S$\vec{e}$MA

BOLETÍN NÚMERO 18

Julio 2001

sumario

FOTO DE PORTADA

John von Neumann nació el 28 de diciembre de 1903 en Budapest (Hungría), con el nombre original János von Neumann. Comenzó su educación en el "Gymnasium" Luterano en 1911. En 1923 ingresa en la Universidad de Berlín para estudiar Química, después de que Theodore von Kármán, a instancias de su padre, intentara persuadirlo para que se dedicara a los negocios. Realizó numerosas aportaciones en distintas áreas de las matemáticas. Sería casi imposible dar una idea aproximada de la cantidad de condecoraciones y premios que le fueron otorgados. En 1938 la American Mathematical Society, de la que posteriormente fue Presidente, le condecoró con el Premio Bôcher por su trabajo *Almost periodic functions and groups*. Fue miembro de numerosas academias entre las que se incluyen la Academia Nacional de Ciencias Exactas (Lima, Perú), la Academia Nazionale dei Lincei (Roma, Italia) y la American Academy of Arts and Sciences (USA). Asimismo recibió la Medalla al Mérito in 1947 y la Medalla por la Libertad en 1956. Ese mismo año recibió el Premio Conmemorativo Albert Einstein y el Premio Enrico Fermi. Murió el 8 de Febrero de 1957.

edición

Dirección editorial: Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Edif. C-2, planta 3, Campus Universitario de Rabanales, 14071 Córdoba.

E-mail: boletin_sema@uco.es, *Fax:* 957 21 86 30

responsables de secciones

Gestión de socios
LUIS ALBERTO FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación
Facultad de Ciencias
Universidad de Cantabria
Avda. de Los Castros, s/n
39005 SANTANDER
lafernandez@unican.es

Mantenimiento página web
J. RAFAEL RODRÍGUEZ GALVÁN
Dpto. Matemáticas
Facultad de CC. EE. y Empresariales
Universidad de Cádiz
C/ Duque de Nájera, 8
11002 CÁDIZ
rafael.rodriguez@uca.es

Comentarios de libros
FRANCISCO JAVIER SAYAS GONZÁLEZ
Dpto. Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
Plz. San Francisco, s/n
50009 ZARAGOZA
jsayas@posta.unizar.es

Remisión de artículos
JOSÉ LUIS CRUZ SOTO
Dpto. Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba
Campus Univ. de Rabanales
Edificio C-2, planta 3ª
14071 CÓRDOBA
boletin_sema@uco.es

Educación Matemática
ALICIA DELIBES LINIERS y
SOLEDAD RODRÍGUEZ SALAZAR
Dpto. de Matemática Aplicada
Facultad de Químicas
Univ. Complutense de Madrid
Avda. Complutense, s/n
28040 MADRID
delibes@sunma4.mat.ucm.es
solerodr@mat.ucm.es

Diseño de portada: Antonio Espinosa López y Antonio Osuna Abad.
Imprime: TIPOGRAFÍA CATÓLICA, S. C. A., Tfo.: 957 297 188 Córdoba.
D. L. : CO-156/2000

PRESENTACIÓN

El inexorable acontecer del destino nos obliga a comenzar el Boletín de S$\vec{e}$MA, una vez más, con notas necrológicas. Como muestra de que siguen en nuestro recuerdo tanto Jacques-Louis Lions como Jeannine Saint Jean Paulin, se incluyen las líneas que sobre ellos han escrito, respectivamente, Antonio Valle y Juan Casado.

Respecto a los seis artículos que contiene este Boletín 18, hay cuatro sobre temas variados (polinomios ortogonales, Toeplitz, cálculo de variaciones e ideales difusos) y dos que se encuadran en la habitual sección sobre *"Educación Matemática"* comenzada en el Boletín 14. Agradecemos su colaboración a los autores, tanto de éste como de otros Boletines. En particular, pedimos disculpas a los autores del artículo *"Análisis Teórico de Varias Cuestiones con Origen en Mecánica de Fluidos"*, publicado en el Boletín 17. Un lamentable error en la compilación dio lugar a que no apareciera como autor del mismo nuestro anterior Presidente, Enrique Fernández Cara.

Esperamos que, a pesar de nuestros errores, tanto los socios de S$\vec{e}$MA como otros colegas continúen enviando sus aportaciones a los distintos "responsables de secciones". A este respecto, indicamos que la sección de *"Educación Matemática"* corre a cargo de Alicia Delibes y Soledad Rodríguez. En el presente Boletín se incluyen los anuncios de libros y la relación de nuevos socios, preparados por los correspondientes responsables. También aparecen dos resúmenes de Tesis Doctorales leídas recientemente (enviadas por los nuevos doctores), así como anuncios de revistas y de Cursos de Verano. Sobre estos dos últimos apartados queremos hacer sendas aclaraciones. Primera, el hecho de que en la página 141 del Boletín 17 se anunciaba una revista, aunque por una errata en la presentación se referenciaba la página 121. Segunda, la eliminación, tanto en este Boletín como en otros, de los anuncios de aquellos Cursos cuya fecha es anterior a la prevista para la aparición del mismo.

Para mayor claridad, reflejamos a continuación las dos erratas antes mencionadas:

FE DE ERRATAS DEL BOLETÍN 17

Página	Renglón	Donde dice	Debe decir
5	9	página 121	página 141
83	3	Blanca Climent	Blanca Climent y Enrique Fernández Cara
83	8	blanca@numer.us.es	blanca@numer.us.es y cara@numer.us.es

Grupo editor
boletin_sema@uco.es

Es obligado comenzar estas palabras recordando al Profesor Jacques-Louis Lions quien, como ya todos sabéis, falleció el día 17 de mayo. Siendo una pérdida muy dolorosa para su familia, representa también una pérdida enorme para la Matemática, especialmente para la Matemática Aplicada, y en particular para la Matemática Española, puesto que él siempre se volcó con nuestro país. Hemos pedido al Profesor Valle, primer discípulo español del Profesor Lions, que nos escriba unas líneas sobre esta persona que fue tan admirada por nosotros. En próximos números del boletín iremos publicando artículos en los que se analice la obra matemática del Profesor Lions. En el número anterior del boletín, nuestro ex-presidente Juan Luis Vázquez nos recordaba al Profesor Philippe Bénilan, después falleció la Profesora Jeannine Saint Jean Paulin y Juan Casado asumió esta vez la tarea de escribir para nuestro boletín unas líneas en su memoria. Una profunda tristeza nos embarga al ver cómo van desapareciendo estos compañeros y maestros. Sin embargo, siempre estarán en nuestra memoria y nos sentiremos deudores de su legado, utilizando los teoremas que ellos demostraron, las técnicas que inventaron y todo aquello que nos enseñaron. Somos herederos de la obra que ellos desarrollaron a lo largo de una vida de dedicación a la ciencia. Aunque para el gran público su desaparición pueda pasar desapercibida, al menos nosotros, sí valoramos la herencia matemática que nos han legado en su justa medida.

Precisamente gracias al aprovechamiento de este legado, los matemáticos españoles nos hemos situado, al final del siglo XX, entre los diez países del mundo con mayor producción matemática. En el próximo número de nuestro boletín se presentará un informe que el CEAMM2000 encargó a Carlos Andradas y Enrique Zuazua, en cuanto que representantes de RSME y SEMA, respectivamente. Ellos, con la ayuda de Gema Villacián, contratada a través de una Acción Especial de la Secretaría de Estado de Educación, Universidades, Investigación y Desarrollo, han elaborado un informe que evidencia el desarrollo de la Matemática en nuestro país.

Una excelente noticia por la que todos debemos felicitarnos es la decisión del Comité de la Unión Matemática Internacional (IMU) para que España sea la sede durante el año 2006 del Congreso Mundial de Matemáticas, decisión que nos debe llenar de orgullo por lo que ello significa de reconocimiento de nuestro trabajo y por cuanto que había otros países aspirantes a dicha organización que también reunían una experiencia organizativa y nivel matemático muy alto. Aunque esta decisión debe ser ratificada en Shanghai en agosto de 2002, con ocasión del Congreso Mundial a celebrar en China, es conocido que estas decisiones del Comité nunca han sido modificadas.

Por otro lado, como probablemente ya sabréis, el Centro de Información y Documentación Científica (CINDOC), dependiente del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, está elaborando una base de datos de matemáticos españoles. Aquellos que estéis interesados en inscribiros (y no lo hayáis hecho todavía), podéis acceder a dicha base de datos en la dirección

http://www.cindoc.csic.es/investigacion/matematicas-intro.html

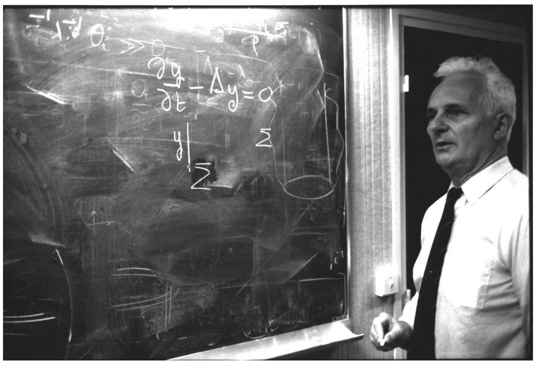
Los matemáticos que figuren en esta base serán posteriormente incluidos en el World Directory of Mathematicians que elabora la Unión Matemática Internacional.

Permitidme terminar con un recordatorio. A finales de septiembre tenemos una cita en Salamanca, para participar en nuestro Congreso de Matemática Aplicada. En su trascurso, celebraremos la Asamblea anual de nuestra sociedad y haremos entrega de los premios SEMA al *Joven Investigador* y al mejor artículo de *Divulgación de la Matemática Aplicada*, como empieza ya a ser costumbre. La masiva participación que se espera nos augura muy buenas expectativas para el futuro.

Entretanto, os deseo un buen verano y un merecido descanso.

Eduardo Casas
Presidente de S$\vec{e}$MA
eduardo.casas@unican.es

Jacques-Louis LIONS, in Memoriam
¡Ha muerto Jacques-Louis LIONS!



(Fotografía cedida por Magnum-Martine Franck)

El pasado 17 de mayo falleció en París a la edad de 73 años el Profesor Jacques-Louis LIONS, tras meses de duro enfrentamiento con una cruel enfermedad, dejando un último testimonio de su temple que, ya muy avanzado su deterioro físico, le impedía rendirse ante la adversidad y aceptar la imposibilidad de seguir llevando a cabo el trabajo habitual con la capacidad y el nivel de autoexigencia que a sus numerosos discípulos y colaboradores nos era bien conocido aunque sin dejar por ello de admirarnos.

Con toda seguridad, tan luctuosa noticia habrá de producir una profunda impresión incluso en quienes han seguido los altibajos de la inesperada degradación de su estado de salud desde el verano del pasado año y de su dramática lucha final. Y es que, su actividad desbordante, su enorme vitalidad y su optimismo, hacen más difícilmente asimilable el hecho de su desaparición física.

Cualquier descripción que pretendiera reflejar con un mínimo de fidelidad la personalidad –a la vez tan sencilla como rica en matices– de Jacques-Louis LIONS, habría de tener en cuenta las varias facetas que, en ella, se superponían: el Hombre, el Maestro, el Científico, el Responsable de grandes Centros de Investigación y el Asesor Científico de importantes organismos o empresas, aspectos que, en esta ocasión, sólo cabe comentar muy superficialmente.

Nacido en Grasse (Departamento de los Alpes Marítimos) el 2 de mayo de 1928, cursó sus estudios secundarios en el Liceo de Niza, tras los cuales fue alumno de la Escuela Normal Superior de París –un centro de formación de élites científicas– entre 1947 y 50. Investigador en el C.N.R.S. de 1951 a 54, defendió su tesis de estado con gran brillantez. Fue profesor en las universidades de Nancy de 1954 a 62 y París de 1962 a 73, antes de ejercer la docencia en la Escuela Politécnica Superior y en el Collège de France, la institución del máximo prestigio académico en el país vecino, donde desempeñó hasta su jubilación en 1998 la cátedra de "Análisis Matemático de Sistemas y de su Control". También en 1973, a los 45 años, fue designado miembro de la Academia de Ciencias que, posteriormente, entre 1996 y 98, presidió.

En los años 50, en pleno auge del movimiento bourbakista, influido por las ideas de von Neumann sobre las posibilidades entonces incipientes de los ordenadores y convencido de que la Ciencia debe contribuir a la resolución de los problemas cotidianos, se empezó a interesar por el origen de muchos de éstos para ocuparse, a continuación, de su modelado matemático y de su resolución tanto teórica como algorítmica, comprendiendo hasta qué punto las aportaciones del mundo real podían vivificar la Matemática. Cincuenta años después y a la vista del proceso de transformación que la Informática ha propiciado, bien se puede decir que hizo gala de una intuición cuasi-profética. Hasta el final estuvo convencido de que los ordenadores cambiarían todos los esquemas.

Matemático de renombre universal, Jacques-Louis LIONS consagró sus trabajos al Análisis Matemático y Numérico de las Ecuaciones en derivadas parciales, al Control de sistemas regidos por dichas ecuaciones y, en breve, al tratamiento matemático, numérico e informático de los fenómenos y procesos de las Ciencias Aplicadas, desde el ámbito aeroespacial al medio ambiente pasando por los materiales compuestos, la energía o la economía. Fue él quien, en frase feliz, otorgó al Análisis Numérico sus credenciales de nobleza.

El avance de sus trabajos y la puesta a punto de los adecuados útiles matemáticos, originó importantes aportaciones teóricas, asimismo de gran calado. Ahí están para dar fe de ello, la Teoría de interpolación de espacios funcionales, las inecuaciones variacionales y casi-variacionales y tantas otras.

Impresiona el gran número de artículos publicados en todas las revistas de prestigio, así como la extensa relación de textos, algunos traducidos a lenguas tales como ruso, chino o japonés, que se han convertido en clásicos de la Literatura matemática y punto de referencia obligado para quien se dedica al vasto dominio de las Ecuaciones en derivadas parciales o quiere iniciarse en éste.

Premios de la mayor importancia, nombramientos como miembro de Academias de Ciencias, entre las cuales la Real Academia Española de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, doctorado Honoris Causa por innumerables universidades, entre las cuales cuatro españolas: Complutense y Politécnica de Madrid, Santiago de Compostela y Málaga donde tuve el honor de apadrinarle, avalan su inmenso prestigio.

Su paso por importantes organismos franceses de investigación tales como el INRIA o posteriormente el CNES, dejó una huella indeleble por el impulso que logró dar a las siempre difíciles relaciones entre científicos e industriales, mediante la creación de adecuados equipos interdisciplinarios y puso de relieve su talante siempre proclive al diálogo, muy lejos de cualquier veleidad de aislamiento insolidario.

El asesoramiento de grandes empresas u organismos como "Electricité de France", "Dassault Aviation", "Gaz de France" , "Pechiney", "France Telecom" o la "Météorologie Nationale", constituyen otro dato relevante de su actividad que, desde la perspectiva política en la más noble acepción del término, fue reconocida con la Legión de Honor y otras altísimas distinciones. El actual Presidente de la Academia Francesa de Ciencias y ex-ministro de investigación Hubert Curien, refleja la actuación de Jacques-Louis LIONS en esta vertiente más próxima al mundo de la Política y la Economía, con estas palabras: "Desprendía una autoridad natural, que constituía un triunfo en las grandes instancias internacionales. No era un hombre de *diktat*, sino de contacto, de discusión y, a continuación, de decisión".

No podría omitirse, ni invocando razones de brevedad, una referencia a su Magisterio. También en este sentido, Jacques-Louis LIONS reveló desde el inicio de su actividad universitaria, una personalidad excepcional. Su natural simpatía y su cordial acogida lograban siempre eliminar las barreras. Es atípico, al menos en Matemáticas, el número de tesis doctorales dirigidas o el de trabajos por él tutelados.

En lo que a nuestro país se refiere, un lejano día de 1963, gracias a la inspirada intervención de nuestro querido Maestro Alberto Dou, se inició una relación científica con Jacques-Louis LIONS que, a lo largo de tantos años, no ha cesado de producir frutos. Tuvimos desde entonces –en momentos difíciles para España no lo olvidemos– su apoyo incondicional y su respaldo moral gracias a los cuales se pudo llegar a formar aquí una destacada sección de la escuela por él creada. Un colectivo de jóvenes profesores e investigadores, discípulos directos o indirectos suyos en tercera o cuarta generación, encuadrados en al menos una docena de universidades españolas, atestiguan con su producción científica la veracidad de la afirmación anterior.

Jacques-Louis LIONS participó en numerosas actividades organizadas en España en los últimos 30 años; congresos, escuelas hispano-francesas, jornadas, etc, lo tuvieron como invitado especial, respaldando así con su presencia un desarrollo en el dominio de las Ecuaciones en derivadas parciales y del Análisis Numérico, que él seguía con atención complaciéndose en referirse al mismo cada vez que se le presentaba la ocasión de hacerlo, como buen conocedor del esfuerzo que había supuesto llegar a una situación tan satisfactoria, partiendo de muy bajos niveles iniciales.

Sería de estricta justicia que, por la Administración, se reconociesen de forma adecuada, la deuda que los matemáticos españoles tenemos contraída con él y tal vez SEMA pudiese tomar la iniciativa al respecto.

¿Qué decir de la persona?. Es difícil mejorar la semblanza que, interpretando el sentir de un numerosísimo grupo de colegas y antiguos discípulos, hizo de él E. Magenes con ocasión del homenaje que se le tributó en la Sorbonne al cumplir los 60 años:"Irradiando inteligencia, de una gentileza y amabilidad extremas, Jacques-Louis LIONS está siempre dispuesto a escuchar a los demás, consiguiendo que sus interlocutores se sientan cómodos. Optimista a todo trance, sabe enfrentarse con humor a las dificultades. Es el hombre que ha sabido resistir fantásticas proposiciones de lugares prestigiosos, de importantes recursos y de puestos elevadísimos ... Si mucho ha recibido, ello se debe a que ha sabido proporcionar a los demás, los medios para su propia realización científica".

¡Cuantas pequeñas anécdotas y cuantos inspirados comentarios sobre el papel de la Matemática en el progreso humano, pero también sobre los más variados aspectos de la vida, con el humor, la agudeza y la visión de futuro que le caracterizaban, guardaremos entre nuestros más preciados recuerdos quienes tuvimos el privilegio de tratarlo!. Quizás esa idiosincrasia explique cómo una relación inicial discípulo-maestro, se haya transformado siempre con el paso del tiempo, en otra de amistad y afecto profundos, teñida desde luego de admiración por nuestra parte.

La apertura de las actividades organizadas con motivo de "2000, Año Internacional de las Matemáticas" idea que, en gran medida, él había patrocinado, contó con su presencia y participación que una vez más evidenció cómo la profundidad no es incompatible con la amenidad, en la sesión multitudinaria celebrada en el Congreso de los Diputados. Fue para la mayoría, la última ocasión de oírlo y constatar la claridad de sus ideas. Después se produjo una última visita a España, ya con problemas de salud que sin embargo no parecían alarmantes, con motivo de ECCOMAS celebrado en Barcelona en septiembre de 2000 y sólo algunos compañeros, especialmente J. I. Díaz que trabajaba con él en una reedición ampliada de su obra "El planeta Tierra", han mantenido contacto posterior, hasta que por desgracia las circunstancias lo truncaron.

Amable como siempre y pese a su saturada agenda de actividades, encontró, a nuestro requerimiento, unas fechas en noviembre de 2000 para venir de nuevo a Málaga y clausurar las actividades aquí organizadas con motivo del Año Internacional de las Matemáticas. Cuando la situación aconsejó retrasar su visita, se habló de la posibilidad de aplazarla hasta principios del presente año lo que no parecía presentar ningún problema...“salvo que tendremos un año más” escribía. El 5 de febrero recibí su último mensaje, respuesta a uno mío interesándome por la evolución de su salud del que me siento autorizado a reproducir estas palabras,:“. . . la salud marcha así-así, estoy en plena batalla, ya veremos,. . . pero la moral es buena”.

Estoy seguro de que a los muchos que mucho le debemos, su recuerdo nos acompañará siempre. Hemos perdido un extraordinario científico, pero también un gran amigo y un ser humano excepcional.

Sé que interpreto el sentimiento de los socios de SEMA expresando, desde estas líneas, nuestro más sentido pésame de modo especialísimo a su esposa y compañera inseparable Andrée LIONS, a su hijo el gran matemático Pierre-Louis LIONS, a su nieto Dorian y a toda su familia. ¡Ojalá nuestra solidaridad pueda mitigar su dolor en estos difíciles momentos!.

Descanse en paz

Málaga, 1 de junio de 2001
A. Valle Sánchez

Me dirijo a vosotros para comunicaros el fallecimiento de la Profesora Jeannine Saint Jean Paulin, el día 3 de Mayo del 2001, tras haber luchado con infatigable entereza contra una larga enfermedad.

Nacida en Algiers (Argelia) en el año 1947, fue antigua alumna de "L'École Normale Supérieure de Jeunes Filles" y realizó su Tesis Doctoral con el también recientemente desaparecido Profesor Jacques Louis Lions, entrando más tarde a formar parte del "Centre National de Recherche Scientifique". Jeannine estuvo siempre estrechamente ligada al "Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université de Paris VI" y de ese modo estableció estrechos contactos con un gran número de matemáticos españoles. En la actualidad y desde 1988 era Catedrática del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Metz en Francia, del cual era directora. Las Matemáticas en Metz deben sin duda mucho a la labor realizada por Jeannine en estos años.

Sus trabajos en la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales y, más concretamente, en el campo de la homogeneización, relacionados siempre con el estudio de problemas físicos, principalmente en mecánica de medios continuos, gozan de un amplio reconocimiento internacional. Jeannine se caracterizó siempre por su espíritu abierto y liberal, y colaboró con un amplio grupo de matemáticos de todas las procedencias. A pesar del problema que plantea realizar una lista en la cual siempre faltan nombres importantes y que por su extensión no podemos presentar de forma exhaustiva, referencio por ejemplo a D. Cioranescu, C. Conca, P. Donato, I.A. Ene, R. Kauffmann, S. Kesavan, M.L. Mascarenhas, G.P. Panasenko, M. Vanninathan,... La colaboración de Jeannine con Doina Cioranescu fue particularmente estrecha y fructífera, dando lugar a una veintena larga de trabajos, varios de los cuales son de referencia obligada, tal es el caso de "Homogenization in open sets with holes" (J. Math. Anal. Appl., 1979), en el cual obtienen de forma rigurosa, el límite de una sucesión de problemas de Dirichlet en dominios perforados periódicos con condiciones de Neumann. Este trabajo, en el que se introducen ideas fundamentales para resolver este tipo de problemas, ha sido base de multitud de artículos posteriores realizados por autores de todo el mundo. Es preciso referenciar también sus diversos estudios sobre el complejo comportamiento asintótico de estructuras reticuladas periódicas, en que intervienen varias escalas, que se ha visto culminado con el libro "Homogenization of reticulated structures"(Springer, 1999). En los últimos años Jeannine realizó contribuciones decisivas también en el área de controlabilidad y estabilización de ecuaciones de evolución en presencia de parámetros singulares.

Durante la década de los 90, Jeannine contribuyó de manera decisiva en el desarrollo de la Matemática Aplicada en Rumanía, a través de proyectos europeos coordinados mayormente desde París por Doina Cioranescu. En los últimos años Jeannine se convirtió en una incansable colaboradora de la matemática chilena y se hizo con el dominio de la lengua española.

Quiera este breve recordatorio servir como muestra del pesar de la Sociedad Española de Matemática Aplicada por su temprana pérdida. Descanse en paz.

Juan Casado Díaz

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *18 (2001), 19–45.*

Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones

Renato Álvarez Nodarse
Departamento de Análisis Matemático, Univ. de Sevilla
Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional
Universidad de Granada

e-mail: ran@cica.es

1 Introducción

En este breve artículo vamos a intentar dar una visión de los polinomios ortogonales: entes matemáticos de gran sencillez y con un sinnúmero de aplicaciones tanto en Matemáticas (ecuaciones diferenciales, combinatoria, teoría de números, álgebra computacional, funciones Theta, aproximación racional, teoría de grupos, etc) como en Física o Ingeniería (física cuántica, ecuaciones de Schrödinger, entropías de Shannon, osciladores, compresión de la información, etc).

Aunque no es nuestro objetivo presentar nuevos teoremas, para situarnos en el contexto vamos a comenzar dando una de las definiciones más sencillas de familia de polinomios ortogonales.

Definición: *Dada una sucesión de polinomios* $(P_n)_n$ *con grado* $P_n = n$, *diremos que es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida* μ *si se cumple que:* $\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}K_n$, n, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *donde* $\delta_{n,m}$ *es el símbolo de Kronecker* ($\delta_{n,m} = 1$ *si* $n = m$ *y 0 si* $n \neq m$).

Cuando la medida μ es positiva entonces, $K_n > 0$ para todo n, en cuyo caso se dice que la familia de polinomios es definida positiva, y a $d_n = \sqrt{K_n}$ se le denomina norma del polinomio P_n. Ejemplos de dichas familias son los conocidos polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite que introduciremos en el próximo apartado. Un caso de especial interés es cuando la medida es absolutamente continua, es decir, cuando existe una función continua ρ (no necesariamente positiva) tal que $d\mu(x) = \rho(x)dx$. En este caso la función ρ se denomina función peso.

Para mayor claridad vamos a dividir nuestra exposición en distintos apartados. Comenzaremos dando una breve introducción histórica para a continuación pasar a describir dos de los aspectos más llamativos relacionados con estos objetos matemáticos: el nacimiento de la teoría general y los teoremas de caracterización. También veremos dos grandes subclases de polinomios ortogonales: los $q-$polinomios y los polinomios matriciales. Culminaremos presentanto un breve apartado con algunas de las aplicaciones más significativas de los polinomios ortogonales así como la descripción de algunos textos clásicos sobre el tema.

2 Breve introducción histórica

2.1 Las familias clásicas

Los polinomios ortogonales corresponden a una pequeña parte de una gran familia de funciones especiales. Su historia se remonta al siglo XVIII y está estrechamente relacionada con la resolución de problemas de inmediata aplicación práctica. Uno de estos problemas estaba relacionado con la, por entonces reciente, teoría de la gravedad de Newton. Era bien conocido en el siglo XVIII que la fuerza de atracción entre dos cuerpos podía ser determinada a partir de la *función potencial* $V(x, y, z)$. Además, la misma era fácil de calcular conociendo la distribución de masa –digamos su densidad ρ– en el interior del cuerpo mediante la fórmula:

$$V(x,y,z) = \int\int\int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \tag{1}$$

donde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ y, por tanto, calculando la integral es posible encontrar la función V. Esto, sin embargo, es complicado ya que es necesario conocer a priori la distribución de masa de los cuerpos, la cual es, en general, desconocida. Si a esto unimos el hecho de que el cálculo directo de la integral (1) suele ser muy engorroso –pues se trata de una integral triple que hay que integrar en un volumen acotado pero con forma arbitraria–. Otra posibilidad era resolver la *ecuación del potencial* para puntos exteriores al cuerpo: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. Esta noción del potencial y su relación con las fuerzas fue tratado por distintos matemáticos de la talla de Daniel Bernoulli, Euler y Lagrange.

Adrien M. Legendre

Uno de los problemas más atractivos surgidos en esos años fue el de la atracción de un cuerpo por una esfera. Este problema interesó a Adrien–Marie Legendre (1752–1833). Éste, en un artículo de 1782 titulado *Sur l'attraction des sphéroïdes* (aunque publicado en 1785), probó un teorema muy interesante que establece que, si se conoce el valor de la fuerza de atracción de un cuerpo de revolución en un punto exterior situado en su eje, entonces se conoce en todo punto exterior. Así redujo el problema al estudio de la componente radial $P(r,\theta,0)$, cuya expresión es

$$P(r,\theta,0) = \int\int\int \frac{(r-r')\cos\gamma}{(r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2)^{\frac{3}{2}}} r'^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' dr' ,$$

donde $\cos\gamma = \cos\theta\, \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta'\, \cos\phi'$. Además probó que el integrando de ésta se podía expresar mediante una serie de potencias de $\frac{r'}{r}$ de la forma

$$\frac{1}{r^2}\left\{1 + 3P_2(\cos\gamma)\frac{r'^2}{r^2} + 5P_4(\cos\gamma)\frac{r'^4}{r^4} + \ldots\right\} .$$

Las funciones $P_2, P_4, ...$ son funciones racionales enteras –polinomios– de $\cos\gamma$, que hoy se conocen como polinomios de Legendre.

Dos años más tarde en 1784, Legendre dedujo algunas de las propiedades de las funciones $P_{2n}(x)$ como la ortogonalidad:

$$\int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)dx = \delta_{mn}\frac{1}{4m+1},$$

donde δ_{mn} es el símbolo de Kronecker. Había nacido la primera familia de polinomios ortogonales de la historia. En ese mismo trabajo, Legendre probó que los ceros de P_n eran reales, distintos entre sí, simétricos respecto al origen y menores, en valor absoluto que 1. En su cuarto artículo sobre el tema (escrito en 1790, aunque publicado tres años más tarde) introdujo los polinomios de grado impar, así como los hoy llamados polinomios asociados de Legendre $P_n^m(x)$ que se expresan a través de los polinomios P_n de la forma $P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$, y que son soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas tras aplicar el método de separación de variables.

Los polinomios de Legendre fueron considerados también por Pierre–Simon Laplace (1749–1827) quien en 1782 introdujo las funciones esféricas –que están directamente relacionadas con los polinomios de Legendre– y demostró varios resultados relativos a ellas. También es destacable otro resultado publicado en 1826 –*Mémoire sur l'attraction des spheroides* (Corresp. sur l'Ecole Royale Polytech. III, 361–385)– por el francés Olinde Rodrigues (1794–1851). Se trata de una fórmula para expresar los polinomios de Legendre, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, conocida hoy día como *fórmula de Rodrigues.*

Charles Hermite

La siguiente familia, en orden de aparición, fue la de los polinomios de Hermite H_n llamados así en honor a Charles Hermite (1822–1901) quien los estudió junto con el caso de varias variables en su ensayo *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (C. R. Acad. Sci. Paris, I) en 1864 (ver Œuvres, Gauthier-Villars, 1908, Tome II, 293–308), aunque al parecer el primero en considerarlos fue Laplace en 1810 en su *Mécanique céleste* donde los utilizó en problemas de teoría de las probabilidades. En este caso la ortogonalidad se expresa respecto a la función e^{-x^2} soportada en la recta real.

Luego el ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821–1894) realizó un estudio detallado de los mismos en 1859 –véase su artículo *Sur le développement des fonctions à une seule variable* (Oeuvres, Tom I, 501-508, Chelsea Pub. Co.)–.


Nicolás Laguerre

La próxima familia, conocida como polinomios de Laguerre L_n^α, deben su nombre a Edmond Nicolás Laguerre (1834–1886). Estos polinomios ya eran parcialmente conocidos por Niels Henrik Abel (1802–1829) y Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), aunque es nuevamente Chebyshev el primero en realizar un estudio detallado de los mismos en 1859 en el trabajo antes citado y que continuó el matemático ruso Konstantin Aleksandrovich Posse (1847–1928) en 1873. El caso general para $\alpha > -1$ fue estudiado por Yulian Vasilevich Sojotkin (1842–1827) en 1873, y no es hasta 1879 que Laguerre los introduce –caso particular $\alpha = 0$– cuando estudiaba la integral $\int_x^\infty e^{-x}x^{-1}dx$, mediante su desarrollo en fracciones continuas. En particular, Laguerre, en su memoria *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ (Bull. Soc. Math. France, VII, 1879) (ver Œvres, Gauthier-Villars, 1898, 428–437), prueba, entre otras cosas, la relación entre la integral $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$, y la fracción continua:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx = \cfrac{e^{-x}}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cdots}} = e^{-x}\frac{\phi_m(x)}{L_m(x)}\ ,$$

donde los denominadores $L_m(x)$ son las soluciones polinómicas de la ecuación diferencial de Laguerre $xy'' + (x+1)y' - my = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, que no son más que los hoy conocidos polinomios clásicos de Laguerre.

En este trabajo Laguerre también demostró que los ceros de los L_n eran reales y simples y además, probó la propiedad de ortogonalidad que satisfacían dichos polinomios:

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = \delta_{mn}(n!)^2.$$

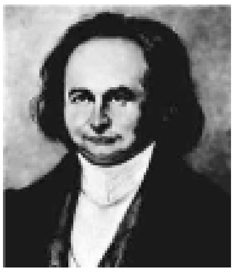
Años más tarde, en 1880, otro estudiante de Chebyshev, Nikolai Yakovlevich Sonin (1849–1915) continúa el estudio comenzado por Sojotkin sobre los polinomios con $\alpha > -1$. Es quizá por ello que en algunos sitios a los polinomios $L_n^\alpha(x)$ se les denomina polinomios de Laguerre–Sonin.

