predicting what mathematics will be important in the long term (so-called strategic planning) exceeds the usual capacity of sensible persons, unless we simply answer in general terms like "good Mathematics will matter" or "the Mathematics of real-world problems will matter". Educated guesses and opinions on specific matters are human and may be useful as personal orientation, but when it comes to decisions and priorities prudence ought to be the rule.

- There is an interesting issue of approach to the job: it has been observed that, when faced with a mathematical riddle, the so-called applied mathematician enjoys constructing and comparing suitable models, and wants this precise riddle *explained* whatever the temporary cost to the perfect logic, while his pure counterpart takes delight in logical proof; only *proof* will rule his day.

So, are pure and applied mathematics the same after all? Or more carefully formulated, are they essentially the same? It is up to the reader to judge. You already know my opinion, but let me add in a relaxed tone a quotation from

[74] I take this forceful idea from A. Rényi, [32], who attributes it in the fiction to Archimedes.

Yogi Berra[75]: "In theory, there is no difference between theory and practice; in practice, there is".[76]

12 Appendix on Mathematics in Spain

Spain played in a given moment of the late Middle Ages a significant role in the transmission of Arab culture to the West and there even existed a king in Seville[77] who wrote poetry and promoted Mathematics. Al Andalus, the Arab Spain, had solid interests in the sciences, in particular medicine and astronomy, with fine scholars like Azarquiel (or Al-Zarkali, active in Toledo) who composed astronomical tables. The Indian number system based on position was already in use in Al Andalus in the IX century.[78] After its takeover by the Christians (1085 a.C.), Toledo, the city of three cultures -Christian, Arab and Jewish- was for centuries a main center of learning with its School of Translators, which brought into Latin the works of Greek and Arab authors[79]. In another direction, the Majorcan Ramón Llull devised in his *Ars Magna* a whole art of algorithmic reasoning in which we can see the early precedents of the Boole algebra and the computer logic (Llull, who lived in the XIIIth century, is at the same time one of the oldest classics of the Catalan language). A century later nautical maps called *portulanos* from Majorca were the top of the art, and the names of Soler and Cresques are well-known. The latter, a Jew, participated in the organization of the Portuguese nautical school, which was at the origin of the discovery of the way to the Indies around Africa, and, indirectly, also of America.

But the medieval and early Reinassance hopes failed later in Spain, so that mathematics (and other sciences) have had a very humble history for centuries. While the Spanish literature and art stand at the peak of worldwide creation since the XVII th century and up to our time, it is apparent that no Spanish names appear in the famed textbooks of mathematical learning. There are in such texts numerous concepts and results named after authors belonging to the nations with a great scientific tradition: French, English, German, Italian, in more recent times Russian and American,.., as there are also frequent examples of other countries which due to their size and circumstances did not play such

[75] famous American baseball player, well-known for his funny quips.

[76] Here is a joke on the different views of mathematics: engineers say that the equations approximate reality, while physicists think that reality approximates the equations; on their side, mathematicians are astonished at the idea of a connection between 'their' equations and reality.

[77] Alfonso X, called the Wise.

[78] The first real Andalusi school of mathematics seems to have been that Maslama of Magerit, i.e., Madrid, in the Xth century.

[79] The Monastery of Ripoll in Catalonia also had a world-famous library.

a prominent role in history but count in science. During these centuries of glorious development, let us say from Galileo to Einstein, Spanish names are not mentioned. Could history have been different? King Philip II realized the need for science and created a Mathematical Academy in Madrid (1582) under the direction of Juan de Herrera, the architect of El Escorial, but the institution did not take root and closed a few years later, while similar initiatives abroad gave birth to the Royal Society in England, the Académie de Sciences in France, and so on. There have been a number of brilliant isolated men, worthy of mention, like Pedro Ciruelo, Omerique, Jorge Juan and Echegaray, but a school never took root until very recently. For centuries Spanish students and professors were forbidden to travel and learn in foreign countries, a quite strong safety rule that prevented at the same time heterodoxy, science and progress.

This is not the place for a detailed study of History, for which we may refer to the specialists[80], so let me proceed by pointing out how we have recently come to a quite favorable present. Spain appeared to abandon its deep mathematical lethargy in the first half of the last century and the figure of Julio Rey Pastor can serve as a reference to a remarkable effort in making our country up-to-date, an effort based on a couple of main ideas: in the first place, by study abroad in the great foreign centers, and then by the import of the problems and topics that occupy the worldwide community. This method had a striking success in the development of North-American mathematics, and was having good results in our country in the first decades of the XXth century. However, our ill-fated history, and mainly in that respect the civil war, destroyed the effort, or in the best cases forced the scholars to exile, which then gave abundant fruit on Latin-American land, as is the case of well-known mathematicians like Luis Santaló and the blooming of Argentinian mathematics. With a few very honourable exceptions, mathematical activity after the war and up to the 60´s returned to the slumber of the past. Little by little began the awakening of Spain to normal mathematical life, specially in the 70´s. After a decade of enormous effort of a generation that learnt from the original sources, taught from the most reliable textbooks in the classrooms, organized research seminars and traveled or sent their young students abroad, regular publication in recognized journals and participation in international events increased. In the 80's there came the decade of original creation, reflected in the number and level of the publications in good journals[81]. The signs of good times became many and unequivocal, and we may conclude that Spain is no longer different ("Spain is different" is a famous touristic motto dating from Franco's time, which had an obvious

[80] like Juan Vernet, whose work [43] is used above.

[81] At this moment it is befitting to recall Galileo's words "Science knows only one commandment: contribute to science", according to B. Brecht in his *Life of Galileo*

negative reading when applied to the troubles of Spain to become a modern country, and was therefore felt critically by the democratic opposition). The official indicators allow us to put figures to this evidence of change. From them we may deduce two facts which have initially surprised many:

(a) That Spanish mathematics have passed from a very modest place in 1980 (0.3% of the world production by the ISI Data Base) to a very honourable position at the moment, immediately after USA, Germany, England, France, Russia, Italy, Japan and Canada, with a production in relevant journals which has been multiplied by a factor of more than 10 and represents in 2001 a worldwide figure of more than 4.18% (ISI).

(b) That in the comparative outlook of Spanish science Mathematics figures among the best placed specialties.

Another consequence of the creative state of Spanish mathematics is the presence of numerous and valuable textbooks and research monographs in prestigious collections. Let it be said that Spain, which has reached a solid position in research, also counts on a tradition in mathematical education, with a very relevant role in ICMI.

Finally, the trend towards the computational and applied aspects of mathematics, with the emphasis on mathematics as the modeling tool per excellence, is now strongly felt in a community formerly very exclusively tied to pure mathematical thinking. Opening the windows to the wide world outside is an enormous challenge for the health of our mathematics and the welfare of future generations, and all efforts are welcome. Let in the fresh air!

