

SēMA
BOLETÍN NÚMERO 17
Abril 2001

sumario

Presentación	5
En Memoria de Philippe Bénilan	7
Artículos	11
• <i>Números primos y Criptografía</i> , por A. Quirós	13
• <i>Conceptos fundamentales de la</i> <i>Matemática Difusa</i> , por J. A. Herencia	23
• <i>Algunos modelos de la Mecánica de Fluidos</i> , por F. Ortegón	51
• <i>Análisis Teórico de Varias Cuestiones con Origen</i> <i>en Mecánica de Fluidos</i> , por B. Climent	83
• <i>Análisis y Control Óptimo de Sistemas Elípticos</i> <i>que surgen en Dinámica de Poblaciones</i> , por A. Cañada	101
• <i>Algunos resultados sobre métodos de tipo</i> <i>Runge-Kutta</i> , por M. P. Calvo	119
Cursos de Verano	137
Anuncio de revista	141
Resúmenes de Tesis Doctorales	143

FOTO DE PORTADA

Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 1768 – París, 1830) fue educado en el clero pero no tomó sus votos. En lugar de eso estudió Matemáticas y posteriormente las enseñó en la Escuela Normal (1795). También fue profesor en la Escuela Politécnica de París desde 1795 hasta 1798, año en que se unió a la campaña de Napoleón en Egipto, como guía científico. Ayudó a establecer las facilidades educacionales en Egipto y llevaba las exploraciones arqueológicas. Regresó a Francia en 1801, siendo nombrado por Napoleón prefecto del departamento de Isere y posteriormente (en 1807) barón. En 1816 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias y en 1827 de la Academia Francesa. Publicó “*La teoría analítica del calor*” en 1822, estableciendo la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor y resolviéndola mediante las ahora denominadas series de Fourier.

edición

Editor jefe

JOSÉ LUIS CRUZ SOTO
Dpto. Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba

Editores

M^a CARMEN CALZADA CANALEJO
JOSÉ ROMÁN GALO SÁNCHEZ
JOSÉ ANTONIO HERENCIA GONZÁLEZ
MERCEDES MARÍN BELTRÁN
ALBERTO SURIOL PEINADO
Dpto. Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba

Dirección editorial: Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Edif. C-2, planta 3,
Campus Universitario de Rabanales, 14071 Córdoba.

E-mail: boletin_sema@uco.es, *Fax:* 957 21 86 30

responsables de secciones

Gestión de socios

LUIS ALBERTO FERNÁNDEZ
FERNÁNDEZ

Dpto. Matemáticas, Estadística
y Computación

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria

Avda. de Los Castros, s/n

39005 SANTANDER

lafernandez@besaya.unican.es

Mantenimiento

página web

J. RAFAEL RODRÍGUEZ GALVÁN

Dpto. Matemáticas
Facultad de CC. EE. y
Empresariales

Universidad de Cádiz

C/ Duque de Nájera, 8

11002 CÁDIZ

rafael.rodriguez@uca.es

Comentarios de libros

FRANCISCO JAVIER SAYAS
GONZÁLEZ

Dpto. Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias

Universidad de Zaragoza

Plz. San Francisco, s/n

50009 ZARAGOZA

jsayas@posta.unizar.es

Remisión de artículos

JOSÉ LUIS CRUZ SOTO

Dpto. Informática y

Análisis Numérico

Universidad de Córdoba

Campus Univ. de Rabanales

Edificio C-2, planta 3^a

14071 CÓRDOBA

boletin_sema@uco.es

Diseño de portada: Antonio Espinosa López y Antonio Osuna Abad.

Imprime: TIPOGRAFÍA CATÓLICA, S. C. A., Tfo.: 957 297 188 Córdoba.

D. L. : CO-156/2000

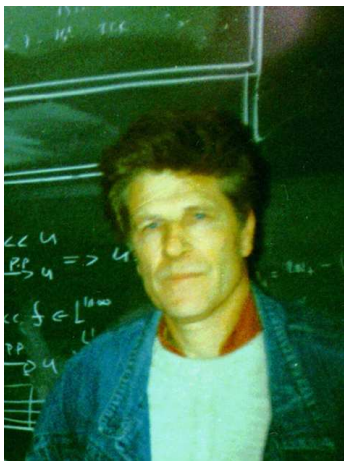
El presente Boletín 17 incluye seis artículos sobre varios temas, que esperamos resulten de interés para los socios de SĒMA. A su vez, confiamos en que los socios continúen enviando sus aportaciones a los correspondientes “responsables de secciones” (indicados en la página 3).

También difundimos en este Boletín 17 de SĒMA dos noticias recientes. La primera, el fallecimiento de Philippe Bénilan, de quien nos habla Juan Luis Vázquez en la página 7. La segunda noticia es el nombramiento de nuestro compañero y amigo Jesús Ildefonso Díaz como *Editor asociado* de la revista *Electronic Journal of Differential Equations* (anunciada en la página 121). Por nuestra parte, le damos una cordial enhorabuena. Por la suya, transmitimos literalmente su “*finalidad de ser útil a la comunidad de miembros de SĒMA*” mediante su “*invitación expresa a todos los miembros de SĒMA a que me dirijan manuscritos para esta joven pero prestigiosa revista.*” La dirección electrónica donde se pueden ver las normas de preparación de los manuscritos y la lista del comité asesor es <http://ejde.math.swt.edu/editors.html>. La dirección de correo electrónico de Jesús Ildefonso Díaz es ji.diaz@mat.ucm.es y su teléfono 91-394 44 52.

Finalmente, se completa el Boletín con dos secciones habituales: el resumen de Tesis Doctorales leídas recientemente y el anuncio de dos cursos de verano (uno en Laredo, comunicado por Enrique Zuazua y otro en Lanzarote, comunicado por Jesús Ildefonso Díaz). Los también habituales anuncios de libros y congresos aparecen en el Anuario 2001, que ha sido editado conjuntamente con el presente Boletín 17.

GRUPO EDITOR
boletin_sema@uco.es

EN MEMORIA DE PHILIPPE BÉNILAN



El día 17 de Febrero de 2001 y tras una larga enfermedad ha muerto en Besançon, Francia, el Profesor Philippe Bénilan, experto mundialmente reconocido en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis funcional y la teoría de semigrupos.

Su pérdida es muy sentida por los muchos amigos que deja en España, entre ellos J.I. Díaz, J. Carrillo, M.A. Herrero, J. Álvarez Contreras, G. Díaz, M. Escobedo, J.R. Esteban, V. Caselles, F. Andreu, J.M. Mazón y el autor de estas líneas, por citar a algunos de los que más le conocimos.

Philippe Bénilan permanecerá largo tiempo en nuestro recuerdo. En las épocas difíciles en que las ecuaciones diferenciales empezaban a despuntar en España, él fue un apoyo constante y desinteresado para un grupo de matemáticos de Madrid que nunca olvidaremos su sabiduría, su apoyo y su amistad. El Congreso Internacional celebrado en Besançon en 1977 fue el primer gran evento internacional para varios de nosotros y a él acudimos en un viejo coche en un viaje inolvidable, aunque no muy cómodo. Ninguno de nosotros fue alumno directo suyo, y sin embargo muchos le debemos bastante de lo que aprendimos en aquella época. Y los compañeros de Valencia y Barcelona han tenido experiencias no menos positivas. En sus viajes a España Ph. Bénilan mostró siempre interés por el trabajo de la joven generación, y algunos de nuestros alumnos aprendieron bastante de lo que saben de sus obras, tal como nos pasó a los precedentes. La UAM albergó un Coloquio en su honor llamado “Junior PDE Seminar” que los más jóvenes de Madrid recuerdan bien.

Formado con Choquet y Deny y atraído a las ecuaciones por Brezis, Ph. Bénilan reunía en su persona la excelencia como matemático, el gusto y el dominio de los conceptos abstractos del análisis funcional y la pasión por aplicar estos conceptos a las ecuaciones diferenciales no lineales, todo ello dentro de una gran humanidad, hecha de trabajo duro, optimismo, generosidad y desinterés.

Como matemático deja una obra de primera línea en temas como la teoría de semigrupos no lineales, las ecuaciones parabólicas no lineales llamadas de los

medios porosos y las leyes de conservación. Algunos de estos temas se hicieron populares en los últimos años 70 en España gracias, en particular, a J. I. Díaz. En el amplio mundo de la matemática aplicada Bénilan era un matemático ante todo, pero sus investigaciones interesaban a los expertos en filtración de fluidos, extracción de petróleo y dinámica de gases. Sus resultados teóricos tienen consecuencias importantes para el tratamiento numérico (teoría de los esquemas implícitos en tiempo).

A la inventiva de Ph. Bénilan se deben nuevos conceptos de solución generalizada, de extenso uso hoy día por los expertos: buena solución, solución *mild*, de semigrupos,... así como la elaboración de los operadores acretivos de diversos tipos. Yo he tenido la muy grata experiencia de participar junto con él y con L. Boccardo, Th. Gallouet, R. Gariepy y M. Pierre en el desarrollo de las soluciones entrópicas para ecuaciones elípticas no lineales, concepto extendido a las ecuaciones parabólicas por F. Andreu, J.M. Mazón y su equipo. La última propuesta en que Ph. Bénilan estaba empeñado junto con J. Carrillo y P. Wittbold condujo a las soluciones entrópicas renormalizadas para leyes de conservación. Philippe Bénilan era poco amigo de publicaciones, su gran obra "Nonlinear Evolution Governed by Accretive Operators", con Mike G. Crandall y Agmon Pazy, que sus amigos conocen y estudian en versiones preliminares desde hace por lo menos 10 años, estaba prevista para ser publicada este año.

Una de las más notables virtudes de Philippe como persona era en mi opinión su nulo chauvinismo; al contrario, su vida es un ejemplo de interés por la matemática y los matemáticos de los más diversos países, vecinos y no tan vecinos a Francia. Aparte de sus alumnos franceses y de su labor organizadora de congresos y escuelas, tuvo intensas relaciones con Estados Unidos, con Alemania, con España, con el Africa francófona, donde fue profesor de joven y de donde proceden muchos de sus alumnos, con América Latina y en los últimos años con Rusia y otros países del este. Dirigió 22 tesis doctorales más 3 en preparación. En 1999 organizó una hermosa conferencia en honor de S. N. Kruzhkov, otro gran matemático que se ha ido tempranamente, y en ella participamos muchos de los anteriormente citados, y además X. Cabré, A. Dubova, R. Echevarría, E. Fdez. Cara, J. López Gómez, A. Rodríguez, G. Reyes, J. Soler y L. Vega.

Ph. Bénilan tenía 60 años de edad, que sus amigos habíamos celebrado en un congreso en su honor en las montañas del Jura (Journées d'Analyse Non Linéaire pour les 60 ans de Ph. Bénilan, 27-29 de octubre de 2000). A pesar de lo avanzado de su enfermedad pudo recibir el tributo de admiración y trabajo de casi un centenar de matemáticos de todo el mundo, algunos bien conocidos en España como D. Aronson y H. Amann. En reconocimiento de sus méritos la Universidad Complutense de Madrid le había conferido el título de Doctor

Honoris Causa que le iba a ser entregado en la presente primavera.

España ha perdido un amigo, pero sus matemáticas están bien vivas y activas. SEMA se une con este recuerdo al dolor de su mujer Françoise y toda su familia, de su universidad, de sus muchos alumnos y amigos y de la comunidad internacional de Matemática Aplicada. Descanse en paz.

Austin, Texas, 1 de marzo de 2001

JUAN LUIS VÁZQUEZ
Ex-presidente de SEMA

- **Adolfo Quirós Gracián**
Números primos y Criptografía
(páginas 13 - 21)
- **José Antonio Herencia González**
*Conceptos fundamentales de la
Matemática Difusa*
(páginas 23 - 50)
- **Francisco Ortegón Gallego**
*Algunos modelos de la
Mecánica de Fluidos*
(páginas 51 - 81)
- **Blanca Climent Ezquerra**
*Análisis Teórico de Varias Cuestiones
con Origen en Mecánica de Fluidos*
(páginas 83 - 99)
- **Antonio Cañada Villar**
*Análisis y Control Óptimo de
Sistemas Elípticos que surgen
en Dinámica de Poblaciones*
(páginas 101 - 118)
- **Mari Paz Calvo Cabrero**
*Algunos resultados sobre
métodos de tipo Runge-Kutta*
(páginas 119 - 135)

Números primos y Criptografía

ADOLFO QUIRÓS GRACIÁN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
28049 MADRID
e-mail: zuazua@eucmax.sim.ucm.es

De vez en cuando aparece en la prensa (*New York Times*, 20-6-90; *El País*, 28-4-94) una noticia anunciando que un grupo de matemáticos ha conseguido factorizar un número entero como producto de primos. ¿Por qué algo que parece estar al alcance de cualquier escolar merece esta publicidad?

La respuesta es que en los últimos años los problemas de encontrar números primos y factorizar números enteros han sido aplicados con éxito a la *Criptografía*.

Para proteger la información podemos ocultarla, o transformar el mensaje de forma que sólo el receptor deseado pueda entenderlos. Supongamos que Ana (*A*) desea transmitir a Beatriz (*B*) un conjunto \mathbf{M} de mensajes sin que Cristina (*C*) pueda leerlos. *A* debe construir otro conjunto \mathbf{C} de *mensajes cifrados* y una función inyectiva f que a cada mensaje m de \mathbf{M} le haga corresponder un mensaje cifrado $c = f(m) \in \mathbf{C}$. En lugar de transmitir m , *A* transmitirá $f(m)$. La idea es que *B* conozca la función inversa f^{-1} , de modo que pueda recuperar m a partir de $f(m)$, pero que *C* ignore f^{-1} .

Es deseable dotar a los conjuntos \mathbf{M} y \mathbf{C} de alguna estructura matemática que haga fácil utilizar funciones. Expliquemos cómo cifraba sus mensajes Julio César, quien utilizaba como conjuntos \mathbf{M} y \mathbf{C} las letras. Hagamos corresponder las 26 letras del alfabeto castellano a los números enteros entre 0 y 25, de manera que $A = 0, B = 1, C = 2, \dots, Z = 25$. César sustituía la letra m por $f(m) = m + 3$, de modo que $C (= 2)$ era sustituida por $F (= 5 = 2 + 3)$. ¿Por quién sustituía la *Y*, dado que $24 + 3 = 27$ es mayor que 25? Observemos que el conjunto de los números entre 0 y 25, que llamaremos $\mathbf{Z}/26$, es el conjunto de todos los restos que podemos obtener al dividir por 26, e identifiquemos dos números si dan el mismo resto al dividirlos por 26. Como $27 \equiv 1 \pmod{26}$ (se lee *27 es congruente con 1 módulo 26*) y es la forma de abreviar que dan el mismo resto al dividir por 26), César sustituía la *Y* (= 24) por la *B* (= 1).

Observación 1: Este proceso de “sumar 3” en $\mathbf{Z}/26$ es fácilmente generalizable. Sea n un número entero positivo cualquiera. Llamamos \mathbf{Z}/n a los números entre 0 y $n - 1$, y pensamos en ellos como los n restos que se pueden obtener al dividir un número entero entre n . Podemos ahora definir la suma módulo n de dos elementos de \mathbf{Z}/n como el resto resultante al dividir su suma habitual por n (el caso $n = 12$ es la “aritmética del reloj”). Esta suma en \mathbf{Z}/n tiene las mismas propiedades que la suma de números enteros.

Observación 2: Una vez que sabemos cómo cifraba César, es muy fácil descifrar: $f^{-1}(c) \equiv c - 3 \pmod{26}$. Incluso si César variaba la clave para cifrar, utilizando las distintas funciones f_e definidas por $f_e(m) \equiv m + e \pmod{26}$ para cada valor de e en $\mathbf{Z}/26$, el enemigo sólo tenía que averiguar el e utilizado en cada mensaje (lo que en este caso es muy sencillo) para conocer $f_e^{-1}(c) \equiv c - e \pmod{26}$.

Con el tiempo, se perfeccionaron los métodos para mantener las comunicaciones a salvo de personas no deseadas, pero para todos ellos valía la observación 2: si uno conoce la clave utilizada para cifrar es “fácil” encontrar la clave para descifrar. Esto plantea al menos dos problemas: i) cada pareja de correspondientes debe tener su propia clave para cifrar, lo que supone que una red de N personas necesite $N(N - 1)/2$ claves distintas; ii) si un nuevo miembro desea incorporarse a la red debe previamente acordar claves con cada uno de los N miembros anteriores.

Criptografía de clave pública y firmas digitales

En 1976, Diffie, Hellman y Merkle propusieron un sistema de *Criptografía de clave pública* que resolvía estos dos problemas.

Supongamos que tenemos funciones f_e , dependiendo de una clave para cifrar e , con la propiedad de que, incluso conociendo e , es *imposible en la práctica* encontrar la correspondiente clave para descifrar, d , que nos permite calcular la función inversa. Tales funciones reciben el nombre de *funciones trampa* o bien *funciones de un sólo sentido*. Con ellas, una red de usuarios puede proteger sus comunicaciones como sigue.