Antes de pasar a nuestra última familia *clásica* debemos hacer una breve incursión en la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. El estudio de las funciones especiales que surgen como soluciones en serie de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales fue desarrollado por Carl Friederich Gauss (1777–1855) en su famoso ensayo de 1813 *Disquisitiones generales circa seriem infinitam ...,* (Werke, II (1876), 123-162) sobre funciones hipergeométricas. –las cuales, a su vez, fueron introducidas por Leonhard Euler (1707–1783) en 1769–. En este ensayo Gauss no hizo uso de la ecuación diferencial que sí utilizó más tarde en material inédito –*Disquisitiones generales circa seriem infinitam...,* (Werke, III (1876), 207-229)–. Allí introdujo la ecuación diferencial $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$, cuya solución es

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma|x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1{\cdot}2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \,. \tag{2}$$

Carl F. Gauss

Gauss reconoció que, para ciertos valores de α, β y γ, la serie incluía, entre otras, casi todas las funciones elementales. Por ejemplo: $(1+z)^a = \mathrm{F}(-a,b;b|-z)$, $\log(1+z) = z\mathrm{F}(1,1;2|-z)$, etc. También Gauss estableció la convergencia de la serie e introdujo la notación $\mathrm{F}(a,b\,;c|x)$ que convive todavía con la notación moderna ${}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|x\right)$. Otro trabajo importante de Gauss fue su *Methodus nova integrali um valores per approximationen inveniendi*, (Werke III, 163–196) donde demuestra una fórmula de cuadraturas para el cálculo aproximado (y eficiente) de integrales que constituye una de las aplicaciones más importantes de los polinomios ortogonales. En concreto, Gauss "recuperó" los ceros de los polinomios de Legendre cuando buscaba dónde deberían estar los del polinomio de interpolación (de Lagrange) para obtener la mayor precisión posible al integrar entre 0 y 1, aunque no utilizó la ortogonalidad de los polinomios (hecho que probablemente desconocía) sino la función hipergeométrica ${}_2F_1$. La construcción de la fórmula de cuadraturas, tal y como la conocemos hoy usando la ortogonalidad, se debe a nuestro próximo personaje, Karl Gustav Jacob Jacobi –*Uever Gauss' neve Methode die werthe der Integrale näherungsweise zu finden* J. Reine Angew. Math., **1** (1826) 301-308– (1804–1851), otro de los grandes matemáticos del siglo XIX.


Karl Jacobi

Jacobi fue uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX y no sólo por sus aportaciones puramente teóricas, sino por su interés por resolver díficiles problemas de inmediata aplicación práctica –las famosas ecuaciones de Hamilton y Jacobi de la Mecánica, o sus trabajos en Mecánica de Fluidos, por ejemplo–. Es notable su célebre frase: "*El señor Fourier opina que la finalidad de las matemáticas consiste en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber sabido que la finalidad única de la ciencia es rendir honor al espíritu humano y que, por ello, una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo*, que quizá dió comienzo a esa absurda batalla de hoy día sobre la prioridad de la Matemática "platónica" basada en la idea de que *la Matemática debe ser independiente de toda utilidad inmediata* de la Matemática aplicada de Fourier.

Fiel a esa idea platónica, Jacobi introduce una nueva familia que generaliza los polinomios de Legendre a partir de la función hipergeométrica de Gauss, sin importarle sus posibles aplicaciones –recordemos que las familias anteriores habían aparecido de uno u otro modo relacionadas con aplicaciones físicas o matemáticas–. Así, en su artículo póstumo de 1859, *Untersunshungen über die Differentialgleichung de hypergeometrischen Reihe* (J. Reine Angew. Math. **56** 149–165), definió la familia de polinomios

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{array}\middle|\, \frac{1-x}{2}\right),$$

para la que demostró, entre otras, una propiedad de ortogonalidad en el intervalo $[-1,1]$ con respecto a la función peso $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, o sea,

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x)\,\rho(x)dx = \delta_{mn}\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!},$$

donde $\Gamma(x)$ denota la función Gamma de Euler. Es fácil comprobar (ver, por ejemplo, [12, 40, 42]) que tanto los polinomios de Laguerre como los de Hermite también se pueden escribir como una función hipergeométrica no de Gauss, sino de las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_p\mathrm{F}_q$.

Para culminar este apartado mencionaremos que una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss (2) fue realizada por Eduard Heine (1821–1881) en 1846–1847. En sus ensayos *Über die Reihe...* (J. Reine Angew. Math. **32**

(1846), 210-212) y *Untersuchungen über die Reihe...* (J. Reine Angew. Math. **34** (1847), 285-328), Heine introduce la serie

$$1+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q)(1-q^{\gamma})}z+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}z^{2}+\cdots,$$

que obviamente se transforma en (2) cuando $q \to 1$ y se conoce como la serie de Heine ${}_2\varphi_1$. Generalizaciones de la serie de Heine han servido para introducir y estudiar otras familias de polinomios: los q-polinomios a los que nos referiremos más adelante.

2.2 Las familias clásicas discretas

Además de las familias anteriores, conocidas como familias clásicas continuas (ya que satisfacen una ecuación diferencial), existen otras denominadas comúnmente familias "discretas" ya que su ortogonalidad viene dada mediante sumas, o bien son solución de una ecuación en diferencias. El caso más sencillo lo constituyen los polinomios de Chebyshev discretos introducidos por Chebyshev en 1858 en un breve trabajo titulado *Sur une nouvelle série* (Oeuvres, Tom I, 381–384, Chelsea Pub. Co.), y que luego amplió en su ensayo *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes* (Oeuvres, Tom II, 219–242, Chelsea Pub. Co.) de 1875, cuyo principal objetivo era construir buenas tablas de fuego para la artillería rusa. Siguiendo las ideas expuestas por Chebyshev, M. P. Kravchuk introdujo en 1929 una nueva familia: los polinomios de Kravchuk. La idea es la siguiente: interpolar una función cuando a los valores dados de la función se les asignan unos *pesos* de acuerdo con alguna ley determinada de probabilidad. En otras palabras, sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$ diferentes valores de la variable independiente de una función $f(x)$ y sean $y_0, y_1, ..., y_N$ los correspondientes valores de la función. Se quiere encontrar los coeficientes A_m del desarrollo $y \approx A_0P_0(x) + \ldots + A_kP_k(x)$, $(k < N)$ determinados por la condición

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i)[y_i - A_0P_0(x_i) - \cdots - A_kP_k(x_i)]^2 = \text{ mínimo}, \quad x_{i+1} = x_i + 1,$$

y donde P_m es un polinomio de grado m determinado por la condición de ortogonalidad y normalización (polinomios ortonormales)

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i)P_k(x_i)P_m(x_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & k < m \\ 1 & k = m \end{array} \right., \quad \rho(x_i) > 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i) = 1. \tag{3}$$

En el caso $\rho(x) = 1$, $x = 0, 1, \ldots N-1$ (distribución uniforme), este problema conduce a los polinomios discretos de Chebyshev, mientras que el caso $\rho(x) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-x)}{1\cdot 2\cdots x} p^x q^{n-1-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ (distribución binomial) conduce a los polinomios de Kravchuk. Otros casos corresponden a las distribuciones de Poisson $\rho(x) = \frac{\mu^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ (polinomios de Charlier), de Pascal $\rho(x) = \frac{\mu^x}{\Gamma(\gamma+x)x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ (polinomios de Meixner) y de Pólya o hipergeométrica $\rho(x) = \frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)}{\Gamma(N-x)x!}$, $x = 1, 2, \ldots, N-1$ (polinomios de Hahn, de los cuales los de Chebyshev son un caso particular). Estas cuatro familias constituyen lo que hoy conocemos como polinomios clásicos discretos.

Aunque el método descrito nos permite obtener todas las familias de polinomios discretos no todas se descubrieron de esa manera. Como ejemplo mostraremos cómo aparecieron los polinomios de Meixner a partir de las funciones generatrices, muy útiles en la teoría de probabilidades. Por *función generatriz* de la sucesión de polinomios $(P_n)_n$ se entiende una función $\mathcal{F}$ de dos variables que se puede representar mediante una serie formal infinita de la forma $\mathcal{F}(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) w^n$, donde la sucesión $(a_n)_n$ es conocida. J. Meixner, en un artículo publicado en el J. London Math. Soc. (vol **9** pp. 6-13) en 1934, consideró el problema de la determinación de todos los sistemas de polinomios ortogonales cuyas funciones generatrices tuvieran la forma $A(w)e^{xG(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) w^n$, $A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, y $G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n w^n$, donde $a_0 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ y f_n son polinomios de grado n con coeficientes principales y $(n!)^{-1} a_0 g_1^n$ –el coeficiente principal de un polinomio es el coeficiente de la mayor potencia del mismo, o sea, a_n si $p_n(x) = a_n x^n + \cdots$–. Meixner probó que a la sucesión $(P_n)_n$ le corresponde una función generatriz anterior si y sólo si los polinomios $(P_n)_n$ satisfacen una relación de recurrencia de la forma $P_{n+1}(x) = [x - (d\,n + f)]P_n(x) - n(g\,n + h)P_{n-1}(x)$, $n \neq 0$, donde $g \neq 0$, $g + h > 0$. Además demostró que existían cinco clases distintas de polinomios ortogonales con una función generatriz definida como antes, tres conocidas: los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre y los polinomios de Charlier –introducidos inicialmente por C.V.L. Charlier en 1905–1906 en su artículo en el Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. (vol. **2**(20) pag. 35) al estudiar ciertos problemas relacionados con mediciones astrónomicas–, y dos nuevas: los ya mencionados polinomios de Meixner y los polinomios de Meixner de segunda especie, ortogonales respecto a una función peso compleja.

3 Teoría general. Stieltjes y Chebyshev

Como hemos visto en la sección anterior, los polinomios ortogonales están estrechamente relacionados con las ecuaciones diferenciales y teoría de aproximación (en particular por su relación con las fracciones continuas). Esta conexión, y en especial la segunda, conducen al nacimiento, en la segunda mitad del siglo XIX, de la teoría general sobre polinomios ortogonales.

Veamos, en primer lugar, la relación entre los polinomios ortogonales y la teoría de las fracciones continuas. Comenzaremos con los trabajos de Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856–1894). Stieltjes, en su famoso ensayo *Recherches sur les fractions continues* (Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **8** (1894) 1-122, **9** (1895) 1-47) publicado póstumamente en dos partes en 1894 y 1895, desarrolló la teoría general de las S-fracciones definidas por

$$\cfrac{1}{c_1 z + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 z + \cdots \cfrac{1}{c_{2n} + \cfrac{1}{c_{2n+1} z + \ddots}}}}} ,$$

con la condición $c_k > 0$ ($k = 1, 2, ...$). Stieltjes probó que haciendo el cambio $a_0^2 = 1/c_1, b_0 = -1/(c_1 c_2)$ y $a_n^2 = 1/(c_{2n-1} c_{2n}^2 c_{2n+1})$, $b_n = -1/(c_{2n} c_{2n+1}) - 1/(c_{2n+1} c_{2n+2})$, $n = 1, 2, \ldots$, esta fracción se transformaba en una de las fracciones continuas de Jacobi y, además, que si $a_k = 0$, para todo $k \geq n+1$, entonces la expresión anterior se transformaba en una función racional $f_n(z)$ de la forma $f_n(z) = \frac{1}{a_1} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)}$, donde los polinomios denominadores $p_n(z)$ y los numeradores $p_{n-1}^{(1)}(z)$ son soluciones de la relación de recurrencia a tres términos

$$z r_n(z) = a_{n+1} r_{n+1}(z) + b_n r_n(z) + a_n r_{n-1}(z), \quad n \geq 0 ,$$

Thomas Stieltjes

con las condiciones iniciales:

$$r_{-1}(z) = 0, r_0(z) = 1 \quad \text{y} \quad r_{-1}(z) = 1, r_0(z) = 0,$$

respectivamente. A partir de la relación de recurrencia y para el caso de las J-fracciones, Stieltjes demostró que existía un funcional $\mathcal{L}$, lineal y positivo, tal que, $\mathcal{L}(p_n p_m) = 0$ para $n \neq m$, lo cual se puede interpretar como una versión primitiva del famoso teorema de Favard demostrado antes por O. Perron (1929), A. Wintner (1929) y M. H. Stone (1932), J. Sherman (1935) y I. P. Natanson (1935) indistintamente que asegura lo siguiente:

Teorema: (Favard 1935 [20]) *Supongamos que una sucesión de polinomios $(p_n)_n$ satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma:*

$$z p_n(z) = a_{n+1} p_{n+1}(z) + b_n p_n(z) + a_n p_{n-1}(z), \quad n \geq 0 ,$$

con $a_{k+1} > 0$ *y* $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ *y las condiciones iniciales* $p_{-1}(z) = 0$ *y* $p_0(z) = 1$. *Entonces, dichos polinomios* p_n *son ortonormales en* $L^2(\alpha)$, *siendo* α *cierta medida positiva sobre la recta real, o sea, existe una función real no decreciente* α *con un número infinito de puntos de crecimiento efectivo tal que, para todo* $n, m = 0, 1, 2, ...$ *se tiene que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) p_m(x) d\alpha(x) = \delta_{mn},$$

donde, como antes, δ_{mn} *es el símbolo de Kronecker.*

Además demostró que tales polinomios tenían ceros con unas propiedades muy interesantes: todos eran reales y simples, y los ceros de p_n entrelazaban con los ceros de $p_{n-1}^{(1)}$ y con los de p_{n-1}.

El *Recherches* de Stieltjes no sólo constituyó un trabajo esencial en la teoría de fraciones continuas sino que representó el primer trabajo dedicado a la naciente teoría general de polinomios ortogonales. Además de ello, en él Stieltjes introduce lo que se conoce actualmente como problema de momentos (dada una sucesión $(\mu_n)_n$, encontrar una medida $\mu(x)$ tal que $\mu_k = \int x^n d\mu(x)$) así como una extensión de la integral de Riemann –la integral de Riemann-Stieltjes– que le permitió un tratamiento más general de la ortogonalidad.

Pafnuti Chebyshev

Además de los trabajos de Stieltjes debemos destacar también los del matemático ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev. Chebyshev estudió un ingente número de problemas relacionados con los polinomios ortogonales – ya comentamos sus trabajos donde estudia los polinomios de Hermite y Laguerre y la introducción de la primera familia discreta–, llegando a ellos al tratar de resolver problemas aplicados. Por ejemplo, sus investigaciones en 1854 sobre algunos mecanismos que transformaban la energía de rotación en energía de traslación le llevaron al problema de mejor aproximación. Así, en su memoria *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (Oeuvres, Tomo I, Chelsea Pub. Co. 111-145), Chebyshev planteó el problema de encontrar la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua f, o sea, dada la función continua f definida en cierto intervalo (a, b), encontrar dentro del conjunto $\mathbb{P}_n$ de todos los polinomios de grado a lo sumo n el polinomio p_n de grado n tal que el máximo de $|f(x) - p_n(x)|$ sea mínimo en dicho intervalo. De esa manera introdujo los hoy conocidos *polinomios de Chebyshev de primera especie* $T_n(x)$ que son la solución al problema extremal de encontrar los polinomios mónicos $p_n(x) = x^n + \cdots$ tales que $\max |p_n(x)|$ en el intervalo $[-1, 1]$ sea mínimo, encontrando la solución

$$\min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [-1,1]} |p_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Estos polinomios forman un sistema ortogonal con respecto a la función peso $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ y coinciden con los polinomios de Jacobi $P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

Debemos destacar que Chebyshev obtuvo numerosos resultados sobre los polinomios ortogonales. En 1859, desde diferentes consideraciones, estudió otros sistemas de polinomios ortogonales como los de Hermite y Laguerre. Sin embargo, él no los introdujo a partir de la relación de ortogonalidad sino a partir del desarrollo en serie de potencias para las fracciones continuas de la forma $\int_a^b \frac{\rho(x)dx}{z-x}$. Chebyshev también estudió el problema de momentos y fórmulas de cuadratura e introdujo la primera familia de polinomios *discretos*: los ya mencionados polinomios discretos de Chebyshev.

Por estas razones, tanto a Stieltjes como a Chebyshev se les considera los padres de la teoría de polinomios ortogonales que estaba por llegar a principios del siglo XX, y que se consolidó en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* de Gabor Szegő [42]. En esta excelente monografía, aparte de presentar una teoría general sobre polinomios ortogonales, se incluyen gran cantidad de resultados sobre las familias clásicas y se inicia la teoría de Szegő de polinomios sobre la circunferencia unidad.

4 Los teoremas de caracterización

Consideremos ahora uno de los problemas más importantes en la teoría de los polinomios ortogonales: los teoremas que nos indican cuáles son las principales propiedades que los caracterizan. En el apartado anterior nos encontramos con uno de los resultados más generales: El Teorema de Favard. Aquí trataremos los teoremas de caracterización relacionados con las familias clásicas.

La primera caracterización que consideraremos fue obtenida por S. Bochner [13] quien probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían una ecuación diferencial del tipo:

$$\sigma(x) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) + \tau(x) \frac{d}{dx} P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0\,, \tag{4}$$

donde σ y τ son polinomios de grado a lo sumo 2 y exactamente 1, respectivamente, y λ_n es una constante, eran los polinomios clásicos, o sea, los polinomios de Jacobi ($\sigma(x) = (1-x^2)$), Laguerre ($\sigma(x) = x$) y Hermite ($\sigma(x) = 1$) –estas tres familias de polinomios son ortogonales con respecto a una función peso definida en $\mathbb{R}$ (ver Tabla 1)– y, aparentemente, una nueva familia cuando $\sigma(x) = x^2$. Estos últimos, denominados polinomios de Bessel, a diferencia de las tres familias anteriores no corresponden a un caso definido positivo, es decir la medida de ortogonalidad no es positiva. Aunque estos polinomios habían sido considerados por muchos matemáticos (e.g. Burchnall y Chaundy en 1931 [14]), fueron H. L. Krall y O. Frink quienes los presentaron formalmente en 1949 en su artículo *A new class of orthogonal polynomials* (Trans. Amer. Math. Soc. **65**) [33] y les dieron el nombre por su relación con las funciones de Bessel. En ese magnífico trabajo estudiaron un sinnúmero de propiedades y probaron la ortogonalidad respecto a una función peso en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Sin embargo no encontraron ninguna función "peso"(necesariamente signada) sobre la recta real. El problema fue finalmente resuelto por A. Durán en 1990 en [17] donde se desarrolla un método general para encontrar explícitamente funciones muy regulares con momentos dados; como aplicación encontró las primeras medidas signadas sobre $\mathbb{R}$ y $(0, +\infty)$ respecto a las cuales los polinomios de Bessel eran ortogonales.

Tabla 1: Los polinomios ortogonales clásicos.

SPO	función P_n $\sigma(x)$	función peso	Intervalo de ortogonalidad
Laguerre	$\sigma(x) = x$	$x^\alpha e^{-x}$	$[0, \infty)$
Hermite	$\sigma(x) = 1$	e^{-x^2}	$(-\infty, \infty)$
Jacobi	$\sigma(x) = 1 - x^2$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$[-1, 1]$
Bessel	$\sigma(x) = x^2$	$2^{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{\Gamma(m+\alpha+1) z^m}$	$\mathbb{T}$

Otra caracterización, la más antigua, se debe a Sonin quien, en 1887, probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían la propiedad de que sus derivadas P_n' también eran ortogonales eran los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. Esta propiedad fue redescubierta W. Hahn en 1935 quien también recuperó los polinomios de Bessel no considerados por Sonin –el caso Bessel también fue estudiado por H.L.Krall [31]–. Dos años más tarde, el mismo Hahn probó un resultado más general que contenía al anterior: si la sucesión de polinomios ortogonales $(P_n)_n$ era tal que la sucesión de sus $k-$ésimas derivadas $(P_n^{(k)})_n$, para cierto $k \in \mathbb{N}$, también era ortogonal, entonces $(P_n)_n$ era alguna de las sucesiones de polinomios ortogonales clásicos.

La tercera caracterización fue propuesta por F. Tricomi [43] quien conjeturó y parcialmente demostró (para más detalle ver [1, 12]) que sólo los polinomios ortogonales clásicos se podían expresar en términos de una fórmula tipo

Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\rho(x)\sigma^n(x)\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots , \tag{5}$$

donde ρ es una función no negativa en cierto intervalo y σ es un polinomio independiente de n. La demostración rigurosa de este resultado fue dada por Cryer en 1969 [15], aunque ya E. H. Hildebrandt en 1931 [27] tenía varios resultados en esa dirección. Otra caracterización consiste en que los únicos polinomios ortogonales respecto a una función peso ρ solución de la ecuación diferencial de Pearson

$$[\rho(x)\sigma(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad \text{grado } \sigma \leq 2, \ \text{grado } \tau = 1 ,$$

eran los clásicos (Jacobi, Laguerre y Hermite), que fue probada por Hildebrandt en 1931 [27]. El caso discreto fue considerado por primera vez también por E. H. Hildebrandt [27] en 1931 y fue resuelto completamente por P. Lesky [34] en 1962. Precisamente esta última caracterización traducida al espacio dual de los funcionales permitió a F. Marcellán y sus colaboradores obtener una forma unificada de probar todas las caracterizaciones así como varias completamente nuevas, no sólo para los polinomios clásicos [36], sino para el caso "discreto" [21] (Hahn, Meixner, etc.). Una revisión de los teoremas de caracterización la podemos encontrar en diversos trabajos, por ejemplo, en [1, 10, 12, 36]).

Una extensión de los polinomios clásicos se debe a H.L. Krall quien, en 1938, estudió el problema de la determinación de soluciones polinómicas de una ecuación diferencial de orden $2n$ ($n = 1$ conduce a los polinomios clásicos como ya vimos), encontrando condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las mismas. Dos años mas tarde, en 1940, clasificó todas las ecuaciones de cuarto orden con soluciones polinómicas [32]. En 1978, su hijo A.M. Krall [32] estudió estos nuevos polinomios (no clásicos) y los denominó polinomios tipo-Legendre, tipo-Laguerre y tipo-Jacobi (ver tabla 2). Nótese que los polinomios obtenidos son ortogonales respecto a medidas clásicas "perturbadas" mediante una o dos masas de Dirac $M\delta(x)$, siendo $\delta(x)$ la función δ de Dirac (más detalles se pueden encontrar en [4, 5]).

Este problema inició las investigaciones en un nuevo campo de las funciones especiales: los polinomios semiclásicos [25]. La generalización de este problema al caso de los polinomios "discretos" desembocó en una conjetura propuesta por R. Askey en 1990 y resuelta independientemente por H. Bavinck y H. van Haeringen en 1994 y por R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán un año más tarde [3]. Un estudio más general de este tipo de polinomios así como las relaciones límites entre los distintos polinomios de tipo Krall (tanto continuos como discretos) fue hecho en [4]. Otra generalización de los polinomios ortogonales

Tabla 2: Los Polinomios de Krall.

P_n	Medida	Intervalo de ortogonalidad
tipo Laguerre	$e^{-x} \quad + M\delta(x)$	$[0, \infty)$
tipo Legendre	$\frac{\alpha}{2} \; + \frac{\delta(x-1)}{2} + \frac{\delta(x+1)}{2}$	$[-1, 1]$
tipo Jacobi	$(1-x)^{\alpha} \quad + M\delta(x)$	$[0, 1]$

clásicos son los polinomios ortogonales respecto a un producto escalar de tipo Sobolev introducidos por D. C. Lewis (ver e.g. [35]).

5 Los $q-$polinomios

Además de la extensión de Krall para los polinomios clásicos hay otras posibilidades. Una de ellas fue explotada por W. Hahn en 1949 en su ensayo [24]. Allí, Hahn propuso el siguiente problema: *Sea* Θ_q *el operador lineal*

$$\Theta_{q,w} f(x) = \frac{f(qx+w) - f(x)}{(q-1)x + w}.$$

Encontrar todas las sucesiones de polinomios ortogonales (P_n) *tales que:*

1. $(\Theta_{q,w} P_n)_n$ *sea también una sucesión de polinomios ortogonales;*

2. $\Theta_{q,w} P_n(x)$ *satisfaga una ecuación de la forma:*

$$\sigma(x)\Theta_{q,w}^2 P_n(x) + \tau(x)\Theta_{q,w} P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0, \qquad \forall n \geq 0,$$

   donde grado $\sigma \leq 2$ *y grado* $\tau = 1$.

3. $\rho(x)P_n(x) = \Theta_{q,w}^n [X_0(x) \cdot X_1(x) \cdots X_n(x)\rho(x)]$*, siendo* X_0 *un polinomio independiente de* n*,* $X_{i+1}(x) = X_i(qx+w)$ *y* ρ *independiente de* n*.*

4. *Los momentos* μ_n *asociados a la sucesión* $(P_n)_n$*, satisfacen una relación de recurrencia de la forma* $\mu_n = \frac{a+bq^n}{c+dq^n}\mu_{n-1}$*,* $\quad ad - bc \neq 0$*.*

En ese mismo trabajo, Hahn da la respuesta para el funcional $\Theta_q \equiv \Theta_{q,w}$ correspondiente al caso $q \in (0,1)$ y $w = 0$. El caso $q = 1$ y $w = 1$ conduce directamente a los polinomios discretos antes mencionados y fue resuelto por P. Lesky en 1962. El caso $w = 0$ y $q \to 1$ obviamente se transforma en el caso clásico estudiado por el mismo Hahn en 1935-1939. Aunque su artículo de 1949 es obscuro y prácticamente no contiene ninguna demostración, en él Hahn encuentra la familia más general de polinomios que pertenecían a la clase antes mencionada ($w = 0$), que son los hoy conocidos q-polinomios grandes de Jacobi y, en particular, los $q-$polinomios que llevan su nombre: $q-$polinomios de Hahn y que constituyen una familia finita.

Un hecho sorprendente fue que, aparte de las tres caracterizaciones anteriores de Hanh, no se conocía ninguna otra caracterización de estas familias. Este lapso fue cubierto recientemente por J. C. Medem en un trabajo en conjunto con R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán [38], donde se prueban además de las cuatro caracterizaciones las siguientes:

Teorema: *Sea $\mathcal{L}$ un funcional regular y $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales asociada y sea $q \in \mathbb{C}\backslash\{q : |q| = 1\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) $\mathcal{L}$ satisface la ecuación distribucional $\Theta_q(\phi\mathcal{L}) = \psi\mathcal{L}$, siendo ϕ y ψ polinomios con grado$(\phi) \leq 2$ y grado$(\psi) = 1$,

(b) Existen dos polinomios $\phi^{(k)}$ y $\psi^{(k)}$ de grados a lo más 2 y exactamente 1, respectivamente, y una sucesión de constantes $\widehat{\lambda}_n^{(k)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $n \geq 1$, $\widehat{\lambda}_0^{(k)} = 0$, tal que $\phi^{(k)}\Theta_q\Theta_{q^{-1}}Q_n^{(k)} + \psi^{(k)}\Theta_{q^{-1}}Q_n^{(k)} = \widehat{\lambda}_n^{(k)}Q_n^{(k)}$, con $Q_n^{(k)} = C_{nk}\Theta_q^k P_{n+k}$ ($C_{n,k}$ es tal que $Q_n^{(k)} = x^n + \cdots$),

(c) Existen dos polinomios ϕ y ϕ^* de grado a lo más 2, y seis sucesiones $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(a_n^\star)_n$, $(b_n^\star)_n$, $(c_n^\star)_n$, $c_n c_n^\star \neq 0$, tales que $\phi\Theta P_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ y $\phi^*\Theta_{q^{-1}}P_n = a_n^\star P_{n+1} + b_n^\star P_n + c_n^\star P_{n-1}$,

(d) Existen tres sucesiones $(e_n)_{n\geq 0}, (h_n)_{n\geq 0}$ tales que $P_n = Q_n + e_n Q_{n-1} + h_n Q_{n-2}$, con $Q_n = \frac{q-1}{q^{n+1}-1}\Theta_q P_{n+1}$.

Finalmente, mencionaremos que J.C. Medem en 1996 dio otras caracterizaciones para una clase más general: los polinomios $q-$semiclásicos, basando sus demostraciones en el marco de los funcionales lineales siguiendo una idea iniciada por el P. Maroni en los 80 para el caso "continuo".

Antes de continuar, debemos destacar que aunque los $q-$polinomios eran conocidos a finales del siglo XIX –el primer ejemplo de $q-$polinomios se debe A. A. Markov, el famoso estudiante de Chebyshev, que en 1884 consideró un caso particular de los que se conocen como polinomios de $q-$Hahn– es justamente a partir del trabajo de Hahn en 1949, mencionado anteriormente, cuando su estudio recobra fuerza debido, fundamentalmente, a su conexión con la teoría de funciones Theta, teoría de particiones, representación de $q-$álgebras y grupos cuánticos, entre otras involucrándonse un sinnúmero de matemáticos de los que se puede destacar a R. Askey, J. A. Wilson, T. H. Koornwinder, D. Stanton, M. E. H. Ismail, T. S. Chihara, W. A. Al-Salam, A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, N. M. Atakishiyev, S. K. Suslov, entre otros (ver, por ejemplo, [8, 9, 10, 22, 28, 29, 39]).

Existen dos formas generales de tratar a estas familias. La primera, desarrollada en los años 80 por los estadounidenses G. E. Andrews y R. Askey y sus colaboradores, se basa en las series hipergeométricas básicas ${}_4\varphi_3$ –las "q" generalizaciones de la serie de Gauss de las que ya hemos visto un ejemplo debido a Heine–, definidas en general por

$$ {}_r\varphi_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, ..., a_r \\ b_1, b_2, ..., b_p \end{matrix} \; q\,;\, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdots (b_p;q)_k} \frac{z^k}{(q;q)_k} \left[(-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)} \right]^{p-r+1}, $$

con $(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$, $0 < q < 1$. En particular, descubrieron que todas las familias de polinomios ortogonales clásicos podían obtenerse como casos límites de los polinomios de Askey-Wilson definidos por

$$ p_n(x;a,b,c,d) = {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, ae^{-i\theta}, ae^{i\theta} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \;\middle|\; q;q \right), \quad x = \cos\theta, $$

apareciendo en 1994 [28] la $q-$Tabla de Askey que clasificaba (presuntamente) a todas las demás familias de $q-$polinomios.

Algo más tarde, en 1983, los rusos A. F. Nikiforov y A. V. Uvarov proponen una aproximación diferente (y más general) que consiste en considerar los $q-$polinomios como soluciones polinómicas –en $x(s)$– de una ecuación en diferencias:

$$ \begin{gathered} \tilde{\sigma}(x(s)) \frac{\triangle}{\triangle x(s-\frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2} \left[\frac{\triangle y(s)}{\triangle x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(s) = 0, \\ \nabla f(s) = f(s) - f(s-1), \qquad \triangle f(s) = f(s+1) - f(s), \end{gathered} \tag{6} $$

con $x(s) = c_1 q^s + c_2(q) q^{-s} + c_3(q) = c_1(q^s + q^{-s-\mu}) + c_3$, donde $q \in \mathbb{C}$, c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q, pero son independientes de s; $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1 y λ es una constante. La ecuación anterior se denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y aproxima a la ecuación (4) en la *red no uniforme* $x(s)$. Una propiedad inmediata de esta aproximación es precisamente que las soluciones de (6) se pueden expresar como series básicas, es decir

$$ P_n(s)_q = {}_4\varphi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s_1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{matrix} ; q\,,\, q \right), \tag{7} $$

En particular, los polinomios de Askey-Wilson son una solución de la ecuación anterior cuando $x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s}) \equiv x$, y $q^{s_1} = a$, $q^{s_2} = b$, $q^{s_3} = c$, $q^{s_4} = d$. Los trabajos de estos dos autores culmina con una clasificación diferente de los $q-$polinomios, basada en la ecuación (6), aparecida en 1991 [41].

Aparentemente, la clasificación de los $q-$polinomios según la $q-$tabla de Askey contenía todas las familias posibles de $q-$polinomios. No obstante quedaba pendiente la cuestión de si realmente la ecuación de tipo hipergeométrico (6) tenía como solución a todas las familias conocidas de $q-$polinomios. Esta cuestión fue parcialmente resuelta en [6], donde se establece un hecho sorprendente: incluso dentro de la clase de Hahn, lo que equivale a trabajar en la red exponencial lineal $x(s) = c_1 q^s + c_3$, la clasificación de Nikiforov-Uvarov contiene dos familias completamente nuevas y no contenidas en el $q-$esquema de Askey. Ellas son:

$$j_n(x;a,b) = {}_2\phi_0\left(\begin{array}{c} q^{-n}, aq^n \\ - \end{array} \middle| q; \frac{x}{ab}\right), \quad \text{y} \quad l_n(x;a) = {}_2\phi_0\left(\begin{array}{c} q^{-n}, 0 \\ - \end{array} \middle| q; -\frac{x}{a}\right).$$

Actualmente continúa abierto el problema de caracterización en la red general conociéndose sólo algunos resultados parciales (aunque muy interesantes) debidos a A. Grunbaum y L. Haine usando técnicas biespectrales [23]. También está abierto el problema de clasificación completa de todas las familias ortogonales en la red general $x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q)$.