13 Conclusion

This is the end of our journey. Remembering Galileo, I would like to conclude as follows: the book of Nature is open before our eyes for us to admire in its infinite, changing and surprising beauty. Mathematics, as the language of Science, is here to help us understand it: besides, it may allow us to use it and exploit it, and this aspect is loaded with promises and dangers, as all human endeavours. I am confident that the mathematicians of today will make their contribution to understanding and improving the Information Society whose birth we have had the fortune to witness. In the era of computers and information *reality is in the number*, as Pythagoras would have liked. Or at least a big chunk of it.

- • ♠ • -

Acknowledgment and Final Remark. This article originated two years ago with the efforts of the Spanish Mathematical Societies to celebrate the World Mathematical Year 2000. I am indebted to a large number of colleagues for support, information and opinions. I want to especially thank the members of the Spanish WMY2000 Committee, who made the whole effort possible. My colleagues at UAM, too many to be quoted, corrected errors of former versions and supplied lots of information and positive criticism. But I must mention A. Cuevas for explaining to me the importance of Optimization and Statistics in the modern world. I am also indebted to the Universities of Valladolid, Valencia, Bilbao, Oviedo, Autónoma de Madrid and CSIC for organizing the lectures where the idea of this expository article was first tried out on real patients.

The paper was completed during a stay at The University of Texas at Austin. I am grateful to the Dpt. of Mathematics and TICAM for their hospitality, and specially to Serge Prudhomme for reading carefully the whole manuscript. I am happy to acknowledge conversations with I. Babuska, G. Barenblatt, L. Caffarelli, A. Chorin, P. Degond, A. Friedman, I. Gamba and T. Oden during the spring of 2001. Hopefully, some of their authorized opinions may have found a place in these pages. Historical data were drawn from different sources, some of them quoted in the references; besides, it is a pleasure to mention the websites of Encyclopaedia Britannica and The MacTutor History of Mathematics Archive, of the Univ. of St Andrews.

The Appendix reflects ideas of the author on the present of Spanish Mathematics taken with minor additions from reference [42], first section. More on the same subject in [41]. Interesting sources in Spanish are the *Boletines de SEMA*; the *Gaceta de la RSME*[82] (cf. vol. 3, 1 (2000)) and *Revista Española de Física*, vol 14, no. 5, issues devoted to the state of Mathematics on the occasion of the World Mathematical Year celebration. See also [1, 8, 18, 26, 30, 39]. Finally, the list of references below reflects readings of the author while compiling this text and is not meant as a selection of the best reading on the subject.

References

[1] V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, "Mathematics: Frontiers and Perspectives", AMS Publications, 2000.

[82] SEMA is Sociedad Española de Matemática Aplicada, and RSME stands for Real Sociedad Matemática Española

[2] I. Babuska, *Courant Element: Before and After*, in “Finite Element Methods”, edited by Krizek, Neittaanmäki and Sternberg, M. Dekker Inc, New York, 1994.

[3] G. I. Barenblatt, *George Keith Batchelor and Daniel George Crighton, Applied Mathematicians*, Notices American Math. Soc., vol 48, no 8 (2001), 800–806.

[4] J. L. Casti, “Five Golden Rules”, John Wiley, New York, 1996. “Five More Golden Rules”, John Wiley, New York, 2000.

[5] G. Chaitin, “The limits of mathematics”, Springer, Singapore, 1998.

[6] B. Cipra, “What is happening in the Mathemaitical Sciences”, vols. 1–4, Amer. Math. Soc, Providence, RI.

[7] COMAP, “Las Matemáticas en la vida cotidiana”. Addison Wesley - Universidad Autónoma de Madrid. 1998 (Spanish). English: S. Garfunkel et al., “Introduction to Contemporary Mathematics”, W.H. Freeman & Co, New York, 1988.

[8] B. Engquist (Editor), W. Schmid (Editor), “Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond”, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[9] R.P. Feynman, “Feynman Lectures On Physics (3 Volume Set)”, Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. [1963-65] ,

[10] R.P. Feynman, “Six Easy Pieces: Essentials of Physics Explained by Its Most Brilliant Teacher”, Helix Books, 1995 (Addison-Wesley Longman, 1996), and “Six Not-So-Easy Pieces: Einstein’s Relativity, Symmetry, and Space-Time”, Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. 1997.

[11] I. Fonseca et al., “The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa”, Round Table at 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona, july 2000.

[12] A. Friedman et al., “Mathematics in Industrial Problems”, (a 10 volume collection), IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag (1988-1998).

[13] A. Friedman, J. Lavery, “How to Start an Industrial Mathematics Program in the University”, SIAM Report, Philadelphia 1993

[14] J. Gleick, “Chaos: Making a New Science”, Penguin Books, Nueva York, 1987.

[15] G. H. Hardy, "A Mathematician's apology", Cambridge, 1940.

[16] E. Hernández, G. Weiss, "A first course on wavelets. With a foreword by Yves Meyer", Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[17] "Mathematical Developments arising from Hilbert Problems", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII, Amer. Math. Soc, Providence, 1976.

[18] A. Jackson, *Mathematical challenges of the XXI century*, Notices Amer. Math. Soc., vol. **47**, no 10 (2000), pp. 1271-1273.

[19] S. Jaffard, Y. Meyer, R.D. Ryan, "Wavelets, tools for Science and Technology", SIAM, 2001.

[20] A.I. Khinchin, "Mathematical Foundations of Information Theory", Dover, 1957 (Papers appeared in 1953, 1956 in Uspekhi Mat. Nauk in Russian).

[21] M. Kline, "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", Oxford Univ. Press, 1972.

[22] M. Kline, "Mathematics. The loss of certainty", Oxford Univ. Press, Oxford, 1980.

[23] J. P. Maury, "Galileo, el mensajero de los astros", Claves, Ed. B.S.A., Barcelona, 200 (Spanish).

[24] N. Metropolis, J. Howlett, G. C. Rota, eds., "A History of Computing in the Twentieth Century", Academic Press, 1980.

[25] P. A. Meyers, "Encyclopedia of Modern Physics", Academic Press, San Diego, 1990.

[26] Mitteilungen der Deutschen Math. Vereinigung *(Notices of the German Math. Union)*, 2-1998, contains a report on the Future of Mathematics by D. Mumford, A. Friedman, L. Lovász, Yu. Manin, G.C. Rota, R.B. Jensen and R. Penrose.

[27] K. Moriyasu, "An elementary primer in Gauge Theory", World Scientific, Singapore, 1983.

[28] J. Muñoz Santonja, "Newton, el umbral de la ciencia moderna", col. La Mate- mática en sus personajes, vol. 3, Nivola ed., Madrid, 1999 (Spanish).

[29] I. Newton, “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, Pepys, London, 1687. In Spanish: “Principios matemáticos de la Filosofía Natural”, Alianza Ed., Madrid, 1987.

[30] Obra Colectiva, “Fotografiando las Mathematics”, Carroggio SA de Eds, Barcelona 2000 (“Photographing Mathematics”, in Spanish).