La usuaria A elige sus claves para cifrar y descifrar, e_A y d_A , y lo mismo hacen todos los demás. Las claves para cifrar e_A, e_B, e_C , etc. se publican (de ahí el nombre clave pública) en una guía similar a una guía de teléfonos, pero cada usuario mantiene secreta su clave para descifrar. Si la usuaria B quiere enviar un *mensaje* a A no tiene más que mirar en la guía la clave pública de A y enviar $f_A(\text{mensaje})$. Ahora A , ¡ y sólo ella ! conoce la clave para descifrar d_A

y puede recuperar el *mensaje*. Hay que insistir en que C no puede hacer esto porque no se puede encontrar d_A a partir del conocimiento de e_A .

Obsérvese que cada usuario necesita una sola clave y para unirse a la red basta con entrar en contacto con el administrador que edita la guía. Pero surge un problema nuevo: C puede enviar mensajes a A haciéndose pasar por B , ya que toda la información necesaria para hacerlo es pública. Necesitamos encontrar una forma de firmar los mensajes. Podemos inspirarnos en las firmas manuscritas para conseguir *firmas digitales*. Las primeras consisten en el nombre escrito y rubricado de una manera peculiar que sólo el firmante puede reproducir.

La propuesta de Diffie-Hellman-Merkle también incluye algo que únicamente conoce el autor: cómo descifrar. Cuando B escribe a A , debe concluir su mensaje con su firma especial para A , en este caso $f_A(f_B^{-1}(\textit{Beatriz}))$. Cuando A recibe el mensaje y aplica f_A^{-1} para leerlo obtiene un mensaje comprensible que termina con algo ilegible, $f_B^{-1}(\textit{Beatriz})$, la firma de B , de quien se supone que proviene el mensaje. A no tiene más que mirar en la guía para encontrar f_B y comprobar que el mensaje lo ha enviado B , ya que sólo ella podía haber producido una firma que al aplicarle f_B nos diese como resultado *Beatriz*.

El criptosistema RSA

La primera propuesta operativa (y la más empleada) de un criptosistema de clave pública la hicieron en 1978 Rivest, Shamir y Adleman y en su honor se llama *criptosistema RSA*.

Cuando uno aprende a factorizar un número n en el colegio, el método empleado suele ser, esencialmente, ir buscando divisores primos de n . Si uno llega a \sqrt{n} sin encontrar ningún divisor es que n es primo; en otro caso, uno ha encontrado un divisor y debe ahora factorizar el cociente. Pero hay métodos mucho más rápidos que éste para factorizar o comprobar la primalidad de un número y, de hecho, estos dos problemas no son equivalentes: es mucho más fácil decidir si un número es primo o compuesto que, sabiendo que es compuesto, factorizarlo.

En el momento actual, es esencialmente imposible factorizar un número de 400 cifras del que se sabe que es producto de dos primos de unas 200 cifras cada uno. Por el contrario, el mayor primo encontrado (el 1 de junio de 1999) tiene 2.098.960 cifras, se conocen más de 5.000 “primos gigantes” (con más de 10.000 cifras), y resulta rutinario encontrar “primos titánicos” (con más de 1.000 cifras). Esta diferencia en la dificultad es lo que utiliza el criptosistema RSA para construir funciones de un sólo sentido.

Para explicar el procedimiento exacto, debemos observar que, igual que hicimos con la suma, podemos definir el producto módulo n de dos elementos

de \mathbf{Z}/n como el resto resultante al dividir su producto habitual por n . Ejemplo: $5 \cdot 8 \equiv 4 \pmod{12}$. Este producto tiene muchas de las propiedades del producto de números enteros, y en el caso particular de que $n = p$ sea un número primo se comporta exactamente igual que el producto de números racionales, incluyendo la posibilidad de dividir por cualquier elemento de \mathbf{Z}/p distinto del 0. En el caso general, uno puede únicamente dividir por números *primos con n* .

Se tiene además el “Pequeño Teorema de Fermat” (PTF):

Si p es primo y a es un entero cualquiera, entonces $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Euler dio una generalización que, en el caso particular que nos interesa, dice lo siguiente:

Si $n = pq$ es producto de dos primos distintos, a un entero cualquiera, y k un número tal que $k - 1$ es divisible por $p - 1$ y por $q - 1$, entonces $a^k \equiv a \pmod{n}$.

Estamos ahora en condiciones de explicar cómo funciona el criptosistema RSA. La usuaria A (y todos los demás por su cuenta) busca al azar dos números primos grandes, p_A y q_A , y un número e_A que sea primo con $p_A - 1$ y con $q_A - 1$. Por tanto, A puede encontrar otro número d_A tal que $e_A d_A \equiv 1 \pmod{(p_A - 1)(q_A - 1)}$. Por último, A calcula $n_A = p_A q_A$. Todo esto es “fácil” de hacer. Ahora A puede tirar a la basura p_A y q_A y publicar su clave pública para cifrar, el par (n_A, e_A) , mientras mantiene secreta su clave para descifrar (n_A, d_A) .

Los conjuntos \mathbf{M} y \mathbf{C} de mensajes sin cifrar y cifrados que utiliza A son ambos \mathbf{Z}/n_A (se pueden traducir los mensajes escritos en castellano a este lenguaje sin más que dividirlos en grupos grandes de letras y ver cada grupo como un número de varias cifras escrito en base 26). La función para cifrar es $f_A(m) = m^{e_A} \pmod{n_A}$ mientras la función para descifrar es $f_A^{-1}(c) = c^{d_A} \pmod{n_A}$. El Teorema de Euler garantiza que estas funciones son inversa una de la otra.

¿ Por qué es este sistema de clave pública ? Porque la única forma de encontrar la clave para descifrar d_A a partir del conocimiento de n_A y e_A es ser capaz de encontrar la factorización $n_A = p_A q_A$, lo que, como ya hemos dicho, es muy difícil.

Primalidad

El PTF permite encontrar primos sin mucho esfuerzo. Dado un número n podemos elegir al azar otro número a entre 2 y $n - 1$ y comprobar (es fácil) si a y

n tienen un divisor común. Si es así, hemos encontrado un factor no trivial de n y hemos acabado. En otro caso, si n fuese primo, por el PTF y dividiendo por a deberíamos tener $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Si esto, que de nuevo es fácil de calcular, es falso, n es necesariamente compuesto. Si se satisface $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, podemos elegir un a distinto y volver a probar. Por desgracia existen algunos números compuestos, llamados números de Carmichael, que actúan como si fuesen primos desde el punto de vista del PTF, por lo que es muy difícil detectarlos de esta manera: habría que encontrar un a que no fuese primo con n , y éstos son escasos.

A mediados de los años 70, Rabin y Miller observaron que si n es primo y $n-1 = s2^r$ con s impar, debemos tener un poco más que el PTF: debe cumplirse que $a^s \equiv \pm 1 \pmod{n}$ o que $a^{s2^t} \equiv -1 \pmod{n}$ para algún $0 < t < r$. No hay “números de Carmichael” para este “test” de Rabin-Miller y, si n es compuesto, el “test” debe fallar para al menos tres cuartas partes de los posibles a . Así pues, si repetimos el “test” para k valores de a elegidos al azar y n siempre parece ser primo, la probabilidad de que n sea compuesto es menor que $1/4^k$. Podemos así comprobar que n es compuesto o estar *prácticamente seguros* de que n es primo y tenemos un buen *test probabilístico de primalidad*.

Una vez que estamos casi seguros de que n es primo hay métodos (ideados en los años 80) que, con los ordenadores actuales, permiten demostrar en un tiempo razonable la primalidad de números de hasta 1.000 cifras.

Factorización

Llegamos por fin al problema de cómo factorizar un número del que uno de los “tests” anteriores nos ha dicho que es compuesto. A finales de los 60, Brillhart y Morrison recuperan una antigua idea:

Si tuviéramos dos números x e y tales que $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$, es decir, tales que n divide a $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, pero con $x \not\equiv \pm y \pmod{n}$, podríamos asegurar que el máximo común divisor de n y $x-y$ es un factor no trivial de n .

Para encontrar x e y , empezamos por buscar muchos números x_r tales que, poniendo $x_r^2 \equiv t_r \pmod{n}$, estos t_r se puedan descomponer como producto de primos pequeños. Si tenemos suficientes x_r , podemos asegurar que un producto de algunos de los t_r va a ser un cuadrado que jugará el papel de y^2 y el correspondiente producto de los x_r^2 será x^2 . Brillhart y Morrison dieron un método, llamado *de la fracción continua*, que buscaba que los t_r fuesen pequeños y, con él, encontraron la factorización del número de Fermat $F_7 = 2^{2^7} + 1 = 2^{128} + 1$, de 39 cifras.

En 1981, Pomerance sugiere que, para encontrar x_r tales que $x_r^2 \pmod{n}$ factorice como producto de primos pequeños, no hace falta factorizar penosamente los t_r . El proceso que ideó tiene similitudes con la criba de Eratóstenes y se conoce como *criba cuadrática (QS)*. Es el mejor método conocido para factorizar números arbitrarios del tamaño que se puede manejar actualmente en un ordenador.

En 1986, H.W. Lenstra crea un método totalmente nuevo que empleaba herramientas nunca utilizadas anteriormente para factorizar, las *curvas elípticas*, lo que abrió nuevas vías para atacar el problema.

En octubre de 1988, A.K.Lenstra y Manesse utilizan la criba cuadrática para ser los primeros que consiguen factorizar un número de 100 cifras sin utilizar propiedades especiales de éste.

También en 1988, Pollard tiene una nueva idea, que mejora junto a H.W. Lenstra en el año siguiente: queremos tener $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$; pero, ¿ por qué limitarse a trabajar con números enteros ? Trabajando con conjuntos de números más grandes que los racionales, los *cuerpos de números algebraicos*, crean un nuevo método, la *criba en cuerpos de números (NFS)*, especialmente útil para números de la forma $a^b \pm 1$ con a pequeño.

La criba en cuerpos de números se hizo famosa en junio de 1990, cuando A.K. Lenstra y Manasse consiguieron factorizar el número de Fermat $F_9 = 2^{2^9} + 1 = 2^{512} + 1$, de 155 cifras. Esta factorización se consiguió aplicando ingeniosamente una propiedad de los métodos de criba: se pueden buscar factores en varios intervalos simultáneamente. Utilizando la red de correo electrónico reclutaron voluntarios en todo el mundo y encargaron a cada uno de ellos que fuese buscando soluciones en distintos intervalos.

En abril de 1994 un equipo encabezado por A.K. Lenstra consiguió, utilizando la criba cuadrática, con la ayuda de más de 600 voluntarios y tras 8 meses de trabajo que supusieron aproximadamente 5.000 mips-años de cálculo, factorizar RSA-129.

Este número, de 129 cifras como su nombre indica, fue propuesto por Rivest, Shamir y Adleman, lo que explica el resto del nombre, como un reto para los “factorizadores”. Lo publicó Martin Gardner en su columna de *Scientific American* en agosto de 1977, y ofreció un premio de 100 dólares a quien encontrase los dos primos en que se descompone, algo que Gardner pensaba que requeriría millones de años. Pero sólo fueron necesarios 17 años, mejoras en los ordenadores y en las comunicaciones y, sobre todo, algunas brillantes ideas matemáticas.

Hay toda una colección de números RSA para factorizar, que constituyen el “Reto RSA”, o “RSA Challenge” en su versión original. Cada uno es un

producto de dos primos, buscados para que descomponer el correspondiente número RSA sea especialmente difícil.

Conclusión

Por supuesto uno puede factorizar números cada vez más grandes. Entre los números notables factorizados están RSA-130 (abril de 1996, NFS) y RSA-155, la primera clave RSA de 512 bits (agosto de 1999, NFS); el “record” para la NFS (especial) es un número de 211 cifras (abril de 1999).

Pero esto no pone intrínsecamente en peligro el criptosistema RSA, ya que, mientras los métodos de factorización sigan requiriendo un tiempo sensiblemente superior al que se necesita para buscar números primos de tamaño comparable, siempre se podrán contrarrestar las mejoras en los métodos y en las máquinas, utilizando números primos más grandes. Con los métodos y ordenadores actuales, dos primos de alrededor de 200 cifras cada uno nos dan total seguridad.

El riesgo para RSA es que no se sabe si factorizar requiere realmente un tiempo grande, o simplemente no sabemos hacerlo mejor. Es posible que, en el futuro, una nueva y brillante idea, procedente quizás de las zonas más teóricas de la teoría de números o la geometría algebraica, permita factorizar casi tan fácilmente como se encuentran números primos. Si eso sucediese, el criptosistema RSA pasaría a la historia como una brillante idea que habría quedado obsoleta.

De hecho, muy recientemente ha surgido un método revolucionario de factorización, basado en cambiar radicalmente el tipo de ordenador utilizado. Peter Shor ha demostrado que sería fácil factorizar si uno dispusiese de un *ordenador cuántico*. Pero, de momento, sólo se sabe cómo construir un ordenador cuántico con siete q -bits (que es como se llaman los “bits” cuánticos) mientras que, para factorizar un número grande, sería necesario uno con varios miles de q -bits. El desarrollo de tal aparato supondría la jubilación de RSA, para ser quizá sustituido por la *Criptografía Cuántica*, pero eso es otra historia.

Breve Bibliografía comentada

- Bauer, F.L.: *Decrypted Secrets*, 2nd edition, Springer-Verlag (2000). También cuenta la historia, pero explica muchísimas más Matemáticas que el anterior.
- Cohen, H.: *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag (1993). Referencia obligada para los métodos computacionales, pero no es para aficionados. Difícil.

- COMAP: *Las Matemáticas en la vida cotidiana*, Addison-Wesley/UAM (1999). El capítulo 10 de este fascinante libro trata sobre la Criptografía. Los restantes 21 capítulos no desmerecen.
- Gardner, M.: *Juegos Matemáticos: Claves de nuevo tipo cuyo desciframiento ocuparía unos cuantos millones de años*, Investigación y Ciencia (octubre 1977) 96–101. La versión española del artículo donde se presenta en sociedad RSA, incluido el “Reto”.
- Hellman, M.E.: *The Mathematics of public-key Cryptography*, Scientific American, August 1979, 130–139. La criatura presentada por uno de sus progenitores.
- Koblitz, N.: *A course in Number Theory and Cryptography*, 2nd edition, Springer-Verlag (1994). Claro y completo, pero requiere una cierta madurez.
- Pastor, J.; Sarasa, M.A.: *Criptografía Digital*, Prensas Universitarias de Zaragoza (1998). Dirigido más bien a ingenieros, pero es muy completo.
- Ribenboim, P.: *The Little Book of Big Primes*, Springer-Verlag (1991). La versión para no especialistas.
- Ribenboim, P.: *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag (1995). Todo lo que siempre quiso saber...
- Silverman, J.H.: *A friendly Introduction to number theory*, Prentice Hall (1997). Muy interesante introducción a la teoría de números que, en principio, podría entender un alumno de nivel de C.O.U. Contiene todo lo necesario para entender RSA.
- Singh, S.: *Los Códigos Secretos*, Debate (2000). Muy amena historia de la Criptografía, desde los egipcios hasta nuestros días, con breves apuntes matemáticos.
- Shor, P.W.: *Quantum Computing*, Documenta Mathematica, Extra Volume ICM-1998 I (1998), 467-486. El texto ampliado de la conferencia que impartió en el Congreso Internacional de Berlín, donde se le concedió el Premio Nevanlinna. Explica cómo un ordenador cuántico permite factorizar fácilmente y da algunas ideas y referencias sobre Criptografía cuántica. Disponible también en www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/ICM.html

- Stewart, I: *De aquí al infinito*, Crítica (1998). Una joya de la divulgación matemática. Un capítulo trata de primos y Criptografía, y otro de “fácil y difícil”. Todo el libro es una delicia.
- Stewart, I: *Juegos Matemáticos: Recibo de compra en Internet*, Investigación y Ciencia (abril 1996) 87–89. Una interesante aplicación de la Criptografía de clave pública.
- Stewart, I: *Juegos Matemáticos: Caza mayor en territorio primo*, Investigación y Ciencia (julio 1997) 87—89. ¿Qué hay que hacer para encontrar primos grandes ?
- Stewart, I: *Juegos Matemáticos: Cribas en la tierra de los factores*, Investigación y Ciencia (agosto 1997) 88–90. Presenta dos de los más modernos métodos de factorización: la criba cuadrática y la criba en cuerpos de números.
- The prime number page: <http://www.utm.edu/research/primes>. Aquí se puede encontrar información actualizada casi a diario, y conexiones a otras páginas interesantes.
- Internet Prime Net Server: <http://entropia.com/ips>. Para quienes quieran colaborar en la búsqueda de primos enormes.
- La compañía de los inventores de RSA: <http://www.rsa.com>. Información sobre sus productos y sobre el “RSA Challenge”.