6 Polinomios matriciales

Antes de pasar a ver algunas de las principales aplicaciones de los polinomios ortogonales vamos a comentar brevemente una de las extensiones más importantes y de mayor actualidad de la teoría de polinomios ortogonales: los polinomios ortogonales matriciales. Estos objetos matemáticos son polinomios cuyos coeficientes son matrices cuadradas e.g. $N \times N$, o equivalentemente, son matrices cuyas entradas son polinomios, i.e., $P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots A_1 x + A_0$ con $A_k \in \mathbb{R}^{N,N}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. La ortogonalidad viene dada en este caso por una matriz de medidas $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^N$ definida positiva (es decir, tal que para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, la matriz númerica $\mu(A) = (\mu_{i,j}(A))_{i,j=1}^N$ es semidefinida positiva) con momentos $\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t) < +\infty$, $\forall\, n \geq 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x) d\mu(x) P_m(x) = \delta_{n,m}\Gamma_n, \quad n, m \geq 0, \tag{8}$$

siendo Γ_n una matriz definida positiva. Como en el caso escalar, la sucesión de polinomios matriciales ortogonales $(P_n)_n$ satisface una fórmula de recurrencia de tres términos:

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_n(t)P_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0,$$

donde $P_{-1}(t)$ es la matriz nula 0_n y $P_0(t) = I_n$ es la matriz unidad I_n.

La ortogonalidad matricial ha sido estudiada de manera esporádica durante los últimos cincuenta años. Por ejemplo, M. Krein considera el problema de momentos matricial y los correspondientes polinomios matriciales en los años 40. En los 60 se interesan por ellos F. Atkinson (1968) y Yu. M. Berezansky (1965) en sus monografías *Discrete and continuous boundary problems* y *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, respectivamente. En los 80, J.S. Geronimo los usa en la teoría de dispersión (scattering theory), S. Basu y N. K. Bose (1983) en modelos de redes (networks), etc. No obstante, faltaba motivación para desarrollar un estudio sistemático de la teoría; esta motivación ha aparecido al principio de esta década a partir de varios trabajos de A. Durán [18, 19] donde éste muestra cómo interpretar matricialmente la ortogonalidad escalar, convirtiendo así la teoría de polinomios matriciales ortogonales en una herramienta para resolver problemas de la teoría escalar clásica.

En particular, Durán prueba, usando las medidas matriciales, que

$$\frac{1}{\sum_n |p_n'(0)|^2} = \sup\{w_{22}(\{0\}) - \frac{|w_{12}|^2(\{0\})}{w_{1,1}(\{0\})} : W\},$$

donde $W = (w_{i,j})_{i,j=1}^2$ es el conjunto de todas las medidas matriciales asociadas a la sucesión $(p_n)_n$, problema éste que permanecía abierto desde principios del siglo XX, porque para darle respuesta era necesario acudir a la ortogonalidad matricial. Este uso de la ortogonalidad matricial para resolver problemas de la ortogonalidad escalar clásica ha generado el interés necesario para llevar a cabo un estudio sistématico de la ortogonalidad matricial, situándola, además, como una de las áreas más prometedoras dentro de la teoría de polinomios ortogonales.

7 Aplicaciones

Describamos a continuación algunas de las aplicaciones de los polinomios ortogonales.

Equilibrio electrostático. Una aplicación muy interesante de los polinomios ortogonales clásicos de Jacobi, Laguerre y Hermite, fue descubierta por Stieltjes y está estrechamente ligada al problema del equilibrio electrostático (ver e.g. [42] y las referencias del mismo). Este problema se divide en dos: cuando el intervalo donde se encuentran las cargas es un intervalo acotado y cuando no lo es.

I. Caso de un sistema de cargas en un intervalo acotado. Supongamos que tenemos n cargas unitarias $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distribuidas en $[-1, 1]$ y colocamos dos cargas extra en los extremos: una carga $p > 0$ en $x = 1$ y otra $q > 0$ en $x = -1$. Supongamos que la energía de interacción entre las cargas está regida por una ley logarítmica (electrostática bidimensional) expresada mediante la fórmula

$$L = -\log D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + p \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{|1 - x_i|} + q \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{|1 + x_i|},$$

donde el *discriminante* $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ viene dado por

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Teorema: (Stieltjes 1885–1889) *La energía alcanzará un mínimo cuando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean los ceros del polinomio de Jacobi $P_n^{(2p-1, 2q-1)}(x)$.*

Este teorema nos da la interpretación electrostática de los ceros de los polinomios para un intervalo acotado. Notemos que, al considerar un sistema de cargas unitarias del mismo signo, éstas se repelerán. En el caso de un intervalo acotado, las cargas, al estar ligadas a él, se mantendrán en su interior. No ocurre igual en el caso de que el intervalo no sea acotado, pues las cargas se pueden ir al infinito (como de hecho ocurriría si se dejaran libres). Por ello, en el caso de intervalos no acotados se tienen que introducir condiciones adicionales que aseguren que las cargas no se alejan al infinito.

II. Caso de un sistema de cargas en un intervalo no acotado. Supongamos que tenemos n cargas unitarias distribuidas en el intervalo $[0, \infty)$ y colocamos una carga extra $p > 0$ en el origen $x = 0$. Para impedir que las cargas se puedan ir al infinito exigiremos que se cumpla una condición extra para el *centroide* de las cargas: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leq K$, con K cierto número positivo. En este caso la energía vendrá dada por la expresión

$$L = -\log D_n(x_1, \ldots, x_n) + p \sum_{k=1}^{n} \log \frac{1}{x_k}.$$

Teorema: *La expresión anterior junto con la condición para el centroide tiene un mínimo cuando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los ceros del polinomio de Laguerre $L_n^{(2p-1)}(c_n x)$, donde $c_n = (n + 2p - 1)/K$.*

Si ahora colocamos las n cargas unitarias distribuidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$ e imponemos la condición: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq L$, $L > 0$, entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema: *La expresión* $-\log D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *con la condición sobre el momento de inercia tendrá un mínimo cuando* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *son los ceros del polinomio de Hermite* $H_n(d_n x)$*, donde* $d_n = \sqrt{(n-1)/2L}$.

Un hecho importante relacionado con esta interpretación electroestática es el siguiente: Si consideramos que la carga total en el caso del intervalo $[-1, 1]$ es 1, y hacemos tender el número de dichas cargas a infinito observamos que las cargas p y q de los extremos es despreciable con respecto a la carga interior y, por tanto, la distribución asintótica de los ceros de los polinomios de Jacobi es independiente de los parámetros α y β de los mismos, luego podemos obtenerla a partir de cualquiera de sus "subfamilias". Así, por ejemplo, si tomamos los polinomios de Chebyshev de primera especie ($\alpha = \beta = 1/2$) cuyos ceros son $x_j = \cos(2j-1)\pi/(2n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tendremos para el número de ceros $N_n(a, b)$ en el intervalo $[a, b]$ la siguiente estimación:

$$\frac{N_n(a,b)}{2n} = \sum_{a \leq \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n} \leq b} \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + o(1),$$

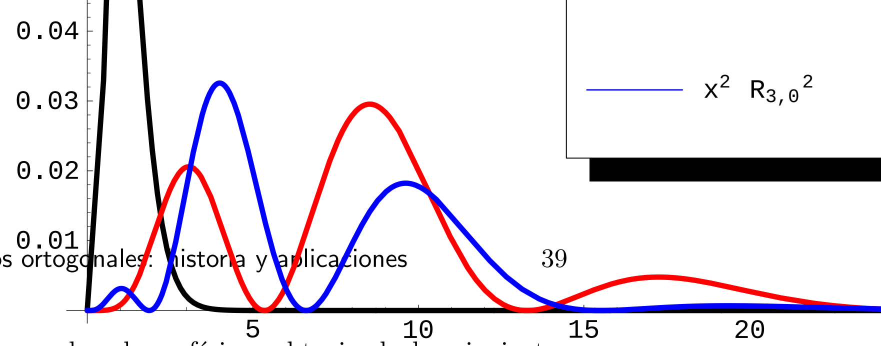
conocida como la distribución arcseno y que resulta característica para toda una amplísima clase de polinomios ortogonales $[-1, 1]$, como, por ejemplo, la conocida clase de Nevai. En realidad, este hecho no es una casualidad sino que es una consecuencia de la estrecha interrelación que existe entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría del potencial y es precisamente una de las principales líneas de investigación del momento.

Mécanica cuántica. En otra dirección, precisamente la ecuación diferencial que las familias clásicas (y otras) satisfacen da pie a una de sus principales aplicaciones: su utilización para describir los más importantes modelos cuánticos tanto relativistas como no relativistas. Por citar algunos mencionaremos el oscilador cuántico (polinomios de Hermite o Laguerre y Jacobi), el átomo de hidrógeno y la interación entre los piones y el núcleo atómico (polinomios de Laguerre y Jacobi), etc.

Como ejemplo veamos las ecuaciones estacionarias de Schrödinger para el átomo de hidrógeno (caso no relativista) y de Klein-Gordon para un pión (caso relativista) en un potencial de Coulomb, i.e.,

$$\Delta\psi_S + 2\left(E_S + \frac{1}{r}\right)\psi_S = 0, \qquad \Delta\psi_{KG} + \left[\left(E_{KG} + \frac{\mu}{r}\right)^2 - 1\right]\psi_{KG} = 0,$$

respectivamente, donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^3$, E representa la energía del sistema y ψ es la función de onda que caracteriza por completo al sistema. Utilizando que el potencial es central, y por tanto tiene simetría esférica,



podemos separar variables en coordenadas esféricas obteniendo las siguientes soluciones

$$\psi_S(r,\theta,\phi) = N_{n,l} e^{-\left(\frac{2r}{n+l+1}\right)} \left(\frac{2r}{n+l+1}\right)^{l+1} L_n^{2l+1}\left(\frac{2r}{n+l+1}\right) Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

con $N_{n,l} = \sqrt{\dfrac{n!}{(n+l+1)^2(n+2l+1)!}}$ para la primera y, para la segunda,

$$\psi_{KG} = \sqrt{\frac{an!}{(n+\nu+1)(n+2\nu+1)!}} e^{-2ar}\,(2ar)^{\nu+1}\, L_n^{2\nu+1}\,(2ar)\, Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

con $\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - \mu^2}$, $a = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}\right)^2}$ y L_n^α los polinomios clásicos de Laguerre. En ambos casos, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, $m = -l, -l+1, \ldots, l$ e $Y_{l,m}$ representa a los armónicos esféricos que son proporcionales a los polinomios de Jacobi $P_{l-m}^{m,m}(\cos\theta)$. Finalmente, para ambos sistemas se obtienen los siguientes valores de la energía E:

$$E_S = -\frac{1}{2(n+l+1)^2}, \qquad E_{KG} = 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}.$$

En ambos casos se tiene un espectro discreto de energía que concuerda muy bien con los hechos experimentales. Destaquemos que en el caso del átomo de hidrógeno estos valores explicaron perfectamente la llamada serie de Balmer, físico suizo que en 1885 descubrió que las frecuencias ω de las líneas del espectro de rayas del átomo de hidrógeno se expresaba por la fórmula $\omega = R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{k^2}\right)$, $k = 3, 4, \ldots$ y R cierta constante. Precisamente los intentos de explicar este fenómeno dieron un impulso definitivo a la aparición de la teoría cuántica. (Bohr (1913), Pauli (1929) y Schrödinger (1929)).

Estado fundamental (negro) y exitado (tonos grises) del átomo de Hidrógeno

Otra aplicación importante de los polinomios ortogonales relacionada con lo anterior es en el cálculo de las entropías de sistemas cuánticos, en particular para los osciladores y átomos de hidrógeno. Esta cantidad viene definida por integrales de la forma

$$E_\beta(p_n) = -\int x^\beta p_n^2(x)\,\ln\left(p_n^2(x)\right)\rho(x)dx\ ,$$

donde p_n son polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ ($d\mu(x) = \rho(x)dx$), y $\beta \in \mathbb{R}$. En general, el valor para la entropía no se conoce para casi ninguna familia de polinomios (exceptuando los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie), y muchos de los resultados son resultados asintóticos. Gran parte de esta teoría está siendo desarrollada por J. S. Dehesa y sus colaboradores (ver el magnífico *survey* sobre este tema [16]).

Teoría de representación de $q-$álgebras. Otro ejemplo de aplicación de los polinomios ortogonales está relacionado con la teoría de representación de $q-$álgebras. A modo de ejemplo vamos a describir la conexión entre el $q-$álgebra $SU_q(2)$ y los polinomios duales de Hahn definidos por [7]

$$W_n^{(c)}(x(s),a,b)_q = {}_3\varphi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{a+c+1} \end{array}; q, q\right). \tag{9}$$

El álgebra $SU_q(2)$ está generada por los operadores J_+, J_-, J_0, que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{gathered}[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm,\ \ [J_+, J_-] = [2J_0]_q = \frac{sh(2J_0\gamma)}{sh\gamma},\quad q = e^\gamma, \\ (J_\pm)^\dagger = J_\mp,\ \ (J_0)^\dagger = J_0,\end{gathered} \tag{10}$$

donde $[A,B] = AB - BA$, $[n]_q = (q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}})/(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$ son los "q-números" y $[2J_0]_q$ se entiende como el correspondiente desarrollo formal en serie de potencias. Un problema de gran interés es determinar los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) $\langle J_1M_1J_2M_2|JM\rangle_q$, definidos mediante el desarrollo

$$|J_1J_2, JM\rangle_q = \sum_{M_1,M_2}\langle J_1M_1J_2M_2|JM\rangle_q|J_1M_1\rangle_q|J_2M_2\rangle_q\,, \tag{11}$$

siendo $|J_1J_2, JM\rangle_q$, $|J_1M_1\rangle_q$ y $|J_2M_2\rangle_q$ los vectores de la base de las representaciones irreducibles de $SU_q(2)$ D^J, D^{J_1} y D^{J_2}, respectivamente. Utilizando las propiedades de estos coeficientes (ver e.g. [7, 45]) es fácil comprobar que se tiene la igualdad

$$(-1)^{J_1+J_2-J}\langle J_1M_1J_2M_2|JM\rangle_q = \sqrt{\frac{\rho(s)\bigtriangleup x(s-1/2)}{d_n^2}}W_n^{(c)}(s,a,b)_{q^{-1}}\,.$$

$$|J_1 - J_2| < M,\ n = J_2 - M_2,\ s = J,\ a = M,\ c = J_1 - J_2,\ b = J_1 + J_2 + 1,$$

donde $\rho(x)$ y d_n denotan las funciones peso y la norma de los q-polinomios duales de Hahn, $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_{q^{-1}}$, y $\triangle$ es el operador definido en (6). Las relaciones del tipo anterior son de gran importancia, pues permiten obtener una gran cantidad de propiedades de los CCG a partir de los polinomios $W_n^{(c)}(x(s), a, b)_q$ y viceversa. En particular, en [7], explotando la relación anterior, se encontró una expresión desconocida hasta el momento, que identificaba a los $q-$polinomios duales de Hahn con los $q-$polinomios de Hahn.

Antes de concluir esta sección debemos destacar que también los polinomios "discretos" están intrínsecamente ligados con procesos cuánticos, particularmente los polinomios de Hahn, Meixner, Meixner-Pollaczek y Kravchuk. También es importante destacar el papel relevante de los polinomios ortogonales en la teoría de representación de grupos [39, Capítulo 5], (en particular los grupos $O(3)$, $SU(2)$ y $SU(1,1)$; en teoría de compresión de la información [39, Sección 4.1]; fórmulas de cuadratura [39, Sección 4.1]; para el reconocimiento de voz [11]; etc.

Apéndice: Un comentario acerca de la literatura.

Existen un sinfín de publicaciones dedicadas a los polinomios ortogonales (por ejemplo en la bibliografía recopilada J. A. Shohat, E. Hille y J. L. Walsh, – *A bibliography on orthogonal polynomials.* Bulletin of the National Research Council.(U.S.A.) Number 103, National Academy of Sciences, Washington D.C., 1940– hasta 1940 habían aparecido 1952 trabajos de 643 autores). Un simple vistazo a las bases de datos disponibles nos dan estadísticas mucho mayores.

Hoy en día tenemos excelentes monografías dedicadas al estudio de los polinomios ortogonales. Vamos a incluir aqui una breve lista de las mismas –sin pretender que ésta sea completa–.

- *Orthogonal Polynomials* por G. Szegö [42], que es la primera monografía dedicada por entero a este tema y que recoge las principales ideas y técnicas matemáticas, estudiando en particular los polinomios de la clase de Szegö, entre otros muchos.
- *Orthogonal Polynomials* (Pergamon Press, Oxford, 1971) por G.Freud dedicado al estudio de los polinomios desde un punto de vista formal, o sea, propiedades generales, conexión con el problema de momentos, fracciones continuas, etc.
- *Special Functions and its Applications*, N. N. Lebedev (Dover, Nueva York, 1972). Monografía clásica que describe gran parte de las funciones especiales y polinomios clásicos así como muchas de sus aplicaciones a problemas de física matemática e ingeniería.
- *An introduction to orthogonal polynomials* por T. S. Chihara [12]. Excelente revisión del tema utilizando técnicas de funcionales lineales. Muy recomendable para el "principiante".
- *Special Functions of Mathematical Physics* por A.F. Nikiforov y V. B. Uvarov [40], dedicada a las aplicaciones físicas de los polinomios y donde se introducen éstos a partir de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico. Esta monografía es una magnífica introducción al tema.

- *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* por A.F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov [39], la única, hasta el momento, dedicada al estudio detallado de los polinomios ortogonales de variable discreta en redes, tanto uniformes como no uniformes, y sus aplicaciones.
- *Special Functions and the Theory of Group Representations* por N. Ja. Vilenkin [44] y *Representations of Lie Groups and Special Functions* por N. Ja. Vilenkin y A. U. Klimyk [45], ambos dedicados al estudio de las funciones especiales, polinomios clásicos *continuos y discretos*, así como los q-polinomios utilizando la teoría de la representación de grupos y álgebras.
- *General Orthogonal Polynomials* por H. Stahl y V. Totik (Cambrige University Press, 1992) dedicado a los aspectos más generales y formales de la teoría de polinomios ortogonales con muchas incursiones en el análisis complejo, teoría del potencial y propiedades asintóticas.
- *Fourier Series in Orthogonal Polynomials* por B. Osilenker (World Scientific, Singapore, 1999) dedicado a las series de Fourier de polinomios ortgonales, teoremas generales de convergencia en L^2, L^p, etc.

Una colección más completa de los textos y manuales relacionados con los polinomios ortogonales se puede encontrar en `OP-SF NET`: *The Electronic News Net of the SIAM Activity Group on Orthogonal Polynomials and Special Functions* en la dirección de internet: `http://math.nist.gov/opsf/booklist.html`

Agradecimientos: Quiero agradecer a la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) por su cordial invitación a escribir este trabajo sobre polinomios ortogonales.

Referencias

[1] W. A. Al-Salam, Characterization theorems for orthogonal polynomials. En: *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice.* P. Nevai (Ed.) NATO ASI Series C, **Vol. 294**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 1-24.

[2] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios.* Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza. Academia de Ciencias de Zaragoza, Zaragoza, 2001, (en prensa).

[3] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, *Difference equation for modifications of Meixner polynomials.* J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), 250–258.

[4] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, The limit relations between generalized orthogonal polynomials. *Indag. Math. (N.S.)*, **8** (1997), 295-316.

[5] R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán y J. Petronilho, WKB approximation and Krall-type orthogonal polynomials. *Acta Aplicandae Mathematicae* **54** (1998), 27-58.

[6] R. Álvarez-Nodarse y J. C. Medem, $q-$Classical polynomials and the $q-$Askey and Nikiforov-Uvarov Tableaus. *J. Comput. Appl. Math.* (2001), (en prensa)

[7] R. Álvarez-Nodarse y Yu.F. Smirnov, q-Dual Hahn polynomials on the non-uniform lattice $x(s) = [s]_q[s+1]_q$ and the q-algebras $SU_q(1,1)$ and $SU_q(2)$. *J. Phys. A.* **29** (1996), 1435-1451.

[8] G. E. Andrews y R. Askey, Classical orthogonal polynomials. En: *Polynômes Orthogonaux et Applications.* C. Brezinski et al. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics.* **Vol. 1171**. Springer-Verlag, Berlín, 1985, 36-62.

[9] R. Askey y R. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.* **319**. Providence, Rhode Island, 1985.

[10] N. M. Atakishiyev, M. Rahman y S. K. Suslov, On classical orthogonal polynomials. *Constr. Approx.* **11** (1995), 181-226.

[11] G. Carballo, R. Álvarez-Nodarse y J. S. Dehesa, On the Liu-Wang Speech Recognition Model using an Orthogonal Polynomial Representation. *Appl. Math. Letters* **14**(4) (2001), (en prensa).

[12] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, Nueva York, 1978.

[13] S. Bochner, Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme. *Math. Zeit.* **29** (1929), 730-736.

[14] J. L. Burchnall y T. W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators. II The identity $P^n = Q^m$. *Proc. Roy. Soc. A.* **134** (1931), 471-485.

[15] C. W. Cryer, Rodrigues' formula and the classical orthogonal polynomials. *Boll. Un. Mat. Ital.,* **25**(3) (1970), 1-11.

[16] J. S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein y J. Sánchez-Ruiz, Quantum information entropies and orthogonal polynomials *J. Comput. Appl. Math.* (2001), (en prensa)

[17] A. J. Duran, Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials. *Rocky Mountain J. Math.* **23** (1993), 87–104.

[18] A. J. Duran, *A generalization of Favard's Theorem for polynomials satisfying a recurrence relation.* J. Approx. Th. **74** (1993), 83–109.

[19] A. J. Duran, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures.* Can. J. Math. **47** (1995), 88–112.

[20] J. A. Favard, Sur les polynômes de Tchebicheff. *C.R. Acad. Sci. Paris.* **200** (1935), 2052-2053.

[21] A. G. García, F. Marcellán y L. Salto, A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **57** (1995), 147-162.

[22] G. Gasper y M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[23] A. Grünbaum y L. Haine, The q-version of a theorem of Bochner. *J. Comput. Appl. Math.* **68** (1996), 103–114.

[24] W. Hahn, Über orthogonalpolynomen die q-differentialgleichungen genügen. *Math. Nachr.* **2** (1949), 4-34.

[25] E. Hendriksen y H. van Rossum, Semi-classical orthogonal polynomials. En: *Polynômes orthogonaux et leurs applications.* C. Brezinski et al. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics.* **Vol. 1171**. Springer-Verlag, Berlín, 1985, 354-361.

[26] E. Hendriksen y H. van Rossum, Electrostatic interpretation of zeros. En: *Orthogonal Polynomials and their Applications.* M. Alfaro et al. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlín, 1988, 241-250.

[27] E. H. Hildebrandt, Systems of polynomials connected with the Charlier expansion and the Pearson differential and difference equation. *Ann. Math. Statist.* **2** (1931), 379-439.

[28] R. Koekoek y R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. *Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics* **No. 98-17**. Delft University of Technology, Delft, 1998. (accesible en la red en `http://aw.twi.tudelft.nl/ koekoek/askey/`)

[29] T. H. Koornwinder, Compact quantum groups and q-special functions. En: *Representations of Lie groups and quantum groups.* V. Baldoni y M.A. Picardello (Eds.) Pitman Research Notes in Mathematics, Series 311, Longman Scientific & Technical, (1994), 46-128.

[30] H. L. Krall, Certain differential equations for Tchebycheff polynomials. *Duke. Math.* **4** (1938), 705-718.

[31] H. L. Krall, On the derivatives of orthogonal polynomials II. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47** (1941), 261-264.

[32] H. L. Krall, On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation. *The Pennsylvania State College Bulletin* **6** (1941), 1-24.

[33] H. L. Krall y O. Frink, A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65** (1949), 100-115.**134** (1931), 471-485.

[34] P. Lesky, Über Polynomsysteme, die Sturm-Liouvilleschen differenzengleichungen genügen. *Math. Zeit.* **78** (1962), 439-445.

[35] F. Marcellán, M. Alfaro y M. L. Rezola, Sobolev orthogonal polynomials: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 113-131.

[36] F. Marcellán y J. Petronilho, On the solutions of some distributional differential equations: existence and characterizations of the classical moment functionals. *Integral Transform. Spec. Funct.* **2** (1994), 185-218.

[37] J. C. Medem, *Polinomios q-semiclásicos. Tesis Doctoral.* Universidad Politécnica. Madrid, 1996.

[38] J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, On the $q-$polynomials: A distributional study. *J. Comput. Appl. Math.* (2001), (en prensa)

[39] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Springer Series in Computational Physics.* Springer-Verlag, Berlín, 1991. (Edición en ruso, Nauka, Moscú, 1985)

[40] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

[41] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification. *Integral Transform. Spec. Funct.* **1** (1993), 223-249.

[42] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. **23** American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975 (cuarta edición).

[43] F. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 76, Springer-Verlag, Berlín-Gottinga-Heidelberg, 1955.

[44] N. Ja. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations.* Trans. of Math. Monographs. **22**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.

[45] N. Ja. Vilenkin y A.U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions.* **Vol. I,II,III**. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1992.

Renato Álvarez-Nodarse
E-Mail: ran@cica.es
WWW: http://merlin.us.es/~renato/

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *18 (2001), 47–66.*

Toeplitz

Pedro J. Paúl
Departamento de Matemática Aplicada II
Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092-Sevilla

e-mail: piti@cica.es

1 Introducción

El Comité Andaluz para el Año Mundial de las Matemáticas organizó en Noviembre de 2000 un *Encuentro de Matemáticos Andaluces* que constó de una serie de actividades de difusión y análisis del papel social de las Matemáticas en el ámbito de la Comunidad Andaluza. Entre estas actividades hubo una serie de conferencias plenarias, cuyo objetivo era el mostrar algunas parcelas de la investigación en Matemáticas que se está desarrollando en Andalucía.

Al ser invitado a dedicar una de estas conferencias plenarias a la labor desarrollada por el Grupo de Investigación en Análisis Funcional del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla, hice una revisión de los temas sobre los que habíamos trabajado y, puesto que una parte amplia de los problemas que hemos abordado tienen su raíz en la obra del matemático alemán Otto Toeplitz y en objetos matemáticos hoy ligados a su nombre, decidí orientar mi exposición en esta dirección, la cual me permitía mostrar a un público general que algunas líneas de investigación hoy consideradas excesivamente abstractas en algunos círculos profesionales, tienen su origen histórico —y en último extremo la justificación de su estudio— en problemas centrales de las Matemáticas.

Quiero agradecer la invitación a publicar la conferencia en este Boletín. El fruto es este artículo en el que, tras hacer una breve reseña biográfica de su vida, describiré el origen, el desarrollo y algunos de los resultados obtenidos en algunas de las líneas de investigación asociadas al nombre de Toeplitz. Naturalmente, el texto que sigue es muy parecido, aunque más amplio en algunos aspectos, al que se publicará en el libro de actas del congreso, pero como éste tendrá una distribución limitada, los editores de las actas no ha puesto inconveniente alguno a que se publique aquí, lo que les agradezco.

2 Otto Toeplitz (1881–1940)

Otto Toeplitz[1] nació y creció en la ciudad de Breslavia (Breslau en alemán, hoy Wrocław en Polonia), en el seno de una familia judía en la que había varios profesores de matemáticas, su padre y su abuelo paterno entre ellos. En 1906, tras haber obtenido su doctorado en Matemáticas en la Universidad de Breslau con una tesis en geometría algebraica, Toeplitz viajó a Gotinga para trabajar en el grupo dirigido por D. Hilbert centrado, por entonces, en la teoría de las ecuaciones integrales. De su estancia en Gotinga datan el interés de Toeplitz por las propiedades de las matrices infinitas, interés que mantendría a lo largo de toda su carrera investigadora, dedicada en gran parte al análisis de las correspondientes formas bilineales y cuadráticas y de los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, y su estrecha colaboración con E. Hellinger. En 1913 Toeplitz fue nombrado profesor de la Universidad de Kiel. Uno de sus proyectos más importantes durante su estancia allí fue la redacción con Hellinger del artículo enciclopédico sobre las ecuaciones integrales que, finalmente, apareció en 1927 [25].

En 1928 la Universidad de Bonn ofreció a Toeplitz una cátedra que éste aceptó. Allí recibió como ayudante al que sería su colaborador, G. Köthe. Por haber sido funcionario desde antes del comienzo de la Primera Guerra Mundial, Toeplitz no se vio afectado por la Ley del Servicio Civil de 1933 que forzó el retiro de la mayoría de los funcionarios que no fuesen de ascendencia aria. Sin embargo, la normativa dictada en 1935 tras el congreso del Partido Nacionalsocialista obligó a Toeplitz a dejar su cátedra. Aun así, Toeplitz no dejó Alemania y durante algunos años siguió trabajando en ayuda de la comunidad judía, especialmente en el área educativa, cuya situación había ido deteriorándose gravemente. En 1937 se prohibió el acceso de los judíos a las universidades y cuando en 1938, tras la "noche de los cristales rotos", la situación se hizo insoportable, Toeplitz se decidió a comienzos de 1939 a emigrar a Palestina, entonces bajo mandato británico, aceptando un cargo de asesor científico en la Universidad Hebrea en Jerusalén, donde murió en 1940.

3 Operadores en el Espacio de Hilbert

Como ya hemos comentado, cuando Toeplitz llegó a Gotinga en 1906, el grupo de trabajo dirigido por Hilbert se centraba en la teoría de las ecuaciones integrales, un campo muy activo de investigación después de que C. Neumann hubiera

[1] Los datos histórico-biográficos han sido tomados, esencialmente, de [4], [6], [9] [21], [22] y [38], donde pueden hallarse las referencias a los artículos originales que no se citen expresamente aquí.

reducido la solución del problema de Dirichlet en un dominio lo bastante regular a la resolución de la ecuación integral

$$u(t) + \int_a^b k(s,t)u(s)\,ds = f(t)$$

en la que u es la función incógnita, k es una función continua y simétrica y f es una función continua dada.

En una serie de seis artículos publicados entre 1904 y 1906, recogidos luego en un volumen titulado "Fundamentos de una teoría general de las ecuaciones integrales" [23], Hilbert analizó las técnicas introducidas por H. Poincaré e I. Fredholm al estudiar dicha ecuación y mejoró los resultados obtenidos por éstos. En el cuarto trabajo de esta serie, publicado en 1906 y que, de acuerdo con J. Dieudonné [9], es el primer hito en la historia del Análisis Funcional, Hilbert abandona el punto de vista de las ecuaciones integrales porque se da cuenta de que éstas pueden reducirse al estudio de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas. Esto se hace tomando un sistema ortonormal completo de funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y pasando a los coeficientes de Fourier de las funciones involucradas. Entonces la sucesión $\{x_n\}$ de los coeficentes de Fourier de la función incógnita verifica un sistema de infinitas ecuaciones lineales

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n + \cdots = b_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

donde $a_{mn} = a_{nm}$ y, por las correspondientes desigualdades de Bessel, también se tiene que

$$\sum_m |x_m|^2 < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_m |b_m|^2 < \infty.$$

A partir de este planteamiento, Hilbert se lanza a explorar este tipo de sistemas $Ax = b$ donde $A = [a_{mn}]$ es una matriz simétrica infinita y las sucesiones $x = \{x_n\}$ y $b = \{b_n\}$ deben ser de cuadrado absolutamente sumable —en la terminología habitual, x y b deben estar en el espacio de Hilbert ℓ^2— lo que le lleva a imponer que la matriz A tiene que verificar una condición de acotación que él expresa en términos de las formas bilineales que se obtienen truncando la matriz A: Existe una constante M tal que

$$\left| \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{p} a_{mn} x_m y_n \right| \leq M$$

para $p = 1, 2, \ldots$ y todas las sucesiones x e y tales que $\sum_m |x_m^2| \leq 1$ y $\sum_m |y_m^2| \leq 1$. Hilbert estudió las transformaciones ortogonales que permiten diagonalizar el sistema, probando la existencia de un espectro discreto para las matrices que generan lo que hoy llamamos un operador compacto y exhibiendo también el fenómeno del espectro continuo para matrices simétricas cuyo operador asociado es acotado pero no compacto.

Hemos visto cómo Hilbert usó una de las ideas cruciales en el Análisis Matemático: la de escribir una función arbitraria como un desarrollo infinito en términos de funciones más simples, siendo las series de potencias y las series de Fourier los ejemplos paradigmáticos. Es su discípulo E. Schmidt quien en 1908 lanza, dando un punto de vista geométrico a las ideas de Hilbert, la idea de considerar las sucesiones como puntos de un espacio vectorial en el que se pueden medir distancias mediante una norma y ángulos mediante un producto escalar. En este trabajo ya aparecen explícitamente la notación actual y las propiedades del espacio de Hilbert ℓ^2, las nociones de producto escalar y norma, ortogonalidad, conjuntos cerrados, operadores acotados y la prueba de la existencia de la proyección ortogonal de un punto sobre un subespacio cerrado. La coincidencia en el tiempo con el desarrollo por Lebesgue de la teoría de la medida permitió a F. Riesz y a E. Fischer llevar las ideas de Schmidt a espacios de funciones y definir $L^2[a,b]$, el espacio de Hilbert de las clases de funciones cuyos cuadrados son integrables en el sentido de Lebesgue en un intervalo $[a,b]$, y probar que cada función $f \in L^2[a,b]$ es el límite para la norma de este espacio —también llamada convergencia en media cuadrática— de su serie de Fourier, lo que constituye el primer ejemplo de base en un espacio de dimensión infinita.