[31] J.T. Oden et al., “Research directions in computational mechanics”, Report of the US National Commitee on Theoretical and Applied Mechanics, Washington DC, 2000.

[32] A. Rényi, “Dialogues on Mathematics”, Holden-Day, San Francisco,1967.

[33] Revista Española de Física, vol 14, no. 5, año 2000. Special number “La Física y las Matemáticas”.

[34] J. M. Sánchez Ron, “El siglo de la ciencia”, Taurus, Madrid, 2000 (Spanish).

[35] M.M. Schiffer, L. Bowden, “The role of Mathematics in Science”, The Math. Assoc. of America, New Math. Library vol. 30, 1984.

[36] J. Simmons, “The scientific 100”, Citadel Press, Kensington Publ. Corp, Nueva York, 1996.

[37] S. Singh, “The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography”, Doubleday & Company, 1999.

[38] D. Stauffer, H.E. Stanley, “From Newton to Mandelbrot, A Primer in Theoretical Physics”, Springer, Berlin, 1991.

[39] I. Stewart, “The Problems of Mathematics”, Oxford Univ. Press, 1992.

[40] M. Tanur, F. Mosteller et al., ”Statistics: A Guide to the Unknown” Brooks/Cole, 1989.

[41] J. L. Vázquez, *Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles,* Gaceta de la Real Soc. Matemática Española, vol. 3, 1 (2000), (Spanish) pp. 9-22. Cf. also `http://dulcinea.uc3m.es/ceamm`.

[42] J. L. Vázquez, *Mathematical Events in Spain in the Year 2000*, Intelligencer, Springer-Verlag, July 2000, pp. 12-14.

[43] Juan Vernet Ginés, “Historia de la Ciencia Española”, Editorial Alta Fulla, 1998 (Spanish).

Permanent Address:
Juan Luis Vazquez, Dpto. de Matemáticas,
Univ. Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, España
Tel. 34-91-3974935, FAX 34-91-3974889
email: juanluis.vazquez@uam.es
htpp://www.adi.uam.es/~jvazquez

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *19 (2001), 113–119.*

Acerca del manuscrito Bakhshsali y su fórmula para el cálculo de raíces cuadradas

JESÚS BEATO SIRVENT
I.E.S. BAHÍA DE CÁDIZ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

e-mail: jesus.beato@uca.es

Resumen

Este trabajo cumple cuatro objetivos: complementar la información que suministré en [1] sobre el manuscrito Bakhshali y en particular sobre la fórmula en él descrita para el cálculo de la raíz cuadrada; ofrecer una justificación de la obtención de dicha fórmula; unificar los algoritmos de Herón-Newton y Bakhshali bajo un único método iterado y por último, justificar que, en cierto sentido, el algoritmo Bakhshali mejora al de Herón-Newton.

1 Introducción

En el artículo *"¿Está justificada la enseñanza de los algoritmos de cálculo?"* publicado en el número 18 de este mismo Boletín, propuse como alternativa a la enseñanza del método tradicional de cálculo de la raíz cuadrada, varios algoritmos susceptibles de ser trabajados en los níveles de Educación Secundaria Obligatoria. Entre ellos figuraba el que denominé "algoritmo Bakhshali". El manuscrito Bakhshali (en adelante BM) fue descubierto a finales del siglo XIX en los alrededores de la ciudad que le da nombre, cerca de Peshawar (actual Pakistán) y está escrito sobre cortezas de abedúl, de las que se conservan aproximadamente 70 en relativo buen estado. El periodo de composición de las Matemáticas contenidas en el manuscrito está localizado entre el año 200 y 400 d.C., coincidiendo con la época de mayor esplendor de la matemática India. La primera edición traducida del mismo fue publicada, con una elaborada introducción, en 1927, obra del historiador de las matemáticas, el británico G.R. Kaye. En la extensa introducción de esta obra, el autor muestra su enorme parcialidad hacia la calidad de la Matemática de la antigua India, en un capítulo repleto de comentarios hostiles al respecto. Esta edición fue revisada y examinada con detalle por B. Dutta en 1929, quien refutó los comentarios de la obra de Kaye, devolviendo así al manuscrito Bakhshali la relevancia que su hallazgo y contenido merecían.

Uno de los motivos de la gran importancia histórica del manuscrito Bakhshali es la fórmula que aparece en él para el cálculo de raíces cuadradas de números no cuadrados, a saber, la Bakhshali Sutra[1] (a partir de ahora denominaremos BF):

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b} = A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}. \tag{1.1}$$

Los estudios definitivos sobre esta fórmula los publica en la década de los 70 del siglo XX el matemático indio M.N. Channabasappa, de la Escuela Regional de Ingeniería de Karnataka, cerca de Calcuta. En 1974 publica el interesante artículo [3], en el que además de corregir errores que habían tenido lugar en traducciones anteriores del manuscrito, propone por primera vez un razonamiento plausible para la obtención de la fórmula Bakhshali. Más tarde, en 1979, el mismo autor publica [4] en el que ofrece algunos comentarios sobre la computación rápida a la que da lugar la fórmula Bakhshali. El análisis y continuación de estos trabajos es el centro de este trabajo.

2 La fórmula Bakhshali y la fórmula de Herón-Newton

El método iterado de Herón para el cálculo de $\sqrt{Q}$, siendo Q un número natural no cuadrado perfecto, en la forma en que lo presenté en [1] es:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{Q}{x_n}\right) \quad \forall n \geq 0 \\ x_0 \in R \end{cases}$$

En ese mismo trabajo ya puse de manifiesto que este algoritmo surge de un elegante proceso geométrico y coincide con el obtenido aplicando a la ecuación $x^2 = Q$ el método de Newton. Si llamamos A^2 al cuadrado más próximo a Q por defecto y $b = Q - A^2$ (y por tanto $b > 0$) y tomamos como valor inicial $x_0 = A$, este método iterado daría lugar a la fórmula:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b} = \frac{1}{2}\left(A + \frac{A^2 + b}{A}\right) = A + \frac{b}{2A} \tag{2.2}$$

[1]En la antigua cultura India, existían dos tipos de libros religiosos: los Sutras y los Vedas. Los Sutras contenían las reglas o aforismos necesarios para el conocimiento de un ritual o una Ciencia (ver [2])

En lo que sigue, esta fórmula se denominará HNF. Escrita así, es evidente que BF (1) es un refinamiento de HNF (2). La relación entre la fórmula HNF y BF para determinar la influencia de aquella en ésta, ha sido estudiada por varios historiadores de las Matemáticas, como el propio B. Dutta, Martin Levy o Mervin Petruck, por citar algunos. Parece evidente que el autor del manuscrito Bakhshali era conocedor de la fórmula de Herón. Hay un argumento que apoya esta afirmación: desde tiempos muy tempranos, hubo una fuerte relación comercial entre Grecia e India, con todo lo que de intercambio de información lleva ésto aparejado. Sin embargo, hay razones para pensar que la fórmula Bakhshali fue un descubrimiento indio independiente, que no se obtuvo como prolongación natural del trabajo de Herón:

- Varios siglos antes de Cristo, la Matemática India ya contenía técnicas de cálculo aproximado para el cómputo de raíces cuadradas. Por ejemplo, la casta de los Jainas de la India ya habían aproximado (por supuesto erróneamente) π por $\sqrt{10}$, siendo capaces de obtener este cálculo de $\sqrt{10}$ con 13 cifras decimales exactas.