Conceptos fundamentales de la Matemática Difusa

JOSÉ ANTONIO HERENCIA
DPTO. DE INFORMÁTICA Y ANÁLISIS NUMÉRICO
UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
e-mail: jaherencia@uco.es

1 ¿Qué son los conjuntos difusos y por qué se usan?

1.1 Distintos tipos de incertidumbre

Para ilustrar situaciones donde se usan *conjuntos difusos*, diferenciándolas de *sucesos probables* y de *hechos precisos*, comencemos considerando las siguientes frases (que forman tres grupos, con tres frases cada uno):

- (1a) Si el lado de un cuadrado mide 1 metro, su diagonal mide $\sqrt{2}$ metros (longitud que contiene decimales aunque se exprese en milímetros o en micras o en nanómetros o ...)
- (1b) Los alumnos de 6°A han estado corriendo en la pista de atletismo durante media hora. El que más ha corrido ha completado 18 vueltas, frente a las 12 vueltas dadas por el que menos ha corrido. Por tanto, al menos en un instante durante el recorrido, el primero ha ido un 50% más rápido que el segundo.
- (1c) Si nos sirven un café que está a 60°C, lo que resulta muy caliente ya que tenemos intención de tomarlo cuanto más frío mejor, entonces es preferible esperar 5 minutos y después bajar su temperatura en 5°C (al añadirle azúcar) a empezar bajando su temperatura en 5°C (añadiéndole el azúcar) y después esperar cinco minutos para tomarlo.
- (2a) A la hora de arriesgar en distintos juegos en un casino, es preferible apostar por que salgan menos de 8 puntos al tirar dos dados a apostar por que salga cara al lanzar una moneda.

- (2b) Considerando la cantidad de planetas cuya composición química y temperatura es similar a la de la Tierra, debe haber del orden de cientos de miles en los que haya vida.
- (2c) Con el procedimiento de fecundación *in vitro* seguido, es casi seguro que nacerán dos niñas.
- (3a) La mayoría de los jóvenes son arriesgados, mientras que casi todos los viejos son cautos en sus acciones.
- (3b) La “a minúscula” manuscrita se suele parecer mucho a una “o minúscula” unida a una “i minúscula (sin punto)”, a diferencia de la “a minúscula” tipográfica que se parece más bien a una “e minúscula boca abajo”.
- (3c) Los buenos empresarios suelen hacer un total de inversiones ligeramente inferior a la cantidad de beneficios obtenidos.

El primer grupo de frases maneja conceptos precisos y cantidades exactas. Su veracidad se puede demostrar matemáticamente (usando para la primera frase el Teorema de Pitágoras y la reducción al absurdo tras igualar $\sqrt{2}$ a una fracción, para la segunda el Teorema del valor medio generalizado de Cauchy y para la tercera las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes de aplicar la “ley de Newton de enfriamiento”). Por tanto, no requiere confirmación mediante experimentos (dado que dicha “ley del enfriamiento” ha sido ya suficientemente contrastada con la realidad) ni aprobación mediante votaciones (aunque resultara “irracional” a los griegos el no poder medir la diagonal del cuadrado con ningún divisor de la unidad de medida).

La veracidad de las tres frases siguientes (que forman el segundo grupo) es relativa, al depender de fenómenos aleatorios cuyo comportamiento es incierto. La imposibilidad de controlar todos los movimientos tras el lanzamiento de una moneda o un dado (unida a la “sospecha” de que un casino use monedas y dados trucados para asegurarse beneficio) obligaría a experimentar, realizando suficientes lanzamientos, para estimar el valor de las correspondientes probabilidades y así afirmar o negar lo enunciado (la afirmación es más inmediata si descartamos tal “sospecha” y aplicamos el “principio de la razón insuficiente” de Laplace). Respecto a la existencia o no de vida extraterrestre, y el número de planetas donde se presenta, las limitaciones de nuestro conocimiento nos motivan a efectuar estimaciones también en términos de probabilidades, basándonos en principios teóricos (físicos, químicos y biológicos) que suplen la imposible experimentación. La incertidumbre del resultado es obvia y se constata con las diferentes opiniones expresadas por los expertos (de manera que un debate y exposición de resultados por un buen número de ellos

serviría para aclarar en lo posible la cuestión). Respecto a la frase (2c), habría que ver (tanto teórica como prácticamente) cómo funciona el hipotético método de fecundación *in vitro*, estimando las probabilidades de formación de embriones portadores de cromosomas XX o XY.

Alguien que se decidiera a apostar bastante dinero jugando muchas veces en el aludido casino o que se quisiera someter al supuesto método de fecundación, le daría bastante importancia a las correspondientes probabilidades (de igual forma que las Compañías de seguros se preocupan de estimar con suficiente precisión las probabilidades de accidentes y siniestros). Cualquier científico que se precie, debería justificar concienzudamente cualquier afirmación relativa a la vida en el Universo. En general, hay muchos fenómenos que no podemos determinar con precisión y exactitud, porque presentan un comportamiento aleatorio. Entonces los describimos mediante su distribución de probabilidad, resultanto esenciales los valores que toma tal distribución.

Finalmente, consideremos las frases (3a), (3b) y (3c) del tercer grupo. En ellas se afirma la diferente actitud de jóvenes y viejos ante el riesgo, se describe la forma usual que presenta la “a minúscula” escrita a mano y la desigualdad “inversiones \leq beneficios” (próxima a una igualdad) que suelen aplicar los “buenos” empresarios. No se trata de afirmaciones precisas e inequívocas, sino que presentan bastantes ambigüedades: ¿cuán arriesgadas considera a las personas de 35 años?, ¿y a las de 55 años?, ¿cómo de grande es la parte de la “i” que intersecta a la “o” para formar una “a”?, ¿se verifica la “ligera desigualdad” enunciada cuando se deja de invertir el 7% de los beneficios?, ¿y cuando se deja de invertir el 15%?, ¿qué características ha de tener un empresario para ser considerado “bueno”?, etc.

Pero observemos que estas incertidumbres son debidas a la imprecisión y ambigüedad de los términos usados y no a su aleatoriedad. Podemos creer la frase (3a) afirmada por un psicólogo, la (3b) por un perito calígrafo y la (3c) por un economista, sin tener la impresión de que nos ofrecen una información insuficiente (mientras que para admitir las frases (2a), (2b) y (2c) se requieren más datos). Al hablar de los jóvenes, de los viejos, de una *vocal manuscrita* o de una “aproximación por defecto”, no nos planteamos necesariamente la necesidad de efectuar un experimento estadístico o buscar mayores justificaciones teóricas para precisar los conceptos tratados en términos de probabilidades. La juventud o la ancianidad de una persona, la lectura de una letra manuscrita o la aproximación de dos números no se determinan mediante experimentos aleatorios, aunque tampoco queden definidas de forma exacta. Los conjuntos de *personas jóvenes*, *personas viejas*, *letras “a” manuscritas*, *números algo inferiores a 2000*, *números aproximadamente iguales a 28*, etcétera, son

ejemplos de “conjuntos difusos”.

Los distintos tipos de incertidumbre antes diferenciados con detalle, cuya formalización matemática aparece en la Sección 4, se pueden resumir como sigue. Cuando hablamos de un objeto definido con total *precisión* nos referimos a un elemento aislado (por ejemplo, el *número* 2). También podemos determinar un elemento de forma *nítida* pero *imprecisa*, afirmando su pertenencia a cierto conjunto (por ejemplo, diciendo que se trata de un *número entero par*). Otros dos tipos de *incertidumbre* que pueden aparecer en la determinación de un elemento son la *aleatoriedad* y la *vaguedad* (o *borrosidad*). La primera se tiene cuando el elemento está determinado mediante una *distribución de probabilidad* (por ejemplo, cuando hablamos del *número que resultará al tirar un dado*) mientras que la segunda corresponde a un elemento determinado por su pertenencia a un *conjunto difuso* (por ejemplo, al hablar de un *número entero pequeño*).

La enseñanza obligatoria tradicional insistía casi exclusivamente en el conocimiento de leyes exactas y deterministas, que producen un comportamiento unívoco y preciso de los sistemas a los que se aplican (de manera que los alumnos sólo podían percibir situaciones inciertas en la “vida real” experimentada fuera de las aulas). En particular, los problemas de Matemáticas siempre admitían solución única, que se debía encontrar con una expresión exacta. La actual era de la información, al deber tratar estadísticamente grandes masas de datos (a veces incompletos y/o contradictorios), da mayor importancia a la aleatoriedad y al reconocimiento de situaciones ambiguas. También el concepto de conjunto difuso ha llegado al ámbito escolar, hablándosele a los alumnos de términos vagos y planteándoseles problemas con varias soluciones y/o con soluciones que pueden expresarse tanto de forma aproximada como difusa. La “ley del péndulo” que rige en muchos comportamientos sociales motiva la alternancia de criterios extremos. Así, podemos pasar de una enseñanza excesivamente rígida y estática a otra que borre por completo el orden, la precisión y la exactitud. Esa es la tendencia en la enseñanza de las Matemáticas propugnada por la “New New Math” o “Fuzzy Math” y descrita por Alicia Delibes en [31]. Mi desacuerdo con el carácter excesivamente exagerado de esa tendencia es el que ha motivado la aparición tanto de [63] en el *Boletín n° 16 de SĒMA* como del presente artículo. En ambos quiero expresar la conveniencia y necesidad de impartir una enseñanza “equilibrada” a los alumnos (que, en el caso de las Matemáticas, debe mantener un alto porcentaje de precisión, nitidez y exactitud), así como describir los aspectos fundamentales de la *Matemática Difusa* que han desarrollado matemáticos e ingenieros (y que es ajena a la “New New Math” o “Fuzzy Math”).

1.2 Conjuntos difusos: origen y desarrollo

La primera persona que dio un tratamiento matemático al concepto de conjunto difuso (en base a los motivos descritos en [63]) fue Lotfi A. Zadeh en 1965 [178]. Para ello admitió que cada elemento x pueda pertenecer a un **conjunto difuso** A con cierto grado $\mu_A(x) \in [0, 1]$ (tratándose, en particular, de un conjunto ordinario o “nítido”, cuando todos sus elementos tienen grados de pertenencia $\chi_A(x) \in \{0, 1\}$). Así, el conjunto difuso A viene determinado por su **función de pertenencia** μ_A (tratándose de la función característica χ_A en el caso de un conjunto ordinario). Por ejemplo, para determinar el conjunto J de los *jóvenes*, podemos usar una función de pertenencia que a la edad de 20 años le asigne el valor $\mu_J(20) = 1$, a la de 80 años el valor $\mu_J(80) = 0$, pero admitiendo también valores intermedios como pueden ser $\mu_J(25) = 0.9$, $\mu_J(35) = 0.3$, etcétera. En cambio, el conjunto nítido E de las *personas en edad de escolarización obligatoria* viene determinado actualmente por la función:

$$\mu_E(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & 6 \leq x \leq 16 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Zadeh determinó las operaciones a realizar con estas “*funciones de pertenencia*” en distintas aplicaciones de los conjuntos difusos (sus principales ideas están recogidas en los libros [92, 176]). Considerando su diferencia con las “*distribuciones de probabilidad*”, son distintas las operaciones a realizar con ambas en contextos similares. Así, el manejo de conjuntos difusos originó la denominada *Teoría de la Posibilidad* [38, 181], en cierto modo paralela a la *Teoría de la Probabilidad*. También a diferencia de lo que ocurre con una distribución de probabilidad, en el caso de las funciones de pertenencia no tiene demasiada importancia el valor concreto que toma en cada elemento (siempre que no se altere de forma brusca). Por ejemplo, se aplican las mismas ideas, obteniéndose resultados similares si definimos $\mu_J(25) = 0.8$, $\mu_J(35) = 0.2$, etcétera. Esto queda patente en algunas de las más importantes aplicaciones de los conjuntos difusos como son los *sistemas expertos* y los *controladores difusos* [56, 120, 135, 169, 182]. En ambos casos se usan silogismos de la *Lógica Difusa* cuya efectividad radica en la deducción de conclusiones difusas a partir de premisas también difusas, sin que importe demasiado el tipo de funciones de pertenencia (triangulares, gaussianas, etc.) usadas para describir tales conjuntos difusos. No obstante, la determinación y significado de los *grados de pertenencia* ha sido objeto de estudio [41, 137, 170].

Los métodos propuestos por Zadeh han resultado efectivos en el desarrollo de *software* aplicado a diversas tareas. Así, atendiendo al carácter difuso de la frase (3b) anterior y similares, el reconocimiento automático de caracteres escritos a

mano se puede informatizar mejor usando modelos difusos que usando otros métodos. En general, la *Teoría de Conjuntos Difusos* ha resultado muy útil en el *Reconocimiento de Formas y Patrones*. También ha tenido un gran desarrollo la *Teoría de la Decisión* y la *Programación Matemática en ambiente difuso*, por motivos análogos relacionados con la frase (3c). Por ejemplo, supongamos que queremos maximizar la función objetivo $f(x, y, z)$ sujeta a varias restricciones, entre las que figura $3x + y + 8z \leq 8000$. Entonces tiene sentido “difuminar” estas restricciones en el sentido de admitir que “casi se cumplan” (sin tener que verificarse con exactitud) si con ello conseguimos valores mucho mayores de f (vgr., no importaría tomar $3x_1 + y_1 + 8z_1 = 8002$ si esto permite alcanzar el valor $f(x_1, y_1, z_1) = 50$ mientras que respetando exactamente todas las restricciones sólo podemos alcanzar el valor máximo $f(x, y, z) = 30$).

Esta “aplicabilidad” de la *Teoría de Conjuntos Difusos* a situaciones reales que no siguen criterios rígidos, puede explicar su rápida expansión. Así, a partir del artículo inicial de Zadeh de 1965 [178] han surgido múltiples publicaciones, no sólo de aplicación a otras disciplinas (brevemente consideradas en la sección 3), sino también relativas a aspectos matemáticos. Estos aspectos son los que más interesan aquí y se tratan en la sección 2.

La mayoría de los artículos referentes al uso de los conjuntos difusos en Matemáticas fueron publicados inicialmente en la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. En 1978, la *International Fuzzy Systems Association* comenzó a editar la revista *Fuzzy Sets and Systems*, que ha servido para difundir multitud de aportaciones sobre los conjuntos difusos. También especializada en este tema apareció en 1979 la revista *BUSEFAL (BULLETIN pour les Sous Ensembles Flous et leurs AppLications)*. Más específicamente, sobre la denominada *Matemática Difusa*, apareció en 1993 la revista *The Journal of Fuzzy Mathematics* (editada por el *International Fuzzy Mathematics Institute*). Entre otras revistas que han publicado artículos sobre conjuntos difusos y sus aplicaciones cabe destacar *IJUFKS (International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems)*, *IJAR (International Journal of Approximate Reasoning)*, *Mathware & Soft Computing*, *Information Sciences* y *Stochastica* (esta última es la única entre las citadas que ha dejado de publicarse; se editó entre 1976 y 1987).

También se han publicado multitud de libros sobre conjuntos difusos. Entre los pioneros cabe destacar dos de 1975 y uno de 1980. Se trata, respectivamente de Kaufmann [84], Negoita y Ralescu [133] y Dubois y Prade [34]. Entre los más recientes, destaco otros tres (desde el punto de vista de las Matemáticas): Dubois y Prade [42], Höhle y Rodabaugh [67] y Lowen [117]. Parte de las publicaciones efectuadas corresponden a ponencias y comunicaciones realizadas

en Congresos específicos, que se convocan a nivel mundial (*IFSA*, *FUZZIEEE*, *IPMU*, ...), continental (*EUSFLAT* y *EUFIT* en Europa) y nacional (*ESTYLF* en España).¹

Esta extensa proliferación de publicaciones sobre el tema indica tanto su gran desarrollo como la dificultad de realizar una recopilación y síntesis exhaustiva. En lo que sigue me limito a esbozar algunas ideas fundamentales, indicando referencias bibliográficas para el lector interesado e insistiendo sobre todo en la definición de los distintos conceptos. Aunque versen sobre “conceptos difusos”, se trata de definiciones precisas, susceptibles de un tratamiento matemático cuyo desarrollo justifica la denominación de “*Matemática Difusa*”. De esta manera ratifico su diferencia con la “*New New Math*” o “*Fuzzy Math*” descrita en [31] y comentada en [63]. Asimismo, expreso mi deseo de que el uso de los conjuntos difusos en las distintas disciplinas (especialmente en la *Pedagogía*) sirva para “aclarar” situaciones antes inabordables o confusas y no para “confundir” lo que antes estaba claro, difuminándolo innecesariamente.

2 Los conjuntos difusos en las Matemáticas

2.1 Conjuntos y aplicaciones

Como se ha indicado antes, cada **subconjunto difuso** (o **borroso**) A del conjunto X viene determinado por su **función de pertenencia** $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$, con la que se puede identificar (así, en lo sucesivo, hablaremos también del conjunto difuso μ_A , o simplemente μ). Se dice que este subconjunto difuso es **normal** cuando $\exists x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$.