El trabajo de Hilbert tuvo una gran influencia en Toeplitz, que se dedicó a estudiar las formas lineales y bilineales y los sistemas de ecuaciones generados por sucesiones y matrices infinitas y escribió cinco artículos directamente relacionados con la teoría espectral desarrollada por Hilbert. En particular, Toeplitz dedicó una parte amplia de su trabajo al problema de obtener una caracterización intrínseca de las matrices que transforman ℓ^2 en ℓ^2; es decir, una caracterización que se exprese sólo en términos de los elementos de la matriz. A pesar de sus esfuerzos, ni Toeplitz ni otros matemáticos de la época lograron resolver este problema, aunque sí obtuvieron resultados parciales, algunos de los cuales resultaron tener una enorme influencia en el desarrollo posterior de algunas ramas del Análisis Funcional. Vamos a describir tres: el teorema de Hellinger y Toeplitz, la cuestión de la maximalidad del álgebra de las matrices acotadas y la caracterización de las matrices acotadas cuyas diagonales son constantes.

En 1906 Hellinger y Toeplitz [24] probaron que en la definición de matriz acotada dada por Hilbert, es suficiente con suponer que la constante M depende de las sucesiones x e y; es decir, que si para cada par de sucesiones x e y tales que $\sum_m |x_m^2| \leq 1$ y $\sum_m |y_m^2| \leq 1$ existe una constante $M_{x,y}$ tal que

$$\left| \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=1}^{p} a_{mn} x_m y_n \right| \leq M_{x,y} \qquad \text{para todo } p = 1, 2, \ldots,$$

entonces la matriz A es acotada.

El teorema de Hellinger y Toeplitz nos dice que si una matriz transforma sucesiones de cuadrado sumable en sucesiones de cuadrado sumable, entonces el operador que dicha matriz define en ℓ^2 es automáticamente acotado. Este sorprendente resultado es el primero de una serie de teoremas que se conocen genéricamente con el nombre de *principios de acotación uniforme,* a los que dedicaremos la siguiente sección.

En el mismo trabajo, Hellinger y Toeplitz probaron que el álgebra $\mathcal{M}(\ell^2)$ de las matrices que transforman sucesiones de ℓ^2 en sucesiones de ℓ^2 es maximal: es imposible añadir una matriz infinita a $\mathcal{M}(\ell^2)$ sin destruir su estructura algebraica. En 1909 Toeplitz encontró otra álgebra matricial maximal: el álgebra de todas las matrices cuyas filas son sucesiones del espacio φ (el espacio de todas las sucesiones con un número finito de términos distintos de cero), álgebra que, a su vez, coincide con el álgebra $\mathcal{M}(\omega)$ de todas las matrices que transforman el espacio ω de todas las sucesiones escalares en sí mismo [34].

En 1929 Toeplitz propuso a su recién contratado ayudante Köthe establecer una teoría general de álgebras matriciales maximales, para lo que planteó estudiar más ejemplos. En su primer artículo [26], Köthe y Toeplitz probaron que el espacio ψ de las sucesiones semi-finitas (los términos de índice par están en ω y los de índice impar están en φ) verifica también que el álgebra $\mathcal{M}(\psi)$ es maximal. Una serie de contraejemplos a la conjetura general de que si λ es un espacio cualquiera de sucesiones entonces $\mathcal{M}(\lambda)$ es un álgebra matricial maximal, llevaron a Köthe y Toeplitz a darse cuenta de que la propiedad común a los espacios λ para los que ya sabían que $\mathcal{M}(\lambda)$ es maximal es la siguiente: cuando se toma una sucesión $x = \{x_n\} \in \lambda$ y se multiplica por cada fila de una matriz $A = [a_{mn}] \in \mathcal{M}(\lambda)$, las series correspondientes $\sum_n a_{mn} x_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$ no sólo convergen, sino que convergen absolutamente. Una vez aislado este hecho crucial, Köthe y Toeplitz definen y estudian en [27] la teoría de los espacios de sucesiones perfectos y lo que hoy llamamos dualidad de Köthe-Toeplitz, que han dado lugar a una de las líneas de investigación más fructíferas del Análisis Funcional.

Si λ es un subespacio vectorial de ω, se define su dual de Köthe-Toeplitz como

$$\lambda^\times := \left\{ y = \{y_n\} \in \omega : y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty \text{ para toda } x = \{x_n\} \in \lambda \right\}.$$

Por ejemplo, ω y φ o ℓ^p y ℓ^q (siendo q el exponente conjugado de p) son parejas en las que cada uno es el dual de Köthe-Toeplitz del otro. Los espacios λ y $\lambda^\times$ forman un par dual y se dice que λ es *perfecto* si $\lambda = (\lambda^\times)^\times$, verificándose que $\lambda^\times$ siempre es perfecto. Köthe y Toeplitz probaron que si λ es un espacio perfecto, entonces $\mathcal{M}(\lambda)$ es un álgebra maximal y el espacio generado por todas las filas de todas las matrices de dicha álgebra es $\lambda^\times$ y, recíprocamente, que si $\mathcal{N}$ es un álgebra matricial maximal y el espacio λ generado por las columnas de las matrices de $\mathcal{N}$ es perfecto, entonces $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\lambda)$.

A lo largo de su desarrollo, la teoría de los espacios perfectos ha proporcionado muchos ejemplos, ideas, motivaciones y contraejemplos a la teoría general de espacios localmente convexos. Así, en 1948 Köthe introdujo un tipo especial de espacios perfectos, los espacios escalonados y co-escalonados, que han sido muy estudiados, por A. Grothendieck y el propio Köthe originalmente y, más recientemente, por K. D. Bierstedt, J. Bonet, E. Dubinsky, R. Meise, M. Valdivia y D. Vogt, entre otros. Este desarrollo junto con los trabajos de A. Grothendieck en los años 50 —en los que se consideran espacios de sucesiones vectoriales como representación de productos tensoriales— continuados por A. Pietsch; los estudios de C. Bessaga, J. Lindenstrauss, A. Pełczyński y L. Tzafriri sobre la clasificación de los espacios de Banach de acuerdo con su comportamiento frente a los espacios escalares como c_0 o los ℓ^p; la utilización de espacios de sucesiones para representar de manera cómoda espacios de funciones holomorfas, ya iniciada por Toeplitz en su artículo póstumo [37], espacios de funciones continuas, espacios de funciones indefinidamente diferenciables y espacios de distribuciones son, por citar algunos, ejemplos del alto índice de interés que los espacios de sucesiones escalares y vectoriales conservan dentro del Análisis Funcional (una referencia reciente adecuada es el texto de Valdivia [39]).

Los éxitos obtenidos con los espacios de sucesiones escalares estimularon el estudio de marcos más amplios en los que se mantuvieran los principales resultados de la teoría de la dualidad de Köthe-Toeplitz. En este sentido, empiezan a estudiarse espacios de sucesiones con valores en un espacio vectorial topológico cualquiera. Así, Pietsch define y estudia, a comienzos de los años 60, varias clases de espacios de sucesiones vectoriales que están relacionados con diversos tipos de sumabilidad y son generalizaciones de las representaciones dadas por Grothendieck, que ya hemos citado, de productos tensoriales de un espacio de Banach por un espacio ℓ^p. Nosotros hemos trabajado, siguiendo la línea abierta por Grothendieck y Pietsch, en los espacios de sucesiones vectoriales relacionados con la sumabilidad absoluta [18] Posteriormente, siguiendo una vía de investigación emprendida por Dieudonné en 1951 [10], hemos estudiado qué ocurre si reemplazamos las sucesiones por funciones y la sumabilidad absoluta por la integrabilidad absoluta ([15], [16], [17], [19] y [20]).

Volviendo al problema de describir intrínsecamente las matrices de $\mathcal{M}(\ell^2)$, Toeplitz sí obtuvo en 1911 [35] una caracterización para un tipo especial de matrices, hoy llamadas matrices de Toeplitz, que ha generado una inmensa línea de investigación de operadores entre espacios de Hilbert: los operadores de Toeplitz. Una *matriz de Toeplitz* es una matriz en la que las líneas paralelas a la diagonal principal son constantes:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

¿Cuándo representa una matriz de Toeplitz A un operador acotado en ℓ^2? La respuesta dada por Toeplitz conecta la teoría de espacios de Hilbert con la teoría de funciones analíticas. Veamos esta conexión. Sea $\mathbf{T}$ la circunferencia unidad del plano complejo dotada con la medida de Lebesgue μ normalizada de manera que $\mu(\mathbf{T}) = 1$. Entonces la matriz A define un operador acotado si existe una función $\phi \in L^\infty(\mathbf{T})$ cuyos coeficientes de Fourier son los elementos de la matriz:

$$a_n = \hat{\phi}_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t)e^{-int}\,dt \qquad \text{para cada } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Vayamos más allá. Toda función $\phi \in L^\infty(\mathbf{T})$ define un operador acotado $f \to M_\phi f$ sobre $L^2(\mathbf{T})$ mediante

$$(M_\phi f)(\zeta) := \phi(\zeta)\cdot f(\zeta), \qquad (\zeta \in \mathbf{T}).$$

El operador M_ϕ así definido se llama *operador de multiplicación por* ϕ y su norma coincide, de hecho, con la de ϕ, es decir, $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Sea ahora H^2 el subespacio cerrado de $L^2(\mathbf{T})$ formado por las funciones cuyos coeficientes de Fourier negativos son nulos o, en otras palabras, las que admiten una extensión analítica al interior del círculo unidad, y sea P la proyección ortogonal de $L^2(\mathbf{T})$ sobre H^2. El operador $T_\phi : H^2 \to H^2$ dado por

$$f \in H^2 \to T_\phi f := P(M_\phi f)$$

se llama *operador de Toeplitz asociado a* ϕ y se dice que ϕ es el *símbolo de* T_ϕ. Pues bien, cuando identificamos H^2 con ℓ^2 vía la transformada de Fourier

$$f \in H^2 \equiv \left(\hat{f}_0, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots\right) \in \ell^2,$$

la matriz A se transforma en el operador de Toeplitz T_ϕ. De particular importancia es el operador de Toeplitz asociado a la aplicación identidad en $\mathbf{T}$. Este operador actúa en H^2 de la siguiente manera $(Sf)(\zeta) = \zeta \cdot f(\zeta)$ o, en términos de los coeficientes de Fourier,

$$S : (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots) \to (0, \hat{f}_0, \hat{f}_1, \ldots)$$

por lo que se llama operador de desplazamiento unilateral (*unilateral shift operator*).

Hasta los años 60, los principales trabajos sobre operadores de Toeplitz son los debidos a P. Hartman, H. Widom y A. Wintner que estudian algunas cuestiones de invertibilidad y algunas propiedades espectrales. En 1963 A. Brown y P. R. Halmos publicaron el trabajo [5], que ha resultado ser crucial para el desarrollo posterior de la teoría de operadores de Toeplitz. En este trabajo se establece que la condición suficiente que garantiza la acotación del operador definido por la matriz A señalada antes es también necesaria. Para ello observan que la propiedad definitoria de las matrices de Toeplitz corresponde, al identificar H^2 con ℓ^2, a una relación de intercambio entre un operador de Toeplitz y el operador de desplazamiento unilateral S: "Un operador acotado Z en H^2 es un operador de Toeplitz si, y sólo si, $Z = S^*ZS$". En otra parte del trabajo, Brown y Halmos se preguntan qué ocurre si planteamos la relación más fuerte $SZ = ZS$ y obtienen que eso corresponde exactamente al caso de los operadores de Toeplitz cuyo símbolo es una función analítica, llamados *operadores de Toeplitz analíticos.* Este trabajo tuvo una enorme influencia y es responsable del enorme desarrollo contemporáneo de la teoría de operadores de Toeplitz que se recoge, por ejemplo, en la monografía de A. Böttcher y B. Silbermann [3], en el tomo conmemorativo [21] y en el volumen editado por E. L. Basor e I. Gohberg [2]. Nosotros hemos abordado recientemente (en [28] y [29]) una línea de generalización planteada por V. Pták y P. Vrbová en 1988 que se basa en sustituir el operador S^* por operadores cualesquiera en la relación característica para operadores de Toeplitz $Z = S^*ZS$.

La solución al problema de caracterizar intrínsecamente las matrices de $\mathcal{M}(\ell^2)$ fue obtenida, finalmente, por L. Crone en 1971 y nos dice que una matriz infinita A está en dicha álgebra si, y sólo si, se verifican las tres condiciones siguientes: sus filas están en ℓ^2, el producto $(A^*A)^n$ está definido para cada $n = 1, 2, \ldots$ y

$$\sup_n \sup_i \left| [(A^*A)^n]_{ii} \right|^{1/n} < \infty.$$

donde A^* denota la matriz transpuesta y conjugada de A.

4 El Método de la Joroba Deslizante

Volvamos al teorema de Hellinger-Toeplitz: si para cada par de sucesiones x e y tales que $\sum_m |x_m^2| \leq 1$ y $\sum_m |y_m^2| \leq 1$ existe una constante $M_{x,y}$ tal que

$$\left|\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{p} a_{mn}x_m y_n\right| \leq M_{x,y} \qquad \text{para todo } p = 1, 2, \ldots,$$

entonces la matriz A es acotada. Como hemos dicho antes, éste es el primero de una serie de principios de acotación uniforme que culminaría en 1927 con el teorema de Banach-Steinhaus. Un principio de acotación uniforme es un teorema que nos da condiciones bajo las cuales en un espacio normado E con dual E^* toda colección puntualmente acotada de formas lineales y continuas $B \subset E^*$ está uniformemente acotada sobre la bola unidad de E. En otras palabras, un teorema que garantiza la certeza de la implicación

$$\left[\sup\{|x^*(x)| : x^* \in B\} < \infty \text{ para todo } x \in E\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\sup\{|x^*(x)| : x^* \in B, \|x\| \leq 1\} < \infty\right].$$

Los principios de acotación uniforme son una de las bases sobre las que se asientan las aplicaciones del Análisis Funcional, en particular porque permiten deducir que si B es una sucesión puntualmente convergente de formas lineales y continuas, entonces su límite también es continua. En la terminología moderna, los espacios vectoriales topológicos localmente convexos para los que se verifica el principio de acotación uniforme sobre conjuntos acotados se llaman espacios tonelados (el desarrollo moderno de esta teoría se recoge en [14] y [31]).

El método de demostración desarrollado por Hellinger y Toeplitz es lo que se conoce genéricamente como un *método de joroba deslizante* (luego veremos con un ejemplo por qué se llama así). Métodos del mismo tipo fueron usados, por citar algunos ejemplos, por P. Du Bois-Reymond para construir una función continua cuya serie de Fourier diverge en un conjunto denso (1876), por H. Lebesgue para construir una función continua y de variación acotada cuya serie de Fourier diverge en un punto (1905) y para estudiar integrales singulares (1909), por el propio Toeplitz para estudiar las matrices infinitas que conservan la convergencia de una sucesión (lo que describiremos en la siguiente sección), por H. Hahn (1922) para probar el principio de acotación uniforme en un espacio de Banach (i.e., normado y completo) y por O. Nikodym para probar el teorema de acotación de medidas numerablemente aditivas definidas sobre una σ-álgebra (1930) (que también veremos luego). Se cuenta que la demostración de la versión original del teorema de Banach-Steinhaus —que es el principio de acotación uniforme para aplicaciones lineales y continuas entre espacios vectoriales topológicos metrizables y completos— era también un método de joroba deslizante pero que, por sugerencia de S. Saks, se cambió en la versión que finalmente publicaron por el uso de un profundo teorema debido a R. L. Baire (1899), válido en espacios métricos completos, que establece que la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos y densos es densa. Aunque el teorema de Baire no se extiende a espacios normados no completos, la tremenda influencia que tuvo el libro de S. Banach [1] publicado en 1932, hizo que los métodos de joroba deslizante cayeran en desuso hasta hace relativamente poco tiempo, cuando han sido rescatados para aplicarlos a espacios que aparecen de forma natural y no son completos.

Nosotros hemos empleado técnicas de joroba deslizante para producir nuevos principios de acotación uniforme en espacios no completos de sucesiones y de funciones con valores vectoriales. Para mostrar el método de la joroba deslizante en acción, vamos a usar uno de los ejemplos en los que hemos trabajado: el espacio de las funciones integrables en el sentido de Dunford.

Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita con dual E^*. Se dice que una función $f : [0,1] \to E$ es integrable en el sentido de Dunford cuando la composición $t \to x^*(f(t))$ es integrable en el sentido de Lebesgue para cada $x^* \in E^*$. Con la norma definida por

$$\|f\| := \sup \left\{ \int_0^1 |x^*(f(t))| \, dt : \|x^*\| \le 1 \right\}$$

el espacio D_E de todas las (clases de equivalencia de) funciones integrables en el sentido de Dunford es un espacio normado no completo. Sea ahora B un conjunto de formas lineales continuas sobre D_E que está puntualmente acotado; es decir, para cada función $f \in D_E$ existe una constante M_f tal que $\sup\{|v(f)| : v \in B\} \le M_f$. Si el espacio D_E fuera completo, el teorema de Banach-Steinhaus nos diría que B está uniformemente acotado sobre la bola unidad $U \subset D_E$, es decir, $\sup\{|v(f)| : v \in B, f \in U\} < \infty$. Como el espacio D_E no es completo, para obtener la acotación uniforme supongamos, por reducción al absurdo, que

$$\sup\{|v(f)| : v \in B, f \in U\} = \infty$$

y procedamos como sigue. Denotamos por $I_1 = [0,1]$ el intervalo inicial. Como B no está uniformemente acotado sobre U, entonces existen $f_1 \in U$ y $v_1 \in B$ tales que $v_1(f_1) \ge 1$. Dividimos I_1 en dos mitades, $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$. Si denotamos por χ_I la función característica de un intervalo I, entonces B no puede estar uniformemente acotado sobre los dos trozos $\chi_{[0,1/2]}U$ y $\chi_{[1/2,1]}U$; elegimos I_2 una mitad de I_1 de manera que B no está uniformemente acotado sobre $\chi_{I_2}U$ y tomamos $f_2 \in U$ y $v_2 \in B$ tales que $v_2(\chi_{I_2} f_2) \ge 2$. Ahora dividimos I_2 en dos mitades y, razonando como antes, llegamos a la conclusión de que existen una mitad I_3 de I_2, $f_3 \in U$ y $v_3 \in B$ tales que $v_3(\chi_{I_3} f_3) \geq 3$. La construcción inductiva está ya clara: existe una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos encajados, de forma que cada uno de ellos es una mitad del anterior, y dos sucesiones $\{f_n\} \subset U$ y $\{v_n\} \subset B$ tales que $v_n(\chi_{I_n} f_n) \geq n$. Podemos visualizar las funciones $\chi_{I_n} f_n$ como picos cada vez más altos con soportes cada vez más estrechos, las "jorobas" que se "deslizan". Sea ahora $\alpha = \{\alpha_n\}$ una sucesión tal que $\sum_n |\alpha_n| < \infty$. Entonces la serie $\sum_n \alpha_n \chi_{I_n}(t) f_n(t)$ es puntualmente convergente a una función $f_\alpha : [0,1] \to X$ ya que si $t \in [0,1]$ no es el único punto común a todos los intervalos $\{I_n\}$, entonces la serie contiene sólo un número finito de sumandos. No es difícil ver que esta función f_α es integrable en el sentido de Dunford y que $\|f_\alpha\| \leq \sum_n |\alpha_n|$ lo que nos permite considerar una sucesión de formas lineales y continuas definidas en el espacio de Banach ℓ^1 de las sucesiones que son absolutamente sumables: las dadas por

$$\alpha \in \ell^1 \to v_n(f_\alpha) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Esta sucesión así definida está puntualmente acotada ya que $|v_n(f_\alpha)| \leq M_{f_\alpha}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Como ℓ^1 es un espacio de Banach, podemos usar el teorema de Banach-Steinhaus para deducir que la sucesión está acotada uniformemente sobre la bola unidad de ℓ^1. Pero esto está en contradicción con el hecho de que, si denotamos por e_n la sucesión unitaria que tiene todos sus términos iguales a 0 excepto el n-ésimo que es un 1, entonces

$$|v_n(f_{e_n})| = v_n(\chi_{I_n} f_n) \geq n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Usando variantes de este método hemos podido dar principios de acotación uniforme, propiedades más fuertes incluso, para otros espacios de funciones integrables (en los sentidos de Bochner, Denjoy, McShane y Pettis), para espacios de funciones simples y para espacios de sucesiones con valores vectoriales ([8], [11], [30]). En la misma línea de actualizar los métodos de joroba deslizante han trabajado P. Antosik y C. Swartz (la monografía [33] describe el desarrollo moderno de este tipo de métodos).

5 Sumabilidad: El Teorema de Silverman-Toeplitz

Los intentos de asignar una "suma" a una serie divergente se remontan a G. W. Leibniz quien ya propuso que si queremos asignar un valor a la suma de la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, ese valor debe ser $1/2$. Esta opinión de Leibniz, debatida y criticada a lo largo del S. XVIII, recibió un par de espaldarazos a comienzos del S. XIX con la introducción por A. Cauchy de la *convergencia en media* y por N. H. Abel de lo que hoy llamamos *convergencia en el sentido de Abel*, nociones que vamos a recordar ahora. Sea $\sum_n a_n$ una serie de números reales o complejos cuya sucesión de sumas parciales es $\{s_n\}$. Sea $\{t_n\}$ la sucesión de las medias aritméticas de $\{s_n\}$, es decir,

$$t_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}.$$

Si existe $s_M = \lim_n t_n$ entonces se dice que la serie $\sum_n a_n$ es convergente en media a s_M. Por otro lado, si existe el límite

$$s_A = \lim_{x \to 1^-} \sum_n a_n x^n$$

entonces se dice que la serie $\sum_n a_n$ es convergente en el sentido de Abel a s_A.

Cauchy probó que toda serie convergente en el sentido usual es convergente en media a su suma, Abel probó que toda serie convergente también es convergente en el sentido de Abel a su suma y, posteriormente, G. F. Frobenius probó que toda serie convergente en el sentido de la media es convergente en el sentido de Abel y que ambos límites coinciden. En particular, la serie de Leibniz $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ es convergente en media y también en el sentido de Abel al límite propuesto por Leibniz: $1/2$. Dos trabajos publicados a caballo entre los siglos XIX y XX dieron un enorme impulso al estudio de los procesos que permiten asignar, de una forma razonable, un concepto de suma a una serie divergente —lo que se conoce como teoría de la sumabilidad. El primero fue un artículo de 1890 de E. Cesàro sobre multiplicación de series. Cauchy había establecido que la forma adecuada de multiplicar dos series convergentes $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ de manera que si el producto es convergente entonces su suma sea el producto de las sumas, es considerar los términos de las series como los coeficientes de una serie de potencias y multiplicar estas series como si fueran polinomios. Veamos esto: como para $|x| < 1$ se verifica

$$\left(\sum_n a_n x^n \right) \left(\sum_n b_n x^n \right) = \sum_n \left(\sum_{k \le n} a_k b_{n-k} \right) x^n,$$

teniendo en cuenta lo que debería ocurrir para $x = 1$, Cauchy definió el producto de $\sum_n a_n$ por $\sum_n b_n$ como la serie $\sum_n c_n$ cuyo término general es

$$c_n = \sum_{k \le n} a_k b_{n-k} = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1.$$

El teorema de Abel garantiza que si la serie producto $\sum_n c_n$ converge, entonces su suma es $\sum_n c_n = (\sum_n a_n)(\sum_n b_n)$. Un inconveniente de esta definición es que el producto de Cauchy de dos series convergentes no tiene por qué ser convergente, sin embargo Cesàro demostró que, dadas dos series convergentes, su producto de Cauchy converge en media al producto de las dos sumas; debido a este teorema, la convergencia en media se conoce también como convergencia en el sentido de Cesàro de primer orden. El otro resultado al que nos referimos es el teorema de Fejér de 1904 sobre la convergencia en media de las series de Fourier. Como hemos citado, Du Bois-Reymond había dado un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge en un conjunto denso, pero L. Fejér demostró que la serie de Fourier de una función continua es covergente en media a la función. Es comprensible que, tras estos dos resultados, se generara un gran interés por la teoría de la sumabilidad de series divergentes.

La convergencia en media es un caso particular de lo que se llama un *método matricial de sumabilidad*: Dada una matriz infinita $C = [c_{mn}]$ y la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de una serie $\sum_n a_n$, construimos la sucesión

$$t_m = c_{m1}s_1 + c_{m2}s_2 + c_{m3}s_3 + \cdots + c_{mn}s_n + \cdots \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

de manera que si $\{t_m\}$ converge, entonces se dice que la serie $\sum a_n$ converge a $\lim_m t_m$ según la matriz C. La convergencia usual se obtiene cuando C es la matriz identidad y la convergencia en media se obtiene cuando C es la matriz de Cesàro definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \ldots \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Llamando s y t a las respectivas sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_m\}$ en la definición de convergencia según una matriz C, reconocemos un sistema de infinitas ecuaciones lineales $Cs = t$ análogo a los sistemas planteados por Hilbert, sólo que ahora la sucesión s es la sucesión de sumas parciales de una serie y t debe ser una sucesión convergente. Se dice que (el método de sumabilidad generado por) la matriz C es *regular* cuando se verifica que si s es convergente, entonces t también lo es y ambas tienen el mismo límite. Toeplitz abordó el problema de caracterizar las matrices C que son regulares en un trabajo publicado en 1911 [36], probando que una matriz triangular inferior (esta condición es fácilmente omitible) C es regular si, y sólo si, se verifican las tres condiciones siguientes: (1) Las columnas de C convergen a cero, o sea, $\lim_m c_{mn} = 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$; (2) las filas de C son absolutamente sumables y las sumas de los valores absolutos están uniformemente acotadas, o sea,

$$\sup\left\{\sum_n |c_{mn}| : m = 1, 2, \ldots\right\} < \infty$$

y (3) las sumas de las filas de C convergen a 1, o sea, $\lim_m \sum_n c_{mn} = 1$.

Este resultado suele conocerse como el teorema de Silverman-Toeplitz ya que L. Silverman también probó de forma independiente, en su tesis doctoral publicada en 1913, que estas tres condiciones son suficientes. La condiciones (1) y (3) resultan, respectivamente, de aplicar la regularidad a las sucesiones unitarias e_n y a la sucesión cuyos términos son todos iguales a 1. Es claro que si los términos de la matriz C son no negativos, entonces la condición (3) implica la (2). La parte más complicada del teorema es probar que la condición (2) es necesaria, lo que Toeplitz hace, de nuevo, usando un método de joroba deslizante. El propio Banach, en su célebre monografía de 1932 [1], cita este teorema como ejemplo de aplicación del teorema de Banach-Steinhaus.

Hemos citado antes el principio de acotación uniforme de medidas numerablemente aditivas dado por Nikodym en 1930. Este resultado fue extendido por Dieudonné en 1951 para medidas finitamente aditivas y nos dice que si un conjunto M de medidas acotadas y finitamente aditivas sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado, o sea,

$$\sup\{|\mu(A)| : \mu \in M\} < \infty \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{A},$$

entonces M está uniformemente acotado sobre $\mathcal{A}$:

$$\sup\{|\mu(A)| : \mu \in M,\ A \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

Parte de la importancia de este resultado reside en que es el primer principio de acotación uniforme dado para un espacio que no es completo. Concretamente, si llamamos $S(\mathcal{A})$ al espacio de las funciones simples construidas sobre $\mathcal{A}$, entonces el teorema de acotación de Nikodym-Dieudonné es el principio de acotación uniforme en $S(\mathcal{A})$ normado con la norma del supremo.

¿Qué ocurre con álgebras o anillos de Boole que no son σ-álgebras? Es fácil ver que en el anillo $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos finitos de $\mathbf{N}$, el conjunto de los números naturales, no se verifica la acotación uniforme: basta tomar la medida que nos da el cardinal del conjunto. Diremos que un anillo de Boole $\mathcal{R}$ tiene *la propiedad de Nikodym* cuando sobre él se verifica el correspondiente principio de acotación uniforme para medidas acotadas y finitamente aditivas. El problema de dar una caracterización intrínseca de los anillos de Boole que tienen la propiedad de Nikodym sigue abierto desde entonces, incluso para el caso probablemente más simple de subanillos formados por subconjuntos de

N. W. Schachermayer [32] hizo una recopilación exhaustiva de las respuestas parciales a este problema y también de propiedades relacionadas, como la de Vitali-Hahn-Saks.

Nosotros hemos dado en [13] una caracterización de algunos tipos especiales de anillos de conjuntos de números naturales, construidos a partir de matrices regulares en términos de la sumabilidad absoluta de las series que convergen sobre ellos, que describiremos a continuación.

Denotemos por $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ la familia de todos los subconjuntos de $\mathbf{N}$. Diremos que un ideal $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{N})$ verifica la *propiedad de sumabilidad absoluta* si dada una sucesión $\{x_n\}$ tal que la subserie $\sum_{n\in A} x_n$ converge para todo $A \in \mathcal{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Hagamos notar aquí que la propiedad de sumabilidad absoluta de un ideal $\mathcal{R} \subset \mathbf{N}$ es exactamente lo mismo que decir que ℓ^1 es el dual de Köthe-Toeplitz del correspondiente espacio de funciones simples, es decir, la igualdad $\big(S(\mathcal{R})\big)^{\times} = \ell^1$.

El primer ejemplo no trivial de anillo con la propiedad de sumabilidad absoluta se debe a H. Auerbach (1930) y es el anillo $\mathcal{Z}$ de los conjuntos de densidad nula, que son aquellos conjuntos $A \subset \mathbf{N}$ tales que

$$d(A) := \lim_n \frac{\operatorname{card}\left(A \cap \{1, 2, \dots, n\}\right)}{n} = 0.$$

Es fácil ver que la propiedad de Nikodym implica la propiedad de sumabilidad absoluta. Nosotros probamos que $\mathcal{Z}$ tiene la propiedad de Nikodym [12], lo que nos llevó a plantearnos si eso sería cierto para cualquier anillo con la propiedad de sumabilidad absoluta. Como siguiente paso abordamos los ideales definidos a partir de matrices regulares. La razón es que podemos mirar el anillo $\mathcal{Z}$ como formado por todas las sucesiones de ceros y unos que convergen a cero en media. Entonces, dada una matriz regular $C = [c_{mn}]$ con elementos no negativos, el ideal de Toeplitz $\mathcal{Z}_C$ es el formado por todos los conjuntos $A \subset \mathbf{N}$ tales que

$$d_C(A) := \lim_m \sum_n c_{mn} \chi_A(n) = 0.$$

Nuestro teorema [13] dice que $\mathcal{Z}_C$ tiene la propiedad de Nikodym si, y sólo si, tiene la propiedad de sumabilidad absoluta.

Para probar este resultado, necesitaremos un par de lemas auxiliares. El primero es, esencialmente, la descomposición de Yosida-Hewitt de una medida en sus partes numerablemente aditiva y puramente finitamente aditiva; la versión precisa que usaremos nos dice que si $\mathcal{R}$ es un ideal de subconjuntos de $\mathbf{N}$ que contiene a todos los conjuntos finitos, entonces para cada medida acotada y finitamente aditiva μ la fórmula

$$\mu^{ca}(A) = \sum_{n \in A} \mu(\{n\})$$

define una medida numerablemente aditiva sobre $\mathcal{R}$. Denotemos por $ba(\mathcal{R})$ el conjuntos de medidas acotadas y finitamente aditivas sobre $\mathcal{R}$ y por $ca(\mathcal{R})$ el subconjunto de $ba(\mathcal{R})$ formado por las medidas que son numerablemente aditivas. Entonces se tiene, además, que si $M \subset ba(\mathcal{R})$ está puntualmente acotado sobre $\mathcal{R}$ entonces $M^{ca} := \{\mu^{ca} : \mu \in M\} \subset ca(\mathcal{R})$ también lo está.

El segundo resultado nos dice que aunque $\mathcal{Z}_C$ no es una σ-álgebra, sí lo es módulo los conjuntos finitos. Concretamente: para cada sucesión de conjuntos (A_n) en $\mathcal{Z}_C$ existe otra sucesión (B_n) en $\mathcal{Z}_C$ tal que la diferencia simétrica $A_n \triangle B_n$ es finita para cada $n \in \mathbf{N}$ y $\bigcup_n B_n \in \mathcal{Z}_C$.

Para demostrar que $\mathcal{Z}_C$ tiene la propiedad de Nikodym si tiene la propiedad de sumabilidad absoluta, sea M un conjunto puntualmente acotado en $ba(\mathcal{Z}_C)$; tenemos que ver que M está uniformemente acotado sobre $\mathcal{Z}_C$.