- En el trabajo de Herón, como ya he mencionado con anterioridad, la fórmula (2) surge en conexión con un problema geométrico, mientras que en las Matemáticas Bakhshali, surge de un problema algebraico, poniendo así de manifiesto la principal característica que diferencia las Matemáticas griegas de las indias: los griegos eran especialistas en Geometría mientras que los indios lo eran en Algebra.

3 Un método para la obtención de la fórmula Bakhshali para el cálculo de la raíz cuadrada

A pesar de la gran cantidad de historiadores de las Matemáticas que citan la fórmula (1) en sus escritos, ninguno de ellos menciona nunca cómo podría haber sido obtenida originariamente la fórmula. Incluso, en este sentido, en 1958, el historiador indio C.N. Srinivasiengar afirma en [5]: *"... todavía no hemos obtenido una explicación convincente sobre cómo el autor del manuscrito Bakhshali obtuvo la fórmula para la raíz cuadrada..."*. Hubo que esperar hasta 1974 para que M.N. Channabasappa aportara un método plausible para la obtención de dicha fórmula. Este método está basado en el principio de iteración.

Es ciertamente difícil decidir desde qué tiempo la idea simple de la iteración empezó a ser usada en las Matemáticas, y en particular en el Análisis Numérico. Todo lo que podemos decir es que debe ser una idea muy vieja en tanto en cuanto representa uno de los instintos humanos básicos, a saber, la mejora de algo, dado en una experiencia anterior. Más aún, la aplicación de esta simple idea no requiere el conocimiento de ningún otro equipamiento matemático sofisticado. Por tanto, es razonable pensar que el autor del manuscrito Bakhshali estaba familiarizado con el proceso de iteración. De esta forma, podría haber llegado a (1) de la siguiente manera:

Denotemos por x_1 la aproximación a $\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b}$ dada en (2):

$$x_1 = A + \frac{b}{2A} \tag{3.3}$$

Obtenemos un valor más fino de la raíz deseada, sustituyendo en x_1, A por x_1. Así:

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2x_1} \tag{3.4}$$

donde $Q = x_1^2 + b_1$ y por tanto $b_1 = Q - x_1^2$. Sustituyendo b_1 en la expresión de x_2:

$$x_2 = x_1 + \frac{Q - x_1^2}{2x_1} \tag{3.5}$$

Si ahora en (5) volvemos a escribir todo en función de A y b, usando $Q = A^2 + b$ y $x_1 = A + \dfrac{b}{2A}$, llegamos a:

$$x_2 = A + \frac{b}{2A} + \frac{A^2 + b - \left(A + \dfrac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \dfrac{b}{2A}\right)} =$$

$$= A + \frac{b}{2A} + \frac{A^2 + b - A^2 - \left(\dfrac{b}{2A}\right)^2 - b}{2\left(A + \dfrac{b}{2A}\right)} =$$

$$= A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\dfrac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \dfrac{b}{2A}\right)}$$

que es la fórmula (1) que queríamos obtener.

Esta fórmula (1) obtenida puede ser usada como fórmula de iteración de la forma:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{b_n}{2x_n} - \frac{\left(\dfrac{b_n}{2x_n}\right)^2}{2\left(x_n + \dfrac{b_n}{2x_n}\right)} \tag{3.6}$$

donde $b_n = Q - x_n^2$, $\forall n \geq 0$ y $x_0 = A$

4 Un proceso iterado que unifica a Herón-Newton y Bakhshali

Además de poner de manifiesto las claras relaciones existentes entre BF y HNF, se puede dar un paso más. Las consideraciones anteriores sugieren la idea de que es posible diseñar un algoritmo iterado que permita unificar ambos, en el sentido de que cada uno de ellos surga como una iteración distinta de un mismo proceso. Esto permitiría analizar, no sólo cada método de forma independiente, sino que facilitaría la comparación de los dos procesos al entenderse entonces como resultado de un mismo algoritmo.

En efecto, consideremos el siguiente algoritmo iterado, con las notaciones desarrolladas en este trabajo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{b_n}{2x_n} \quad \forall n \geq 0 \\ b_n = Q - x_n^2 \\ x_0 = A \end{cases} \tag{4.7}$$

La aplicación de este algoritmo supone el cálculo de una doble sucesión (x_n, b_n) siguiendo el siguiente esquema:

$$x_0 \to b_0 \to x_1 \to b_1 \cdots \to x_n \to b_n \to \cdots$$

Estudiemos las primeras iteraciones de este algoritmo:

- **Situación Inicial:**

$$x_0 = A$$
$$b_0 = Q - x_0^2 = Q - A^2 = b$$

- **Primera iteración:**

$$x_1 = x_0 + \frac{b_0}{2x_0} = A + \frac{b}{2A}$$
$$b_1 = Q - x_1^2 = A^2 + b - \left(A + \frac{b}{2A}\right)^2 = -\left(\frac{b}{2A}\right)^2$$

En esta iteración hemos obtenido **HNF** (2)

- **Segunda iteración:**

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2x_1} = A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}$$

$$b_2 = Q - x_2^2 = A^2 + b - \left[\left(A + \frac{b}{2A}\right)^2 - \left(\frac{b}{2A}\right)^2 + \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^4}{4\left(A + \frac{b}{2A}\right)^2}\right] =$$

$$= -\frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^4}{4\left(A + \frac{b}{2A}\right)^2}$$

En esta iteración hemos obtenido **BF** (1)

- **Tercera iteración**

$$x_3 = x_2 + \frac{b_2}{2x_2} =$$

$$= A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^4}{4\left(A + \frac{b}{2A}\right)\left[2\left(A + \frac{b}{2A}\right)^2 - \left(\frac{b}{2A}\right)^2\right]}$$

En esta iteración hemos obtenido una fórmula que a su vez supone un refinamiento de BF. Llamaremos a esta fórmula, por estar obtenidas como distintas iteraciones de un mismo algoritmo, de orden 3; a BF de orden 2 y a HNF de orden 1.