Las definiciones básicas sobre operaciones conjuntistas y relaciones binarias se deben a Zadeh [178, 179]. Siendo A y B dos subconjuntos difusos del conjunto X , con funciones de pertenencia respectivas μ_A y μ_B , la **unión** $A \cup B$ y la **intersección** $A \cap B$ tienen las siguientes funciones de pertenencia ($\forall x \in X$):

$$\mu_{A \cup B}(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \mu_{A \cap B}(x) := \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (1)$$

Para efectuar una unión (resp. intersección) infinita se sustituye “*max*” por “*sup*” (resp. “*min*” por “*inf*”). Se dice que A está incluido en B cuando $\mu_A \leq \mu_B$. Con estas operaciones, el conjunto $\mathcal{F}(X) \equiv [0, 1]^X$ de partes difusas de X tiene estructura de retículo distributivo, aunque no admite un complemento que lo convierta en álgebra de Boole. Interesa definir, no obstante, el **pseudocomplementario** A' de A , dado por: $\mu_{A'} := 1 - \mu_A$. Con esta definición

¹La *Teoría de Conjuntos Difusos* fue introducida en España sobre 1975 por Enric Trillas, Francisco Azorín y Alfredo Deaño. El primer *ESTYLF* se celebró en 1991, organizado por el entonces denominado “*grupo de Razonamiento Aproximado*” de la Universidad de Granada.

resultan ser válidas las leyes de De Morgan y la propiedad involutiva, pero deja de cumplirse el “principio del tercero excluido”.

Si A es un subconjunto difuso del conjunto X y C lo es del conjunto Y , teniendo funciones de pertenencia respectivas μ_A y μ_C , el **producto cartesiano** $A \times C \in \mathcal{F}(X \times Y)$ tiene la siguiente función de pertenencia ($\forall (x, y) \in X \times Y$):

$$\mu_{A \times C}(x, y) := \min\{\mu_A(x), \mu_C(y)\}. \quad (2)$$

Se denomina **relación binaria difusa** en el conjunto X a cualquier subconjunto difuso ρ de $X \times X$. Entre las diversas propiedades consideradas para tal ρ , destacan las definiciones siguientes:

- ρ es **reflexiva** cuando verifica que $\forall x \in X, \rho(x, x) = 1$.
- ρ es **simétrica** cuando verifica que $\forall x, y \in X, \rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- ρ es **antisimétrica** cuando verifica que

$$\forall x \neq y \in X, [\rho(x, y) \neq \rho(y, x) \text{ ó } \rho(x, y) = \rho(y, x) = 0].$$
- ρ es **perfectamente antisimétrica** cuando verifica que

$$\forall x, y \in X, [\rho(x, y) > 0 \text{ e } y \neq x \Rightarrow \rho(y, x) = 0].$$
- ρ es **[min-]transitiva** cuando verifica que

$$\forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq \sup\{\min(\rho(x, z), \rho(z, y)) : z \in X\}.$$

La relación binaria difusa ρ se llama **relación de similitud** cuando es reflexiva, simétrica y transitiva, denominándose **disimilitud** al pseudocomplementario de una similitud. Se dice que ρ es un **preorden difuso** cuando cumple las propiedades reflexiva y transitiva y que es un **orden parcial difuso [perfecto]** cuando es reflexiva, perfectamente antisimétrica y transitiva. Un **orden total (o lineal) difuso** es un orden parcial difuso que verifica: $\forall x \neq y \in X, [\rho(x, y) > 0 \text{ ó } \rho(y, x) > 0]$.

Dada la aplicación $f : X \rightarrow Y$, el denominado **Principio de extensión de Zadeh** proporciona las siguientes extensiones $f : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, $f^{-1} : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$:

$$\mu_{f(A)}(y) := \sup\{\mu_A(x) : f(x) = y\}, \forall y \in Y \text{ (siendo } \sup \emptyset := 0), \quad (3)$$

$$\mu_{f^{-1}(B)} := \mu_B \circ f. \quad (4)$$

La definición más usada de **aplicación o función difusa** φ de X a Y es la que asigna a cada elemento de X un subconjunto difuso de Y (englobando a las **funciones multivaluadas**, que asignan a cada elemento de X un subconjunto de Y). Tener una aplicación difusa $\varphi : X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ equivale a considerar una relación difusa entre ambos conjuntos $\rho \in \mathcal{F}(X \times Y)$, igualadas por la ecuación: $\rho(x, y) := \varphi(x)(y)$.

Algunas de las definiciones anteriores se han generalizado usando las t-normas y t-conormas introducidas por Schweizer y Sklar [156, 157] en el estudio de los *espacios métricos probabilísticos*. Se denomina **t-norma** o **norma triangular** (resp. **t-conorma** o **s-norma**) a cualquier operación interna en $[0, 1]$ que sea conmutativa, asociativa, creciente en cada una de sus variables y que admita al 1 (resp. al 0) como elemento neutro. A cada t-norma \top se le asocia su t-conorma **dual** \perp (y viceversa) mediante la ecuación

$$\alpha \perp \beta := 1 - [(1 - \alpha) \top (1 - \beta)], \quad \forall \alpha, \beta \in [0, 1].$$

Entonces se generalizan (1), (2) y la transitividad de una relación binaria difusa definiendo, respectivamente:

- $\mu_{A \cup B}(x) := \mu_A(x) \perp \mu_B(x), \quad \mu_{A \cap B}(x) := \mu_A(x) \top \mu_B(x).$
- $\mu_{A \times C}(x, y) := \mu_A(x) \top \mu_C(y).$
- ρ es **\top -transitiva** cuando verifica que:

$$\forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq \sup \{ \rho(x, z) \top \rho(z, y) : z \in X \}.$$

El pseudocomplemento usual también se generaliza sustituyendo la función $f(\alpha) = 1 - \alpha$ por las denominadas **funciones de negación** que son funciones decrecientes biyectivas e involutivas de $[0, 1]$ en sí mismo. La *Lógica Difusa* ofrece un marco apropiado donde interpretar las t-normas, t-conormas y funciones de negación [3, 4, 36, 43, 168, 169, 174], que sirven de conectivos lógicos para la conjunción, disyunción y negación, respectivamente, cuando se consideran valores de verdad pertenecientes al intervalo $[0, 1]$.

Otro tipo de generalización bastante usado consiste en sustituir el intervalo unidad $[0, 1]$ por un retículo arbitrario L , en la definición de función de pertenencia. Se tienen así los denominados **conjuntos L -difusos**, introducidos por Goguen [51]. Su unión e intersección resulta de extender a L^X , respectivamente, las operaciones *sup* e *inf* de L .

Nota: Aunque su uso está menos extendido, también se han definido algunas “variantes” del concepto de conjunto difuso como los *Conjuntos Difusos Intuicionistas* [7], los *Conjuntos Difusos Intervalo-valorados* [123], o los *Conjuntos Difusos “Nonstandard”* [136].

2.2 Estructuras algebraicas y topológicas

Supongamos ahora que $* : X \times X \rightarrow X : (x, y) \mapsto x * y$ es una operación (o ley de composición) interna en el conjunto X , que $A \in \mathcal{F}(X)$ tiene función de pertenencia μ_A y que \top es una t-norma. Entonces se dice que A es un **subgrupoide difuso** (o que es **cerrado para $*$**) con la t-norma \top si verifica que: $\mu_A(x * y) \geq \mu_A(x) \top \mu_A(y), \quad \forall x, y \in X$. Si $(X, *)$ es un grupo (siendo

e el elemento neutro y \bar{x} el simétrico de x), se dice que A es un **subgrupo difuso** si, además de ser cerrado para $*$, verifica que: $\mu_A(\bar{x}) \geq \mu_A(x)$, $\forall x \in X$. Estas definiciones se deben a Anthony y Sherwood [5] y generalizan la definición original de Rosenfeld [151], que usaba la t-norma *min*. Al estudiar las propiedades de estos subgrupos difusos, Abu Osman [1] ve la conveniencia de añadir la condición $\mu_A(e) = 1$.

Si $(X, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo K , se dice que $A \in \mathcal{F}(X)$ es un **subespacio vectorial difuso** de X (con la t-norma \top) si cumple que:

$$\mu_A(a \cdot x + b \cdot y) \geq \mu_A(x) \top \mu_A(y), \quad \forall a, b \in K, \forall x, y \in X.$$

A esta definición, debida a Katsaras y Liu [83] para el caso $\top = \min$, y a Das [27] para el caso general, también añade Abu-Osman [1] la condición $\mu(\vec{0}) = 1$.

Procedimientos análogos se usan para definir *subanillos* e *ideales difusos* [100, 109, 159], *subcuerpos difusos* [13, 128], *subálgebras difusas* [1, 55], etcétera.

La intersección arbitraria de subgrupos difusos (resp. subgrupos difusos, subespacios vectoriales difusos, ...) es también un subgrupo difuso (resp. subgrupo difuso, subespacio vectorial difuso, ...). La imagen y la preimagen homomórfica de todo subgrupo difuso (resp. subgrupo) difuso es también un subgrupo difuso (resp. subgrupo) difuso. La imagen y la preimagen mediante una aplicación lineal de todo subespacio vectorial difuso es también un subespacio vectorial difuso.

En el estudio de los distintos aspectos considerados hasta ahora (operaciones conjuntistas, aplicaciones, relaciones binarias y estructuras algebraicas), la idea fundamental consiste en extender definiciones, propiedades y teoremas del conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes difusas $\mathcal{F}(X)$, considerando subconjuntos difusos además de subconjuntos ordinarios, pero manteniendo los resultados clásicos si nos restringimos a $\mathcal{P}(X)$. La situación varía al considerar estructuras topológicas difusas. Ahí se parte de la definición de espacio topológico mediante abiertos, pero admitiendo que entre dichos abiertos puede haber subconjuntos difusos, lo que hace que la topología difusa originada sea distinta a una topología usual. No obstante, como es lógico, en las distintas definiciones y métodos introducidos se siguen los criterios conocidos. Concretemos algo más algunos aspectos elementales en este sentido.

Se denomina **topología difusa-Chang** [23] en el conjunto X a cualquier familia $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{F}(X)$ que sea cerrada para la intersección finita y la unión arbitraria y que contenga al conjunto vacío y al total. Una **topología difusa-Lowen** [111] es cualquier topología difusa-Chang que contenga, además, al conjunto $\{\alpha \chi_X : \alpha \in [0, 1]\}$ de todas las funciones constantes. Lowen justifica, sobre todo en [118], esta hipótesis adicional añadida a la definición original de Chang.

Al igual que en la Topología Clásica, se denominan **abiertos** (resp. **cerrados**) a los elementos de la topología (resp. a sus pseudocomplementarios) y se llama **espacio topológico difuso-Chang** (resp **difuso-Lowen**) a la pareja (X, \mathcal{T}) , siendo \mathcal{T} una topología difusa-Chang (resp. difusa-Lowen) en X .

Se puede generar una topología difusa, tanto en el sentido de Chang como en el de Lowen, a partir de cualquier familia de subconjuntos difusos tomada como **subbase** (o como **base**), sin más que añadir las funciones constantes requeridas, las intersecciones finitas (las cuales ya estarán incluidas en el caso de una base) y las uniones arbitrarias de elementos cualesquiera de la familia. Así, partiendo de los espacios topológicos difusos (X_1, \mathcal{T}_1) y (X_2, \mathcal{T}_2) , se construye la **topología difusa producto** [175] en $X_1 \times X_2$ engendrada por la base $\{\mu_1 \times \mu_2 : \mu_1 \in \mathcal{T}_1, \mu_2 \in \mathcal{T}_2\}$.

Dado cualquier espacio topológico (X, \mathcal{T}) , tiene interés la topología difusa-Lowen que admite como base al conjunto de funciones continuas de X en $[0, 1]$ (para la topología usual de $[0, 1]$ y la topología \mathcal{T} de X). Se dice que esta topología difusa-Lowen es la **inducida** (o **generada**) por \mathcal{T} . Los abiertos de esta topología difusa $\omega(\mathcal{T})$ son todas las funciones semicontinuas inferiormente (s.c.i.). En particular, la inducida por la topología usual de \mathbf{R} , es denominada **topología difusa usual de \mathbf{R}** (por lo que sus abiertos son las funciones s.c.i. de \mathbf{R} en $[0, 1]$).

Una función entre dos espacios topológicos difusos es **continua-difusa** cuando la imagen inversa (según el Principio de extensión de Zadeh (4)) de cualquier subconjunto difuso abierto es también un abierto. Lo que equivale a que la imagen inversa de cualquier subconjunto difuso cerrado sea también un cerrado. Un **homeomorfismo-difuso** es toda aplicación biyectiva entre dos espacios topológicos difusos tal que tanto ella como su inversa sean continuas-difusas. La composición de funciones continuas-difusas (resp. homeomorfismos-difusos) es otra función continua-difusa (resp. homeomorfismo-difuso). Por otro lado, $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{T}_2)$ es continua sii $f : (X_1, \omega(\mathcal{T}_1)) \rightarrow (X_2, \omega(\mathcal{T}_2))$ es continua-difusa.

Además de los diversos aspectos propios del estudio de espacios topológicos, también se han estudiado estructuras relacionadas, como los *espacios métricos difusos* [6, 76], los *espacios uniformes difusos* [69, 113], etc.

Supongamos ahora que $(X, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real. La topología difusa-Lowen \mathcal{T} en X se dice que es una **topología difusa lineal** (o que (X, \mathcal{T}) es un **espacio vectorial topológico difuso**) [80] si la suma $+$ y el producto \cdot son aplicaciones continuas-difusas, considerando las topologías producto respectivas en $X \times X$ y en $\mathbf{R} \times X$ (\mathbf{R} con la topología difusa usual). De forma

similar se definen los **grupos topológicos difusos** [44]. Dada una topología \mathcal{T} en X , Katsaras [81] demuestra que (X, \mathcal{T}) es un espacio vectorial topológico si y solamente si $(X, \omega(\mathcal{T}))$ es un espacio vectorial topológico difuso. Un caso interesante de espacio vectorial topológico difuso es el de un **espacio normado difuso**, que puede definirse siguiendo tres enfoques equivalentes (Höhle [66], Morsi [127] y Katsaras [81]).

2.3 Números y funciones reales

Para completar las ideas fundamentales contenidas en esta sección, pasamos ahora del marco general proporcionado por las estructuras algebraicas y topológicas al caso particular de la recta real \mathbf{R} . Por **número difuso** (sin más especificaciones) se suele entender un “número real difuso”, que es un subconjunto difuso de \mathbf{R} sujeto a una serie de restricciones. Hay distintas versiones de este concepto, que cambian tales restricciones. La más usual, debida a Zadeh [180], consiste en exigir que la función de pertenencia se anule fuera de un intervalo acotado, valga uno en un punto (o en un intervalo, hablándose también de *intervalo difuso*), sea creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de ese punto (o intervalo) y sea semicontinua superiormente (s. c. s.). Dentro de este tipo, en las aplicaciones se suelen usar funciones de pertenencia con una forma concreta, originando por ejemplo los π -números, los s - z -números, los números difusos L - R , trapezoidales, triangulares, etc. (ver, por ejemplo, [88]). En cambio, en el estudio de la Topología Difusa, suele usarse otro tipo de números difusos definidos por Gantner, Steinlage y Warren [47] y Lowen [114] (a partir del “intervalo unidad difuso” introducido por Hutton [68]), cuya función de pertenencia es decreciente, s.c.s., con supremo igual a 1 e ínfimo igual a 0. Manejar este tipo de números difusos equivale a manejar funciones de distribución de probabilidad, como hacen Höhle [65] y Dubois y Prade [37]. Para establecer más relaciones y comparaciones entre los distintos tipos de números difusos me remito a [59, 61].

Cualquiera sea el tipo de números difusos usado, y tanto en trabajos teóricos como aplicados, la aritmética efectuada consiste en la aplicación del Principio de Extensión de Zadeh (3), lo que supone una extensión del *Análisis de Intervalos* de Moore [124, 125]. En cambio, respecto a la ordenación de números difusos no hay tal unanimidad, habiendo surgido diversos métodos. Los fundamentales pueden consultarse en [14, 52, 53].

En el estudio de *funciones difusas reales*, suele exigirse que la imagen de cada elemento sea un “número difuso”, en vez de ser un subconjunto difuso arbitrario de \mathbf{R} . Con estas funciones se realiza el estudio de la *derivación e*

integración difusas [35, 50, 146, 184] ...