Definimos el subconjunto M^{ca} de $\ell^1 = ca(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$ como en la descomposición de Yosida-Hewitt, de acuerdo con la cual M^{ca} está puntualmente acotado sobre $\mathcal{Z}_C$. Veamos que M^{ca} está uniformemente acotado sobre todo $\mathcal{P}(\mathbf{N})$; en particular, sobre $\mathcal{Z}_C$. En efecto, como M^{ca} está puntualmente acotado sobre $\mathcal{Z}_C$ podemos usar la propiedad de sumabilidad absoluta para deducir (ver [12]) que M^{ca} también está acotado en la topología de la norma de ℓ^1 como subespacio del espacio dual de $S(\mathcal{Z}_C)$ que coincide con su topología habitual de espacio de Banach con la que, a su vez, ℓ^1 es isométricamente isomorfo a $ca(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

Ahora, para cada $\mu \in ba(\mathcal{Z}_C)$ sea $\mu^p := \mu - \mu^{ca}$ la parte puramente finitamente aditiva de μ. Debemos comprobar que $M^p := \{\mu^p \, \mu \in M\}$ también está uniformemente acotado sobre $\mathcal{Z}_C$. Si esto no es así, existe una sucesión (μ_n) en M y otra (A_n) en $\mathcal{Z}_C$ tales que

$$\lim_{n \to \infty} |\mu_n^p(A_n)| = \infty.$$

Por el segundo de los lemas mencionados, existe otra sucesión (B_n) en $\mathcal{Z}_C$ tal que $A_n \triangle B_n$ es finito para cada $n \in \mathbf{N}$ y $B := \bigcup_n B_n \in \mathcal{Z}_C$. Ahora notemos que para cada $\mu \in M$, su parte puramente finitamente aditiva μ^p se anula sobre los subconjuntos finitos de $\mathbf{N}$, así que

$$\lim_{n \to \infty} |\mu_n^p(B_n)| = \lim_{n \to \infty} |\mu_n^p(A_n)| = \infty.$$

Pero esto está en contradicción con el hecho de que M^p está uniformemente acotado sobre $\mathcal{P}(B)$ porque esta familia, siendo como es una σ-álgebra, tiene la propiedad de Nikodym.

Para ideales arbitrarios de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ arbitrarios, la equivalencia entre la propiedad de Nikodym y la de sumabilidad absoluta no se da. El ejemplo más llamativo que hemos encontrado es el de los conjuntos lagunares: Se dice que un conjunto $\{m_n\} \subset \mathbf{N}$ es *lagunar* si $\lim_n(m_n - m_{n-1}) = \infty$. R. Agnew probó en 1947 que el ideal generado por los conjuntos lagunares tiene la propiedad de sumabilidad absoluta, nosotros hemos probado recientemente que no tiene la propiedad de Nikodym [13].

Referencias

[1] S. Banach. *Théorie des Opérations Linéaires.* Reimpresión de la edición original de 1932. Chelsea, Nueva York, 1978.

[2] E. L. Basor y I. Gohberg. *Toeplitz Operators and Related Topics.* Operator Theory: Adv. Appl., vol. 71. Birkhäuser-Verlag, Basilea, Berlín y Boston, 1994.

[3] A. Böttcher y B. Silbermann. *Analysis of Toeplitz Operators.* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg y Nueva York, 1990.

[4] N. Bourbaki. *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza Universidad, vol. 18. Traducción de la edición francesa original (Hermann, París, 1969). Alianza Editorial, Madrid, 1976.

[5] A. Brown y P. R. Halmos. *Algebraic properties of Toeplitz operators.* J. Reine Angew. Math., vol. 213 (1963) 89–102.

[6] J. J. O'Connor y E. F. Robertson. *Otto Toeplitz (1881–1940).* The MacTutor Archive. http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Toeplitz.html.

[7] L. Crone. *A characterization of matrix operators on ℓ^2* Math. Z. vol. 123 (1971), 315–317.

[8] S. Díaz-Madrigal, A. Fernández, M. Florencio y P. J. Paúl. *A wide class of ultrabornological spaces of measurable functions.* J. Math. Anal. Appl., vol. 190 (1995) 697–713.

[9] J. Dieudonné. *History of Functional Analysis.* North-Holland / Elsevier, Amsterdam, Nueva York y Oxford, 1981.

[10] J. Dieudonné. *Sur les espaces de Köthe.* J. Analyse Math., vol. 1 (1951) 81–115.

[11] L. Drewnowski, M. Florencio y P. J. Paúl. *The space of Pettis integrable functions is barrelled.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 114 (1992) 687–694.

[12] L. Drewnowski, M. Florencio y P. J. Paúl. *Barrelled subspaces of spaces with subseries decompositions or Boolean rings of projections.* Glasgow Math. J., vol. 36 (1994) 57–69.

[13] L. Drewnowski y P. J. Paúl. *The Nikodym property for ideals os sets defined by matrix summability methods.* Aceptado para publicarse en la Rev. Real Acad. Cien. Exac., Fís. y Natur. Madrid.

[14] J. C. Ferrando, M. López Pellicer y L. M. Sánchez Ruiz. *Metrizable Barrelled Spaces.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 332. Longman, Harlow, 1995.

[15] M. Florencio, F. Mayoral y P. J. Paúl. *Inductive limits of spaces of vector-valued integrable functions.* Results Math., vol. 25 (1994) 242–251.

[16] M. Florencio, F. Mayoral y P. J. Paúl. *(DF)-spaces of vector-valued integrable functions.* Arch. Math. (Basel), vol. 65 (1995) 80–88.

[17] M. Florencio, F. Mayoral y P. J. Paúl. *Spaces of vector-valued integrable functions and localization of bounded subsets.* Math. Nachr., vol. 174 (1995) 89–111.

[18] M. Florencio y P. J. Paúl. *Barrelledness conditions on certain vector valued sequence spaces.* Arch. Math. (Basel), vol. 48 (1987) 153–164.

[19] M. Florencio, P. J. Paúl y C. Sáez. *Duals of vector-valued Köthe function spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 112 (1992) 165–174.

[20] M. Florencio, P. J. Paúl y C. Sáez. *Köthe echelon spaces á la Dieudonné.* Indag. Math. (N. S.), vol. 5 (1994) 51–60.

[21] I. Gohberg (Ed.). *Toeplitz Centennial (Tel-Aviv, 1981).* Operator Theory: Advances and Applications, vol. 4. Birkhäuser-Verlag, Basilea y Boston, 1982.

[22] I. Gohberg (Ed.). *In commemoration of the one hundredth anniversary of the birth of Otto Toeplitz.* Integral Equations Operator Theory, vol. 4 (1981) 275–302. (Fascículo conmemorativo.)

[23] D. Hilbert. *Grunzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen.* Segunda edición. Teubner, Berlín y Leipzig, 1924.

[24] E. Hellinger y O. Toeplitz. *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., (1906) 1–5; ampliado en Math. Ann., vol. 69 (1910) 289–330.

[25] E. Hellinger y O. Toeplitz. *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.* Enzyklopädie der Mathematische Wissenschaften, vol. 2C (1927) 1395–1597.

[26] G. Köthe y O. Toeplitz. *Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen.* J. Reine Angew. Math., vol. 165 (1931) 116–127.

[27] G. Köthe y O. Toeplitz. *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen.* J. Reine Angew. Math., vol. 171 (1934) 193-226.

[28] C. H. Mancera y P. J. Paúl. *Remarks, examples and spectral properties of generalized Toeplitz operators.* Acta Sci. Math. (Szeged), vol. 66 (2000), 737–753.

[29] C. H. Mancera y P. J. Paúl. *Properties of generalized Toeplitz operators.* Aceptado para publicarse en Integral Equations Operator Theory.

[30] P. J. Paúl. *The space of Denjoy-Dunford integrable functions is ultrabornological.* Bull. Belgian Math. Soc. - Simon Stevin, vol. 8 (2001).

[31] P. Pérez Carreras y J. Bonet. *Barrelled Locally Convex Spaces.* North-Holland / Elsevier, Amsterdam, Nueva York y Oxford, 1987.

[32] W. Schachermayer. *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma complete Boolean algebras.* Dissert. Math., vol. 214 (1982) 1–33.

[33] C. Swartz. *Infinite Matrices and the Gliding Hump.* World Scientific, Singapur, 1996.

[34] O. Toeplitz. *Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.* Rend. Circolo Mat. Palermo, vol 83 (1909) 1–9.

[35] O. Toeplitz. *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.* Math. Ann., vol 70 (1911) 351–376.

[36] O. Toeplitz. *Über allgemeine lineare Mittelbildungen.* Prace Mat.-Fiz., vol 22 (1911) 113–119.

[37] O. Toeplitz. *Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie.* Comment. Math. Helv., vol. 23 (1949) 222–242.

[38] J. Tucciarone. *The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925.* Arch. History Exact Sci., vol. 10 (1973) 1–40.

[39] M. Valdivia. *Topics in Functional Analysis.* North-Holland / Elsevier, Amsterdam, Nueva York y Oxford, 1982.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *18 (2001), 91–106.*

Properties of the L-fuzzy ideals on a ring

J. Jiménez*, S. Montes**
*Department of Mathematics, **Department of Statistics
University of Oviedo
e-mail: `MEANA@etsiig.uniovi.es`

Abstract

The aim of this paper is to study L-fuzzy ideals. They are the generalization of fuzzy ideals when the interval $[0, 1]$ is substituted by a lattice L in the fuzzy subset definition, as Goguen [7] introduced, that is, *a fuzzy subset* $\widetilde{A}$ *of* X *is any application* $\widetilde{A} : X \longrightarrow L$.

As consequence of this generalization, the prime L-fuzzy ideals, strongly prime L-fuzzy ideals, maximal L-fuzzy ideals and finite valued L-fuzzy ideals are studied and related. Finally, these sets are studied with different referentials. (Local, Noetherian , Artinian rings, ...)
Keywords: L-fuzzy sets; L-fuzzy ideals; rings.

1 Introduction

Since Zadeh [22] introduced the definition of fuzzy set, numerous authors ([2] [3], [4], [12], [15], [17], [19], [23], ...) have studied algebraic structures which can be found within a referential X. An overview on fuzzy sets with the main definitions is given in [8]. In this paper, we study some fuzzy substructures of crisp structures. In particular, we are going to work with fuzzy ideals ([1], [6], [10], [16], [18], [20], [21], ...), by using the previous study of Kumbhojkar and Bapat [13], but now, by generalizing this definition, since we are going to work in a lattice L instead of the interval [0,1]. It can seem a similar study, but some proofs will be very different.

The organization of this paper is the following:

The most of the second section is a summary of known results in the case that $L = [0, 1]$ ([4], [13]), but unknown in general for all lattice L.

In the third section we defined and we study maximal L-fuzzy ideals, as well as the characterization of local rings.

In the fourth and fifth sections, the strongly prime L-fuzzy ideals and the finite valued L-fuzzy ideals are considered to end the work with the study of the L-fuzzy ideals on Artinian and Noetherian rings, characterizing the Artinian rings by means of its L-fuzzy ideals.

2 L-fuzzy ideals and prime L-fuzzy ideals

Throughout all the paper it will be considered that A is a unitary commutative ring with the binary operations $+$ and $\cdot$, and L is a lattice with the binary operations $\vee$ and $\wedge$, which denote supremum and infimum respectively.

Definition 2.1 *Let L be a lattice and let A be a unitary ring. An application $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ is said a fuzzy ideal on the lattice L or L-fuzzy ideal, if it satisfies the following conditions:*

$$\widetilde{I}(x+y) \geq \widetilde{I}(x) \wedge \widetilde{I}(y) \tag{1}$$

$$\widetilde{I}(-x) = \widetilde{I}(x) \tag{2}$$

$$\widetilde{I}(x \cdot y) \geq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) \tag{3}$$

for all x and y in A.

Evidently, every crisp ideal of the ring A satisfies the three previous conditions, therefore it is an L-fuzzy ideal, and consequently Definition 2.1 is an extension of the classic concept.

The following proposition provides an alternative way to prove that an L-fuzzy set is an L-fuzzy ideal, that is, it is an equivalent definition.

Proposition 2.2 *An L-fuzzy subset $\widetilde{I}$ of the ring A is an L-fuzzy ideal if and only if,*

$$\widetilde{I}(x-y) \geq \widetilde{I}(x) \wedge \widetilde{I}(y) \tag{4}$$

$$\widetilde{I}(x \cdot y) \geq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) \tag{5}$$

for all x and y in A.

The proof is a simple exercise (it can be seen [13], but changing maximum by supremum and minimum by infimum).

Some properties of L-fuzzy ideal are in the following

Proposition 2.3 *Let $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ be an L-fuzzy subset. If $\widetilde{I}$ is an L-fuzzy ideal and x and y are two elements of A, then the following properties are satisfied:*

$$\widetilde{I}(0) \geq \widetilde{I}(x) \geq \widetilde{I}(1), \tag{6}$$

$$\text{If } \widetilde{I}(x-y) = \widetilde{I}(0), \text{ then } \widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(y), \tag{7}$$

$$\text{If } x \text{ is an invertible, then } \widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(1). \tag{8}$$

Proof. (6) If x is an element of A, then

$$\widetilde{I}(0) = \widetilde{I}(x - x) \geq \widetilde{I}(x) \wedge \widetilde{I}(-x) = \widetilde{I}(x \cdot 1) \geq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(1) \geq \widetilde{I}(1).$$

(7) If x and y are two elements of A, with $\widetilde{I}(x - y) = \widetilde{I}(y - x) = \widetilde{I}(0)$, then

$$\widetilde{I}(x) \geq \widetilde{I}(x - y) \wedge \widetilde{I}(y) = \widetilde{I}(0) \wedge \widetilde{I}(y) = \widetilde{I}(y) \geq \widetilde{I}(0) \wedge \widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(x).$$

(8) If x is an invertible element of A, then there exists x^{-1} such that $x \cdot x^{-1} = 1$. Thus, by applying (6) and Proposition 2.2,

$$\widetilde{I}(1) \geq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(x^{-1}) \geq \widetilde{I}(x) \geq \widetilde{I}(1),$$

and then this proposition is proved. ■

As consequence of this proposition, the following corollary is obtained.

Corollary 2.4 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in the ring A, then the completed of the crisp set $Im(\widetilde{I})$ is a sublattice of L with maximum $\widetilde{I}(0)$ and minimum $\widetilde{I}(1)$.*

Proof. It is enough to see that the completed of $\mathrm{Im}(\widetilde{I})$ is $\widehat{\mathrm{Im}(\widetilde{I})} = \bigcap_{\mathrm{Im}(\widetilde{I}) \subseteq L_i} L_i$, where L_i are sublattices of L. ■

Some especially important crisp sets, obtained of a fuzzy subset, are the α-cuts [11], defined by:

- α-Cut of the fuzzy set $\widetilde{J}$ of A: $\widetilde{J}_\alpha = \{x \in A / \widetilde{J}(x) \geq \alpha\}$.
- Strong α-cut of the fuzzy set $\widetilde{J}$ of A: $\widetilde{J}_{\overline{\alpha}} = \{x \in A / \widetilde{J}(x) > \alpha\}$.

Considering the α-cuts of an L-fuzzy ideal it is obtained the following proposition, whose proof is trivial.

Proposition 2.5 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal of the ring A.*

i) The α-cut, which will be denoted by $\widetilde{I}^{\alpha}$, is a crisp ideal of A.

ii) If $Im(\widetilde{I})$ is a totally ordered set, the strong α-cut, which will be denoted by $\widetilde{I}^{\overline{\alpha}}$, is a crisp ideal of A.

Once fuzzy ideals on a lattice have been defined, and some properties have been studied, the fuzzy equivalence classes will be defined.

Definition 2.6 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal of the ring A. For all $x \in A$, it is defined the fuzzy equivalence class, as the L-fuzzy set $x + \widetilde{I} : A \longrightarrow L$ defined by*

$$(x + \widetilde{I})(y) = \widetilde{I}(y - x), \forall y \in A.$$

Thus, the set of all fuzzy equivalence classes of an L-fuzzy ideal $\widetilde{I}$ of the ring A is given by

$$A/\widetilde{I} = \{(x + \widetilde{I})/x \in A\}.$$

It will be denoted this set by $A/\widetilde{I}$, by analogy with the algebraic notation of quotients ring, this one has sense if the following proposition is considered.

Proposition 2.7 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal of the ring A, and let $A/\widetilde{I}$ be the set formed by all equivalence classes of $\widetilde{I}$, with the operations $\oplus$ and $\odot$ defined as*

$$(x + \widetilde{I}) \oplus (y + \widetilde{I}) = ((x + y) + \widetilde{I})$$
$$(x + \widetilde{I}) \odot (y + \widetilde{I}) = ((x \cdot y) + \widetilde{I})$$

for all $x, y \in A$. Then $A/\widetilde{I}$ is a ring.

Proof. The proof is immediate, by using the L-fuzzy ideal and crisp ring definitions. ■

By Proposition 2.5, every α-cut of a L-fuzzy ideal is a crisp ideal, therefore the quotient ring $A/\widetilde{I}^{\alpha}$ can be considered. When α takes the value $\widetilde{I}(0)$, an especially important α-cut is obtained, which will be denoted by $A_{\widetilde{I}}$ and it is formed by the elements

$$A_{\widetilde{I}} = \{x \in A/\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(0)\}.$$

There exists a clear correspondence between the two quotient rings $A/\widetilde{I}$ and $A/A_{\widetilde{I}}$, as the following theorem shows.

Theorem 2.8 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal of the ring A , and let $A/\widetilde{I}$ and $A/A_{\widetilde{I}}$ be the previous rings, then there exists between them an isomorphism defined by:*

$$\begin{array}{rcl} A/\widetilde{I} & \longrightarrow & A/A_{\widetilde{I}} \\ (x + \widetilde{I}) & \longrightarrow & [x] \end{array}$$

for all $x \in A$.

Theorem 2.9 *Let A and $A^{'}$ be two rings, if $f : A \longrightarrow A^{'}$ is an epimorphism, then there exists a one-to-one order-preserving correspondence between the L-fuzzy ideals of $A^{'}$ and the L-fuzzy ideals of A which are constant on the kernel of f. Furthermore, if $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ and $\widetilde{I}^{'} : A^{'} \longrightarrow L$ are L-fuzzy ideals of A and $A^{'}$ respectively (with $\widetilde{I}$ constant on the kernel of f), then $f(A_{\widetilde{I}}) = A^{'}_{f(\widetilde{I})}$ and $f^{-1}(A^{'}_{\widetilde{I}^{'}}) = A_{f^{-1}(\widetilde{I}^{'})}$.*

More details of the above results may be obtained from [14], because of the proofs are very similar when we consider $[0, 1]$ or L.

Definition 2.10 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal of the ring A, it is said that it is prime (prime fuzzy ideal on a lattice L or prime L-fuzzy ideal) if for all $x, y \in A$ such that $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(0)$, then $\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(0)$ or $\widetilde{I}(y) = \widetilde{I}(0)$.*

It is evident that if I is a prime crisp ideal, then it verifies the condition of Definition 2.10, and therefore the previous definition is a generalization of the same concept in crisp.

The definition of prime L-fuzzy ideal can be alternatively presented in the following equivalent ways.

Theorem 2.11 *If $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ is an L-fuzzy ideal, then the following assertions are equivalent:*

i) $\widetilde{I}$ is a prime L-fuzzy ideal,

ii) $A_{\widetilde{I}}$ is a prime ideal,

iii) $A/A_{\widetilde{I}}$ is integral,

iv) $A/\widetilde{I}$ is integral.

Proof. The equivalence of the statements i) and ii) follows from Definition 2.10; that of statements ii) and iii) is a well known result in algebra. The equivalence of statements iii) and iv) is a consequence of Theorem 2.8.

Corollary 2.12 *The one-to-one correspondence in Theorem 2.9 preserves prime L-ideals.*

The proof is a simple exercise of basic algebra.

Definition 2.13 *Let $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ be an L-fuzzy ideal, it is said that it is trivial if $\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(1), \forall x \in A - \{0\}$, or if $\widetilde{I}(1) = \widetilde{I}(0)$.*

As a consequence, it is trivial that the following corollary is true.

Corollary 2.14 *If $\widetilde{I}$ is an L-fuzzy trivial ideal then the crisp ideal $A_{\widetilde{I}}$ is trivial.*

The converse is not true in general. To see this it is sufficient to consider the L-fuzzy ideal $\widetilde{I}$ defined by

$$\widetilde{I}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 1/2 & \text{if } x \in 2\mathbb{Z} - \{0\} \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases},$$

which is non-trivial, while $A_{\widetilde{I}}$ is trivial.

3 Maximal fuzzy ideals on a lattice

Definition 3.1 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in the ring A, it is said that it is maximal if the crisp set $A_{\widetilde{I}}$ is a maximal crisp ideal.*

Lemma 3.2 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in the ring A , if $\widetilde{I}$ is maximal, then it has only a value different from $\widetilde{I}(0)$ in any element of the ring A, that is, it is the characteristic function of $A_{\widetilde{I}}$.*

Proof. It is a consequence of Proposition 2.5, since $A_{\widetilde{I}}$ is a maximal ideal. ■

Corollary 3.3 *Let $\widetilde{I}$ be a maximal L-fuzzy ideal in the ring A. The α-cut of $\widetilde{I}$, $\widetilde{I}^{\alpha}$, for any $\alpha \in L$, is either the empty set or the maximal crisp ideal or A.*

Proof. By Lemma 3.2 $\widetilde{I}$ has only two different values, and therefore the α-cut is the empty set, the maximal crisp ideal $A_{\widetilde{I}}$ or the ring A. ■

The following theorem presents equivalent definitions of maximal L-fuzzy ideal.

Theorem 3.4 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in the ring A, the following assertions are equivalent:*

i) $\widetilde{I}$ is a maximal L-fuzzy ideal,

ii) $A/A_{\widetilde{I}}$ is a field,

iii) $A/\widetilde{I}$ is a field.

Proof. The equivalence of the statements i) and ii) is consequence of a well known result in algebra. The equivalence of statements ii) and iii) is a consequence of Theorem 2.8. ■

The following corollary, besides that to be useful in the proof of Proposition 3.6, establishes a clear relationship between the prime L-fuzzy ideals defined in Definition 2.10 and the maximal L-fuzzy ideals defined in Definition 3.1.

Corollary 3.5 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in the ring A, if $\widetilde{I}$ is maximal, then $\widetilde{I}$ is prime.*

Proof. It is an immediate consequence of Theorem 2.11 and Theorem 3.4. ■

Corollary 3.6 *The application considered in Theorem 2.9 preserves the maximal L-fuzzy ideals.*

The proof is similar to the proof in Corollary 2.12.

The maximal ideals are fundamental in Commutative Algebra. The following theorem and its corollaries assure that there is always a sufficient number of them.

Theorem 3.7 *If A is a ring with $A \neq 0$, then it has, at least, a maximal L-fuzzy ideal.*

The proof of this theorem is trivial by applying an analogous result for crisp ideals (see any elementary book of Algebra, for example [9]).

Proposition 3.8 *If Im($\widetilde{I}$) is a lattice totally ordered and $A_{\widetilde{I}} \neq A$ is a L-fuzzy ideal of A, then there exists a maximal L-fuzzy ideal $\widetilde{M}$ of A which contains to $\widetilde{I}$.*

Proof. A maximal L-fuzzy ideal which contains to $\widetilde{I}$ is the L-fuzzy set $\widetilde{M}$ defined by

$$\widetilde{M}(x) = \begin{cases} \widetilde{I}(0) & \text{if } x \in M \\ \widetilde{I}(1) & \text{if } x \notin M \end{cases}$$

where M is the maximal crisp ideal that contains to the ideal $\bigcup_{\alpha > \widetilde{I}(1)} \widetilde{I}^{\alpha}$. ■

Remark 3.9 *If the ring A is local, then the previous proposition is also satisfied also, because of in this case M = "The only maximal ideal of A".*

The condition that $\mathrm{Im}(\widetilde{I})$ is totally ordered is very important in the proof of Proposition 3.8, as it can be seen in the following

Example 3.10 *Let $L = \{1, 2, 3, 6\}$ be the set of divisors of natural number 6 to the order relation "divides to". The following L−fuzzy ideal of $\mathbb{Z}$ is not content in any maximal:*

$$\widetilde{I}(x) = \begin{cases} 6 & \textit{if } x \in 6 \cdot \mathbb{Z} \\ 3 & \textit{if } x \in 3 \cdot \mathbb{Z} - 6 \cdot \mathbb{Z} \\ 2 & \textit{if } x \in 2 \cdot \mathbb{Z} - 6 \cdot \mathbb{Z} \\ 1 & \textit{in other case} \end{cases} = g.c.d.(x, 6).$$

This example motivates the definition of weakly maximal L-fuzzy ideal that we will approach in a subsequent study.

Definition 3.11 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal, and let $L_1 = \{$the minimal elements of $(Im(\widetilde{I}) - \{\widetilde{I}(1)\})\}$, it is said that $\widetilde{I}$ is weakly maximal if it is satisfied that $\bigvee_{\alpha \in L_1} \alpha = \widetilde{I}(0)$ and $\widetilde{I}^{\alpha}$ is a maximal ideal for all $\alpha \in L_1$.*

This is a generalization of maximal L-fuzzy ideal, which verifies that all L-fuzzy ideal is content in a weakly maximal L-fuzzy ideal.

Proposition 3.12 *Each element of A which is not a unit is content in a maximal L-fuzzy ideal.*

Proof. Let x be an element of A which is not a unit, and let I the crisp ideal formed by $x \cdot A$. Let M the maximal crisp ideal such that $I \subseteq M$. Let a_1 and a_2 be two elements in the lattice L with $a_1 < a_2$. If we consider the L-fuzzy set $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ defined by

$$\widetilde{I}(x) = \begin{cases} a_2 & \text{if } x \in M \\ a_1 & \text{if } x \in A - M \end{cases}$$

then $\widetilde{I}$ is a maximal L-fuzzy ideal such that x is content in $\widetilde{I}$. ■

In the following proposition, the maximal L-fuzzy ideals and the local rings are related.

Proposition 3.13 *The following assertions are equivalent:*

i) The ring A is local.

ii) The $\widetilde{I}(0)$-cut of $\widetilde{I}$ is equal to the $\widetilde{J}(0)$-cut of $\widetilde{J}$, for all $\widetilde{I}$ and $\widetilde{J}$ which are maximal L-fuzzy ideals.

iii) All L-fuzzy ideal is content in some maximal L-fuzzy ideal.

Proof. The proof of the first equivalence is immediate, while the second equivalence is a consequence of Remark 3.9 by using a similar construction to Example 3.10. ■

Proposition 3.14 *i) Let A be a ring, and assume that $\widetilde{M} : A \longrightarrow L$ is an L-fuzzy ideal of A, such that $\forall x \notin A_{\widetilde{M}}$, x is invertible. Then A is local and $\widetilde{M}$ is a maximal L-fuzzy ideal of A.*
ii) Let A be a ring and let $\widetilde{M}$ be a maximal L-fuzzy ideal of A such that all element of $1 + A_{\widetilde{M}}$ is invertible in A. Then A is a local ring.

Proof. i) Let I be a crisp ideal in A, then I has not invertible elements, and then $I \subseteq A_{\widetilde{M}}$, therefore A is local and $\widetilde{M}$ is a maximal L-fuzzy ideal.

ii) Let x be an element such that $x \notin A_{\widetilde{M}}$, then $(x) + A_{\widetilde{M}} = A$, since $A_{\widetilde{M}}$ is the maximal crisp ideal. Consequently, there exists an element $a \in A$ and an element $m \in A_{\widetilde{M}}$ such that $x \cdot a + m = 1$, therefore $x \cdot a = 1 - m$ is invertible, that is, there exists a $p \in A$ such that $x \cdot a \cdot p = 1$, and therefore x is invertible. By applying i), A is a local ring. ■

4 Strongly prime L-fuzzy ideals

Definition 4.1 *A L-fuzzy ideal $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ in A is said strongly prime if $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(x)$ or $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(y)$, $\forall x, y \in A$.*

The following proposition provides an equivalent definition.

Proposition 4.2 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in A, the following assertions are equivalent:*

i) $\widetilde{I}$ is strongly prime,

ii) $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y), \forall x, y \in A$ and $Im(\widetilde{I})$ is a totally ordered lattice,

iii) $\widetilde{I}^{\alpha}$ is a prime crisp ideal, for all $\alpha \leq \widetilde{I}(0)$.

Proof. $\boxed{\text{i)} \Longrightarrow \text{ii)}}$ If $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(x)$ then $\widetilde{I}(x) \leq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) \leq \widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(x)$, that is, $\widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) = \widetilde{I}(x \cdot y)$. If $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(y)$ the proof is analogous.

Since $\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) \geq \widetilde{I}(y)$ or $\widetilde{I}(y) = \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) \geq \widetilde{I}(x)$, then $Im(\widetilde{I})$ is a totally ordered lattice.

$\boxed{\text{ii)} \Longrightarrow \text{iii)}}$ If x, y are two elements in A such that $x \cdot y \in \widetilde{I}^{\alpha}$, then $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(x)$ and therefore $x \in \widetilde{I}^{\alpha}$ or $\widetilde{I}(x \cdot y) = \widetilde{I}(y)$ and therefore $x \in \widetilde{I}^{\alpha}$.

$\boxed{\text{iii)} \Longrightarrow \text{i)}}$ Let x and y be two element in A. Let $\beta = \widetilde{I}(x \cdot y)$. Since $\widetilde{I}^{\beta}$ is a prime crisp ideal, then $x \in \widetilde{I}^{\beta}$, and therefore $\widetilde{I}(x) \geq \widetilde{I}(x \cdot y) \geq \widetilde{I}(x)$, or $y \in \widetilde{I}^{\beta}$, and therefore $\widetilde{I}(y) \geq \widetilde{I}(x \cdot y) \geq \widetilde{I}(y)$. Consequently, $\widetilde{I}$ satisfies the conditions to be a strongly prime L-fuzzy ideal. ■

It is convenient to clarify that it have not sense to speak about strongly maximal L-fuzzy ideals, since they have to be, by analogy with prime L-fuzzy ideals, those that they have all α-cuts maximal, but in this case, this is true for all maximal L-fuzzy ideal. The following proposition relates the strongly prime and maximal L-fuzzy ideals.

Proposition 4.3 *Let $\widetilde{I}$ be an L-fuzzy ideal in the ring A. If $\widetilde{I}$ is maximal, then $\widetilde{I}$ is strongly prime.*

Proof. By Corollary 3.3, for all α the crisp set $\widetilde{I}^{\alpha}$ is equal to either the empty set, or $A_{\widetilde{I}}$ or A, and therefore $\widetilde{I}^{\alpha}$ is a prime crisp ideal for all $\alpha \leq \widetilde{I}(0)$. Consequently, by applying Proposition 4.2, $\widetilde{I}$ is strongly prime. ■

The converse is not true in general, unless when some restrictions are imposed, as it is seen in the following

Corollary 4.4 *Let A be a one-dimensional ring, and let $\widetilde{I}$ be a strongly prime L-fuzzy ideal of A. If $\widetilde{I}$ verifies that the crisp ideal $A_{\widetilde{I}} \neq (0)$, then $\widetilde{I}$ is maximal.*

Proof. $A_{\widetilde{I}}$ is maximal, since it is prime and A is of dimension one. ■

5 Finite valued L-fuzzy ideals on a lattice

Definition 5.1 *It is said that $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ is an n-valued L-fuzzy ideal if $\widetilde{I}(A)$ is a finite set of n elements. When no specific n is intended, $\widetilde{I}$ is called finite valued L-fuzzy ideal.*

Lemma 5.2 *$\widetilde{I}$ is a 2-valued L-fuzzy ideal on A, if and only if, it is the characteristic function of an ideal of A, where a characteristic function is now valued on $\{\alpha, \beta\}$ ($\alpha < \beta$).*

The proof of this lemma is trivial.

In particular the maximal L-fuzzy ideals are 2-valued.

Proposition 5.3 *If A is a simple ring and $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ is an L-fuzzy ideal, then $\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(1)$ for all $x \in A$ with $x \neq 0$, that is, $\widetilde{I}$ is the characteristic function of A or of $(0) = \{0\}$.*

Proof. If A is a simple ring, then $A_{\widetilde{I}}$ is either A or (0).

If $A_{\widetilde{I}} = A$, then $\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(0)$ for all $x \in A$.

If $A_{\widetilde{I}} = (0)$, then $\widetilde{I}^{\beta} = (0)$ for all $\beta > \widetilde{I}(1)$, and therefore, $\widetilde{I}(x) = \widetilde{I}(1)$ for all $x \neq 0$. ■

Proposition 5.4 *If $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ is a prime L-fuzzy ideal with $A_{\widetilde{I}} \neq \{0\}$ and A is some of the following rings,*

i) principal ideal domain,

ii) Boolean ring,

iii) Artinian ring,

then $\widetilde{I}$ is the characteristic function of $A_{\widetilde{I}}$.

Proof. It is an immediate consequence of Lemma 3.2.

Proposition 5.5 *If $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ and $\widetilde{I'} : A \longrightarrow L$ are two L-fuzzy ideals of A, then the fuzzy subset of A formed by the intersection of the two ideals $\widetilde{I} \cap \widetilde{I'}$ is a new L-fuzzy ideal of A.*

Proof. It is enough to consider the inequality:

$$(a \vee b) \wedge c \geq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

that it is satisfied for all $a, b, c \in L$. ■

In the previous proposition, the classic intersection definition given by Zadeh [5] is considered, that is,

$$\forall x \in A, \quad \widetilde{I} \cap \widetilde{I'}(x) = \widetilde{I}(x) \wedge \widetilde{I'}(x).$$

In particular, by using Proposition 5.5, the following result is obtained.