5 El algoritmo Bakhshali mejora al método de Herón-Newton

A través de la computación con este último algoritmo iterado, M.N. Channabasappa comprobó en [4] que BF es mejor, en sentido computacional, que HNF, aunque éste es el tradicionalmente usado en cálculo numérico. Usó métodos de orden 1 (HNF), de orden 2 (BF), de orden 3 y de orden 4. El proceso con los diferentes órdenes fue repetido 1000 veces. El ejemplo usado fue el cálculo de $\sqrt{41}$, ya que es éste uno de los ejemplos que figuraban en el BM. No obstante, los resultados obtenidos en este cómputo son independientes del radicando. Comenzado en todos los casos con el mismo valor inicial ($x_0 = A = 6$) y manteniendo la misma precisión, los resultados numéricos que obtuvo fueron los recogidos en la siguiente tabla:

$\sqrt{Q}$ obtenida	Orden del método	Núm. de iteraciones	Tiempo (seg.)
6,4031242374	1	4	21
	2	2	13
	3	2	15
	4	2	19

Del análisis de estos resultados se observa:

- La BF es más eficiente que HNF en el sentido de que usando BF en vez de HNF se es capaz de rebajar el tiempo de computación en un 38 por ciento aproximadamente.

- La BF resulta ser la fórmula de óptimo orden de todas las empleadas. Claramente, los órdenes superiores pueden requerir una cantidad menor o igual de iteraciones, pero el número de operaciones aumenta considerablemente, lo que impide a las fórmulas de orden superior reducir el tiempo de cómputo.

Por último, no quisiera acabar sin destacar la belleza matemática de estos procesos. Una vez más, métodos independientes y que vieron la luz en épocas, situaciones y momentos muy distintos, acaban proviniendo de un tronco común. Confieso que a medida que aumenta mi estudio de las matemáticas, más me conmueven estas realidades.

Referencias

[1] Beato Sirvent, Jesús *¿Está justificada la enseñanza de los algoritmos de cálculo?* Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 18 (2001) 115-138.

[2] Boyer, Carl B. *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos (1992).

[3] Channabasappa. M.N. *On the square root formula in the Bakhshali manuscript.* Indian J. History Science 11(2) (1976) 112-124.

[4] Channabasappa. M.N. *The Bakhshali square-root formula and high speed computation.* Ganita Bharati (1) (1979) 25-27.

[5] Srinivasiengar, C.N. *Ganita Shastrada Charitre (in Kannada).* University of Mysore, (1958) p. 205.

FINITE VOLUME METHODS FOR HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS
WITH APPLICATIONS TO COMPRESSIBLE FLOW AND ENVIRONMENTAL PROBLEMS

LECTURER
Professor E. F. Toro, OBE

ORGANISERS
Numeritek Limited UK

Barcelona, Spain, 25th to 28th March 2002

Details about who will benefit from the course, cost and course contents can be found on **http://www.numeritek.com**

The Lecturer is an international authority in his field and author of more than 140 research publications, including the textbooks “Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics” and “Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows”.

See Amazon Customer Reviews:
http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/3540659668/ /numeritekwebsite/002-05414
Phone: 93-1273839

Further details on the course will be mailed on request. Please send enquiries to: **course@numeritek.com**

PRE-REGISTRATION

Potential participants are encouraged to pre-register by filling in the form below and returning it to the course organisers. Pre-registration is regarded as an expression of interest, not as a definitive commitment to participate.

Family name:

First name:

Title (Professor/Dr/Miss/Mrs/Ms/Mr):

Position:

E-mail address:

Complete postal address:

Special Interests: (For example: teaching fluid mechanics, teaching numerical methods, teaching mathematical modelling, doing research on shock waves in gases, atmospheric flows, combustion problems, environmental fluid dynamics, wave propagation, etc.)

E-mail: **course@numeritek.com**

Congrès de mathématiques appliquées à la mémoire de Jacques-Louis Lions

Collège de France, Paris, July 1-5, 2002

Speakers: Luigi Ambrosio François Baccelli John Ball Franco Brezzi Luis Caffarelli Marie-Paule Cani Alexandre Chorin Jean-Michel Coron Lawrence Evans Olivier Faugeras Mathias Fink Michael Ghil Thomas Hou Andrew Majda Louis Nirenberg George Papanicolaou Anthony Patera Benoît Perthame Rolf Rannacher Panagiotis Souganidis Eitan Tadmor Srinivasa Varadhan Cédric Villani Mark Vishik Jean-Christophe Yoccoz Enrique Zuazua

Honour Committee: Hubert Curien, Hiroshi Fujita, Peter Lax, Enrico Magenes (Chair), Guri Marchuk

Patronages: International Mathematical Union and Académie des Sciences de Paris

Supported and sponsored by: Ministère de la Recherche, CNRS, CNES, INRIA, Collège de France, Ecole Polytechnique, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), SMAI and SMF

Registration: Registration to the Conference is free of charge, but compulsory (see web site)

Contacts:

Congrès de mathématiques appliquées à la mémoire de Jacques-Louis Lions

Postal address: Laboratoire d'analyse numérique Université Pierre et Marie Curie Boîte courrier 187 75252 Paris cedex 05 France

fax : + 33 1 44 27 72 00 mailto:congres.jllions@ann.jussieu.fr

`http://acm.emath.fr/congres-jllions/`

Julián López–Gómez
Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis
Research Notes in Mathematical Series **426**, Chapman & Hall / CRC, Florida, 2001.
ISBN: 1-58488-249-2

Un problema fundamental de la matemática ha sido siempre "resolver ecuaciones" (con todos los matices y restricciones que se quieran considerar sobre la clase de tales ecuaciones y el sentido de los términos "resolver" y "solución").

El presente libro se ocupa del estudio de ecuaciones abstractas al más puro estilo de H. Poincaré: las ecuaciones contienen un parámetro real mientras se conoce de antemano una familia de soluciones de referencia. Se trata entonces de obtener "nuevas soluciones" al perturbar el parámetro (si se quiere, al deformar "continuamente" la ecuación). Tal es el espíritu de la teoría de la bifurcación a la que está consagrada el libro. Para este enfoque resulta crucial la estructura de la "parte lineal" de tales ecuaciones. La discusión de la existencia de soluciones de las ecuaciones linealizadas (la teoría espectral de operadores lineales) juega en consecuencia un papel importante en la teoría. Asimismo, debe resaltarse que son las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, específicamente los sistemas de reacción-difusión, la fuente principal de las ecuaciones abstractas tratadas en el texto. Creo muy sinceramente que quienes sientan debilidad por las "aplicaciones" del análisis funcional y la topología disfrutarán plenamente de la lectura de la obra.

El contenido del libro responde a los dos tipos de análisis de los que se ocupa la teoría de la bifurcación. En la teoría *local* se tratan de determinar los valores críticos del parámetro de la ecuación (valores de bifurcación) desde donde se espera que aparezcan (se ramifiquen) las nuevas soluciones –soluciones no triviales– de la misma. Se trata asimismo de determinar la estructura colectiva de tales soluciones cerca del valor de bifurcación (decidir si constituyen, por ejemplo, una curva regular). Los capítulos del II al V están dedicados a la teoría local.