Nota: Partiendo de las ideas fundamentales anteriores, los conjuntos difusos se emplean también en otras ramas de las Matemáticas como las *Ecuaciones Diferenciales* [73, 74, 158], la *Interpolación y Aproximación* [45, 116, 75], el *Análisis Complejo* [17, 18, 19], la *Geometría* [98, 99, 143], etcétera

3 Interés de la “Matemática Difusa”

El desarrollo de los conceptos considerados en la sección anterior obedece en gran medida a la necesidad de fundamentar teóricamente aplicaciones prácticas de los conjuntos difusos. Por ejemplo, la construcción de similitudes, junto a otros tipos de clasificaciones difusas, tiene gran utilidad en el *Reconocimiento de Formas y Patronos* [10, 11, 12, 85]. Los distintos tipos de órdenes difusos tienen importancia en los modelos de *Decisión en ambiente difuso* [64, 140, 161, 162, 171]. Las relaciones binarias difusas también son útiles en otras áreas como la *teoría de grafos* y sus aplicaciones [22, 152, 177], la representación del conocimiento mediante *bases de datos relacionales* [16, 144, 183], el *control de sistemas* [15, 58, 120, 135], etc. Los espacios vectoriales difusos tienen utilidad en la *Programación Lineal Difusa* [28, 29, 30, 172]. Los números difusos aparecen en innumerables aplicaciones (de las que proviene su variedad de definiciones). En particular, las operaciones y convergencia de números difusos y de funciones difusas resultan fundamentales en la *Estadística* y la *Investigación Operativa*, cuando en vez de datos exactos se manejan *variables aleatorias difusas* [90, 101, 147, 150, 162] ...

La mayoría de tales aplicaciones prácticas están relacionadas con el actual desarrollo de la *Informática* y sus ramas (como el *Análisis de Imágenes* [25, 105, 142, 153], los *Sistemas Expertos* [56, 182, 183], las *Redes Neuronales* [57, 106, 163] o los *Algoritmos Genéticos* [78, 79, 155], además de las antes citadas). No obstante, el concepto de conjunto difuso ha sido usado también en otras disciplinas como la *Teoría de Sistemas* [49, 93, 131, 132], la *Biología* [48, 103, 104], la *Física* y la *Química* [2, 20, 122], la *Economía* [24, 72, 87], la *Medicina* [77, 139, 154], la *Lingüística* [71, 119, 141], la *Psicología* [94, 95, 96], la *Sociología* [110, 130, 138], la *Geografía* [46, 54, 121], la *Pedagogía* [33, 70, 86], etcétera.

Ya sea motivado por su aplicación práctica, o se trate de un mero desarrollo teórico, la noción de conjunto difuso se ha introducido en las diversas ramas de las *Matemáticas* extendiendo muchos conceptos y teoremas clásicos, hasta constituir la denominada “**Matemática Difusa**”. Se trata de una extensión

heterogénea y diversificada, no exenta de ciertas incongruencias [89], pero sin llegar a la confusión propia de la “*New New Math*”, a la que considero totalmente ajena.

La diversidad de planteamientos que aparece a veces al tratar un tema en la *Matemática Difusa*, se suele considerar como apropiada entre los ingenieros o los matemáticos aplicados, quienes cuentan así con mayor variedad de herramientas para adaptar a su problema de aplicación concreto (por ejemplo, para efectuar la intersección de conjuntos difusos, se cuenta con toda la gama proporcionada por las t-normas). Sin embargo, desde un punto de vista más teórico, interesa formular métodos generales que engloben diversos procedimientos específicos. En este sentido destaca la “*representación por α -cortes*” propuesta por Negoita y Ralescu [134, 148, 149] (entre otros métodos unificadores que conectan desarrollos dispersos de la *Matemática Difusa*). Para cada valor de $\alpha \in [0, 1]$, se denomina **α -corte** del conjunto difuso μ al conjunto [nítido] $\mu^{[\alpha]} := \mu^{-1}[\alpha, 1]$. De esta manera obtenemos toda una familia de conjuntos usuales que representa a μ . Esto permite ver la extensión de algunos conceptos matemáticos a conjuntos difusos como su uso ordinario sobre una familia de conjuntos (por ejemplo, usando la t-norma *min*, un subespacio vectorial difuso puede tratarse como una familia de subespacios vectoriales usuales). No obstante, al operar con tales familias de α -cortes, se pueden obtener nuevas familias que no sean α -cortes de ningún conjunto difuso (lo cual puede ocurrir, por ejemplo, al hallar imágenes mediante alguna aplicación). Eso es debido a que con tales operaciones se pueden perder ciertas condiciones que caracterizan las familias de α -cortes, quedando así restringida la potencialidad del método. Concretamente, las condiciones necesarias y suficientes para que una familia de subconjuntos $\{\psi(\alpha)\}_{\alpha \in [0,1]}$ coincida con la familia de α -cortes de algún subconjunto difuso μ del conjunto X , son las dos siguientes (establecidas en el *Teorema de Negoita-Ralescu* [133] y simplificadas en [60]):

$$(i) \psi(0) = X.$$

$$(ii) \forall \alpha \in (0, 1], \quad \psi(\alpha) = \bigcap \{\psi(\beta) : \beta \in [0, \alpha]\}.$$

El problema que resulta al manejar operaciones con las que no se conservan estas condiciones puede resolverse en algunos casos usando los denominados **α -cortes fuertes**, definidos por $\mu^{(\alpha)} := \mu^{-1}(\alpha, 1]$ y caracterizados por estas dos condiciones:

$$(i') \psi(1) = \emptyset.$$

$$(ii') \forall \alpha \in [0, 1), \quad \psi(\alpha) = \bigcup \{\psi(\beta) : \beta \in (\alpha, 1]\}.$$

El uso de ambos tipos de α -cortes queda englobado por los denominados *conjuntos graduales*, definidos como familias decrecientes de subconjuntos:

la familia $\{\psi(\alpha)\}_{\alpha \in [0,1]}$ es un **conjunto gradual** si verifica que $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$, $[\alpha < \beta \Rightarrow \psi(\alpha) \supseteq \psi(\beta)]$. Con esta definición se rebajan las condiciones anteriores (ya que es implicada tanto por (ii) como por (ii')), lo permite aumentar la eficacia de la "línea unificadora" propuesta por Ralescu, mediante la *representación por conjuntos graduales* [59, 60].

El paso del tiempo actuará como criba, constituyendo el mejor juez indicador del interés y utilidad de los distintos aspectos de la "*Matemática Difusa*". Entre los informáticos e ingenieros, las espectaculares aportaciones del *control difuso* han supuesto un enorme auge de la "*Lógica Difusa*". Parece ser que este auge ha alcanzado ya su máximo, examinándose actualmente sus limitaciones y perspectivas [9, 21, 126]. Ahora bien, desde el punto de vista de la *Matemática Pura*, ¿qué interés tiene la *Matemática Difusa*? Hasta ahora, que yo sepa, los desarrollos originados por la introducción de los conjuntos difusos no han resuelto problemas matemáticos planteados con anterioridad a este concepto. En opinión de Lowen [115], para alcanzar resultados de mayor interés se debe avanzar en el estudio de conceptos "propiamente difusos", más que limitarse a extender conceptos clásicos al caso difuso. En mi modesta opinión, deberíamos "trasladar" las técnicas (más que los conceptos) empleadas en la *Lógica Difusa* del *control difuso* a las *Matemáticas*, para abordar problemas que requieren una solución aproximada mediante procedimientos distintos a los normalmente usados en el *Análisis Numérico*. Puede que de esa forma sí se consigan resultados de mayor utilidad que una mera "extensión teórica".

Independientemente del interés o utilidad de la *Matemática Difusa*, es importante definir formalmente el tipo de *incertidumbre* (denominado *vaguedad* o *borrosidad*) que obliga a manejar el concepto de *conjunto difuso*, tanto en las *Matemáticas* como fuera de ellas. Esta cuestión se trata en la sección siguiente.

4 Modelos matemáticos de la incertidumbre

La *probabilidad* se ha usado durante mucho tiempo como la única forma de incertidumbre. A ello han contribuido, entre otros factores, tanto su aplicación en varios campos (vgr. la *Mecánica Estadística* y la *Mecánica Cuántica*) como el desarrollo matemático que le sirve de fundamento, mediante la *Teoría de la Medida*, a partir de la definición axiomática de Kolmogorov [97]: una **probabilidad** en el conjunto finito² X es una aplicación p del conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de X en el intervalo unidad $[0, 1]$ tal que $p(X) = 1$ y además es

²Para X infinito se considera una σ -álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, definiéndose $p : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ con $p(X) = 1$ y ampliando la aditividad (5) a cualquier familia numerable $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de \mathcal{A} : $p \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$.

aditiva:

$$\forall A, B \subseteq X, \quad [A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)]. \quad (5)$$

Este amplio, fructífero y exclusivo uso de la probabilidad, junto con el usual rechazo a nuevas ideas (desde el establecimiento de cualquier pensamiento arraigado, que tiende a englobar todo el conocimiento) explican que, en los comienzos de la *Teoría de Conjuntos Difusos*, algunos autores estimaran que el concepto de *conjunto difuso* era superfluo. Estos autores sostenían que todas las situaciones tratadas mediante conjuntos difusos se podían manejar usando solamente probabilidades [107, 108, 129, 167]. Aunque ya se distingue más claramente el uso de ambos conceptos, continúa teniendo interés la relación entre *probabilidad* y *borrosidad* [40, 62, 166].

Por otro lado, la propagación de probabilidades mediante aplicaciones multivaluadas originó la denominada *Teoría de la Evidencia*, debida a Dempster [32] y Shafer [160]. Aquí, la “masa de probabilidad” no se reparte necesariamente entre elementos individuales, sino entre subconjuntos (denominados *elementos focales*). Por ejemplo, si la única información disponible al lanzar un dado es que ha salido un número par, la probabilidad 1 se le asigna al subconjunto $\{2, 4, 6\}$ en su totalidad, sin repartir la probabilidad $1/3$ a cada número en concreto (como se haría al aplicar el “*principio de la razón insuficiente*” de Laplace). De esta forma, además de la *aleatoriedad*, surge la *imprecisión* y la *ambigüedad* en la determinación del resultado obtenido al lanzar el dado.

En definitiva, la consideración de distintos tipos de incertidumbre (recopilados en [91] y comentados en la Subsección 1.1) obliga a establecer claramente la diferenciación entre ellos. A pesar de las primeras polémicas aludidas, en la actualidad hay una clasificación precisa de los distintos tipos de información incierta sobre un conjunto finito (para conjuntos infinitos surgen dificultades [145] que mantienen aún abierta esta cuestión). Tal clasificación contiene, además de las *probabilidades*, las *medidas de creencia* y de *plausibilidad* manejadas en la *Teoría de la Evidencia*, las denominadas *medidas de posibilidad* y de *necesidad* asociadas a conjuntos difusos (introducidas por Zadeh [181]) y las *capacidades* de Choquet [26], entre otros tipos específicos de medidas; todas ellas englobadas bajo el concepto general de *medida difusa* debido a Sugeno [164]. La clasificación completa puede consultarse en la terna de artículos [8, 102, 173]. Veamos aquí solamente algunos aspectos elementales, manejando un universo de discurso finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y la σ -álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. En tal caso, la probabilidad p está determinada por su **distribución de probabilidad**, obtenida de subconjuntos unitarios: $p_i := p(\{x_i\})$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. En efecto,

la aditividad (5) permite afirmar que $p(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, debiendo ser en particular $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Relajando la aditividad (5) se obtiene la definición de **medida difusa** g sobre X , que es cualquier aplicación $\mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ que sea creciente ($A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$) y que tome los dos valores siguientes: $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$.³ Dada cualquier medida difusa g sobre X , su **medida dual** es la medida difusa g' , definida como sigue: $g'(A) := 1 - g(A')$, $\forall A \subseteq X$. (siendo A' el complementario de A). Es inmediato comprobar que $g'' = g$, por lo que toda medida difusa puede estudiarse junto a su dual; denominándose g **autodual** en caso de ser $g' = g$. Observemos que toda probabilidad es una medida difusa autodual.

La medida difusa Π se dice que es una **posibilidad** en X ⁴ [181] cuando cumple que:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad \Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}. \quad (6)$$

Al igual que con las probabilidades, la definición anterior permite determinar Π por su **distribución de posibilidad**: $\pi_i := \Pi(\{x_i\})$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$; debiendo ser $\Pi(A) = \max\{\pi_i : x_i \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ y, en particular, $\max\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\} = 1$.

La medida dual N de toda posibilidad Π se denomina **necesidad** y viene caracterizada por el cumplimiento de:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad N(A \cap B) = \min\{N(A), N(B)\}. \quad (7)$$

En la *Teoría de la Evidencia* se denomina **conjunto aleatorio** o **asignación básica de probabilidad** (ABP) sobre X a cualquier aplicación $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ que verifique las dos condiciones siguientes: $m(\emptyset) = 0$, $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} m(A) = 1$. Se trata por tanto de una distribución de probabilidad en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Los **elementos focales** de m son los subconjuntos B de X tales que $m(B) > 0$. Asociada a la ABP m se considera la pareja de medidas difusas duales **creencia** Bel y **plausibilidad** Pl , definidas por ($\forall A \subseteq X$):

$$Bel(A) := \sum_{B \subseteq A} m(B), \quad Pl(A) := \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (8)$$

³Para X infinito se define g sobre una σ -álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, añadiendo las dos condiciones siguientes:

- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow g \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$.
- $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \Rightarrow g \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$.

⁴Si consideramos X infinito, entonces en las definiciones que siguen de **posibilidad** y **necesidad** se toma la unión y la intersección, respectivamente, de cualquier familia numerable de subconjuntos, sustituyendo “*max*” por “*sup*” tanto en (6) como en la determinación de $\Pi(A)$ mediante la *distribución de posibilidad* y sustituyendo “*min*” por “*inf*” en (7).

A partir de la función Bel , se puede calcular la única ABP m de la que es medida de creencia, mediante $(\forall A \subseteq X)$:

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} Bel(B),$$

donde $|S|$ denota el cardinal del subconjunto S . Por tanto, podemos obtener las tres funciones m , Bel y Pl una vez conocida cualquiera de ellas, denominándose **evidencia** a la información que aportan.

La probabilidad corresponde al caso particular en que todos los elementos focales de m son unitarios: $p_i = m(\{x_i\})$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Para esta “evidencia **probabilística**” se cumple que $p = Bel = Pl$.

La posibilidad corresponde al caso particular en que los elementos focales forman una cadena respecto a la inclusión de conjuntos, hablándose entonces de una “evidencia **consonante**” o de una “evidencia **posibilística**”: $\pi_i = \sum_{x_j \in A} m(A)$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Entonces $Bel = N$ y $Pl = \Pi$.

Veamos con más detalle cómo el caso particular de evidencias consonantes corresponde a una posibilidad, lo que a su vez proporcionará una representación de cada subconjunto difuso normal, cuando se identifica éste con la distribución de posibilidad asociada. Para ello, además de identificar cada subconjunto difuso con su función de pertenencia μ , usamos subconjuntos difusos normales (debiendo cumplirse por tanto la igualdad $\max\{\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n\} = 1$) y reordenamos los subíndices asignados a cada elemento de X de manera que los elementos focales de la ABP consonante m formen parte de la siguiente cadena de subconjuntos:

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\} \subset \dots \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \subset X.$$

Más específicamente, tendremos $(\forall i = 1, \dots, n)$: $m(\{x_1, x_2, \dots, x_i\}) = m_i$, siendo $m_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n m_i = 1$.

Entonces la plausibilidad asociada a m es una posibilidad, determinada por la siguiente distribución: $\pi_i = m_i + m_{i+1} + \dots + m_n$. La cual constituye el subconjunto difuso normal $\mu : X \rightarrow [0, 1] : x_i \mapsto \pi_i$.

Recíprocamente, a cualquier conjunto difuso normal $\mu \in \mathcal{F}(X)$ determinado por grados de pertenencia que decrecen con el subíndice i : $\mu(x_i) = \pi_i, \forall i$, con $1 = \pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_n \geq 0$, se le asocia la ABP consonante siguiente:

$$m(\{x_1, x_2, \dots, x_i\}) = \pi_i - \pi_{i+1}, \quad \text{con } \pi_{n+1} := 0.$$

El paso de m consonante a μ normal y viceversa es biyectivo. Lo cual permite interpretar al conjunto difuso μ como una distribución de posibilidad sobre los

elementos de X , identificando la posibilidad asignada al elemento x_i con su grado de pertenencia: $\pi_i = \mu(x_i)$.⁵

Atendiendo a estos conceptos y teorías, quedan superadas las polémicas entre los partidarios de las probabilidades y los conjuntos difusos, pudiendo decirse por ejemplo que “la determinación de un conjunto difuso normal, que equivale a una distribución de posibilidad, corresponde a observaciones imprecisas pero consonantes”, mientras que “la determinación de una distribución de probabilidad corresponde a observaciones precisas pero disjuntas”. De esta forma, la probabilidad y la posibilidad aportan herramientas complementarias en la descripción y modelación de fenómenos no deterministas, herramientas que pueden aparecer por separado o conjuntamente (como en los *sucesos difusos* o las *probabilidades lingüísticas*) [39], pero que no entran en conflicto ni suponen alternativas antagónicas.