Proposition 5.6 *If $\widetilde{D} : A \longrightarrow L$ is an L-fuzzy subset of A and L is a lowerly complete lattice, then there exists the intersection of all the L-fuzzy ideals which contains to $\widetilde{D}$, and therefore, there exists the smallest L-fuzzy ideal which contains to $\widetilde{D}$.*

Proof. It is enough to consider the previous inequality and that since L is a lowerly complete lattice, then all subset of L has infimum. ■

Definition 5.7 *Let $\widetilde{D} : A \longrightarrow L$ be an L-fuzzy subset of A. The smallest L-fuzzy ideal which contains to $\widetilde{D}$ is called L-fuzzy ideal generated by $\widetilde{D}$ and it is denoted by $< \widetilde{D} >$.*

Now, we are going to give a supporting lemma that it will be need to give the following theorem.

Lemma 5.8 *Let $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ be an L-fuzzy ideal of A. If $\widetilde{I}(x) = a$ then $\widetilde{I}^a$ is the smallest α-cut of $\widetilde{I}$ that it contains to x.*

Proof. If $\alpha > a$, then $\widetilde{I}(x) = a < \alpha$, and therefore $x \notin \widetilde{I}^\alpha$. ■

Theorem 5.9 *Let L be a distributive lattice. A L-fuzzy ideal $\widetilde{I} : A \longrightarrow L$ is finite valued if and only if it is generated by a finite valued L-fuzzy set $\widetilde{D} : A \longrightarrow L$.*

Proof. If $\widetilde{I}$ is finite valued then it is trivial that it is generated by a finite valued L-fuzzy set.

To prove the converse, we built firstly the L-ideal generated by $\widetilde{D} : A \longrightarrow L$. If $L^{'} = \widehat{\mathrm{Im}(\widetilde{D})}$ is the completed of $\mathrm{Im}(\widetilde{D})$, then $L^{'}$ is a finite sublattice of L. Let a be an element of $L^{'}$, it will be denoted by L_a to

$$L_a = \{b \in L^{'} \text{ such that } b \geq a\}.$$

Let $M_a = \widetilde{D}^{-1}(L_a)$ and let $I_a =< M_a >$ be.

Consequently, if $a \leq b$ then $I_b \subseteq I_a$.

It is defined the following L-fuzzy set that we will see is a L-fuzzy ideal,

$$\widetilde{I}(x) = \bigvee_{x \in I_a} a.$$

This L-fuzzy set is an L-fuzzy ideal, since it verifies the conditions of Proposition 2.2 since

$$\widetilde{I}(x-y) = \bigvee_{x-y \in I_a} a, \tag{9}$$

$$\widetilde{I}(x) \wedge \widetilde{I}(y) = (\bigvee_{x \in I_b} b) \wedge (\bigvee_{y \in I_c} c) = \bigvee_{\substack{x \in I_b \\ y \in I_c}} (b \wedge c), \tag{10}$$

where the equality (10) is obtained by applying that L is distributive.

If $x \in I_b \subseteq I_{b \wedge c}$ and $y \in I_c \subseteq I_{b \wedge c}$, then $x - y \in I_{b \wedge c}$, and therefore

$$\bigvee_{\substack{x \in I_b \\ y \in I_c}} (b \wedge c) \leq \bigvee_{x-y \in I_a} a$$

and consequently $\widetilde{I}(x-y) \geq \widetilde{I}(x) \wedge \widetilde{I}(y)$.

Similarly, $\widetilde{I}(x \cdot y) \geq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y)$ since,

$$\widetilde{I}(x \cdot y) = \bigvee_{x \cdot y \in I_a} a \tag{11}$$

$$\widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y) = (\bigvee_{x \in I_b} b) \vee (\bigvee_{y \in I_c} c) = \bigvee_{x \in I_a \text{or } y \in I_a} a \tag{12}$$

where the equality (12) is obtained without more than to apply the associative property.

As before, if $x \in I_a$ then $x \cdot y \in I_a$ and if $y \in I_a$ then $x \cdot y \in I_a$, therefore we calculate the supremum on a smaller set, and then $\widetilde{I}(x \cdot y) \geq \widetilde{I}(x) \vee \widetilde{I}(y)$.

On the other hand, if $x \in A$ then $\widetilde{D}(x) = y$, therefore $x \in M_a$; this implies that $x \in I_a$ and consequently $\widetilde{I}(x) \geq a = \widetilde{D}(x)$, that is, $\widetilde{I} \supseteq \widetilde{D}$.

Therefore $\widetilde{I}$ is an L-fuzzy ideal that it contains to $\widetilde{D}$.

If $\widetilde{J} : A \longrightarrow L$ is an L-fuzzy ideal in A that it contains to $\widetilde{D}$, that is,

$$\forall x \in A, \quad \widetilde{D}(x) \leq \widetilde{J}(x),$$

then $M_a \subseteq \widetilde{J}^a$, since $I_a \subseteq \widetilde{J}^a$. By applying Lemma 5.8 we have that if $x \in \widetilde{I}_a$, then $\widetilde{J}(x) \geq a$ for all $a \in L'$ verifying that $x \in I_a$, and this implies that

$$\bigvee_{x \in I_a} a \leq \widetilde{J}(x)$$

and therefore $\widetilde{I}(x) \leq \widetilde{J}(x)$. ■

6 Artinian and Noetherian rings

Now, we will analyze the particular case of Noetherian or Artinian ring.

Definition 6.1 *It is said that a partially ordered set $\mathcal{P}$ is of finite length if the length of all the ways between any two elements of $\mathcal{P}$ is finite.*

Theorem 6.2 *Let A be a ring, the following assertions are equivalent:*

i) A is Artinian,

ii) for all L-fuzzy ideal $\widetilde{I}$, $Im(\widetilde{I})$ is of finite length.

Proof. $\boxed{\text{i)} \Longrightarrow \text{ii)}}$ Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ be elements in $Im(\widetilde{I})$ such that $\alpha_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \ldots$. Since $\widetilde{I}^{\alpha_1} \supseteq \widetilde{I}^{\alpha_2} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{I}^{\alpha_n} \supseteq \ldots$ and A is

Artinian, then there exists an $m \in I\!N$ such that $\widetilde{I}^{\alpha_m} = \widetilde{I}^{\alpha_{m+1}} = \ldots$, that is, $\alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots$ and therefore $Im(\widetilde{I})$ is of finite length.

$\boxed{\text{ii)} \Longrightarrow \text{i)}}$ Let $\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n, \ldots$ be L-fuzzy ideals in A such that $\widetilde{I}_1 \supseteq \widetilde{I}_2 \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{I}_n \supseteq \ldots$, and let L be the real interval $[0, 1]$. If we consider the L-fuzzy ideal defined by

$$\widetilde{I}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \bigcap\limits_{n \in I\!N} I_n \\ \frac{n+1}{n+2} & \text{if } x \in I_n - I_{n+1} \\ 0 & \text{if } x \in A - I_1 \end{cases}$$

then there exists an $m \in I\!N$ such that $\widetilde{I}_m - \widetilde{I}_{m+1} = \emptyset, \widetilde{I}_{m+1} - \widetilde{I}_{m+2} = \emptyset, \ldots$, that is, $\widetilde{I}_m = \widetilde{I}_{m+1} = \widetilde{I}_{m+2} = \ldots$. ■

Since all Artinian ring is Noetherian, then it is a consequence of this theorem that if A is a ring such that for all L-fuzzy ideals $\widetilde{I}$, Im$(\widetilde{I})$ is of finite length, then A is Noetherian. However, the converse is not true, as shows the following

Example 6.3 *Let $Z\!\!\!Z$ be the Noetherian ring formed by the integer numbers, and let $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{I}_k \supseteq \ldots$ be the chain of crisp ideals with $I_n = 2^n Z\!\!\!Z$. Then it can be defined the following L-fuzzy ideal in the ring $Z\!\!\!Z$:*

$$\widetilde{I}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ \frac{n}{n+1} & \text{if } x \in I_n - I_{n+1} \\ 0 & \text{if } x \in Z\!\!\!Z - I_1 \end{cases}$$

where Im$(\widetilde{I})$ is not of finite length.

Acknowledgements

The research in this paper is supported in part by Grants DGE-97-PB-1286 and University of Oviedo-AYP-01-05. Its financial support is gratefully acknowledged.

References

[1] N. Ajmal and K.V. Thomas, The lattices of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 74 (1995) 371-379.

[2] J.M. Anthony and H. Sherwood, Fuzzy groups redefined, J. Math: Anal. Appl. 69 (1979) 124-130.

[3] P. Bhattacharya, Fuzzy subgroups II, Inform. Sci. 38 (1986) 293-297.

[4] V.N. Dixit, R. Kumar and N. Ajmal, Ideal Fuzzy and fuzzy outweigh ideal of to ring, Fuzzy Sets and Systems 44 (1991) 127-138.

[5] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications, Academic Press Inc., 1980.

[6] A. Garmendia, M. Molero and A. Salvador, T-Fuzzy prime ideals, Fuzzy Sets and Systems, 80 (1996) 245-254.

[7] J.A. Goguen, L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967) 145-174.

[8] J.A. Herencia, Conceptos fundamentales de la Matemática Difusa, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 17 (2001) 23-50.

[9] T.W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, 1974.

[10] Y.B. Jun, J. Neggers and H.S. Kim, Normal L-fuzzy ideals in semirings, Fuzzy Sets and Systems, 82 (1996) 383-386.

[11] G.J. Klir and T.A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice-Hall International (UK) Limited, 1988.

[12] R. Kumar, Fuzzy nil radical and fuzzy primary ideal, Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991) 81-93.

[13] H.V. Kumbhojkar and M.S. Bapat, Not-so-fuzzy fuzzy ideal, Fuzzy Sets and Systems, 37 (1990) 237-243.

[14] H.V. Kumbhojkar and M.S. Bapat, Correspondence theorem for fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 41 (1991) 213-219.

[15] H.V. Kumbhojkar and M.S. Bapat, On prime and primary fuzzy ideals and their radicals, Fuzzy Sets and Systems, 53 (1993) 203-216.

[16] H.V. Kumbhojkar, Some comments on spectrums of prime fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 85 (1997) 109-114.

[17] D.S. Malik, Fuzzy relations on rings and groups, Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991) 117-123.

[18] S.M. Mostafa, Fuzzy implicative ideals in BCK-algebras, Fuzzy Sets and Systems, 87 (1997) 361-368.

[19] Or. M. Swamy and D.V. Raju, Algebraic fuzzy systems, Fuzzy Sets and Systems, 41 (1991) 187-194.

[20] Z. Wang and Y. Yu, TL-subrings and TL-ideals. Part 2. Generated TL-ideals, Fuzzy Sets and Systems, 87 (1997) 209-217.

[21] Y. Yu and Z. Wang, TL-subrings and TL-ideals. Part 1. Basic concepts, Fuzzy Sets and Systems, 68 (1994) 93-103.

[22] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

[23] M.M. Zahedi, A note on L-fuzzy primary and semiprime ideals, Fuzzy Sets and Systems, 51 (1992) 243-247.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº *18 (2001), 109–114.*

Las Matemáticas en la transición del Bachillerato a la Universidad

Roberto Rodríguez del Río
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid
I.E.S. Gabriel García Márquez, 28915 Leganés (Madrid)
e-mail: `rr_delrio@ucm.es`

En los últimos cursos han empezado a llegar a la Universidad las primeras promociones de alumnos que han cursado lo que se conoce como Bachillerato LOGSE. Todavía en este curso, y en Madrid en particular, llegan algunos alumnos procedentes del antiguo COU, pero empiezan a ser minoría. En el próximo curso y los siguientes, estos alumnos desaparecerán completamente.

Cualquier profesor de los que impartimos clases en primeros cursos de licenciaturas de Ciencias empezamos a ver el resultado de lo que se ha venido a denominar, desde algunos sectores, como uno de los mayores logros sociales en materia de Educación, la LOGSE. Hace no muchos años era habitual oir quejarse a los profesores de la Universidad de lo mal preparados que venían los alumnos del C.O.U.: "...saben muy poco de integrales...", "...saben poco de derivadas...", etc. Ahora ya no va a existir este problema, porque puede que nadie les haya explicado nunca ni las derivadas ni las integrales, puede simplemente que un alumno vaya a parar a una carrera como Química, Física o Matemáticas y no haya cursado la asignatura de Matemáticas en Segundo de Bachillerato. ¿Increible? Pues es cierto, el Bachillerato actual es tan "abierto" que permite y provoca estas situaciones y otras muchas que iremos saboreando poco a poco, a medida que pasen los años y nadie haga nada por remediarlo.

Bachillerato LOGSE

El Bachillerato actual, implantado con la LOGSE, forma parte de lo que se denomina Enseñanza Secundaria no Obligatoria. Para acceder a él hay que haber superado la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), aunque lo de haber superado es una forma de hablar, ya que, de hecho un porcentaje muy importante de los alumnos que acceden a él lo hacen no habiendo superado (está prohibido decir suspendido) una o dos asignaturas, entre las que, no pocas veces, se encuentran las Matemáticas. Por si alguien no lo sabe, lo de que un alumno obtenga o no la titulación de Graduado en Secundaria y, por tanto, pueda promocionar a Primero de Bachillerato, se decide en muchos casos por votación en una Junta de Evaluación constituida por los profesores del alumno, así de objetivo es el sistema.

Sea como sea, una vez superada la etapa de la ESO, el alumno que decide continuar sus estudios a través del Bachillerato, tendrá que realizar dos cursos en los que tendrá que elegir entre una de las siguientes modalidades:

- Artes
- Humanidades y Ciencias Sociales
- Ciencias de la Naturaleza y la Salud
- Tecnología

Dentro de cada una de las modalidades anteriores existen diferentes opciones tanto en el Primer como en el Segundo Curso, que condicionarán la Prueba de Acceso a la Universidad que el alumno habrá de realizar y los estudios universitarios posteriores a los que podrá acceder. Describir cada una de las posibilidades con asignaturas, cargas lectivas, etc., sería demasiado largo para comentarlo aquí y tampoco es el objeto de este artículo. (Para ver en detalle la organización de las enseñanzas de Bachillerato, con asignaturas y cargas lectivas de cada una de ellas, se puede consultar `http://www.comadrid.es/cmadrid/sfp/orientacion/bachill.htm`. Aunque es la organización correspondiente a la Comunidad de Madrid, para el resto de Comunidades no hay variaciones significativas.)

Hay que decir que, en realidad, en la mayoría de los Institutos sólo se ofertan dos de las modalidades: la de *Humanidades y Ciencias Sociales* y la de *Ciencias de la Naturaleza y la Salud*. En la práctica hay muy pocos estudios universitarios a los que se pueda acceder exclusivamente desde las otras opciones.

Por ejemplo, un alumno con interés por alguna carrera de contenido humanístico elegirá la modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales*, dentro de la cual, deberá optar por Humanidades (sin Matemáticas, "letras puras" que llamaríamos antes) o por Ciencias Sociales (con Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales), pensando en estudiar Economía, Empresariales, Sociología, etc.

La asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales se imparte en 4 períodos semanales de 50 minutos cada uno, tanto en Primer como en Segundo Curso, y en ella se estudia: Álgebra (Números, Matrices, Determinantes, Sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal), Análisis (Derivadas, Integrales) y Probabilidad y Estadística (Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial). (Todo esto en los dos años.)

Otro alumno, interesado en una carrera de ciencias, elegirá la modalidad de *Ciencias de la Naturaleza y la Salud* y optará, dentro de esta modalidad, entre Ciencias de la Naturaleza o Ciencias de la Salud. Este alumno puede tener la asignatura de Matemáticas o no tenerla dependiendo de las asignaturas que elija (en Primero la cursará obligatoriamente, pero en Segundo puede no cursarla.)

Esta asignatura de Matemáticas (para alumnos de Ciencias) se imparte con el mismo horario y su contenido es como el de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, quitando la Programación Lineal y cambiando la Probabilidad y Estadística por Geometría Analítica en el plano y en el espacio.

Aparte de la curiosidad, por llamarlo de alguna forma, de que hay una opción, en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, que no permite al alumno presentarse a las Pruebas de Acceso a la Universidad, ya que tendría que examinarse de asignaturas que no ha cursado; hay algunas otras singularidades que afectan directamente a la formación Matemática de los futuros estudiantes universitarios de carreras de Ciencias.

Las Matemáticas dentro del Bachillerato

Como se ha comentado antes, hay dos asignaturas de Matemáticas que aparecen en el Bachillerato LOGSE (que siguen manteniéndose en la reforma de contenidos mínimos recientemente aprobada): las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (I y II, primer y segundo curso, respectivamente) que se imparten en la modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales*, opción de Ciencias Sociales; y las Matemáticas (I y II) en las modalidades de *Ciencias de la Naturaleza y la Salud* y la de *Tecnología*.

Llama la atención especialmente la posibilidad que tiene un alumno de cursar la modalidad de *Ciencias de la Naturaleza y la Salud* y, en segundo curso, elegir una opción que no contenga Matemáticas II (aunque sí puede contener Física y Química) y, después, puede acceder a estudios tales como Arquitectura, Biología, Economía, Física, Ingeniero Agrónomo, Ingeniero Geólogo, Ingeniero Industrial, Ingeniero Químico, Química o incluso Matemáticas. (¿Es esto un error de fondo de quien diseñó los planes de estudio o había algún tipo de intencionalidad?) Si, después de todo, el número de alumnos que eligen esta vía, la de librarse de las Matemáticas en el último curso de Bachillerato, fuera pequeño, la cosa no tendría la mayor importancia; pero no parece que lo sea, aunque no se disponga de una estadística al respecto. Probablemente sea este uno de los muchos asuntos en los que convendría que los Profesores de Matemáticas de la

Universidad dijeran algo, porque a los de los Institutos no parece hacernos nadie demasiado caso.

Sin embargo, afortunadamente para quien tenga que dar clases en los primeros cursos universitarios, sí hay alumnos que eligen Matemáticas en Bachillerato. ¿Cuál es la formación matemática de estos alumnos? Para intentar hacerse una idea sobre la respuesta a esta pregunta hay que empezar la historia desde antes, desde la Enseñanza Secundaria Obligatoria, la ESO.

¿Matemáticas en la ESO?

La llamada Educación Secundaria Obligatoria la constituyen cuatro cursos, divididos en dos ciclos. El Primer Ciclo, que comprende los dos primeros cursos, de 12 a 14 años, es impartido por Maestros con alguna Licenciatura, por ejemplo, Licenciatura en Historia, Licenciatura en Pedagogía, o sin Licenciatura, nos referimos, claro está, a los que imparten las clases de Matemáticas. ¿Qué criterio se ha utilizado para que un Licenciado en Historia acabe impartiendo clase de Matemáticas a los alumnos de Primer Ciclo de ESO? Se supone que será pedagógico, porque todo en la ESO lo es, y a fuerza de serlo, viola muchas veces las reglas del más elemental sentido común y, por tanto, se hace incomprensible para muchos profesores.

En cada uno de los cursos, se estudia una asignatura de Matemáticas con una carga lectiva de 3 sesiones semanales de 50 minutos, cuando, no hace mucho, esto mismo se hacía en 5 sesiones semanales.

El Segundo Ciclo, tercero y cuarto, se imparte por Profesores de Enseñanza Secundaria procedentes del antiguo Cuerpo de Agregados de Instituto. También hay en cada uno de los cursos una asignatura de Matemáticas con 3 sesiones semanales de 50 minutos, cuando en el antiguo BUP esto se hacía en 4 sesiones.

Con este exiguo horario que reduce las Matemáticas a una especie de "maría", con no mucha más importancia que ciertas asignaturas optativas que se ofrecen al alumno, con nombres tan sugerentes como: "Transición a la Vida Adulta", "Ocio y Recreación", "Medios de Comunicación" y un larguísimo etcétera, disponiendo todas ellas de dos sesiones semanales, es fácil imaginar cuáles van a ser los conocimientos matemáticos de cualquier alumno que acaba la ESO.

El sistema de promoción entre los diferentes cursos de la Secundaria es más o menos el siguiente:

- Primero a Segundo: promoción automática.
- Segundo a Tercero: se puede repetir sólo una vez, si lo decide la Junta de Evaluación, independientemente del número de asignaturas que el alumno no haya superado.

- Tercero a Cuarto: en Tercero sólo se puede repetir una vez también. Al año siguiente el alumno, aunque no haya aprobado -perdón- superado ninguna asignatura, se convierte en un PIL, alumno que promociona “Por Imperativo Legal”.

Esto nos lleva a tener en la misma clase, en los cursos de Tercero y Cuarto, elevadísimos porcentajes de alumnos que en el curso anterior no aprobaron tres, cuatro o más asignaturas y a los que, se supone, hay que ofrecer una atención especial, atención a la diversidad, aunque sean alumnos que no tienen el más mínimo interés por aprender absolutamente nada y a los que, en muchos casos, se ha acostumbrado a un nulo esfuerzo. Alumnos que cuando tengan el título de Graduado en ESO, tendrán eso, un título, una casi nula formación académica y, lo que es peor, ningún tipo de formación profesional que les permita acceder al mercado laboral con unas mínimas posibilidades.

Sin embargo, el currículo, según la LOGSE, ha de ser flexible y abierto. Tan flexible y tan abierto, que cualquier profesor puede decidir si en Matemáticas enseña sistemas de ecuaciones, si no los enseña, si les habla de fractales, si hacen fotografía matemática o componen letras de canciones con presunto contenido matemático y la música del “Tractor Amarillo”. (Invito encarecidamente al lector a juzgar sobre si lo anterior es una exageración, sin más que leer, un artículo publicado en la Revista SUMA, de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, número 36, febrero 2001, páginas 67-71, en la que alguien que se nos presenta como Profesora y Jefe del Departamento de Matemáticas de un Instituto de Enseñanza Secundaria, describe una actividad llamada “Parodia Matemática”, realizada en su Instituto, que consiste en que los alumnos compongan canciones con contenido “matemático”, que después han sido **evaluadas** en las Juntas de Evaluación.)

Todo vale, porque los contenidos no tienen la mayor importancia, sólo importa la actitud, que no la aptitud; ni el estudio, ni el esfuerzo, ni la comprensión de conceptos, ni el dominio de técnicas. Y, sobre todo, hay que adaptar las enseñanzas al entorno del alumno. La traducción de esto a efectos prácticos ha supuesto que, si un profesor, en un instituto que se encuentre en un entorno, por ejemplo, de un polígono industrial, intenta trabajar con sus alumnos, interesándose por que el mayor número de ellos acceda a la Universidad, puede encontrarse enfrente a algún *talibán* de las nuevas y revolucionarias prácticas pedagógicas que lo recrimine (quizás acusándole de medieval o trasnochado) y lo intente reconducir indicándole más o menos: “...si estos alumnos no van a llegar a la Universidad, qué importa qué se les enseñe, lo importante es que se diviertan...”. Que se diviertan y acaben trabajando en el polígono industrial, pero que no vayan a la Universidad, ya irán otros que estudien en institutos situados en otros entornos. ¿Es éste el logro social?

Ahora, comprender lo que va a pasar en Bachillerato es sencillo. El Primer Curso, es posible que se tenga que dedicar a intentar explicar a los alumnos que esto de aprender Matemáticas requiere un cierto esfuerzo. El Segundo Curso, a intentar que aprendan las mínimas Matemáticas que les permitan pasar por el examen de Matemáticas de las Pruebas de Acceso a la Universidad con una cierta dignidad.

Conclusiones

Hace poco tiempo se han aprobado dos Reales Decretos que regulan los contenidos mínimos de las asignaturas de la ESO y el Bachillerato. En cuanto a Matemáticas, se concretan más los contenidos, se recuperan las denominaciones clásicas de las diferentes partes de las Matemáticas y hacen que, al menos en lo que respecta al hecho de saber qué enseñar, la cosa se aclare un poco. También se distribuyen los contenidos según los cursos. Antes, en el Primer Ciclo de ESO, se enunciaban unos contenidos y objetivos muy generales sin especificar si había que estudiarlos en Primer o en Segundo Curso.

En Primer Ciclo de ESO aumenta una hora la carga lectiva de la asignatura, pero permanece igual en Segundo Ciclo. El Bachillerato queda casi tal y como estaba.

Pero, ¿cuál va a ser el impacto de esta nueva regulación? ¿cómo se va a controlar su correcta aplicación? ¿alguien cree que los del tractor amarillo y la fotografía matemática van a cambiar su diversión cotidiana por lo de ponerse a enseñar algo?

Empieza a sentirse entre muchos Profesores en general, y de Matemáticas en particular, un profundo desánimo, una sensación de que, si no estamos ante una situación irreversible para la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país, estamos a punto de entrar en ella.

Se nos anuncia desde la Administración la inminente aprobación de una Ley de Calidad de la Enseñanza. Las leyes sobre educación suelen contener maravillosas intenciones en sus preámbulos, intenciones y principios que comparten todos, pero después hay que llevar esas ideas a la práctica. Esta implementación, o es realmente eficaz e inmediata, o no cambiará nada el rumbo de este barco.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *18 (2001), 115–138.*

¿Está justificada la enseñanza de los algoritmos de cálculo?

Jesús Beato Sirvent
I.E.S. Bahía de Cádiz.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz.
e-mail: `jesus.beato@uca.es`

Resumen

Tomando como eje central el algoritmo de cálculo de la raíz cuadrada para números naturales, este trabajo intenta reflexionar sobre uno de los aspectos que considero clave en la Educación Matemática: la enseñanza y aprendizaje de algoritmos. Tras unas consideraciones iniciales que nos situarán en la realidad de una práctica docente, se describen brevemente tres algoritmos posibles para tal cálculo, ilustrándolos con algunas notas históricas y dotándolos de contenido a través del análisis de sus equivalencias con diversos procesos geométricos de interés. Por último, a modo de propuesta didáctica, se señalan algunos puntos con los que elaborar una posible unidad para el estudio de la raíz cuadrada de un número natural.

1 Introducción

He de confesar que la raíz cuadrada siempre ha provocado en mí sentimientos contradictorios. Desde el *terror* infantil ante el cálculo de una raíz cuadrada con un algoritmo totalmente vacío de contenido y por tanto artificial (a una edad en la que la naturaleza del ser humano le incita a preguntar el por qué de cualquier proceso), hasta el *interés* adolescente que años más tarde despertó en mí el estudio de la conmoción que debió causar en la mentalidad griega clásica la aparición de los números irracionales, dados por raíces cuadradas que representaban la medida de la diagonal de un cuadrado, pasando por el *placer* ante la contemplación de la demostración pitagórica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

En mis estudios me acompañó siempre: la demostración de la existencia de raíces n-ésimas de un número positivo en plena construcción del número real, los distintos métodos numéricos para su cálculo aproximado, su plenitud de significado en el campo complejo, la superficie Riemanniana por ella determinada,.....

Sin embargo, constrastaba esta visión con la situación en la que me reecontré con $\sqrt{\ }$ al llegar a la Enseñanza Media como profesor, a un curso de 2º B.U.P.

- Los alumnos habían estudiado en su Enseñanza Básica el mismo algoritmo vacío y artificial que yo en mi infancia. Además con una presentación del mismo basada exclusivamente en el cálculo, que eludía cualquier equivalencia geométrica y cualquier análisis histórico. Por supuesto, los alumnos no recordaban este algoritmo.
- La mayoría de los alumnos operaban con cierta soltura con radicales cuadráticos, aunque no comprendían la necesidad de tal cálculo ante la imposibilidad de trabajar con la expresión decimal de números irracionales.
- En la práctica, el cálculo de $\surd$ se limitaba al pulso de la tecla correspondiente de la calculadora.
- Aunque habían estudiado en 1º B.U.P. de forma "axiomática" que las raíces cuadradas de números naturales no cuadrados perfectos proporcionaban números irracionales, desconocían ningún tipo de demostración de este resultado.
- No había para ellos ninguna diferencia real entre el proceso de extracción de decimales en una $\surd$ y en una división euclídea.

Otro motivo más de interés por el estudio de $\surd$ es el gran número de relaciones con la Geometría que permite trabajar en el aula.

Después de presentar los resultados de una experiencia en clase, haré unas reflexiones sobre diversos aspectos de la Enseñanza actual de las Matemáticas y compararé brevemente tres algoritmos de cálculo de $\surd$, ya que no se trata éste del motivo central del trabajo. Para finalizar, señalaré los puntos que a mi juicio deberían incluirse para un tratamiento didáctico de este tema e incidiré en dos aspectos a mi juicio importantes.

2 Una experiencia motivadora.

En una clase de segundo de Educación Secundaria de Adultos (ESA), antes de empezar a estudiar el bloque numérico, que se supone un bloque suficientemente trabajado con anterioridad, propuse la siguiente cuestión por escrito y bajo total anonimato:

"Si tuviéseis la oportunidad de modificar programas de educación ,¿qué suprimiríais y que mantendríais de las Matemáticas que conocéis?. Justifica el por qué de tu decisión."

He de confesar que era consciente de la identificación casi total que a estos niveles se hace de Matemáticas y Números.

La sorpresa fue grande cuando una mayoría de alumnos (en torno al 57 por ciento) opinaban que entre los contenidos que debían permanecer de manera indudable figuraba lo que ellos llamaban "la raíz cuadrada". De éstos, hay que hacer notar que eran muchos (alrededor del 80 por ciento) los que no justificaban su decisión. Sin embargo, ésto no resta interés a las justificaciones que hacía el 20 por ciento restante. Todos argumentaban razones de tradición expresadas en pasado, con ideas que podrían resumirse en las de este alumno: "siempre se ha explicado", "hasta mi padre lo sabe" . Incluso un alumno escribía: ¿Cómo no lo vamos a aprender?.

Al indagar un poco más en sus respuestas, en contacto directo ya con los alumnos, quedó patente que cuando se referían a la "raíz cuadrada" no se referían al concepto, ni a su significado geométrico, ni siquiera a las ope-raciones con radicales, sino al algoritmo que en este trabajo denominaré tradicional de cálculo de la raíz cuadrada. Motivado por esta situación, pasé a los alumnos que tenía en este nivel, un sencillo test con sólo 3 items. En la hoja de respuestas había un consejo (no prohibición) escrito de que no utilizasen la calculadora.

1. Para cada uno de los números siguientes busca otro que al elevarlo al cuadrado te dé como resultado el que se te proporciona:

4	25	81
100	144	1000000
2	3	5

2. Halla la raíz cuadrada de los siguientes números naturales:

64	1000000	3
2	4	125
7	17	20

3. En cada caso, se da el área de un cuadrado, del que se desea calcular su lado.

144	125	81
9	100	1000000
2	3	5

De las respuestas de los alumnos (90 alumnos realizaron el test), se observa:

- Sólo un alumno observó que los dos items primeros pedían realmente lo mismo e incluso lo expresó por escrito en su hoja de respuestas. No hizo alusión al item 3.

- Ningún alumno introduce números negativos en sus respuestas.
- En el item 1, aunque los 6 primeros apartados estaban formados por cuadrados perfectos, la dificultad aumenta al aumentar el tamaño de los números. Nadie usa el algoritmo tradicional, sino que hacen pruebas por ensayo y error.
- En el item 1, sólo un alumno (al que hice referencia en la nota primera), hace los tres últimos apartados. El resto de los alumnos en una mayoría deja en blanco y algunos (el 12 por ciento) contestan que no se puede al no haber ningún número que elevado al cuadrado proporcione el resultado deseado.
- En el item 2, prácticamente todos (el 90 por ciento) lo contesta correctamente, utilizando la tecla de raíz cuadrada de la calculadora, a pesar del consejo inicial.
- Ningún alumno contestó correctamente al item 3. El 88 por ciento lo dejó en blanco y el resto dividió el área entre 4 o entre 2.

De estas observaciones se puede concluir:

- Aunque muchos alumnos habían manifestado su interés porque permaneciese en la enseñanza de las Matemáticas el algoritmo tradicional de cálculo de la raíz cuadrada, nadie los utiliza para responder a los apartados del item (2).
- No comprenden el significado de la raíz cuadrada como operación en cierto sentido inversa de elevar al cuadrado. De ahí la no aparición de números negativos.
- No se identifica el lado de un cuadrado con la raíz cuadrada de su área.
- Permanece aún un estado muy primario de la concepción numérica. Aún no se comprende que un número natural no cuadrado perfecto pueda tener una raíz cuadrada (y mucho menos, dos). En particular, aún están muy lejos de la idea de número irracional. Esto es comprensible, ya que en la prueba inicial de principio de curso, ni siquiera quedaba clara la concepción de número racional cuando les preguntaba por un número que multiplicado por 3 diera como resultado 7.

3 Reflexiones

- La ambigüedad que presenta la pregunta que titula este trabajo es intencionada.

  - ¿Qué entiendo por justificar un contenido en la enseñanza de las Matemáticas?

    Pienso que se trata de argumentar la necesidad y utilidad de su estudio. Más aún, especificar en qué sentido es necesario y para qué es útil. En este aspecto juegan un papel determinante las dos direcciones en las que se orienta la enseñanza de las matemáticas y éstas en sí mismas: la Matemática Pura y la Matemática Aplicada. Habrá pues que distintguir entre contenidos que sólo tengan una justificación para un continuado estudio posterior de las matemáticas y contenidos que tengan una justificación en base a su aplicación a otras áreas de conocimiento. Parece obvio que el equilibrio entre estos dos aspectos debe ser tomado como principio básico en la Educación Matemática preuniversitaria

  - ¿A qué algoritmos de cálculo me estoy refiriendo?