El resultado básico de la teoría local es el teorema de Crandall y Rabinowitz, una variante "singular" del teorema de la función implícita. En el capítulo II se discuten las consecuencias y aplicaciones de dicho resultado, en particular el principio de intercambio de estabilidad y un interesante modelo de Selkov para la glucolisis.

Una característica común de todas las ecuaciones consideradas es que la parte lineal constituye un operador de Fredholm. Se sigue de ahí que la discusión de tales ecuaciones es, en realidad, una cuestión "finito-dimensional". Esta peculiaridad se describe en el capítulo III (reducción de Lyapunov-Schmidt) junto con resultados más generales de bifurcación local de perfil marcadamente topológico (teoremas de Ize y de Westreich, alternativa de Rabinowitz).

Los capítulos IV y V son mucho más especializados y recogen contribuciones personales del autor y colaboradores. Están consagrados a la noción de "multiplicidad", concepto que designa –grosso modo– todo "indicador" con valores enteros cuya "paridad" permita decidir cuándo la parte lineal de la ecuación –con independencia de los términos de orden superior– es suficiente para *caracterizar* la presencia de bifurcación. En el capítulo IV se introduce y estudia una "multiplicidad algebraica" construida en base a la estructura espectral de la parte lineal, mientras que en el capítulo V se efectúa un interesante estudio comparativo de dicha multiplicidad con otras nociones similares introducidas en la literarura por otros autores (Ize, Kielhöfer, Krasnosel'skii, Magnus). Aquí brillan con luz propia las herramientas espectrales aludidas en el título de la obra.

La teoría *global* de la bifurcación se ocupa de la estructura del conjunto de soluciones bifurcadas lejos del valor crítico de ramificación. El paradigma de esta clase de resultados y uno de los teoremas "egregium" de todo el análisis no lineal es el célebre teorema de Rabinowitz (1970). Éste y otras versiones perfeccionadas del mismo (existencia de "ramas globales" de soluciones con propiedades nodales predefinidas) se tratan en el capítulo VI.

El capítulo VII –y último– se concentra en las aplicaciones. En éste el autor emprende un periplo a través de una década de investigación personal consagrada a las ecuaciones y sistemas de la dinámica de poblaciones, los problemas de autovalores con pesos de signo indefinido y la caracterización del principio del máximo para ecuaciones y sistemas.

José Sabina de Lis, La Laguna

Henar Herrero y Antonio Díaz-Cano
Informática aplicada a las Ciencias y a la Ingeniería con MATLAB
Servicio de publicaciones de la ETSII de Ciudad Real-Papelería EÑE.
2000
ISBN: 84-699-3109-1

La idea de elaborar este manual surgió a raíz de la implantación de la asignatura *Informática aplicada a la Química* en la licenciatura de Ciencias Químicas de la Universidad de Castilla-La Mancha. Se trata de un conjunto de prácticas básicas de Álgebra, Cálculo, Estadística y Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones a otras ciencias y elaboradas con MATLAB. Con ellas se pretende que los alumnos adquieran facilidad de manejo con los ordenadores, que aprendan a programar, que conozcan las facilidades de cálculo matemático de MATLAB, que visualicen los conceptos matemáticos que utilizan otras ciencias, de manera que se facilite su comprensión, y que relacionen los conocimientos matemáticos con los científicos propios de sus estudios (por ejemplo, en química, la evolución de las concentraciones de los reactivos en una reacción se encuentra resolviendo una ecuación diferencial). La versión de MATLAB utilizada es la 5.3 junto con la *toolbox* de cálculo simbólico.

Los autores

MATHEMATICAL MODEL
&
METHODS IN APPLIED SCIENCES

AIMS AND SCOPE

This journal provides a medium of exchange for scientists engaged in applied sciences (physics, mathematical physics, natural and technological sciences) where there exists a non-trivial interplay between mathematics, mathematical modeling of real systems and mathematical and computer methods oriented towards the qualitative and quantitative analysis of real physical systems.

The principal areas of interest of this journal are:

1. Mathematical modeling of systems in applied sciences.
2. Mathematical methods for the qualitative and quantitative analysis of models of mathematical physics and technological sciences.
3. Numerical and computer treatment of mathematical models or real systems.

Special attention will be paid to the analysis of nonlinearities and stochastic aspects.

Within the above limitation, scientists in all fields which employ mathematics are encouraged to submit research and review papers to the journal. Both theoretical and applied papers will be considered for publication. High quality, novelty of the content and potential for the applications to modern problems in applied sciences and technology will be the guidelines for the selection of papers to be published in the journal.

Book reviews, announcements and tutorial articles will be featured occasionally.

FOR MORE INFORMATION

World Scientific
An International Publisher

Home Page: **http://www.worldscientific.com**

USA office:	1060 Main Street, River Edge, NJ 07661, USA Toll-free Fax: 1-888-977-2665 Toll-free Tel: 1-800-227-7562 E-mail: **sales@wspc.com**
UK office:	57 Shelton Street, Coven Garden, London WC2H 9HE, UK Fax: +44-(0)20-78362020 Tel: +44-(0)20-78360888 E-mail: **sales@wspc.co.uk**
Singapore office:	Farrer Road, P. O. Box 128, Singapore 912805 Cable: "COSPUB" Fax: 65-467-7667 Tel: 65-466-5775 E-mail: **sales@wspc.com.sg**

SIAM Journal on Control and Optimization

Contains research articles on the mathematics and applications of control theory and on those parts of optimization theory concerned with the dynamics of deterministic or stochastic systems in continuous or discrete time or otherwise dealing with differential equations, dynamics, infinite-dimensional spaces, or fundamental issues in variational analysis and geometry. *Published bimonthly.*

H. J. C. Huijberts
M. R. James
R. Kumar
J. B. Lasserre
H. Longemann
R. M. Murray
A. M. Perdon
I.R. Petersen
A.C.M. Ran
W. Respondek
J. Rosenthal
W. J. Runggaldier
E. W. Sachs
A. Shwartz
G. Stefani
A. Tannenbaum
D. Tataru
F. Tröltzsch
A.J. van der Schaft
M. Yamamoto
J. Yong
V. M. Zeidan
Q. Zhang

CONTACT *SICON*

Toll Free: 1-800-447-SIAM
(in the US and Canada)
Phone: 215-382-9800
Fax: 215-386-7999
E-Mail: **sicon@siam.org**

BUSINESS ADDRESS

3600 University City Science Center
Philadelphia, PA 19104-2

Título:	CÓPULAS Y CUASICÓPULAS: INTERRELACIONES Y NUEVAS PROPIEDADES. APLICACIONES.
Doctorando:	Manuel Úbeda Flores.
Director/es:	Roger B. Nelsen.
	José Antonio Rodríguez Lallena.
Defensa:	19 de julio de 2001, Universidad de Almería.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: Si (X, Y) es un par aleatorio continuo con función de distribución conjunta H_1 y marginales F y G, respectivamente, y H_2 es otra función de distribución bivariante con las mismas marginales F y G, estudiamos la función de distribución de $H_1(X, Y)$. Ésta depende sólo de las cópulas C_1 y C_2 asociadas a H_1 y H_2. Estudiamos algunas aplicaciones, especialmente en lo que se refiere al estudio de nuevos órdenes de dependencia.