Referencias

- [1] M. T. Abu Osman, On t-fuzzy subfield and t-fuzzy vector subspaces, *Fuzzy Sets and Systems* 33 (1989) 111-117.
- [2] S. T. Ali and H. Doebner, On the equivalence of nonrelativistic quantum mechanics based upon sharp and fuzzy measurements, *J. Math. Phys.* 17 (1976) 1105-1111.
- [3] C. Alsina, On a family of connectives for fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 16 (1985) 231-235.
- [4] C. Alsina, E. Trillas and L. Valverde, On some logical connectives for fuzzy sets theory, *J. Math. Anal. Appl.* 93 (1983) 15-26.
- [5] J. M. Anthony and H. Sherwood, Fuzzy groups redefined, *J. Math. Anal. Appl.* 69 (1979) 124-131.
- [6] G. Artico and R. Moresco, On fuzzy metrizable, *J. Math. Anal. Appl.* 107 (1985) 144-147.
- [7] K. T. Atanassov, Intuitionistic Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems* 20 (1986) 87-96.
- [8] G. Banon, Distinction between several subsets of fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems* 5 (1980) 291-305.
- [9] S. Barro, Some Ideas Concerning Fuzzy Intelligent Systems, *Mathware & Soft Computing* 6 (1999) 141-154.
- [10] J. C. Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms* (Plenum Press, New York, 1987).

⁵En un trabajo reciente [62] considero una alternativa a esta representación usual, válida para conjuntos difusos cualesquiera (sean o no normales), interpretando $\mu(x_i)$ como la probabilidad de que x_i pertenezca a un conjunto aleatorio, el cual queda caracterizado por el cumplimiento de estas dos propiedades equivalentes:

- (1) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad Bel(A \cap B) Bel(A \cup B) = Bel(A) Bel(B).$
- (2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow Pl(A \cup B) = Pl(A) + Pl(B) - Pl(A)Pl(B).$

- [11] J. Bezdek, J. Keller, R. Krishnapuram and N. R. Pal, Eds., *Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing*. The Handbooks of Fuzzy Sets Series (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999).
- [12] J. C. Bezdek and S. K. Pal, *Fuzzy Models for Pattern Recognition* (IEEE Press, New York, 1992).
- [13] R. Biswas, Fuzzy fields and fuzzy linear spaces redefined, *Fuzzy Sets and Systems* 33 (1989) 257-259.
- [14] G. Bortolan and R. Degani, A review of some methods for ranking fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems* 15 (1985) 1-19.
- [15] M. Braae and D. A. Rutherford, Fuzzy relations in a control setting, *Kybernetes* 7 (1978) 185-188.
- [16] B. P. Buckles and F. E. Petry, A Fuzzy Representation of Data for Relational Databases, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (1982) 213-226.
- [17] J. J. Buckley, Fuzzy complex numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 33 (1989) 333-345.
- [18] J. J. Buckley, Fuzzy complex analysis I: Differentiation, *Fuzzy Sets and Systems* 41 (1991) 269-284.
- [19] J. J. Buckley, Fuzzy complex analysis II: Integration, *Fuzzy Sets and Systems* 49 (1992) 171-179.
- [20] H. Cao and G. Chen, Some applications of fuzzy sets to meteorological forecasting, *Fuzzy Sets and Systems* 9 (1983) 1-12.
- [21] J. L. Castro, The Limits of Fuzzy Logic, *Mathware & Soft Computing* 6 (1999) 155-161.
- [22] S. Chanas and J. Kamburowski, The use of fuzzy variables in P. E. R. T., *Fuzzy Sets and Systems* 5 (1981) 11-20.
- [23] C. L. Chang, Fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 24 (1968) 182-190.
- [24] S. S. L. Chang, Application of Fuzzy Set Theory to Economics, *Kybernetes* 6 (1977) 203-207.
- [25] Z. R. Chi and H. Yang, *Fuzzy Algorithms with Applications to Image Processing and Pattern Recognition* (World Scientific Publishing, London, 1996).
- [26] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier* 5 (1953/54) 131-292.
- [27] P. S. Das, Fuzzy vector spaces under triangular norms, *Fuzzy Sets and Systems* 25 (1988) 73-85.
- [28] M. Delgado, J. Kacprzyk, S.A. Orłowski, J. L. Verdegay and M. A. Vila, A survey of fuzzy optimization and fuzzy mathematical programming. En: M. Fedrizzi, J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds., *Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming* (Springer Verlag, Berlin, 1990).
- [29] M. Delgado, J. L. Verdegay and M. A. Vila, A General Model for Fuzzy Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 21-29.
- [30] M. Delgado, J. L. Verdegay and M. A. Vila, Relating different approaches to solve Linear Programming problems with imprecise costs, *Fuzzy Sets and Systems* 37 (1990) 33-42.
- [31] A. Delibes Liniers, La Matemática Difusa. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* 14 (1999) 87-94.

- [32] A. P. Dempster, Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping, *Annals of Mathematical Statistics* (1967) 325-339.
- [33] T. Dubois, A teaching system using fuzzy subsets and multi-criteria analysis, *Int. J. Math. Ed. Sci. Tech.* 8 (1977) 203-217.
- [34] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications* (Academic Press, New York, 1980).
- [35] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculus, *Fuzzy Sets and Systems* 8 (1982) 1-18 (part 1: Integration of fuzzy mappings), 105-116 (part 2: Integration on fuzzy intervals), 225-243 (part 3: Differentiation).
- [36] D. Dubois and H. Prade, A review of fuzzy set aggregation connectives, *Inf. Sci.* 36 (1985) 85-121.
- [37] D. Dubois and H. Prade, The mean value of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987) 279-300.
- [38] D. Dubois and H. Prade, *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty* (Plenum Press, New York, 1988).
- [39] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets, probability and measurement, *European Journal of Operational Research* 40 (1989) 135-154.
- [40] D. Dubois and H. Prade, Fuzzy sets and probability: mis-understandings, bridges and gaps, *Proc. of the FUZZ-IEEE'93* (San Francisco, 1993) 1059-1068.
- [41] D. Dubois and H. Prade, The three semantics of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 90 (1997) 141-150.
- [42] D. Dubois and H. Prade, Eds., *Fundamentals of Fuzzy Sets*. The Handbooks of Fuzzy Sets Series (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999).
- [43] F. Esteva, Negaciones en la Teoría de Conjuntos Difusos, *Stochastica* 5 (1981) 33-44.
- [44] D. H. Foster, Fuzzy topological groups, *J. Math. Anal. Appl.* 67 (1979) 549-564.
- [45] S. G. Gal, Degree of Approximation of Fuzzy Mappings by Fuzzy Polinomials, *Journal of Fuzzy Mathematics* 2 (1994) 847-854.
- [46] S. Gale, Inexactness, fuzzy sets, and the foundations of behavioral geography, *Geogr. Anal.* 4 (1972) 337-349.
- [47] T. E. Gantner, R. C. Steinlage and R. H. Warren, Compactness in fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 62 (1978) 547-562.
- [48] E. W. Giering and A. Kandel, The application of fuzzy set theory to the modelling of competition in ecological systems, *Fuzzy Sets and Systems* 9 (1983) 103-128.
- [49] M. de Glass, Theory of Fuzzy Systems, *Fuzzy Sets and Systems* 10 (1983) 65-78.
- [50] R. Goetschel and W. Voxman, Elementary Fuzzy Calculus, *Fuzzy Sets and Systems* 18 (1986) 31-42.
- [51] J. A. Goguen, L-Fuzzy Sets, *J. Math. Anal. Appl.* 18 (1967) 145-174.
- [52] A. González Muñoz, *Métodos subjetivos para la comparación de números difusos*, Tesis Doctoral (Universidad de Granada, 1987).

- [53] A. González Muñoz, Números difusos: aritmética y comparación. En: *Algunos aspectos del Tratamiento de la Información en Inteligencia Artificial* (Serv. Public. Univ. Granada, 1991).
- [54] H. W. Gottinger, Competitive processes: Application to urban structures, *Cybernetica* 16 (1973) 177-197.
- [55] Gu WenXiang and Tu Lu, Fuzzy algebras over fuzzy fields redefined. *Fuzzy Sets and Systems* 53 (1993) 105-108.
- [56] M. M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler and J. B. Kiszka, Eds., *Approximate Reasoning in Expert Systems* (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [57] M. M. Gupta and D. H. Rao, On the principles of fuzzy neural networks, *Fuzzy Sets and Systems* 61 (1994) 1-18.
- [58] M. M. Gupta and T. Yamakawa, Eds., *Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control* (North-Holland, Amsterdam, 1988).
- [59] J. A. Herencia González, *Origen y uso de los conjuntos graduales en la Matemática Difusa*. Tesis Doctoral (Universidad de Granada, 1996).
- [60] J. A. Herencia, Graded Sets and Points: A stratified approach to Fuzzy Sets and Points. *Fuzzy Sets and Systems* 77 (1996) 191-202.
- [61] J. A. Herencia, Graded numbers and graded convergence of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems* 88 (1997) 135-264.
- [62] J. A. Herencia, Representación de conjuntos difusos mediante evidencias disonantes. *Actas del ESTYLF'2000* (Sevilla, 2000) 241-246.
- [63] J. A. Herencia, Definiciones acerca de la Educación Matemática y la Matemática Difusa. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* 16 (2000) 89-118.
- [64] J. A. Herencia and M. T. Lamata, A total order for the graded numbers used in decision problems, *IJUFKS* 7 (1999) 267-276.
- [65] U. Höhle, Probabilistische topologien, *Manuscripta Math.* 26 (1978) 223-245.
- [66] U. Höhle, Minkowski Functionals of L-fuzzy sets. En: P. P.Wang and S. K.Chang, Eds., *Fuzzy sets: Theory and Applications to Police Analysis and Information Systems* (Plenum Press, New York, 1980) 13-24.
- [67] U. Höhle and S. Rodabaugh, Eds., *Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory*. The Handbooks of Fuzzy Sets Series (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999).
- [68] B. Hutton, Normality in fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 50 (1975) 74-79.
- [69] B. Hutton, Uniformities on fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977) 559-571.
- [70] A. Jones, Fuzzy subsets in didactic processes. En: A. Jones, A. Kaufmann and H. J. Zimmermann, Eds., *Fuzzy Sets Theory and Applications*. (Reidel P. C., Dordrecht, 1985) 349-396.
- [71] J. Joyce, Fuzzy sets and the study of linguistics, *Pac. Coast Philol.* 11 (1976) 39-42.
- [72] J. Kacprzyk and R. R. Yager, Eds., *Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. (Verlag TÜV, Rheinland, 1985).

- [73] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987) 301-317.
- [74] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 35 (1990) 389-396.
- [75] O. Kaleva, Interpolation of fuzzy data, *Fuzzy Sets and Systems* 61 (1994) 63-70.
- [76] O. Kaleva and S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 12 (1984) 215-229.
- [77] D. Kalmanson and H. E. Stegall, Cardiovascular investigations and fuzzy set theory, *Amer. Jour. of Cardiology* 35 (1975) 30-34.
- [78] C. L. Karr, Genetic algorithms for fuzzy controllers, *A. I. Expert* 6 (1991) 26-33.
- [79] C. L. Karr, Applying Genetics to Fuzzy Logic, *A. I. Expert* 6 (1991) 38-43.
- [80] A. K. Katsaras, Fuzzy topological vector spaces I, *Fuzzy Sets and Systems* 6 (1981) 85-96.
- [81] A. K. Katsaras, Fuzzy topological vector spaces II, *Fuzzy Sets and Systems* 12 (1984) 143-154.
- [82] A. K. Katsaras, On fuzzy uniform spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 101 (1984) 97-113.
- [83] A. K. Katsaras and D. B. Liu, Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977) 135-146.
- [84] A. Kaufmann, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets* (Academic Press, New York, 1975).
- [85] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, Tome III: Applications à la classification et à la reconnaissance des formes, aux automates et aux systèmes, aux choix des critères* (Masson, Paris, 1975).
- [86] A. Kaufmann, *Modèles Mathématiques por la Stimulation Inventive*. (Albin-Michel, Paris, 1979).
- [87] A. Kaufmann, Fuzzy subsets applications in Operational Research and Management. En: A. Jones, A. Kaufmann and H. J. Zimmermann, Eds., *Fuzzy Sets Theory and Applications*. (Reidel P. C., Dordrecht, 1985) 257-300.
- [88] A. Kaufmann and M. M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1991).
- [89] E. E. Kerre, A call for crispness in Fuzzy Set Theory, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 57-65.
- [90] E. P. Klement, M. L. Puri and D. A. Ralescu, Limit theorems for fuzzy random variables, *Proc. Roy. Soc. London A* 407 (1986) 171-182.
- [91] G. J. Klir, Where do we stand on measures of uncertainty, ambiguity, fuzziness, and the like?, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987) 141-160.
- [92] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems* (World Scientific Publishing, London, 1996).
- [93] P. E. Kloeden, Fuzzy Dinamical Systems, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (1982) 275-296.
- [94] M. Kochen, Applications of fuzzy sets in psychology. En: L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, Eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York, 1975) 395-408.

- [95] M. Kokawa, K. Namakura and M. Oda, Experimental approach to fuzzy simulation of memorizing, forgetting and inference process. En: L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, Eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York, 1975) 409-428.
- [96] M. Kokawa, M. Oda and K. Namakura, Fuzzy-theoretical dimensionality reduction method of multidimensional quantity. En: M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines, Eds., *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1977) 235-249.
- [97] A. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, Berlin, 1933). Traducción al inglés: *Foundations of the Theory of Probability* (Chelsea, Nueva York, 1950).
- [98] L. Kuijken, Fuzzy Projective Geometries, *Proceedings of ESTYLF-EUSFLAT'99* (Palma de Mallorca, 1999) 429-432.
- [99] L. Kuijken, H. Van Maldeghem and E. Kerre, Fuzzy Projective Geometries from Fuzzy Vector Spaces, *Proceedings of IPMU'98* (Paris, 1998) 1331-1338.
- [100] N. Kuroki, On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups. *Fuzzy Sets and Systems* 5 (1981) 203-215.
- [101] H. Kwakernaak, Fuzzy random variables. Part I: Definitions and theorems, *Inf. Sci.* 15 (1978) 1-15. Part II: Algorithms and examples for the discrete case, *Inf. Sci.* 17 (1979) 253-278.
- [102] M. T. Lamata and S. Moral, Classification of fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems* 33 (1989) 243-253.
- [103] L. E. Larsen, E. H. Ruspini, J. J. McNew, D. O. Walter and W. R. Adey, A test of sleep staging systems in the unrestrained Chimpanzee, *Brain Res.* 40 (1972) 319-343.
- [104] E. T. Lee, Shape-oriented chromosome classification, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* 5 (1975) 629-632.
- [105] E. T. Lee, Applications of fuzzy set theory to image sciences, *J. Cybern.* 10 (1980).
- [106] S. C. Lee and E. T. Lee, Fuzzy sets and neural networks, *J. Cybern.* 4 (1974) 83-103.
- [107] D. Lindley, Scoring rules and the inevitability of probability, *Internat. Statist. Review* 50 (1982) 1-26.
- [108] D. Lindley, The Probability Approach to the Treatment of Uncertainty in Artificial Intelligence and Expert Systems, *Statistical Science* 2 (1987) 3-44.
- [109] W. J. Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. *Fuzzy Sets and Systems* 8 (1982) 133-140.
- [110] S. G. Loo, Fuzzy relations in the social and behavioral sciences, *J. Cybern.* 8 (1978) 1-16.
- [111] R. Lowen, Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, *J. Math. Anal. Appl.* 56 (1976) 621-633.
- [112] R. Lowen, Convex fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 3 (1980) 291-310.
- [113] R. Lowen, Fuzzy uniform spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 82 (1981) 370-385.
- [114] R. Lowen, On $(R(L), \oplus)$, *Fuzzy Sets and Systems* 10 (1983) 203-209.

- [115] R. Lowen, Mathematics and Fuzziness, Some Personal Reflections, *Inf. Sci.* 36 (1985) 17-27.
- [116] R. Lowen, A fuzzy Lagrange interpolation theorem, *Fuzzy Sets and Systems* 34 (1990) 33-38.
- [117] R. Lowen, *Fuzzy Set Theory: Basic Concepts, Techniques and Bibliography* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996).
- [118] R. Lowen and P. Wuyts, Concerning the constants in Fuzzy Topology, *J. Math. Anal. Appl.* 129 (1988) 256-258.
- [119] E. R. MacCormac, Metaphors and fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (1982) 243-256.
- [120] E. H. Mamdani, Application of fuzzy set theory to control systems: A survey. En: M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines, Eds., *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1977) 77-88.
- [121] J. Massonie, L'utilisation des sous-ensembles flous en géographie, *Cahiers de Géographie de l'Université de Besançon* (1976).
- [122] A. B. McBratney and A. W. Moore, Application of Fuzzy Sets to Climatic Classification, *Agricultural and Forest Meteorology* 35 (1985) 165-185.
- [123] G. Meng, The basic theory of interval-valued fuzzy sets, *Mathematica Applicata* 2 (1993) 27-35.
- [124] R. E. Moore, *Interval Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966).
- [125] R. E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis* (SIAM Studies in Applied Math., Philadelphia, 1979).
- [126] C. Moraga, Towards a Fuzzy Computability?, *Mathware & Soft Computing* 6 (1999) 163-172.
- [127] N. N. Morsi, On Fuzzy Pseudo-normed Vector Spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 27 (1988) 351-372.
- [128] S. Nanda, Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 19 (1986) 89-94.
- [129] B. Natvig, Possibility versus Probability, *Fuzzy Sets and Systems* 10 (1983) 31-36.
- [130] C. V. Negoita, Fuzzy models for social processes. En: L. Cobb and R. Mithrall, Eds., *Mathematical Frontiers of the Social and Policy Sciences* (Westview Press, Colorado, 1981) 283-291.
- [131] C. V. Negoita, *Fuzzy Systems* (Tunbridge Wells, England, 1981).
- [132] C. V. Negoita, *Expert Systems and Fuzzy Systems* (Benjamin/Cummings, California, 1985).
- [133] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1975).
- [134] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, Representation theorems for fuzzy concepts. *Kybernetes* 4 (1975), 169-174.
- [135] H. T. Nguyen and M. Sugeno, Eds., *Fuzzy Systems: Modeling and Control*. The Handbooks of Fuzzy Sets Series (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998).
- [136] A. di Nola and G. Gerla, Nonstandard fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 18 (1986) 173-181.