    Tomando como eje central el algoritmo de cálculo de la raíz cuadrada, fundamentalmente el trabajo va referido a los algoritmos de cálculo numérico, aunque estas reflexiones pueden extenderse a cualquier tipo de algoritmos.

  - ¿Cómo decidir la conveniencia o no de la enseñanza de un determinado algoritmo para resolver una cuestión, cuando se dispone de varios?, ¿quién debe decidir esta cuestión: autoridades educativas, líneas editoriales, especialiastas en didáctica de las matemáticas alejados en el tiempo y en los usos del contacto diario con los alumnos de estas edades y niveles,...?. Lejos de ser vanal, pienso que es ésta una cuestión de suma importancia. Comparto con J. A. Herencia en [8] que el contenido de la enseñanza obligatoria debiera ser fijo y consensuado con los especialistas en cada materia, que lejos de ser los grupos señalados más arriba, no son sino los profesores. En particular, las Asociaciones de Profesores de Matemáticas podrían haber jugado un papel protagonista en esta línea. En una disciplina como la nuestra, en la que prácticamente existen Sociedades de Profesores en cada Comunidad y todas ellas están agrupadas en una sola Federación, no parece que tengan mucho sentido las amplias diferencias de currículos.

- El planteamiento de las consideraciones que siguen surge de una inquietud personal. Desde hace ya algunos años, mi docencia ha estado repleta, por muy distintas causas, de alumnos desinteresados por las matemáticas y por tanto (aunque no sé si se trata o no de una implicación y en su caso, no sé en qué sentido) poco estudiosos y trabajadores de las mismas. Este hecho ha dado como resultado, año tras año, resultados académicos muy pobres, entendiendo por resultados académicos no la calificación de la asignatura, sino lo que es mucho más importante: el grado de aprovechamiento de las capacidades de los alumnos. Asumiendo el nivel de responsabilidad que mi docencia haya tenido en esta situación, que por otra parte, es compartida por otros muchos profesores, hasta hacerse generalizada, no pretendo simplificar las causas de la misma. Ni tan siquiera pretendo plantear un debate, sin duda necesario, sobre el estado actual de la enseñanza de las Matemáticas, pues no creo éste el momento para hacerlo y ya parece que hay abiertas muchas líneas de investigación con tal fin. En [15] se hace un análisis con mucha profundidad, generalidad y realismo de la práctica docente y en [14] y [9] se dan ejemplos de una enseñanza de las matemáticas y una respuesta del alumnado que debieran cuanto menos hacer pensar a todo profesor de matemáticas. Tan sólo quiero poner de manifiesto, en esta reflexión, el estado de continua revisión en el que se encuentra mi docencia actual de las matemáticas, después de diez años ejerciéndola. Y en el marco de esta revisión, mi objeto de estudio actual es el papel en la enseñanza de las matemáticas del estudio de algoritmos. Pienso que la excesiva algebrización de las Matemáticas escolares sufrida en el sistema educativo anterior nos ha dejado en herencia una enseñanza excesivamente algorítmica ya desde los primeros años y en cierto sentido, que más adelante precisaré, vacía de contenido, al mismo tiempo que ha producido, como si de un proceso de acción-reacción se tratase, que en el sistema actual, muchos de estos contenidos se hayan reducido o incluso perdido, extremo éste tampoco aconsejable.

- El actual sistema educativo en que estamos inmersos nos pide a los profesores, una distinción consciente entre conceptos, procedimientos y actitudes. El aspecto procedimental de la enseñanza de las matemáticas, tiene como uno de los objetivos prioritarios, la algoritmización. Y en el conjunto de los algoritmos, los de cálculo numérico juegan un papel fundamental en la etapa obligatoria a la que refiero todo este trabajo, debido al fuerte peso que en ésta tiene el bloque numérico (aspecto éste del que también habría mucho que analizar).

- A nivel anecdótico, siempre me ha llamado la atención la importancia, incluso social, que ha tenido y aún hoy sigue teniendo el algoritmo tradicional de cálculo de la raíz cuadrada como mis alumnos ponían claramente de manifiesto al principio del artículo. ¿Quién no ha oído nunca expresiones como:

  – "Yo, a mi edad, aún sé hasta hacer la raíz cuadrada".
  – "Hoy en día, el nivel de las Matemáticas está por los suelos. Los jóvenes ni siquiera saben hacer una raíz cuadrada."?

  Incluso hay oposiciones en las que entre los items de las pruebas objetivas aparece el cálculo de alguna raíz cuadrada, bien exacta o aproximada.

- Es indudable que el aprendizaje de los algoritmos de cálculo numérico está estrechamente relacionado con el uso de material tecnológico: calculadoras y ordenadores. Uno de los cambios que pienso deben producirse en la enseñanza de las matemáticas en la etapa secundaria obligatoria, es centrar menos la atención en el cálculo algorítmico con lápiz y papel, tratado ya abundantemente en la Enseñanza Primaria, e incorporar las nuevas tecnologías al aula, con sus ventajas e incovenientes. En [11] se analizan con profundidad los cambios tanto en la docencia como en el papel del profesorado que deben producirse en la etapa. Dado que disponer de ordenadores en el aula no está aún al alcance del sistema educativo español y que la gestión de las aulas de Informática de los centros, no en todos favorece su uso en la disciplina de Matemáticas, me centraré en el uso de la calculadora.

  Sin entrar tampoco en análisis de los argumentos a favor y en contra de tal instrumento electrónico (en [16] y en [10] se dedican sendos capítulos a esta polémica y la analizan con rigor) sólo deseo subrayar que es evidente que el tiempo que se gana usando la calculadora debería ser invertido, por ejemplo, en justificar los algoritmos usados. Me parece también interesante fijar mi posición al respecto: soy partidario de que ciertos algoritmos -entre ellos los de cálculo de la raíz cuadrada de números naturales- y a ciertas edades -como las de la etapa secundaria- se trabajen con calculadora. A este respecto y para evitar problemas de heterogeneidad, el departamento de matemáticas del centro donde trabajo hace ya algunos años que adquirió una treintena de calculadoras científicas y es algo que pienso asequible a todos los centros. Además, afortunadamente, cada día son más frecuentes los préstamos de todo tipo de calculadoras por parte de las Sociedades de Profesores de Matemáticas o por parte de las empresas tecnológicas del ramo. Animo a los Departamentos de Matemáticas de los centros de Secundaria a que dispongan en abundancia de tales instrumentos para ser usados como tales.

- Aún admitido el uso generalizado de la calculadora para el problema que nos ocupa, cabe un interrogante: ¿para qué y por qué enseñar/aprender un algoritmo de cálculo numérico para la raíz cuadrada de un número natural, si la propia calculadora ya dispone de una tecla para tal mi-sión?

  Desde luego, la necesidad de cálculo práctico ya no se puede argumentar para justificar la enseñanza de tales algoritmos. Por tanto, hay que buscar otras razones que justifiquen su enseñanza. Entre ellas, sugeriría:

  - La aplicación correcta y sistemática de algoritmos proporciona una estructura mental positiva.
  - La búsqueda de relaciones entre diversas áreas de las Matemáticas que posibilitan estos algoritmos aporta una justificación siempre interesante.
  - La elaboración y redacción de algoritmos por parte de los alumnos, constituye una estupenda ocasión para hacer matemáticas en clase.
  - Hay que mantener siempre un equilibrio entre el carácter terminal de los estudios a los que me refiero en este trabajo y el carácter propedéutico de los mismos. Hay cierto algoritmos que es necesario conocer para la formación matemática posterior del alumno.
  - Es importante enriquecer la docencia de las matemáticas con el estudio de distintos algoritmos que resuelvan un mismo problema. Su comparación, análisis de resultados y de operaciones necesarias constituyen otro interesante momento para hacer matemáticas con los alumnos.

- En el trabajo con algoritmos hay tres fases:

  1. Planteamiento.
     * ¿Qué cálculo tengo que hacer?
     * ¿Qué algoritmo utilizo para este cálculo?
  2. Realización.
     * ¿Cómo se aplica el algoritmo elegido?
  3. Interpretación
     * Los resultados obtenidos, ¿se adaptan al problema planteado originalmente?

Entiendo que es fundamental que estas tres fases se trabajen en el aula porque constituyen la forma más natural de dar contenido a los algoritmos. Quizás uno de los problemas que han contribuído a que se den situaciones como las que describí en la introducción es que en el trabajo con algoritmos prácticamente la totalidad del tiempo se ha empleado en trabajar el punto 2. Además hay que tener siempre en cuenta, con vista a insistir en el carácter integrador de la presentación de la asignatura, que la estrecha relación entre Aritmética y Geometría, indisolubles desde la aparición de la matemática como ciencia, proporciona ahora, gracias a la ayuda del Algebra como herramienta, técnicas muy interesantes.

4 El algoritmo tradicional para el cálculo de la raíz cuadrada

Comencemos con un ejemplo numérico: el cálculo de $\sqrt{8543296}$. Por fijar ideas sin pérdida de generalidad, extraemos dos cifras decimales, esto es, calculamos la raíz con un error menor que 10^{-2}:

8543296	2922,89
4543296	49×9=441
133296	582×2=1164
26896	5842×2=11684
5212,00	5844,8×0,8=4675,84
536,1600	5845,69×0,09=526,1121
10,0479	

En realidad, el algoritmo lo podríamos haber escrito así:

8543296	2000+900+20+2+0,8+0,09
4543296	(2000×2+900)×900=4410000
133296	((2000+900)×2+20)×20=116400
26896	((2000+900+20)×2+2)×2=11684
5212,00	((2000+900+20+2)×2+0,8×0,8=4675,84
536,1600	((2000+900+20+2+0,8)×2+0,09×0,09=526,1121
10,0479	

En general, el algoritmo (para un error menor que 10^{-2}) es:

- Buscamos calcular $\sqrt{M}$, donde $M \in N$, expresándola de esta forma:

$$\sqrt{M} = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 + a_{-1} + a_{-2}$$

donde

$$a_i = a_i'.10^i$$

siendo a_i' un dígito, $\forall i = 3, 2, \ldots, -2$

- En el primer paso nos estamos aproximando a M con a_3^2, esto es, con un cuadrado perfecto.
$$M \approx a_3^2$$
- En el segundo paso, nos estamos aproximando a $M - a_3^2$ con $(2a_3 + a_2).a_2$:
$$M - a_3^2 \approx (2a_3 + a_2).a_2 = 2a_3a_2 + a_2^2$$
con lo que en realidad, nos aproximamos a M con un cuadrado perfecto:
$$M \approx a_3^2 + 2a_3a_2 + a_2^2 = (a_3 + a_2)^2$$
- En el tercer paso nos aproximamos a $M - (a_3 + a_2)^2$ con $(2(a_3 + a_2) + a_1)a_1$, es decir:
$$M - (a_3 + a_2)^2 \approx (2(a_3 + a_2) + a_1)a_1 = 2(a_3 + a_2)a_1 + a_1^2$$
con lo que también es este caso nos aproximamos a M con un cuadrado perfecto, a saber:
$$M \approx (a_3 + a_2)^2 + 2(a_3 + a_2)a_1 + a_1^2 = (a_3 + a_2 + a_1)^2$$

Y así sucesivamente. Lo verdaderamente interesante es destacar que en rea-lidad nos estamos aproximando al número al que queremos hallar la raíz cuadrada a través de una sucesión de cuadrados perfectos, con la particularidad de que en cada paso añadimos una cifra significativa a la raíz que deseamos calcular.

En términos generales, el algoritmo podría ser descrito así:

$$\begin{array}{r|l}
M & a_3 + a_2 + a_1 + a_0 + a_{-1} + a_{-2} \\
M - a_3^2 & (2a_3 + a_2)a_2 \\
M - (a_3 + a_2)^2 & (2(a_3 + a_2) + a_1)a_1 \\
M - (a_3 + a_2 + a_1)^2 & (2(a_3 + a_2 + a_1) + a_0)a_0 \\
M - (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)^2 & (2(a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + a_{-1})a_{-1} \\
M - (a_3 + a_2 + a_1 + a_0 + a_{-1})^2 & (2(a_3 + a_2 + a_1 + a_0 + a_{-1}) + a_{-2})a_{-2} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Además, este proceso justifica el por qué de ese aparente artificio de la separación de M en grupos de dos cifras y la inclusión de dos ceros cada vez que se desea obtener una nueva cifra decimal del resultado. Basta observar:

$$10^{2(n-1)} \leq M < 10^{2n} \Leftrightarrow M \text{ tiene } n \text{ grupos de dos cifras } \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq \sqrt{M} < 10^n \Leftrightarrow \left[\sqrt{M}\right] \text{ tiene } n \text{ cifras}$$

Es decir, el número de grupos de dos cifras (de derecha a izquierda) de M coincidirá con el número de cifras de la parte entera del resultado de la raíz. Se podría decir que por cada dos cifras de M, hay una cifra de $\sqrt{M}$.

En definitiva, el algoritmo podría ser enunciado así:

- Dado $M \in N$, existe un único $n \in N$ tal que $10^{2(n-1)} \leq M < 10^{2n}$. Entonces $\left[\sqrt{M}\right]$ tiene n cifras. Se pretende buscar $m \in R/m^2 = M$ con un error menor que $10^{-p}, (p \in N)$. Es decir, buscamos:

$$m = \sum_{k=-p}^{n-1} a_k = \sum_{k=-p}^{n-1} a'_k.10^k$$

  donde $a'_k \in 0, 1, 2, 3 \ldots, 9, \forall k = n-1, n-2 \ldots, -p$

- a_{n-1} lo buscamos con la condición:

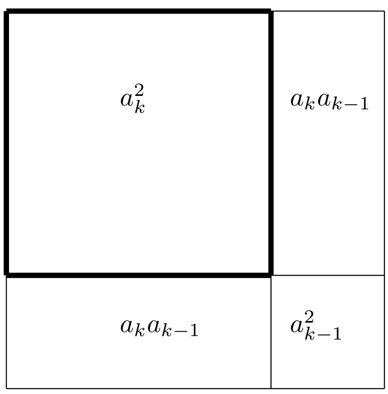
$$a_{n-1}^2 \leq M < (a_{n-1} + 10^{n-1})^2$$

- $a_k, \forall k = n-2, \ldots, -p$ lo buscamos con la condición:

$$a_k \left(a_k + 2 \sum_{j=k+1}^{n-1} a_j \right) \leq M - \left(\sum_{j=k+1}^{n-1} a_j \right)^2 < \left(a_k + 10^k\right) \left(a_k + 10^k + 2 \sum_{j=k+1}^{n-1} a_j \right)$$

Este algoritmo nos sugiere la siguiente interpretación geométrica:

- Se trata de buscar el lado de un cuadrado cuya área conocemos.
- En cada paso a partir del segundo, vamos construyendo un nuevo cuadrado, cuya área está más próxima al área dada y que está formado añadiendo al cuadrado construido en el paso anterior dos rectángulos y un cuadrado según el siguiente esquema:



Nota: Como se apunta en [5], este diagrama también aparece en la obra del matemático griego Teón de Alejandría, del siglo IV d.d.C.

Y esta es la justificación de que en el algoritmo tradicional se multiplique por 2 en cada paso y se le sume la siguiente cifra, multiplicando el resultado por está última.

En definitiva: La esencia geométrica del algoritmo tradicional de la raíz cuadrada permite interpretar dicho algoritmo como un método de aproximación sucesiva al área de un cuadrado a través de cuadrados cada vez más grandes, obtenidos "orlando" el cuadrado del paso anterior con dos rectángulos y un nuevo cuadrado, según indicaba en la figura anterior. De ahí que para una mejor comprensión de este algoritmo, sea interesante la tarea de completar cuadrados, tratada desde un punto de vista tanto numérico como algebraico.

Como Santiago Fernández opina en [5] este algoritmo tiene su origen en la antigua cultura china, ya que aparece descrito con todo detalle por primera vez en una de las 9 secciones del tratado más importante de Matemáticas de esta cultura, a saber, el *Jiuzhang Suaushu, (El Arte Matemático en Nueve Secciones).* Es tal la importancia de este tratado que incluso hay historia-dores de las Matemáticas que lo comparan con *Los Elementos* de Euclides, sobre todo por la repercusión que su estudio tuvo en otras culturas orientales, como Japón o Corea. Como su propio nombre indica es una recapitulación de un total de 246 problemas organizados en nueve secciones. Su fecha de aparición y su autor son hoy en día desconocidos.

5 El algoritmo de Herón para el cálculo de la raíz cuadrada

El método de Herón para el cálculo de la raíz cuadrada de un número natural parte de un argumento geométrico y ya parece ser era conocido por los babilonios 2000 años antes. Este método, que también es atribuido por algunos autores al griego Arquitas (428-365 a. C.), se denomina a veces "algoritmo de Newton" (por las razones que veremos en 5.3). Pretende obtener un cuadrado de área igual al número al que queremos calcular la raíz cuadrada a base de "cuadrar" rectángulos de área constante igual a dicho número, aumentando o disminuyendo sus dimensiones. Una vez obtenido dicho cuadrado, su lado será, naturalmente, la raíz cuadrada deseada. A priori se fija el número de cifras decimales con las que se desea trabajar. En cada paso, la altura del rectángulo correspondiente se calcula a partir del área conocida y de la base. En el primer paso, ésta se toma al azar (aunque después matizaremos más esta elección) y en cada uno de los siguientes pasos, se toma como base la media aritmética entre la base y la altura del rectángulo correspondiente al paso anterior. Es por eso, que algunos autores, denominan a este método, *"método estadístico"*. El algoritmo se detiene en el momento en que la base y la altura del correspondiente rectángulo coinciden hasta el orden deseado. A diferencia del algoritmo tradicional, este método no obtiene la aproximación deseada de cifra en cifra. Además este método permite una fácil disposición de los cálculos intermedios en forma de tabla, que a su vez, hace inmediato su tratamiento en una hoja de cálculo. Esta disposición puede ser la siguiente:

Para calcular $\sqrt{N}$

Paso	1	2	$\cdots$
Base	x_1	$x_2 = \dfrac{x_1 + a_1}{2}$	$\cdots$
Altura	$a_1 = \dfrac{N}{x_1}$	$a_2 = \dfrac{N}{x_2}$	$\cdots$

Ejemplo 5.1 *Calculemos por este método* $\sqrt{8543296}$ *con cuatro cifras decimales exactas.*

Paso	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Base	$x_1 = 2000$	$x_2 = 3135.824$	$x_3 = 2930.1211$	$x_4 = 2922,9007$	$x_5 = 2922.8917$
Altura	$a_1 = 4271.648$	$a_2 = 2724.4182$	$a_3 = 2915.6802$	$a_4 = 2922.8827$	$a_5 = 2922.8917$

Por tanto: $\sqrt{8543296} \approx 2922.8917$

5.1 El método

En general, el algoritmo para el cálculo de $\sqrt{N}$ puede plantearse así:

$$x_1 \in N; x_{n+1} = \frac{x_n + \dfrac{N}{x_n}}{2} = \frac{x_n^2 + N}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

En definitiva:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \in N \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{N}{x_n}\right) \end{array} \right.$$

Que es la conocida como *Fórmula de Herón* para el cálculo de $\sqrt{N}$. Permite calcular la raíz cuadrada de un número, utilizando las operaciones aritméticas elementales: suma, resta, multiplicación y división.

5.2 Aceleración de la convergencia

5.2.1 Primera aceleración

Dado $N \in (0, +\infty)$, existe unos únicos $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, n \in Z$ tales que:

$$a.10^n \leq N < (a+1).10^n$$

Tomamos entonces $x_1 = a.10^n$. Esta elección produce una convergencia rápida del método. De hecho, el ejemplo anterior, que así se había hecho, ha necesitado sólo de 5 iteraciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2000 \\ x_2 &= 3135,824 \\ x_3 &= 2930,1211 \\ x_4 &= 2922,9007 \\ x_5 &= 2922,8917 \\ x_6 &= 2922,8917 \end{aligned}$$

5.2.2 Segunda aceleración

Las técnicas del cálculo numérico nos proporcionan una aceleración de la convergencia, mucho más eficaz para el cálculo de la raíz cuadrada de un número natural:

Dado $N \in N$, existe un único $n \in Z$ tal que:

$$2^n \leq N < 2^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{N}{2^{n+1}} < 1$$

Llamamos $M = \dfrac{N}{2^{n+1}}$. Ahora calculamos $\sqrt{M}$, tomando como valor inicial $x_1 = aM + b$, siendo $a = 2 - \sqrt{2} \approx 0,5858$ y $b = \dfrac{9\sqrt{2} - 6}{16} \approx 0,4205$. Una vez calculada $\sqrt{M}$, se tiene:

$$\sqrt{N} = \sqrt{M.2^{n+1}} = \sqrt{M}.\sqrt{2^{n+1}} = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}.\sqrt{M} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2^{\frac{n}{2}}.\sqrt{2}.\sqrt{M} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

En nuestro ejemplo inicial, se tendría:

- $N = 8543296$
- $\left.\begin{array}{rcl} 2^{23} & = & 8388608 \\ 2^{24} & = & 16777216 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{23} \leq N < 2^{24}$
- Sea $M = \dfrac{N}{2^{24}} = \dfrac{8543296}{16777216} = 0,5092201$. Hallamos ahora $\sqrt{0,5092201}$, con:
- $x_1 = 0,58585.0,5092201 + 0,4205 = 0,7188011$

- $$\begin{aligned} x_1 &= 0,7188011 \\ x_2 &= 0,7136154 \\ x_3 &= 0,7135966 \\ x_4 &= 0,7135966 \end{aligned}$$

  Es decir, sólo se han necesitado tres iteraciones.

- Ahora, $\sqrt{8543296} = 0,7135966.2^{12} = 2922,8917$

5.3 Newton coincide con Herón

Es interesante observar como este método, que surge de un planteamiento geométrico muy natural, y muy propio de la geometría griega, coincide con el resultado que se obtendría al aplicar a la ecuación $x^2 = N$ el método de Newton, que usa como herramientas las derivadas, de creación bastante posterior: En efecto: si llamamos $F(x) = x^2 - N$, entonces, el método de Newton me proporciona la solución de la ecuación iterando con la fórmula:

$$x = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

En nuestro caso:

$$x = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - \frac{x^2 - N}{2x} = \frac{x^2 + N}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{N}{x}\right)$$

Y esto proporciona a su vez una generalización de la fórmula de Herón, válida para el cálculo de $\sqrt[n]{N}$. Si llamamos $F(x) = x^n - N$, entonces:

$$x = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - \frac{x^n - N}{nx^{n-1}} = \frac{(n-1)x^n - N}{nx^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[(n-1)x + \frac{N}{x^{n-1}}\right].$$

Además, en el caso particular de $n = 3$, se tendría:

$$x = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{N}{x^2}\right)$$

y esta generalización se corresponde de manera natural con el argumento geométrico que cabría esperar del algoritmo de Herón para el cálculo de la raíz cúbica, "cubicando" prismas de base cuadrada en los que la altura viene determinada por el área de la base y por el volumen (N) y en los que en cada paso, el nuevo lado de la base del prisma es la media aritmética de las 3 dimensiones del prisma construido en el paso anterior. Es decir:

- $h_n = \dfrac{N}{x_n^2}$

- $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + h_n}{3} = \dfrac{2x_n + \dfrac{N}{x_n^2}}{3} = \dfrac{2x_n^3 + N}{3x_n^2} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{N}{x_n^2}\right)$

5.4 Herón y su algoritmo

Herón de Alejandría fue un importante geómetra y mecánico. Es difícil, y los historiadores no siguen todos la misma línea, establecer la fecha de su nacimiento y muerte, aunque hay dos opiniones al respecto. Ambas están fundadas en las relaciones que hay entre sus textos y los de otros científicos como Ptolomeo, Pappus o Arquímedes. Unos opinan que vivió aproximadamente sobre el 150 a.d.C y otros opinan que sobre el 250 d.d.C. Lo que sí parece establecido es que desarrolló todo su conocimiento al amparo de la ciudad de Alejandría, capital cultural del momento.

Se conservan numerosos trabajos de Herón, tanto en Geometría como en Mecánica, aunque la autoría de algunos de ellos, todavía hoy en día se discute.

Herón formula su método para el cálculo de la raíz cuadrada de un número natural en el Libro I de su tratado titulado *Métrica.* Lo enuncia de la siguiente forma:

"Como 720 *no tiene su lado racional, podemos obtener su lado salvo una diferencia muy pequeña como sigue: Ya que el siguiente número cuadrado es* 729*, que tiene a* 27 *por lado, dividimos* $\frac{720}{27}$*. Esto da* $26\frac{2}{3}$*. Añadimos* 27 *a ésto, obteniendo* $53\frac{2}{3}$*, y tomamos la mitad de éste, ó* $26\frac{5}{6}$*. El lado de* 720 *estará entonces muy cercano a* $26\frac{5}{6}$*. De hecho, si multiplicamos* $26\frac{5}{6}$ *por si mismo, el producto es* $720\frac{1}{36}$*, por tanto la diferencia en el cuadrado es* $\frac{1}{36}$*. Si deseamos obtener una diferencia más pequeña aún que* $\frac{1}{36}$*, tomaremos* $720\frac{1}{36}$ *en lugar de* 729 *(o bastaría tomar* $26\frac{5}{6}$ *en lugar de* 27 *y procediendo de la misma manera obtendríamos la diferencia mucho menor que* $\frac{1}{36}$*"*

Es muy interesante observar sobre este texto:

- Desde el primer instante, hay una plena identificación de $\sqrt{N}$ con el lado de un cuadrado de área N. De hecho, llama a 27 *"el lado de* 729*"*.

- Deja entrever el carácter iterado de su método y cómo la reiteración produce convergencia de manera natural.

- Nos propone un x_0, a saber, la raíz cuadrada del cuadrado perfecto más cercano al número al cual queremos hallar la raíz.

- La notación mixta para los números racionales es muy adecuada para controlar los errores, a los que hace alusión en el texto de forma explícita.

6 El manuscrito Bakhshali y su algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada

El manuscrito Bakhshali (MB a partir de ahora) es un manuscrito muy antiguo que fue descubierto hace aproximadamente 100 años. Está escrito en corteza de abedul y fue encontrado en el verano de 1881 cerca de la ciudad que le da nombre, en el actual Pakistán. Su hallazgo se debe a un agricultor, arrendatario de un inspector de policía llamado Mian An-Wan-Udin (aunque éste ha pasado la historia como descubridor del manuscrito), que lo encontró mientras removía una piedra en unas ruinas. Tras pasar por varias manos, finalmente fue enviado al Dr. Rudolf Hoernle, de la Universidad de Calcuta, para su estudio y publicación. El Dr. Hoernle presentó una descripción de MB ante la Sociedad Asiática de Bengala en 1882 y fue publicado en el *Antiquario Indio* en 1883. Más tarde, en la decimoséptima Conferencia Oriental celebrada en Viena en 1886 presentó un informe completo que fue publicado en sus Actas. Una versión revisada de este artículo apareció en en el *Antiquario Indio* de 1888. En 1902, cedió el manuscrito a la biblioteca Bodleian de Oxford, donde permanece aún.

Una gran parte del manuscrito había sido destruida y sólo alrededor de 70 láminas, de las cuales algunas eran desechos, sobrevivieron.

Entre 1927 y 1933, el MB fue editado por G.R. Kaye y publicado con una extensa introducción, una traducción inglesa y una reproducción en facsímiles del texto.

Todavía hoy no se ha resuelto la controversia creada ante el problema de la datación del MB. Después de los estudios de numerosos historiadores de las Matemáticas como el propio Dr. Hoernle, G.R. Kaye, Moritz Cantor, F. Cajón, B. Datta, S.N. Sen o R.C. Gupta, lo más plausible parece ser pensar que el manuscrito es una copia posterior de un primer trabajo original compuesto sobre el 400 de nuestra era. Incluso algunos autores dudan de su origen Indio.

El MB es un manual de reglas y ejemplos ilustrativos, junto con sus soluciones. Está dedicado fundamentalmente a la Aritmética y al Algebra, con algunos problemas sobre Geometría y Medidas. Como sólo partes de él han sido restauradas, no podemos tener certeza de las relaciones con las distintas ramas de las Matemáticas del MB completo.

Ahora bien, la forma en que el manuscrito está organizado es bastante inusual para un documento Indio. El MB proporciona una descripción de cada regla.

Después sigue con un ejemplo escrito primero con palabras y después usando la terminología matemática. Se da después la solución al problema propuesto y finalmente se expone una demostración de la validez del algoritmo.

Nota: El esquema del MB responde a una manera natural de comunicar Matemáticas a quién no las sabe aún. De hecho, pienso que es el esquema de una clase tradicional de Matemáticas, en cualquier nivel. Por supuesto, este esquema no deja de lado la participación de los alumnos, estando abierto a la consulta de dudas, a la corrección de los ejercicios y problemas por parte de ellos, a la exposición de trabajos realizados,... Algunos pseudopedagogos y falsoespecialistas en didáctica de las Matemáticas descalifican este esquema y a quienes así trabajan, despreciando una cultura didáctica ancestral. ¿Tan malos fueron los resultados?, ¿tan mal prepraradas acabamos las generaciones que crecimos con este tipo de enseñanza?

Una interesante parte de las Matemáticas tratada en el MB es la relativa al cálculo de raíces cuadradas. Se usa en él la siguiente fórmula:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b} = A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left[A + \frac{b}{2A}\right]}$$

donde A^2 es el cuadrado perfecto más próximo a Q y $b = Q - A^2$. La fórmula aparece en el MB enunciada como sigue:

"En el caso de un número no cuadrado, resta el número cuadrado más cercano; divide el resto por el doble de este cuadrado más cercano; la mitad del cuadrado de este resultado divídelo por la suma de la raíz aproximada y la fracción. Se resta ésto y nos dará la raíz correcta."

A continuación en el MB, siguiendo el esquema antes aludido, aparecen algunos ejemplos de aplicación del algoritmo, que recoge la siguiente tabla, junto con el número de cifras correctas que tal cálculo produce.

Q	A	b	Raíz "Bakhshali"	Número de cifras correctas
41	6	5	6,403138528	4
105	10	5	10,24695122	5
487	22	3	22,068076490965	9
889	29	48	29,816105242176	5
339009	582	285	582,2447938796899	11

La aplicación del algoritmo Bakhshali al ejemplo que venimos comparando proporcionaría el siguiente resultado:

$$Q = 8543296; A^2 = 8538084; A = 2922; b = 8543296 - 8538084 = 5212$$

de donde

$$2922 + \frac{5212}{5844} - \frac{\left(\frac{5212}{5844}\right)^2}{2\left(2922 + \frac{5212}{5844}\right)} = \frac{36471691140241}{12477948090} = 2922,8917188291492563...$$

cuyas 11 primeras cifras decimales son correctas.

Sin entrar en más justificaciones de la fórmula y sus implicaciones posteriores, que podrían ser objeto de un trabajo posterior, sólo comentar que en [3], el matemático Indio M.N. Channabasappa obtiene a partir de la fórmula Bakhshali para la raíz cuadrada, una fórmula iterativa para el cálculo aproximado de raíces cuadradas. En [4], el mismo prueba que algunos casos, este algoritmo iterativo derivado de la fórmula Bakhshali es incluso más rápido que la fórmula de Newton, y que por tanto, el método de Herón.

7 Una propuesta didáctica

No pretendo en esta sección presentar una unidad didáctica sobre la raíz cuadrada de números naturales, aunque sí mostrar algunos elementos que pienso que deberían formar parte de una tal unidad, en un planteamiento coherente y en cierta medida completo, del tema. Este planteamiento está pensado para desarrollarlo en tercero y cuarto (opción B de Matemáticas) de E.S.O., aunque algunos de sus apartados bien podrían tratarse con anterioridad.

7.1 Puntos para una propuesta didáctica

- Algunas notas históricas. Podrían exponerse en clase por los alumnos en forma de trabajos individuales o colectivos.
  - Biografía de Herón.
  - Matemáticas en Babilonia.
  - Matemáticas en China.
  - Manuscrito Bakhshali.
  - Impacto de los irracionales en la cultura griega.
- Demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Puede proponerse la reproducción de esta demostración para $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,...
- El símbolo $\sqrt{\ }$ como necesidad ante la imposibilidad de expresar de forma decimal los números irracionales.
- Operaciones con radicales. En tercero podrían trabajarse sólo radicales cuadráticos e introducir en cuarto distíntos índices.
- Cálculo aproximado de raíces cuadradas.

- Método de ensayo y error dirigido con la calculadora, usando:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

- Método tradicional, insistiendo en su interpretación geométrica. Para ello, como opina Guido Ramelline en [12], deberían hacerse ejercicios de completación de cuadrados, que vayan creando una estructura mental adecuada.
- Método de Herón, tratado no desde su expresión iterada (que podía ser tratada en Bachillerato como aplicación del método de Newton), sino como proceso geométrico de cuadrar rectángulos. Estos últimos años, me ha dado muy buen resultado aprovechar el estudio de este algoritmo para que sean los alumnos, a partir de algunos ejemplos resueltos examinados por ellos, quienes redacten el correspondiente algoritmo. Es una buena forma de introducirles en las características del lenguaje matemático, que surgen aquí de manera natural: concisión, síntesis, precisión, generalidad, claridad,...
- Método Bakhshali para el cálculo de la raíz cuadrada. Puede ser tratado como operaciones con fracciones y sólo después de obtener una única fracción, escribir su expresión decimal.