En segundo lugar, estudiamos algunas nuevas propiedades de las cuasicópulas bivariantes analizando diferencias y similitudes que se dan con las ya conocidas propiedades de las cópulas.

En tercer lugar, definimos y caracterizamos las cuasicópulas arquimedianas multivariantes y estudiamos sus principales propiedades.

Finalmente, encontramos las mejores cotas posibles para conjuntos de funciones de distribución, de cópulas o de cuasicópulas que poseen una propiedad común, por ejemplo, una determinada sección diagonal, un valor prefijado en un punto conocido o en cierta medida de dependencia, etc.

Título:	CONDICIONES DE OPTIMALIDAD EN PROGRAMAS VECTORIALES CON CONVEXIDAD GENERALIZADA.
Doctorando:	Miguel Adán Oliver.
Director/es:	Vicente Novo Sanjurjo.
Defensa:	29 de Junio de 2001, E.T.S.I. Industriales, U.N.E.D.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: Se estudian programas vectoriales o multiobjetivos en espacios vectoriales reales parcialmente ordenados por un cono convexo, con el objetivo de caracterizar las soluciones optimales de tales programas bajo condiciones débiles de convexidad de tipo "convexlike" y debilitando la habitual solidez del cono de orden. Ninguna noción topológica está involucrada salvo la topología natural del cuerpo de escalares.

Se introduce un concepto de clausura de tipo algebraico, denominado cierre vectorial, que es más débil que la usual clausura algebraica y, en espacios vectoriales topológicos, resulta intermedio entre los cierres algebraico y topológico. Se dan propiedades del interior algebraico y de la clausura vectorial bajo condiciones de solidez relativa para conjuntos "nearly convex", y se estudia el cierre vectorial en el espacio dual. Se caracterizan el cierre vectorial y el interior algebraico relativo de un conjunto "nearly convex" mediante un funcional de tipo Minkowski. Se obtienen teoremas de separación propia bajo condiciones de solidez relativa y de cierre vectorial.

Se extienden a esp. vect. reales parcialmente ordenados por un cono convexo K, mediante el interior algebraico relativo diversos conceptos generalizados de K-convexidad, y se introducen otros nuevos, como la K-convexidad parcial, en el caso de que el cono de orden sea un producto de conos. Se define el concepto de vector-K-convexidad y otros generalizados a partir de este, se caracterizan y se relacionan entre si todos los conceptos de K-convexidad estudiados. Bajo las más débiles condiciones de convexidad se obtienen generalizaciones de teoremas de alternativa de tipo Gordan.

Se introducen conceptos más débiles de eficiencia propia de tipo Hurwicz, Benson y Global de Borwein. Se estudian caracterizaciones de los conceptos de eficiencia, eficiencia débil y propia en prog. vectoriales bajo condiciones de solidez relativa y de convexidad generalizada de tipo "K-convexlike". Para los programas no restringidos se demuestran teoremas de escalarización, y para los restringidos se obtienen reglas de multiplicadores de tipo Lagrangiano.

Mediante los adecuados problemas de dualidad Lagrangiana y bajo convexidad generalizada de tipo "K-convexlike" se obtienen condiciones necesarias y suficientes

de eficiencia débil y propia en forma de teoremas de dualidad débil, fuerte y fuerte inverso. Teoremas de Punto de Silla para aplicaciones y para funcionales de tipo Lagrangiano, permiten caracterizar las soluciones débil y propiamente eficientes bajo convexidad generalizada de tipo "K-convexlike".

Título:	ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO TERMOMECÁNICO DE UNA COLADA DE ALUMINIO.
Doctorando:	Patricia Barral Rodiño.
Director/es:	Peregrina Quintela Estévez.
Defensa:	29 de Junio de 2001, Univ. de Santiago de Compostela.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude.

Resumen: En esta memoria se estudia un modelo matemático que describe el comportamiento termomecánico de una placa de aluminio durante el proceso de colada. Se trata de un problema de evolución cuasi-estático para materiales viscoelásticos de Maxwell-Norton, formulado en un dominio tridimensional que varía con el tiempo, con una condición de contacto en una parte de la frontera.

Las principales dificultades que surgen en la resolución numérica de este problema son la imposición de la condición de contorno que refleja la presión metalostática ejercida por el aluminio líquido sobre la zona ya solidificada, el tratamiento de la condición de contacto y la no linealidad de la ley viscoelástica.

La utilización de un método de dominio ficticio permite implementar numéricamente la presión metalostática de una forma sencilla, si bien es necesario conocer los parámetros mecánicos que se deben considerar en la ley de comportamiento de dicho dominio ficticio. Estos parámetros se obtienen a partir de un análisis asintótico del problema.

Para tratar la condición de contacto y evitar la no linealidad de la ley viscoelástica se utilizan técnicas de operadores maximales monótonos.

La formulación variacional propuesta se discretiza en espacio mediante un método de elementos finitos y en tiempo mediante un esquema implícito. El algoritmo construido se valida con varios ejemplos académicos. Además, se presentan las deformaciones obtenidas en la simulación de diversos procesos de colada y se comparan estos resultados con datos experimentales.

Finalmente, se demuestra la existencia de solución del submodelo obtenido al eliminar la dependencia del dominio con respecto al tiempo y de la ley constitutiva

con respecto a la temperatura.

Título:	DINÁMICA NO LINEAL DE REGISTROS ELECTROFISIOLÓGICOS.
Doctorando:	María Victoria Sebastián Guerrero.
Director/es:	María Antonia Navascués Sanagustín.
Defensa:	2 de Junio de 2001, Universidad de Zaragoza.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude.

Resumen: El desarrollo de esta memoria contribuye a la interpretación numérica del electroencefalograma (EEG), con la aportación de algunos avances en las nuevas técnicas no lineales que complementan el estudio espectral clásico del mismo.

Se ha encontrado una relación entre los descriptores normalizados de pendiente (propuestos por B. Hjorth en 1970), que describen la señal en los dominios espectral y temporal, y los coeficientes de Fourier de la señal. Se han hallado fórmulas de cuadratura para dichos parámetros, reconstruyendo previamente la señal mediante funciones spline de tipo polinómico. El método se ha generalizado usando funciones diferenciables de interpolación fractal cúbica. En ambos casos se ha realizado una acotación de los errores de integración numérica.

Se propone también el uso de parámetros no lineales para la cuantificación del EEG. Para ello, se han obtenido distintos procedimientos de ajuste de la señal mediante funciones de interpolación fractal afín, que permiten el cálculo de la dimensión fractal del gráfico del EEG y de la dimensión de correlación.