- [137] A. M. Norwich and I. B. Turksen, The fundamental measurement of fuzziness. En: R. R. Yager, Ed., *Fuzzy Sets and Possibility Theory: Recent Developments* (Pergamon Press, New York, 1982) 49-60.
- [138] M. Nowakowska, Fuzzy concepts in the Social Sciences, *Behav. Sci.* 22 (1977) 107-115.
- [139] O. O. Oguntade and P. E. Beaumont, Ophthalmological prognosis via fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (1982) 123-138.
- [140] S. A. Orlovski, Decision-making with a fuzzy preference relation, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 155-168.
- [141] S. Ovchinnikov, Representations of Synonymy and Antonymy by Automorphisms in Fuzzy Sets Theory, *Stochastica* 5 (1981) 95-107.
- [142] S. K. Pal and A. Ghosh, Fuzzy Geometry in Image Analysis, *Fuzzy Sets and Systems* 48 (1992) 23-40.
- [143] T. Poston, *Fuzzy Geometry*, Ph. D. Thesis (Univ. of Warwick, England, 1971).
- [144] H. Prade and C. Testemale, Generalizing Database Relational Algebra for the Treatment of Incomplete or Uncertain Information and Vague Queries, *Inf. Sci.* 34 (1984) 115-143.
- [145] M. L. Puri and D. A. Ralescu, A Possibility Measure is not a Fuzzy Measure, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (1982) 311-313.
- [146] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.* 91 (1983) 552-558.
- [147] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Fuzzy random variables, *J. Math. Anal. Appl.* 114 (1986) 409-422.
- [148] D. A. Ralescu, Inexact solutions for large-scale control problems. *Proceedings of the First World Conf. on Math. at the Service of Man* (Barcelona, 1977).
- [149] D. A. Ralescu, A survey of the representation of fuzzy concepts and its applications. En: M. M. Gupta, R. K. Ragade and R. R. Yager, Eds., *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications* (North-Holland, Amsterdam, 1979) 77-91.
- [150] D. A. Ralescu, Toward a general theory of fuzzy variables, *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982) 176-193.
- [151] A. Rosenfeld, Fuzzy groups, *J. Math. Anal. Appl.* 35 (1971) 512-517.
- [152] A. Rosenfeld, Fuzzy graphs. En: L.A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, Eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York, 1975) 77-95.
- [153] A. Rosenfeld, Fuzzy digital topology, *Inf. and Control* 40 (1979) 76-87.
- [154] E. Sanchez, Medical applications with fuzzy sets. En: A. Jones, A. Kaufmann and H. J. Zimmermann, Eds., *Fuzzy Sets Theory and Applications*. (Reidel P. C., Dordrecht, 1985) 331-348.
- [155] E. Sanchez, T. Shibata and L. A. Zadeh, Eds., *Genetic Algorithms and Fuzzy Logic Systems*. (World Scientific Publishing, London, 1996).
- [156] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* 10 (1960) 313-334.
- [157] B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic metric spaces* (Elsevier-North-Holland, New York, 1983).

- [158] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987) 319-330.
- [159] S. Sessa, On fuzzy subgroups and fuzzy ideals under triangular norms, *Fuzzy Sets and Systems* 13 (1984) 95-97.
- [160] G. Shafer, *A mathematical theory of Evidence* (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976).
- [161] M. Shimura, Fuzzy sets concept in rank-ordering objects, *J. Math. Anal. Appl.* 43 (1973) 717-733.
- [162] R. Slowinski, Ed. *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*. The Handbooks of Fuzzy Sets Series (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998).
- [163] Q. Song and G. Bortolan, Some properties of defuzzification of neural networks, *Fuzzy Sets and Systems* 61 (1994) 83-90.
- [164] M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Ph. D. Thesis (Tokio Inst. of Technology, 1974).
- [165] M. Sugeno, Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals –a Survey. In M.M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines, Eds., *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1977) 89-102.
- [166] S. F. Thomas, *Fuzziness and Probability* (ACG Press, Wichita, KS, 1995).
- [167] M. Tribus, Comments on “Fuzzy sets, fuzzy algebra and fuzzy statistics”, *Proc. IEEE* 67 (1979) 1168.
- [168] E. Trillas, Sobre funciones de negación en la Teoría de Conjuntos Difusos, *Stochastica* 3 (1979) 47-60.
- [169] E. Trillas y J. Gutiérrez Ríos, Eds., *Aplicaciones de la Lógica Borrosa* (C.S.I.C., Madrid, 1992).
- [170] I. B. Turksen, Measurement of membership functions and their acquisition, *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991) 5-38.
- [171] J. L. Verdegay Galdeano, *Problemas de Decisión en ambiente difuso*, Tesis Doctoral (Universidad de Granada, 1980).
- [172] J. L. Verdegay, Fuzzy Mathematical Programming. En: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Fuzzy Information and Decision Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1982) 231-237.
- [173] J. F. Verdegay-López, Tratamiento de la incertidumbre mediante medidas difusas. En *Algunos aspectos del tratamiento de la Información en Inteligencia Artificial* (Publicaciones de la Universidad de Granada, 1991) 155-172.
- [174] S. Weber, A general concept of fuzzy connectives, negations and implications, based on t-norms and t-conorms, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 115-134.
- [175] C. K. Wong, Fuzzy topology. En: L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, Eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York, 1975) 171-190.
- [176] R. R. Yager, S. Ovchinnikov, R. M. Tong and H. T. Nguyen, Eds., *Selected Papers by L.A. Zadeh* (John Wiley & Sons, New York, 1987).

- [177] R. T. Yeh and S. Y. Bang, Fuzzy relations, fuzzy graphs and their applications to clustering analysis. En: L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka and M. Shimura, Eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press, New York, 1975) 125-149.
- [178] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inf. and Control* 8 (1965) 338-353.
- [179] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Inf. Sci.* 3 (1971) 177-200.
- [180] L. A. Zadeh, The concept of linguistic variable and its applications to Approximate Reasoning, *Inf. Sci.* 8 (1975) 199-249 (part I), 301-357 (part II), 9 (1976) 43-80 (part III).
- [181] L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28.
- [182] L. A. Zadeh, The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 199-227.
- [183] M. Zemankova-Leech and A. Kandel, *Fuzzy Relational Data Bases –A Key to Expert Systems*. (Verlag TÜV, Rheinland, 1984).
- [184] Zhang GuangQuan, Fuzzy continuous functions and its properties, *Fuzzy Sets and Systems* 43 (1991) 159-171.

Algunos modelos de la Mecánica de Fluidos

FRANCISCO ORTEGÓN GALLEGO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

e-mail: ortegon@uca.es

1 Introducción

Vivimos en un mundo donde, casi inconscientemente, estamos de uno u otro modo involucrados con los fluidos. El simple hecho de abrir un grifo en casa para obtener un chorro de agua, o la previsión del tiempo para el día siguiente en la televisión son ejemplos de ello. El nivel de aplicabilidad de los fluidos es prácticamente ilimitado. En aerodinámica (cálculo del flujo en torno a objetos en el seno del fluido: ciclista, coche, camión, avión, submarino, edificios, puentes, etc., en sus distintos regímenes: subsónico, transónico, supersónico e hipersónico; localización de las ondas de choque; diseño de perfiles aerodinámicos, que permitan mejorar la sustentación y minorar la resistencia, etc.); en los estudios sobre la propulsión y la combustión (flujos reactivos; sedimentación); en meteorología (pronóstico a corto y medio plazo del tiempo; previsión y localización de grandes tormentas, ciclones, huracanes; comportamiento y estudio de tornados; previsión de posibles catástrofes naturales); en oceanografía (cálculo de grandes masas oceánicas; flujos a través de estrechos; aguas someras: golfos, lagos o mares; interacción atmósfera-oceano; acoplamiento con fenómenos biológicos, etc.); en ingeniería civil (canales, tuberías, oleoductos, gasoductos, etc.; cálculo de fluidos-estructuras: presas, puentes, rascacielos, etc.); en ecología y medio-ambiente (evolución de contaminantes, emisarios submarinos, polos industriales, etc.); en acústica; en magnetohidrodinámica (recursos energéticos; aleación de metales en la siderurgia); en astronomía (galaxias, estrellas y nuestro sol); en el estudio de los fluidos corporales, particularmente la corriente sanguínea. Los estudios sobre fluidos también se aplican a otros campos de origen diverso, como la extracción de petróleo o el análisis del tráfico en cruces de carreteras en hora punta.

No es de extrañar, por tanto, que gobiernos y grandes empresas, destinen grandes sumas de dinero y recursos humanos para la investigación de estos temas. Una gran parte de estos fondos están destinados a estudiar y desarrollar métodos numéricos sofisticados y programas de ordenador, con objeto de realizar distintos ensayos numéricos; ello permitirá, por un lado, comparar los datos disponibles obtenidos experimentalmente o con otros esquemas numéricos, y por otro, mostrar la validez y grado de aplicabilidad de los métodos empleados. La revolución que estamos viviendo en el mundo de la informática nos permite usar esquemas numéricos que antes estaban desechados (por la cantidad de incógnitas involucradas y el tiempo de cálculo a invertir); la potencia de los ordenadores y la memoria secundaria han crecido de tal manera que hoy existen códigos numéricos que calculan (con ciertas limitaciones) el flujo en torno a un avión completo. Esto era impensable hace menos de quince años. Sin embargo, a pesar de estas mejoras, todavía estamos muy lejos de llegar a resultados del todo concluyentes; tal es el caso del cálculo de flujos turbulentos (ya sean producidos al paso de aviones, trenes, submarinos, o de origen natural, como en la atmósfera o en los océanos).

1.1 ¿Qué es un fluido?

La mecánica de medios continuos es la rama de la física que estudia los movimientos, deformaciones y tensiones en el seno de los medios continuos. El concepto de medio continuo hay que entenderlo como aquél estado de la materia, deformable o no, considerado desde un punto de vista macroscópico. Esto significa que las distintas magnitudes físicas (densidad, velocidades, presión, temperatura, etc.) pueden ser interpretadas como funciones de (x, t) , donde x es la variable espacial y t la temporal, y siendo en realidad el valor asignado en (x, t) un valor promediado.

La mecánica de fluidos forma parte de la mecánica de los medios continuos y estudia el comportamiento de los fluidos en reposo o movimiento. Así que habría que empezar por definir qué se entiende por fluido. Se puede dar un primer intento de definición diciendo que un fluido es cualquier estado de la materia que no sea sólido; sin embargo, resulta poco elegante esta definición, pues no dice exactamente lo que es un fluido, sino lo que no es. La mayoría de nosotros identifica los fluidos como los líquidos y los gases; pero con esta clasificación estamos renunciando a otros estados intermedios o distintos de la materia que no están ahí contemplados (por ejemplo, la llama de un fuego constituye el cuarto estado de la materia: el plasma, y también se puede considerar como un fluido). En la obra de Duvaut [25] se encuentra la siguiente definición¹

¹Es posible que esta definición sea elegante, pero es indudable que en una primera lectura

Definición 1 *Un medio continuo es un fluido si*

- (i) *es isótropo, y*
- (ii) *el tensor de esfuerzos es una función del tensor de las velocidades de deformación ($\sigma = f(\nabla u + \nabla u^T)$).*

Un medio se dice isótropo si sus propiedades son las mismas en todas las direcciones. Naturalmente, existen muchos sólidos que son isótropos, así que la diferencia fundamental entre sólido y fluido estriba en la segunda propiedad. Esta propiedad traduce el hecho de cómo un fluido responde ante la presencia de una fuerza: éste se deformará continuamente, sin apenas ofrecer resistencia, mientras la fuerza esté presente, y no recuperará su configuración inicial una vez haya desaparecido ésta.

Es lógico suponer que el tensor de esfuerzos no se vea afectado por cambios de sistemas de referencia; esta suposición natural, junto con la definición 1, dan la estructura de σ . En efecto, en dimensión $N = 3$ (si $N = 2$, entonces $f_2 = 0$) se tiene ([25]):

$$\sigma = -pI + \tau, \quad \tau = f_0I + f_1D + f_2D^2, \quad D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (1)$$

y las funciones f_0 , f_1 y f_2 sólo dependen de los invariantes de D (traza, traza de la adjunta y determinante) y, posiblemente, de la densidad y temperatura. En la ecuación (1), el tensor τ se denomina tensor de tensiones. El tensor de esfuerzos σ permite calcular las fuerzas internas (tensiones) producidas en el seno del fluido: $\nabla \cdot \sigma$ ($\nabla \cdot$ es el operador divergencia); éstas pueden ser de dos tipos: (a) fuerzas de presión, $-\nabla p$, debidas a la acción directa y normal del resto del medio, y (b) las fuerzas de viscosidad, $\nabla \cdot \tau$, debidas al propio rozamiento entre las partículas en movimiento.

1.2 Las ecuaciones de Navier-Stokes

La mecánica de fluidos está basada en cinco principios fundamentales de la física: (i) la conservación de la masa, (ii) la conservación de la cantidad de movimiento (segunda ley de Newton), (iii) la conservación del momento angular, (iv) la conservación de la energía, y (v) la segunda ley de la termodinámica. Los cuatro primeros son principios generales válidos tanto para fluidos como para sólidos. El quinto se usa, si el fluido es un gas, para obtener una ley de estado (es decir, una expresión algebraica entre algunas de las incógnitas que intervienen en el proceso: presión, densidad, temperatura, etc.). El comportamiento de un fluido está gobernado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que se sorprenda a cualquiera, a menos que se posean algunos conocimientos básicos sobre mecánica de medios continuos.

obtienen, por un lado, de alguno o todos los principios anteriores, por otro, de la definición 1. La derivación de las ecuaciones puede encontrarse por ejemplo en [2, 25, 32, 39, 52]. Las ecuaciones vienen dadas por²

$$\rho_{,t} + \nabla \cdot (u\rho) = 0 \quad (2)$$

$$(\rho u)_{,t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \nabla \cdot \sigma = \rho f \quad (3)$$

$$\left(\rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) \right)_{,t} + \nabla \cdot \left\{ \left[\rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) + p \right] u \right\} = \nabla \cdot (\tau u) - \nabla \cdot q + \rho f u \quad (4)$$

donde ρ es la densidad masa, $u = (u_1, \dots, u_N)^T$ el campo de velocidades, f un campo de fuerzas exteriores (gravedad, Coriolis, electromagnética) conocidas, e la energía interna (en un gas ideal, e es proporcional a la temperatura), p la presión dinámica, σ y τ (y p) como en (1) (aquí se suponen conocidas las f_i) y q es el flujo de calor (por ejemplo $q = -k\nabla e$, $k > 0$ es un coeficiente de difusión).

La ecuación (2) es la conservación de la masa (una ecuación), (3) es la conservación de la cantidad de movimiento (N ecuaciones) y (4) es la conservación de la energía (una ecuación), lo que hace un total de $N + 2$ ecuaciones. Sin embargo, contamos con $N + 3$ incógnitas. Para poder cerrar el problema, se necesita una ley de estado (por ejemplo, para un gas ideal se tiene la relación $p = C\rho e$, $C > 0$).

Evidentemente, el sistema (2)-(4) constituye un sistema acoplado muy complicado que incluye términos no lineales. Es natural buscar simplificaciones a este sistema, sin que ello vaya acompañado de una gran pérdida de generalidad. En una primera aproximación, podemos postular que la dependencia de τ , como función de $\nabla u + \nabla u^T$ sea lineal. En tal caso, se puede probar que necesariamente es ([25])

$$\tau = \lambda \nabla \cdot u I + \mu (\nabla u + \nabla u^T) \quad (5)$$

los coeficientes λ y μ se denominan coeficientes de viscosidad de Lamé (en general, dependen de la densidad y la temperatura). La aproximación (5) es válida para una gran cantidad de fluidos (el agua o el aire, por ejemplo) y fue observada por primera vez por Newton; por tal motivo, estos fluidos se denominan newtonianos; por contra, si la relación entre τ y $\nabla u + \nabla u^T$ no es lineal, el fluido se dice que es no newtoniano; ejemplos de fluidos no newtonianos son la grasa, la sangre, la miel, el asfalto, etc.