• Ejemplos de situaciones donde aparece la raíz cuadrada, en relación con la geometría, entre las que se podrían tratar:

  - Usos del teorema de Pitágoras. Una actividad interesante es la que yo denomino *Espirales pitagóricas*. Se trata de partir de un triángulo rectángulo arbitrario de catetos conocidos e ir construyendo triángulos rectángulos adyacentes en los que en cada paso un cateto es la hipotenusa del triángulo construido en el paso anterior y el otro cateto se mantiene siempre constante. De esta forma, todos los triángulos construidos comparten un vértice. Los otros vértices (cada uno compartido por dos triángulos adyacentes), forman una espiral poligonal, cuyos radios constituyen una sucesión de raíces. Se puede partir de la sucesión y pedir la construcción geométrica o viceversa.
  - Construcción geométrica de $\sqrt{a}$. Requiere conocer el teorema de la altura para triángulos rectángulos y el hecho de que cualquier triángulo inscrito en un semicírculo es rectángulo. Ver figura 1.

    Como aplicación de esta construcción se puede proponer una demostración geométrica del hecho conocido de que la media

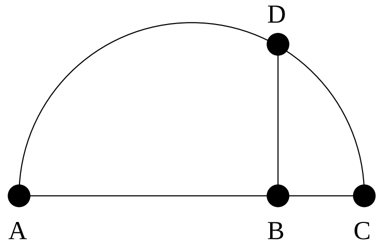


Figura 1: Construcción de $\sqrt{a}$: $AB = a,\ BC = 1,\ BD = \sqrt{a}$.

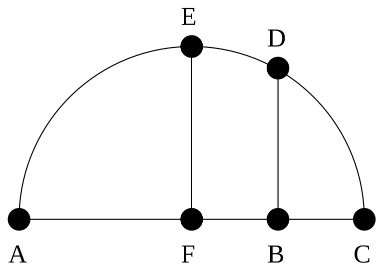


Figura 2: Media geométrica $\leq$ media aritmética:
$AB = a,\ BC = b,\ BD = \sqrt{ab},\ EF = \frac{a+b}{2}$.

geométrica es menor o igual que la media aritmética y que la igualdad se alcanza si y sólo si los dos números son iguales. Ver figura 2.

Incluso para los alumnos más avanzados, se puede plantear el estudio de la siguiente figura, debida a R. Nelsen, que propone Miguel de Guzmán en [7] para estudiar las relaciones entre las cuatro medias usuales, a saber (ver figura 3):

* Media armónica: $\frac{2ab}{a+b}$
* Media geométrica: $\sqrt{ab}$
* Media aritmética: $\frac{a+b}{2}$
* Media cuadrática: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$$MP = a; MQ = b; MA = \frac{a+b}{2}; MG = \sqrt{ab}; MH = \frac{2ab}{a+b}$$

$$MR = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Entre las que se tienen las desigualdades:

$$MH < MG < MA < MR$$

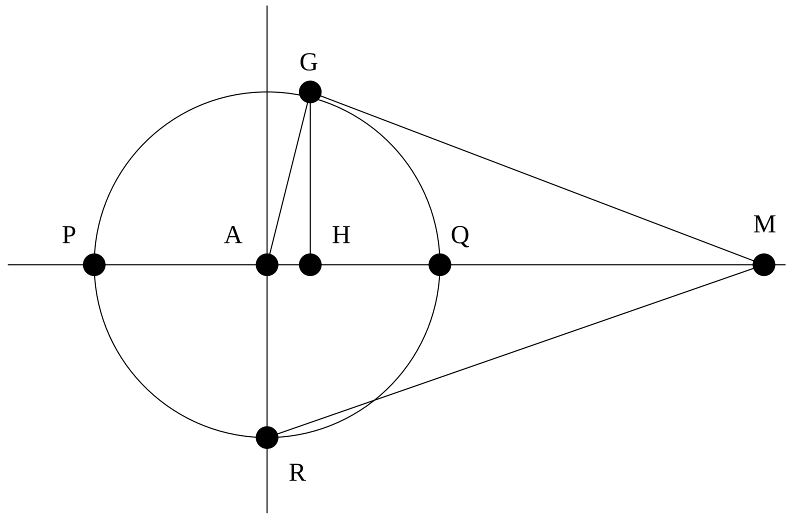


Figura 3: Relaciones entre las medias.

– Como aplicación del teorema de Thales, se puede plantear cómo los formatos DIN constituyen un sistema de rectángulos semejantes cuya razón de proporcionalidad (cociente entre sus lados) es $\sqrt{2}$.

8 Para acabar

No quisiera acabar este trabajo sin incidir aún más en dos aspectos que considero fundamentales:

1. La Enseñanza de las Matemáticas, en particular en la Etapa Secundaria Obligatoria está repleta de procesos algorítmicos que hay que trabajar con los alumnos. Llenemos de contenido estos algoritmos, con:

   - Notas históricas sobre el surgimiento y desarrollo de los mismos.
   - Biografías sobre los Matemáticos que los formularon.
   - Relaciones con otras áreas.
   - Justificaciones de sus planteamientos.

   No convirtamos las matemáticas escolares en un conjunto de "recetas de cocina" que cree en los alumnos la estructura mental:

   "Tipo de ejercicio $\Rightarrow$ Receta correspondiente"

   Aprovechando las oportunidades que nos brinda el curriculo, procuremos que en nuestras clases haya lugar para la práctica de rutinas técnicas (sin duda imprescindibles), pero también para la visualización de procesos, para la demostración, para la elaboración de conjeturas y su prueba o refutación, para la intuición matemática, para las nuevas tecnologías,. . ..

2. No debe haber lugar para el desánimo del profesor. No comuniquemos esa sensación a nuestros alumnos. En este sentido reproduzco, y pienso que es una estupenda forma de concluir, una reflexión propuesta en [13]:

   "...¿Es posible ir más allá de asumir actitudes, invitarles al contagio y esperar con paciencia obtener algún fruto? Más aún, ¿transmitimos algo más que actitudes?, ¿trasciende al final otra cosa que no sea nuestra actitud personal hacia ellos, hacia los problemas (y ante los problemas), hacia la asignatura, ante la vida,...? ¿no es ésta quizás la esencia misma de lo que hace trascendente nuestro trabajo?, ¿no es quizás lo único que no es susceptible de ser leído, y por ende aprendido, en un libro?"

Nota: Las propuestas anteriores también pueden aplicarse en el desarrollo en clase de los más variados temas. Por ejemplo, me remito a [1] para una interesante práctica: la construcción de la cicloide y la comprobación práctica de ser braquistocrona. Asimismo, en [2] se narran las múltiples vicisitudes ocurridas desde la anotación de P. de Fermat sobre su famoso "último teorema" (publicado en 1670) hasta la demostración del mismo dada por A. Wiles (en 1994): una apasionante historia que involucra a importantes matemáticos, construida sobre un problema cuyo enunciado es asequible a edades bastantes tempranas. Su narración resumida, junto con el enunciado de conjeturas aún abiertas, es otra experiencia bastante motivadora.

Bibliografía

[1] BEATO SIRVENT, JESÚS *La cicloide y su propiedad de braquistocrona: una actividad interdisciplinaria.* Epsilon 36 (1996) 407-416.

[2] BEATO SIRVENT, JESÚS *El último teorema de Fermat. Diario de una conquista.* Epsilon 43-44 (1999) 97-120.

[3] CHANNABASAPPA, M.N. *On the square root formula in the Bakhshali manuscript.* Indian J. History Sci. 11(2) (1976) 112-124.

[4] CHANNABASAPPA, M.N. *The Bakhshali square-root formula and high speed computation.* Ganita Bharati 1 (3-4) (1979) 25-27.

[5] FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, SANTIAGO *La raíz cuadrada y la Matemática China.* SUMA 8, 81-83

[6] De Guzmán Ozámiz, Miguel et al *Matemáticas 1º B.U.P.* Ed. Anaya (1990)

[7] De Guzmán Ozámiz, Miguel *El rincón de la pizarra.* Ed. Pirámide (1996)

[8] Herencia, José A. *Definiciones acerca de la Educación Matemática y la Matemática Difusa.* Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. 16 (2000) 89-118

[9] Hernán, Francisco *Retrato de una profesión imaginada.* Ed. Proyecto Sur (1991)

[10] Mora, José Antonio. *Calculadoras.* Colección Dos puntos Ed. Proyecto Sur

[11] National Council Of Teachers of Mathematics *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* SAEM Thales (1991)

[12] Ramellini, Guido *El algoritmo de la raíz cuadrada. Dos tipos distintos de aproximación heurística.* SUMA 35, 63-70.

[13] Ramírez, Angel y Usón, Carlos *Cómo generar problemas.* Publicaciones de la Universidad de Zaragoza. Colección Educación abierta 130, 105-144

[14] Ramírez, Angel y Usón, Carlos *Variaciones sobre un mismo tema.* Ed. Proyecto Sur (1998)

[15] Savater, Fernando *El valor de educar.* Ed. Círculo de Lectores (1997)

[16] Udina i Abelló, Frederic *Aritmética y Calculadoras.* Ed. Síntesis. Colección Cultura y Aprendizaje (1989)

MRI Spring School 2002

Enschede, The Netherlands, May 2002

Frobenius Manifolds in Mathematical Physics

Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants are the main points of focus in the Mathematical Research Institute (MRI) Spring School 2002 on Mathematical Physics. Frobenius manifolds were introduced by Dubrovin as a coordinate-free approach to the Witten-Dijkgraaf- E. Verlinde-H. Verlinde (WDVV) differential equations, which were obtained in Topological Field Theory in the 1990's. It was soon realized that these Frobenius manifolds play a fundamental role in other area's of mathematics which on the surface seem to be unrelated: besides the theory of Gromov-Witten invariants of symplectic manifolds (the second main theme of this School), they also come up in singularity theory, the theory of isomonodromic deformations of linear differential equations, the theory of Coxeter groups and their extensions and the theory of integrable systems of KdV-type. Gromov-Witten invariants can be defined in two important contexts. One is that of symplectic geometry; they are then invariants of certain symplectic manifolds. This work builds of fundamantal work of Gromov, which allows us to deal with them in a remarkably flexible way. The other is the more rigid setting of algebraic geometry. In that case, we consider, following Kontsevich, for a fixed projective variety X certain compact varieties parametrizing maps from algebraic curves to X and the invariants in question are calculated as intersection numbers on the parameter variety. Often they have a classical algebro-geometric interpretation in terms of X and when they do, the results obtained can be quite spectacular. It is the aim of the Spring School 2002 to introduce young mathematicians and physicists to this new and challenging area. We also hope that the School will help to prepare the participants for making their own contribution to these topics in Mathematical Physics in which there are still so many conjectures, open problems and directions left unexplored. The programme consists of 3 weeks of courses on:

Frobenius Manifolds
(B. Dubrovin, Trieste)

Root Systems and Frobenius Manifolds
(G. Heckman, Nijmegen)

Hierachies of Differential Equations
(G. Helminck, Enschede)

Moduli Spaces of Curves and Gromov-Witten Invariants
(E. Looijenga, J.Stienstra Utrecht)

Supersymmetry and Recursion Operators
(P. Kersten, Enschede and I. Krasil'shchik , Moscow)

The Virasoro Algebra
(J. van de Leur, Utrecht)

Modern Trends in Topological Field Theory
(A. Morozov, Moscow)

This will be followed by a SHORT CONFERENCE for which we will invite specialists in the field, who will present lectures on a for the participants comprehensible level.

Prerequisites:

The Spring School is intended for students who have (or are in the final stage of a study for) a masters in mathematics, theoretical physics or a related field with a comparable mathematical background.

Dates:

The Spring School 2002 will be held in Enschede in May 2002.
Application deadline is October 15, 2001.

For more information:

http://www-mri.sci.kun.nl/mri/Education/ss02.html
http://www.math.utwente.nl/fa/springschool/

For contact:

mri@sci.kun.nl

ESCUELA PROSPECTIVA DE MATEMÁTICA APLICADA

DIRECCIÓN
ENRIQUE ZUAZUA IRIONDO
Catedrático de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

COLABORAN
AYUNTAMIENTO DE LAREDO
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

Laredo, del 3 al 7 de Septiembre de 2001

Esta Escuela está primordialmente destinada a jóvenes investigadores interesados en el área de la Matemática Aplicada, en un sentido amplio, y con una formación de, esencialmente, Matemático, Físico o Ingeniero. Por la actualidad de los temas abordados y por el nivel de competencia de los conferenciantes, la Escuela puede ser también de gran utilidad a profesionales consagrados en el área.

Presentaremos una panorámica de algunos temas de actualidad y que, creemos van a ser objeto de desarrollos importantes en los próximos años. Los temas cubiertos son diversos y hemos querido que tanto los aspectos relacionados con el modelaje y la Ingeniería así como los más analíticos y matemáticos estén representados, sin dejar de lado la vertiente computacional.

Es por ello que se ha buscado la participación de un grupo de expertos de reconocido prestigio de amplio espectro.

Entre los temas de la Escuela cabe destacar los destinados al modelaje y la simulación numérica del oleaje marino, así como un curso introductorio sobre Mecánica de Fluídos y las ecuaciones de filtración. Otro de los cursos está destinado al estudio de las ecuaciones de la Teoría Cinética Cuántica en la que la ecuación fundamental de Schrödinger es sustituida por la ecuación de Wigner. Se presentará especial atención al paso al límite de la Mecánica Cuántica a la Clásica cuando la constante de Planck tiende a cero. Se discutirán asimismo métodos de aproximación en elementos finitos para problemas de control óptimo en los que la ecuación de estado asociada es típicamente una ecuación en derivadas parciales. El problema del procesamiento de imágenes será también objeto de un curso en el que se presentarán algunos modelos matemáticos relevantes así como una introducción a las técnicas geométricas, analíticas y computacionales más útiles. Se abordará asimismo el problema de la restauración de imágenes. Finalmente, la Escuela contará también con un ciclo de conferencias sobre algunos útiles analíticos necesarios en el estudio del comportamiento asintótico para tiempos grandes en ecuaciones de evolución, entre los que cabe mencionar la teoría de homogeneización y algunas técnicas propias de la teoría de sistemas dinámicos en dimensión infinita.

Todos los cursos concluirán con la presentación del estado del arte actual y una lista de problemas abiertos relevantes.

El curso será asimismo un foro de encuentro para los expertos en el campo provenientes de diversas Universidades españolas y extranjeras, y especialmente de la Unión Europea.

PROFESORADO

Eduardo Casas Rentería
Universidad de Cantabria

Norbert J. Mauser
Universidad de Viena

Vicent Caselles
Universidad Pompeu-Fabra

Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid

Iñigo Losada Rodríguez
Universidad de Cantabria

Enrique Zuazua Iriondo
Catedrático de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid

INFORMACIÓN MATRICULA Y BECAS

Universidad de Cantabria
Secretaría "Cursos de Verano"
Plaza de la Universidad C/ Sevilla, 6. (39001 Santander)
Tel.: 942 20 09 73 Fax: 942 20 09 75
E-mail: cursos.verano@gestion.unican.es
http://www.gestion.unican.es/gerencia/verano/cursos.html

Secretarías de las diferentes Escuelas y Facultades de la
Universidad de Cantabria

Del 2 de Julio al 7 de Septiembre
Secretaría "Cursos de Verano"
Casa de Cultura "Dr. Velasco"
C/ López Seña, 8. (39770 Laredo) Cantabria
Tel.: 942 61 19 54 Fax: 942 61 18 30

C. Martínez and M. Sanz
The Theory of Fractional Powers of Operators
North-Holland Mathematics Studies, 187. Elsevier Science. 2001.
ISBN: 0-444-88797-0

Este libro pone a disposición de los investigadores una exposición sencilla y directa de los tópicos fundamentales de la teoría de potencias fraccionarias de operadores no negativos, que tiene importantes conexiones con las Ecuaciones en Derivadas Parciales y el Análisis Armónico. Por primera vez un libro trata monográficamente este tema, sobre el que se han escrito gran cantidad de artículos a lo largo de la segunda mitad del siglo.

Los primeros capítulos de la obra se ocupan de las potencias con exponente de parte real positiva, estudiando las cuestiones clásicas al respecto. Como novedad a destacar, el punto de vista adoptado permite incluir los operadores no negativos en espacios localmente convexos sucesionalmente completos, abarcando así ciertos operadores diferenciales que de forma natural aparecen en espacios de distribuciones.

El grueso de la segunda parte del libro se dedica a las potencias de exponente imaginario puro, que han centrado la investigación de los últimos años desde la publicación en 1987 del ya clásico artículo de G. Dore y A. Venni.

Se ha puesto especial cuidado en dar versiones de los resultados con hipótesis ajustadas, particularmente respecto de la densidad de dominio o rango, condiciones que aparecen con frecuencia en la literatura, no siempre de forma necesaria.

Los autores se han esforzado en que el texto resulte claro y sea autocontenido. En esta línea, se incluye un extenso apéndice con los resultados de Análisis Funcional utilizados y unas detalladas notas históricas y bibliográficas al final de cada capítulo que sirven para conocer la trayectoria y el estado actual de la investigación sobre las cuestiones tratadas.

Contents: Introduction. 1. Non-Negative Operators. 2. Differential Operators. 3. The Balakrishnan Operator. 4. An Extension of the Hirsch Functional Calculus. 5. Fractional Powers of Operators. 6. Domains, Uniqueness and the Cauchy Problem. 7. Negative and Imaginary Powers. 8. The Dore-Venni Theorem. 9. Functional Calculus for Co-groups. 10. Imaginary Powers on Hilbert Spaces. 11. Fractional Powers and Interpolation Spaces. 12. Fractional Powers of some Differential Operators. Appendix. Notations. Bibliography.

M.C. López de Silanes, M. San Miguel, G. Sanz y M. Madaune–Tort (Editores)
Actes de VI$^{\grave{e}mes}$ Journèes Saragosse–Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques
Publications de l'Université de Pau, 2001.
ISBN: 2-908930-75-7

Este volumen recoge distintos trabajos presentados en el curso de las sextas Jornadas Zaragoza–Pau de Matemática Aplicada y Estadística, celebradas en Jaca (Huesca) en septiembre de 1999. Las jornadas suponen un encuentro bienal entre los departamentos de las especialidades citadas de las Universidades de Pau y Zaragoza, en la que igualmente participan investigadores de otras universidades francesas y españolas, relacionadas tanto por cercanía geográfica como por afinidades temáticas y de los grupos de investigación. Los temas cubiertos incluyen Análisis Numérico, Aproximación de Superficies, Análisis no Lineal de Ecuaciones en Derivadas Parciales, Estadística y Probabilidad.

Las actas incluyen sesenta y dos de las setenta comunicaciones presentadas en las jornadas, en lenguas francesa, inglesa y española.

POTUGALIÆ MATHEMATICA

PORTUGALIÆ MATHEMATICA publishes original research papers, in all fields of pure and applied mathematics.

Founded in 1937, PORTUGALIÆ MATHEMATICA has published some works of several renowed mathematicians.

TO THE AUTHORS

PORTUGALIÆ MATHEMATICA publishes original high level research papers in all domains of Mathematics and has aimed at shortening its backlog to a reasonable size. We are now in a position to guarantee publication within one year after the paper has been accepted.

Articles should be submitted to the Editors in two copies, written in Portuguese, French, or English, typed on one side of the paper, with wide margins, the formulas clearly displayed. They should not exceed 30 pages. The body of the text should be preceeded by an abstract (150 words maximum), the 1991 AMS Mathematics Subject Classification and a list of key words.

PORTUGALIÆ MATHEMATICA encourages authors to prepare their manuscrits in TeX or LaTeX. In this case articles may be submitted via e-mail to the following address: **portmath@lmc.fc.ul.pt**

Authors are entitled to 20 free offprints.

SUBSCRIPTIONS

One volume, consisting of four issues, is published each year. For volume 58 (2001), subscription prices are $145 USD or 140 Euro for Europe and $156 USD or 150 Euro elswhere, including air mail charges; all payments should be made in advance. Back volumes, starting with volume 49, are available at the following prices: $145 USD or 130 Euro for Europe and $156 USD or 140 Euro elsewhere. To order previous volumes (up to volume 48) please contact our Subscription Service. A 20% discount is afforded to orders of at least 4 subscriptions. Members of the Sociedade Portuguesa de Matemática are entitled to a 70% discount in the purchase of one copy of each volume.

You can get a PS subscription form.

ADDRESS for Subscriptions:

PORTUGALIÆ MATHEMATICA
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. Repblica, 37, Piso 4
1050-187 Lisboa
Portugal

Fax: (351) 21 795 23 49

You can also email us: **portmath@lmc.fc.ul.pt**

EXCHANGES

PORTUGALIÆ MATHEMATICA accepts exchange subscriptions with similar publications.

ADDRESS for Exchanges:

PORTUGALIÆ MATHEMATICA
Av. Prof. Gama Pinto, 2
1649-003 Lisboa
Portugal

Editores / Editors

Conselho Editorial / Editorial Board

REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE

La Revista Matemática Complutense publica trabajos inéditos de investigación o estudios recapitulativos sobre temas relevantes y de interés de la Matemática contemporánea.

Dirección:

Revista Matemática Complutense
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid

Dirección electrónica: **Revista_Matematica@mat.ucm.es**

Telefax: 34-91-39444607 **http://www.mat.ucm.es/serv/revista/**

Periodicidad: semestral

Suscripción anual: 10.000 ptas/60,10 euros

ASYMPTOTIC ANALYSIS

Aims and Scope

The journal Asymptotic Analysis will fulfil a twofold function. It aims at publishing original mathematical results in the asymptotic theory of problems affected by the presence of small or large parameters on the one hand, and at giving specific indications of their possible applications to different fields of natural sciences on the other hand. Asymptotic Analysis thus provides applied mathematicians with a concentrated source of newly acquired information which they may need in formal analysis of asymptotic problems.

Subscription information

Asymptotic Analysis (ISSN 0921-7134) is published in four volumes (16 issues) a year. The subscription price for 2001 (Volumes 25-28) is EUR 880 + EUR 92 p.h. = EUR 972 (US$ 928). The EUR price is definitive. The US dollar price is subject to exchange-rate fluctuations and is given only as a guide. 6% VAT is applicable for certain customers in the EC Countries. Subscriptions are accepted on a prepaid basis only, unless different terms have been previously agreed upon. Personal subscription rates and conditions, if applicable, are available upon request from the Publisher. Subscription orders can be entered only by calendar year (Jan.-Dec.) and should be sent to the Subscription Department of IOS Press, or to your usual subscription agent. Postage and handling charges include printed airmail delivery to countries outside Europe. Claims for missing issues must be made within six months of our publication (mailing) date, otherwise such claims cannot be honoured free of charge.

Instructions to authors

For detailed instructions please refer to our website on the Internet, www.iospress.nl.

Publisher

IOS Press
Nieuwe Hemweg 6B
1013 BG Amsterdam
The Netherlands
Tel.: +31 20 688 33 55
Fax: +31 20 620 34 19

E-mail:

Subscription Department: **order@iospress.nl**
Advertising Department: **market@iospress.nl**
Desk Editorial Department: **editorial@iospress.nl**

Internet:

www.iospress.nl

Título:	CONDICIONES DE FRONTERA TRANSPARENTES Y ABSORBENTES PARA ECUACIONES DE TIPO SCHRÖDINGER.
Doctorando:	Nuria Reguera López.
Director/es:	Isaías Alonso Mallo.
Defensa:	6 de Abril de 2001, Universidad de Valladolid.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude.

Resumen: En esta tesis se estudian condiciones de frontera absorbentes y transparentes (CFA y CFT) para la ecuación lineal de Schrödinger, de conocida importancia práctica. La primera contribución es la obtención, de forma rigurosa, de condiciones que garantizan que las soluciones de una ecuación de Schrödinger están en $L^2(0,+\infty)$ de la variable temporal para cada valor fijo de la variable espacial. Un resultado análogo se prueba para una discretización de ella mediante diferencias finitas centrales. Estos resultados permiten utilizar la transformada de Fourier en tiempo de la solución para obtener CFA con técnicas usuales para otras ecuaciones. En el primer caso, las CFA obtenidas son una generalización de las CFA de Fevens y Jiang.

El tema principal abordado seguidamente es el estudio del carácter de bien puesto de los problemas obtenidos tras imponer las CFA e incorporar las discretizaciones espaciales. Se prueba que estos problemas están débilmente mal puestos, lo cual puede causar problemas si la CFA no es bien elegida. También se estudia la discretización temporal mediante el uso de Métodos Runge–Kutta A-estables. Finalmente es de notar que, para el caso de CFA para el problema semidiscreto en espacio, se obtiene una expresión completa del error cometido con un método completamente discreto con CFA.

Título:	ANÁLISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN NO LOCALES.
Doctorando:	José Carlos Bellido Guerrero.
Director/es:	Pablo Pedregal Tercero.
Defensa:	9 de marzo de 2001, Universidad de Sevilla.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude.

Resumen: Esta tesis está dedicada al estudio de problemas de optimización asociados a problemas de tipo elíptico, no lineal en general, y con restricciones de tipo integral. En este marco se encuentran los problemas de control en los coeficientes para sistemas elípticos. Estos problemas están motivados por cuestiones de gran interés con origen en la física y la ingeniería: diseño óptimo de materiales compuestos, optimización de estructuras elásticas, ... El método adoptado para tratar estos problemas consiste en introducir un problema de Cálculo de Variaciones (que se prueba ser equivalente al problema de optimización inicial), para después aplicar una técnica clásica del Cálculo de Variaciones, el Método Directo. Esto permite establecer resultados de existencia de soluciones óptimas y analizar la no-existencia de éstas en el caso en el que el problema carezca de solución. Este último fenómeno es frecuente en este tipo de problemas. El análisis se lleva a cabo en función de la dimensión, así los casos unidimensional, bidimensional y tridimensional son analizados separadamente.

El principal interés de los resultados obtenidos es que en ellos se permiten ecuaciones de estado no lineales y la dependencia conjunta respecto del control y el gradiente del estado en la función objetivo.

Título:	Análisis asintótico de métodos de proyección para ecuaciones integrales de frontera.
Doctorando:	Víctor Domínguez Báguena.
Director/es:	Francisco Javier Sayas González.
Defensa:	11 de enero de 2001, Universidad de Zaragoza.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: En esta memoria se estudian dos familias de métodos para la aproximación numérica de ecuaciones pseudodiferenciales periódicas. Ecuaciones de este tipo surgen en la resolución por métodos de contorno de problemas diferenciales en dominios regulares del plano.

En los métodos numéricos considerados tomamos como espacios discretos splines periódicos regulares sobre mallados uniformes y, como caso límite, subespacios de polinomios trigonométricos. Los métodos tratados son métodos de Petrov–Galerkin y de cualocación (del inglés qualocation, contracción de quadrature-modified collocation). En estos últimos el test integral que define los métodos de Petrov–Galerkin se sustituye por una aproximación discreta dada por una fórmula de cuadratura compuesta y, por tanto, pueden entenderse como una discretización adicional (todavía incompleta) de los métodos de Petrov–Galerkin.

El resultado principal para ambas familias de métodos es la existencia de desarrollos del error entre la solución numérica y una proyección cuasióptima de la solución exacta sobre el espacio trial. Como consecuencia de estos desarrollos se obtienen un desarrollo asintótico del error entre solución exacta y numérica cuando se aplica un operador regularizante y estimaciones de convergencia en normas más fuertes, incluyendo una propiedad de superconvergencia puntual en dos familias de puntos del mallado. Por último, para los métodos de cualocación se deducen a partir de estos desarrollos condiciones para obtener métodos de orden más alto para diversos tipos de ecuaciones integrales e integro–diferenciales.

En la memoria se plantean versiones totalmente discretas de métodos de cualocación cuando se aplican a la resolución de ecuaciones integrales de segundo tipo y logarítmicas. Estos esquemas preservan el orden, el desarrollo del error y las propiedades de superconvergencia puntual sin que conlleven un gasto computacional elevado.

Arrate Peña, Manuel
Catedrático de Universidad. *Líneas de investigación:* Ecuaciones Diferenciales – Univ. de Cantabria – Fac. de Ciencias – Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación – Avda. de Los Castros, s/n; 39005 Santander.
Tlf.: 942201434. *Fax:* 942201402.

Carvajal Molina, Pedro
Prof. Titular de Escuela Universitaria. *Líneas de investigación:* Valoración Activos Financieros – Univ. Rey Juan Carlos – Fac. de Ciencias Jurídicas y Sociales – Dpto. de Matemáticas (Métodos Cuantitativos) – Paseo Artilleros, s/n; 28032 Vicálvaro (Madrid).
Tlf.: 913019902.
e-mail: `carvajal@poseidon.fcjs.urjc.es`.

García Cervera, Carlos Javier
Profesor. Princeton University – Mathematics Department – Fine Hall, Washington Road; Princeton, New Jersey 08544-1000 (U.S.A.).
Tlf.: 1 609 258 1306. *Fax:* 1 609 258 1367.
e-mail: `cgarcia@math.princeton.edu`.

Hoyo Expósito, María Begoña del
Prof. Titular de Escuela Universitaria. – Univ. del País Vasco – Fac. de Ciencias – Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa – Aptdo. 644; 48080 Bilbao (Vizcaya).
Tlf.: 9446012000, Ext. 5439.
e-mail: `mepdeexm@lg.ehu.es`.

Llovet Verdugo, Juan
Catedrático de Universidad. *Líneas de investigación:* Álgebra Computacional – Univ. de Alcalá – Fac. de Ciencias – Dpto. de Matemáticas – Aptdo. 20; 28871 Alcalá de Henares (Madrid).
Tlf.: 91-8854900. *Fax:* 91-8854951.
e-mail: `juan.llovet@uah.es, juan.llovet2@uah.es`.

Romero Vivó, Sergio
Prof. Asociado. *Líneas de investigación:* Sistemas Lineales de Control, matrices no negativas. – Univ. Politécnica de Valencia – E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos – Dpto. de Matemática Aplicada – Camino de Vera, 14;

46071 Valencia.
Tlf.: 963 877663 Ext.76635.
e-mail: sromero@mat.upv.es.

Thome, Néstor Javier
Prof. Ayudante de Escuela Universitaria. *Líneas de investigación:* Inversas generalizadas, sistemas de control – Univ. Politécnica de Valencia – E.T.S.I. de Telecomunicaciones – Dpto. de Matemática Aplicada – Camino de Vera, 14; 46071 Valencia.
Tlf.: 963877007 (6685). *Fax:* 963877942.
e-mail: njthome@mat.upv.es.

Torregrosa Sánchez, Juan Ramón
Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Completación de Matrices Parciales, Teoría de Control, Cálculo Numérico – Univ. Politécnica de Valencia – E.T.S.I. de Telecomunicaciones – Dpto. de Matemática Aplicada – Camino de Vera, 14; 46071 Valencia.
Tlf.: 963877668. *Fax:* 963877199.
e-mail: jrtorre@mat.upv.es.

Uriz Ayestarán, Zenaida
Prof. Titular de Escuela Universitaria. – Univ. de Zaragoza – E.U. Ingeniería Técnica Industrial – Dpto. de Matemática Aplicada – c/ Corona de Aragón, 35; 50009 Zaragoza.
Tlf.: 976762178.
e-mail: zuriz@posta.unizar.es.

NUEVOS SOCIOS INSTITUCIONALES

Iberdrola

Gardoqui, 8. 48008–Bilbao.

Departamento de Matemática Aplicada y C. de la Computación

E.T.S.I. Industriales y de Telecomunicación – Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros, s/n.. 39005–Santander.

Departamento de Informática y Análisis Numérico

Facultad de Ciencias – Universidad de Córdoba
Campus de Rabanales, Edificio C2, Tercera Planta. 14071–Córdoba.

Departamento de Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias – Universidad de Granada
Campus de Fuentenueva. 18071–Granada.

Departamento de Matemática e Informática

Universidad Pública de Navarra
Campus Arrosadia. 31006–Pamplona.

Departamento de Matemática Aplicada I

E.T.S.I. Industriales – UNED
Ciudad Universitaria. 28080–Madrid.

Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Facultad de Matemáticas – Universidad de Sevilla
Tarfia, s/n. 41012–Sevilla.

Facultad de Matemáticas

Universidad de Sevilla
Tarfia, s/n. 41012–Sevilla.

Departamento de Matemática Aplicada

E.T.S.I. Telecomunicación – Universidad de Vigo
Campus Universitario Lagoas-Marcosende, s/n. 36200–Vigo (Pontevedra).

DIRECCIONES PARA SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Atenderemos gustosamente cualquier tipo de sugerencia o comentario sobre el Boletín de S$\vec{e}$MA. Una forma rápida y conveniente para hacernos llegar tales sugerencias es el correo electrónico. Por eso indicamos una vez más nuestra dirección de "e-mail":

`boletin_sema@uco.es`

Asimismo, recordamos la página *web* de S$\vec{e}$MA, como medio también adecuado de expresión para sus socios:

`http://www.uca.es/sema`

S$\vec{e}$MA

BOLETÍN NÚMERO 18

Julio 2001

sumario