La necesidad de interpretar los datos obtenidos de los distintos cuantificadores de la señal electroencefalográfica ha llevado a pensar en la construcción de mapas de distribución de los mismos sobre la superficie cortical. Se ha realizado un estudio comparativo de los distintos modelos de potencial eléctrico cerebral y diferentes procedimientos de aproximación y representación espacial del mismo sobre la superficie cortical. Se propone en esta memoria una cartografía cerebral usando splines de interpolación de Duchon. El cálculo de la densidad de corriente craneal o laplaciano de superficie permite la localización de fuentes corticales (focos epilépticos).

Los métodos descritos en la memoria se han aplicado al estudio electroencefalográfico de un grupo de niños con un trastorno por atención deficiente e hiperactividad, comparando los resultados con los de un grupo de niños sanos. Los niños con este síndrome presentan electroencefalogramas que por mera inspección

visual no se distinguen de los niños normales. Se han estudiado los registros en estado de reposo y realizando una tarea auditiva y otra visual. Se concluye que el grupo paciente presenta una lentificación del electroencefalograma en el área frontal, tanto a nivel basal como durante la ejecución de las tareas de atención.

Álvarez Nodarse, Renato
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Polinomios ortogonales, teoría de aproximación – Univ. de Sevilla – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Análisis Matemático – Apdo. 1160; 41080 Sevilla.
Tlf.: 954557997. *Fax:* 954557972.
e-mail: `ran@cica.es`.

Bellido Guerrero, José Carlos
Becario. *Líneas de investigación:* Cálculo de Variaciones, control – Univ. de Castilla-La Mancha – E.T.S.I. de Industriales – Dpto. de Matemáticas – Campus Universitario, s/n; 13005 Ciudad Real.
Tlf.: 926295457. *Fax:* 926295361.
e-mail: `jbellido@ind-cr.uclm.es`.

Caniego Monreal, Francisco Javier
Prof. Titular de Universidad Interino. *Líneas de investigación:* Geometría fractal en las Ciencias de la Tierra. Ecología matemática. – Univ. Politécnica de Madrid – E.T.S.I. Agrónomos – Dpto. Matemática Aplicada a la Ing. Agronómica – Avda. Complutense, s/n; 28040 Madrid.
Tlf.: 913365823. *Fax:* 913365817.
e-mail: `caniego@mat.etsia.upm.es`.

Castaño Iglesias, Florencio
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Teoría de Anillos, categorías. Ecuaciones en derivadas parciales – Univ. de Almería – Facultad de Matemáticas y Económicas – Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada – Cañada de San Urbano, s/n; 04120 Almería.
Tlf.: 950015664. *Fax:* 950015167.
e-mail: `fci@ual.es`.

Domínguez Delgado, Antonio
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* EDP - Mecánica de fluidos – Univ. de Sevilla – E.T.S. Arquitectura – Dpto. de Matemática Aplicada I – Avda. de Reina Mercedes, s/n; 41012 Sevilla.
Tlf.: 954556527.
e-mail: `domdel@cica.es`.

Encinas Bachiller, Andrés Marcos
Prof. Titular de Escuela Universitaria. *Líneas de investigación:* Teoría discreta del potencial – Univ. Politécnica de Catalunya – E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos – Dpto. de Matemática Aplicada III – c/ Jordi Girona Salgado, 1-3; 08034 Barcelona.
Tlf.: 934016914. *Fax:* 934011825.
e-mail: andres.marcos.encinas@upc.es.

Fernández Nieto, Enrique Domingo
Becario. *Líneas de investigación:* Análisis Numérico: Ecuaciones de aguas poco profundas con término fuente. Ecuaciones primitivas – Univ. de Sevilla – E.T.S. Arquitectura – Dpto. de Matemática Aplicada I – Avda. de Reina Mercedes, s/n; 41012 Sevilla.
Tlf.: 954556665. *Fax:* 954556621.
e-mail: edofer@cica.es.

Letelier Albornoz, René
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Ecuaciones en derivadas parciales – Univ. de Concepción – Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas – Dpto. de Matemáticas – c/ Casilla 160-C; Barrio Universitario; Concepción (Chile).
Tlf.: 5641203135.
e-mail: rletelie@gauss.cfm.udec.cl.

Molina Becerra, Mónica
Becario. *Líneas de investigación:* Ecuaciones en Derivadas Ecuaciones en Derivadas Parciales, aplicación a Dinámica de Poblaciones – Univ. de Sevilla – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico – Apdo. 1160; 41080 Sevilla.
Tlf.: 954557981. *Fax:* 954552898.
e-mail: monica@numer.us.es.

San José Martínez, Fernando
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Álgebras de Lie y estructuras matemáticas de la Relatividad. Geometría fractal en las Ciencias de la Tierra. Ecología matemática. – Univ. Politécnica de Madrid – E.T.S.I. Agrónomos – Dpto. Matemática Aplicada a la Ing. Agronómica – Avda. Complutense, s/n; 28040 Madrid.
Tlf.: 913365830. *Fax:* 913365817.
e-mail: sanjose@mat.etsia.upm.es.

Sánchez Muñoz, Isabel
Prof. Titular de Escuela Universitaria. *Líneas de investigación:* Modelado de la turbulencia – UNIV. DE SEVILLA – E.U.I.T. Agrícola – Dpto. de Matemática Aplicada I – Avda. de Reina Mercedes; 41012 Sevilla.
Tlf.: 954233669. *Fax:* 954552898.
e-mail: isanchez@cica.es.

Taguas Coejo, Francisco Javier
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Geometría fractal en las Ciencias de la Tierra. Ecología matemática. – UNIV. POLITÉCNICA DE MADRID – E.T.S.I. Agrónomos – Dpto. Matemática Aplicada a la Ing. Agronómica – Avda. Complutense, s/n; 28040 Madrid.
Tlf.: 913365822. *Fax:* 913365817.
e-mail: taguas@mat.etsia.upm.es.

NUEVOS SOCIOS INSTITUCIONALES

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Zaragoza
Edificio de Matemáticas, Planta 1. 50009–Zaragoza.

Departamento de Matemáticas

E.T.S.I. Industriales – Universidad de Castilla-La Mancha
Avda. de Camilo José Cela, 3. 13071–Ciudad Real.

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias – Universidad de Oviedo
Avda. de Calvo Sotelo, s/n. 3307–Oviedo.

DIRECCIONES PARA
SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Atenderemos gustosamente cualquier tipo de sugerencia o comentario sobre el Boletín de S$\vec{e}$MA. Una forma rápida y conveniente para hacernos llegar tales sugerencias es el correo electrónico. Por eso indicamos una vez más nuestra dirección de “e-mail”:

`boletin_sema@uco.es`

Asimismo, recordamos la página *web* de S$\vec{e}$MA, como medio también adecuado de expresión para sus socios:

`http://www.uca.es/sema`

S$\vec{e}$MA

BOLETÍN NÚMERO 19

Diciembre 2001

sumario