Por otro lado, la ley de Stokes relaciona λ y μ mediante $\lambda = -2\mu/N$, siendo N la dimensión del espacio (los experimentos muestran que $\lambda + 2\mu/N$ es muy pequeño para la mayoría de los fluidos). Así obtenemos la expresión final para

²La notación usada es $v_{,t} = \partial v / \partial t$, $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$.

τ

$$\tau = -\frac{2\mu}{N}\nabla \cdot uI + \mu(\nabla u + \nabla u^T) \quad (6)$$

Por consiguiente, si el fluido es incompresible ($\nabla \cdot u = 0$), y la viscosidad dinámica, μ , es constante, obtenemos el sistema³

$$\begin{cases} \rho_{,t} + \nabla \cdot (u\rho) = 0 \\ \rho(u_{,t} + (u \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla p = \rho f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (7)$$

y se denomina ecuaciones de Navier-Stokes con densidad variable. Nótese cómo en este sistema no aparece e , pues el resto de variables están desacopladas de ella. La viscosidad dinámica μ mide la resistencia del fluido a cambiar de forma en respuesta a una fuerza. Si además el fluido es homogéneo ($\rho = \rho(t)$) entonces $\rho_{,t} + \nabla \cdot (u\rho) = \rho_{,t} + (\nabla \cdot u)\rho + u\nabla\rho = \rho_{,t} = 0$, luego la densidad tampoco depende del tiempo. En consecuencia, $\rho = \rho_0$, y es una característica del fluido que puede ser determinada aparte y, por tanto, un valor conocido. Poniendo $\nu = \mu/\rho_0$ (viscosidad cinemática) y p en lugar de p/ρ_0 (presión cinemática), llegamos finalmente a las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos newtonianos, viscosos, incompresibles y homogéneos.

$$\begin{cases} u_{,t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (8)$$

así llamadas en honor a Navier⁴, ingeniero francés, y Stokes⁵, matemático irlandés. Por extensión, las ecuaciones (2)-(4) se denominan ecuaciones de Navier-Stokes compresibles.

Para la derivación de (8) se ha supuesto la incompresibilidad del fluido, lo que conlleva a una simplificación enorme de nuestro sistema inicial (2)-(4). La

³El término $(u \cdot \nabla)u$ significa $[(u \cdot \nabla)u]_i = u\nabla u_i$, y se denomina término de convección o de transporte. En general, si ϕ es una función escalar, se pone $u\nabla\phi = \sum_{j=1}^N u_j\partial\phi/\partial x_j$, e indica que ϕ es transportada por el campo u . Así pues, $(u \cdot \nabla)u$ significa que u es transportada por sí misma; no se trata de un término que provenga de una aproximación o postulado, sino que forma parte de la expresión inicial de la aceleración de las partículas medida a través de las trayectorias.

⁴CLAUDE LOUIS MARIE HENRI NAVIER (Dijon 1785 - París 1836). Ingeniero especialista en la construcción de puentes y carreteras. Trabajó en diversos temas de la matemática aplicada (ingeniería, elasticidad y mecánica de fluidos) y realizó diversas contribuciones sobre las series de Fourier y su aplicación a la resolución de problemas físicos. En 1822, basándose en un modelo molecular, modificó las ecuaciones de Euler (fluidos ideales) obteniendo así por primera vez las ecuaciones que hoy se llaman de Navier-Stokes.

⁵GEORGE GABRIEL STOKES, sir y primer baronet (Skreen, Irlanda 1819 - Cambridge, Inglaterra 1903). Físico y matemático, destacado por sus estudios sobre los fluidos viscosos, particularmente por la ley de viscosidad que lleva su nombre, y por la conocida fórmula del análisis, que también lleva su nombre. En 1842 y 1843 publicó sus trabajos sobre el movimiento de flujos estacionarios y del equilibrio y movimiento de sólidos elásticos. Sus trabajos sobre viscosidad le permitió dar una justificación satisfactoria de las ecuaciones de Navier-Stokes con el enfoque actual de la mecánica de medios continuos.

cuestión que se presenta ahora es si la suposición $\nabla \cdot u = 0$ es restrictiva o no. En principio, cualquiera identifica los líquidos como fluidos incompresibles, y los gases como compresibles; sin embargo, la verdad es que, en la naturaleza, todos los fluidos son compresibles. No obstante, los efectos de compresibilidad sólo empiezan a notarse si la velocidad es suficientemente alta: para número de Mach⁶ $M > 0.3$ (el número de Mach es el cociente entre la velocidad del flujo u y la velocidad del sonido en el seno del fluido c). Esto significa que, incluso para un gas, si la velocidad es moderada, la aproximación $\nabla \cdot u = 0$ es extraordinariamente precisa.

Desde un punto de vista matemático, cada uno de los sistemas que aquí se exponen, (2)-(4), (7) u (8), deben ser acompañados de sus respectivas condiciones iniciales y de contorno, con objeto de que éstos estén bien planteados (en el sentido de que admitan solución y, si es posible, que ésta sea única). En este sentido, las ecuaciones de Navier-Stokes (8), que es el sistema más sencillo de los que aquí han sido presentados, aun escritas bajo una exquisita sencillez, esconden uno de los problemas más intrincados y complicados del panorama actual de la matemática aplicada. La resolución completa de este sistema, en dimensión $N = 3$, es hoy día un problema abierto; y esto a pesar de que un gran número de investigadores en todo el mundo, de los más diversos ámbitos científicos, dedican enormes esfuerzos en avanzar y desvelar los secretos que encierra este sistema. El interés que suscita este problema justifica que un gran número de revistas científicas se dediquen casi exclusivamente a este tema. Por todo ello, constituye todo un desafío para el próximo siglo, más aún cuando ha sido catalogado por el Clay Mathematics Institute (una entidad privada sin ánimo de lucro) como uno de los siete problemas del milenio cuya resolución es digna de ser premiada⁷.

2 Algunos resultados sobre las ecuaciones de Navier-Stokes

Se describen en esta sección algunos resultados conocidos sobre el sistema (8). Estos resultados pueden encontrarse, por ejemplo, en [30, 44, 50, 75, 76]. Para el análisis de algunos modelos con densidad variable o, más generalmente, compresibles, puede consultarse [52, 53] junto con la amplia bibliografía que se referencia en estas obras.

⁶ERNST MACH (Chirlitz-Turas, Moravia, Imperio austríaco 1838 - Haar, Alemania 1916). Ingeniero austríaco y filósofo. Estableció principios fundamentales en óptica, mecánica y dinámica de ondas (fluidos a velocidad supersónica, 1887). En 1928, J. Ackeret sugirió por primera vez la denominación del número de Mach ($M = u/c$).

⁷El premio asciende a un millón de dólares (consultar la página www.claymath.org).

2.1 Formulación matemática y número de Reynolds

El problema de evolución de Navier-Stokes para fluidos newtonianos, incompresibles, viscosos y homogéneos consiste en hallar una función vectorial $u: \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}^N$ (campo de velocidades) y una función escalar $p: \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$ (presión cinemática) solución del sistema

$$\begin{cases} u_{,t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (9)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto, acotado y conexo, con frontera $\partial\Omega$ lipschitziana (Ω es el dominio ocupado por el fluido; también se puede plantear el problema en dominios no acotados, en cuyo caso, se impone a u un comportamiento asintótico para $|x| \rightarrow +\infty$), $T > 0$ es el instante final de observación, $\nu > 0$ la viscosidad cinemática y $f: \Omega \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}^N$ un campo de fuerzas exteriores. Se trata de un problema no lineal debido a la presencia del término de convección $(u \cdot \nabla)u$; ésta es la dificultad principal del problema. La condición de contorno $u = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0, T)$ es poco realista; en la práctica se consideran condiciones más generales, ya sean de Dirichlet no homogéneas $u = g_0$, de Neumann $\partial u / \partial n = g_1$, de Fourier $\sigma_0 u + \sigma_1 \partial u / \partial n = g_2$, mixtas u otras. Para simplificar la presentación, se ha tomado la condición de Dirichlet homogénea $u = 0$.

Inicialmente, las ecuaciones del sistema (9) están escritas en sus correspondientes magnitudes: u posee dimensiones de velocidad ($[u] = L/T$), p de presión por densidad de masa ($[p] = L^2/T^2$), etc. En la práctica es conveniente eliminar las dimensiones de las magnitudes físicas que intervienen en el problema, lo que conduce a la aparición de un importante parámetro, el número de Reynolds⁸ (Re), que mide la razón de los órdenes de magnitud entre las fuerzas convectivas $(u_{,t} + (u \cdot \nabla)u)$ y las fuerzas de viscosidad $(-\nu \Delta u)$. Sean L una longitud característica del dominio Ω (su diámetro, por ejemplo) y U una velocidad característica (definida, por ejemplo, a partir de u_0). Con estas cantidades se construye una escala de tiempo $T = L/U$. Efectuando ahora el cambio de variables $\underline{u} = u/U$, $\underline{x} = x/L$, $\underline{t} = t/T$ se tiene que \underline{u} , \underline{x} y \underline{t} son cantidades ‘adimensionales’. El sistema (9) escrito en las nuevas variables

⁸OSBORNE REYNOLDS (Belfast 1842 - Watchet 1912, Somerset, Inglaterra). Matemático irlandés cuyos trabajos iniciales trataron temas de magnetismo y electricidad y más tarde hidráulica e hidrodinámica. Formuló la teoría de la lubricación (1886) y realizó las primeras investigaciones sistemáticas entre los regímenes laminar y turbulento, descubriendo la ley de semejanza que lleva su nombre (1889). Esta ley establece que, para una situación dada, el salto de uno a otro régimen siempre ocurre aproximadamente para el mismo número de Reynolds. La denominación del número de Reynolds (Re) fue propuesta en 1908 por Sommerfeld.

adopta la forma

$$\begin{cases} \underline{u}_{,t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} + \nabla \underline{p} - \frac{\nu}{LU} \Delta \underline{u} = \underline{f} \\ \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \underline{u}|_{t=0} = \underline{u}_0 \\ \underline{u} = 0 \end{cases}$$

donde $\underline{p} = p/U^2$, $\underline{f} = fL/U^2$, $\underline{u}_0 = u_0/U$ (naturalmente, el dominio Ω y T también deben ser dilatados o comprimidos convenientemente). Se define el número de Reynolds como $Re = LU/\nu$. Nótese que Re es una cantidad adimensional; se trata, por tanto, de un valor característico para cada problema. En efecto, si Ω_1 y Ω_2 son dos dominios con geometrías semejantes y las respectivas velocidades características U_1 , U_2 y las viscosidades ν_1 , ν_2 son tales que $L_1 U_1 / \nu_1 = L_2 U_2 / \nu_2$, entonces los campos de velocidades adimensionales \underline{u}_1 y \underline{u}_2 cumplen la misma ecuación en el mismo abierto, y, en consecuencia, \underline{u}_1 puede ser obtenida a partir de \underline{u}_2 mediante un simple cambio de variables. Este aspecto es de gran importancia en el diseño de modelos experimentales: será suficiente trabajar con geometrías reducidas (modelos físicos a escala); piénsese, por ejemplo, en la utilidad de este principio para la determinación o diseño de aviones. Obsérvese que es incorrecto decir que si ν es pequeño, entonces los efectos viscosos son irrelevantes (dado que no se están considerando las otras dimensiones del problema). En otras palabras, considerar ν pequeño no posee físicamente significado si L y U no han sido fijados. Por el contrario, el comportamiento del flujo depende del orden de magnitud de $1/Re$, como será puesto en evidencia más adelante. Se supondrá de aquí en adelante que en el sistema (9) han sido previamente eliminadas las dimensiones de las variables (es decir $L = O(1)$ y $U = O(1)$) con lo que ν es el inverso del número de Reynolds.

También se puede plantear el problema estacionario de Navier-Stokes: dada $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$, hallar $u: \Omega \mapsto \mathbb{R}^N$ y $p: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

Nótese que estacionario no significa estático (fluido en reposo) sino que tanto u como p son independientes del tiempo.

2.2 Marco funcional de las ecuaciones de Navier-Stokes

Desde el punto de vista matemático, los sistemas (9) y (10) son problemas bien planteados, en el sentido de que, al menos en dimensión $N = 2$, existe solución única bajo ciertas hipótesis sobre los datos. Esto también es cierto en dimensión $N = 3$ en el caso estacionario, pero la situación es más compleja en el problema

de evolución, pues las hipótesis sobre los datos deben ser más exigentes para garantizar la existencia y unicidad de solución, al menos en lo que respecta a soluciones locales en tiempo. El análisis teórico de estos sistemas exige el uso de herramientas sofisticadas del análisis funcional. A tal objeto, se introducen los siguientes espacios y operadores ([29, 30, 33, 75, 76]):

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) / \text{sop } \varphi \text{ es un compacto de } \Omega\},$$

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{D}(\Omega)^N / \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \Omega\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \int_\Omega v = 0\}, \quad H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \nabla v \in L^2(\Omega)^N\},$$

$$H^m(\Omega) = \{v \in H^{m-1}(\Omega) / \nabla v \in H^{m-1}(\Omega)^N\}, m \geq 2 \text{ entero},$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

$$V = \overline{\mathcal{V}}^{H^1(\Omega)^N} = \{v \in H_0^1(\Omega)^N / \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \Omega\},$$

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^N} = \{v \in L^2(\Omega)^N / \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

n es el vector normal, unitario y exterior a Ω . Los espacios $L_0^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, V y H son espacios de Hilbert. $P: L^2(\Omega)^N \mapsto H$ es la proyección ortogonal entre estos espacios. $A: V \cap H^2(\Omega)^N \mapsto H$, $Au = -P\Delta u$;

$$D(A) = V \cap H^2(\Omega)^N = \{v \in H_0^1(\Omega)^N \cap H^2(\Omega)^N / \nabla \cdot v = 0 \text{ en } \Omega\},$$

$$(u, v) = \int_\Omega uv, |u| = (u, u)^{1/2}, \quad b(u, v, w) = \int_\Omega (u \cdot \nabla)vw,$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \|u\| = a(u, u)^{1/2} \text{ norma en } H_0^1(\Omega)^N,$$

V' designa el dual de V y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto de dualidad. Este marco permite introducir la formulación variacional de (10), a saber ([75, 76])

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ \nu a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V \end{cases} \quad (11)$$

Para el problema de evolución (9) es conveniente introducir también los espacios de Banach $L^p(0, T; X)$, donde $1 \leq p \leq +\infty$ y X es un espacio de Banach ([10]):

$$L^p(0, T; X) = \{v: [0, T] \mapsto X \text{ medibles} / \int_0^T \|v\|_X^p < +\infty\}, 1 \leq p < +\infty$$

$$L^\infty(0, T; X) = \{v: [0, T] \mapsto X \text{ medibles} / \sup_{t \in [0, T]} \|v\|_X < +\infty\}.$$

La formulación variacional de (9) viene dada por

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in L^2(0, T; V) \text{ tal que} \\ \frac{d}{dt}(u, v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (12)$$

La derivación $\frac{d}{dt}$ se entiende en el sentido de las distribuciones de $(0, T)$. Por otro lado, la regularidad $u \in L^2(0, T; V)$ no es suficiente para dar sentido a la condición inicial $u(0) = u_0$; sin embargo, los resultados que a continuación se enuncian afirman que, para elecciones adecuadas de f y u_0 , toda función de $u \in L^2(0, T; V)$ que además cumpla la ecuación diferencial de (12), es igual casi por doquier a una función continua definida en $[0, T]$, lo que daría sentido a la condición inicial. Los problemas (10) y (11) (resp. (9) y (12)) son equivalentes entre sí en el sentido siguiente: si (u, p) es solución de (10) (resp. (9)) suficientemente regular, entonces u es solución de (11) (resp. (12)); recíprocamente, si u es solución de (11) (resp. (12)), entonces, se puede probar la existencia de p (en cierto espacio) de manera que (u, p) es solución de (10) (resp. (9)) en el sentido de las distribuciones. La recuperación de p a partir de (11) (resp. (12)) es una consecuencia de un resultado, nada elemental, debido a G. de Rham ([72, 73]).

2.3 Algunos resultados clásicos

En el análisis que sigue, siempre se supondrá que $\nu > 0$. Para el problema estacionario (11) se tiene el siguiente resultado ([33, 44, 75, 76]):

Teorema 1 *Sean $N \leq 3$ y $f \in V'$, entonces el problema (11) admite al menos una solución $u \in V$. Si $f \in H$ entonces toda solución pertenece a $D(A)$. Si, además, ν y f son tales que $\frac{c(\Omega)}{\nu^2} \|f\|_{V'} < 1$, siendo $c(\Omega)$ una constante que sólo depende de Ω , entonces el problema (11) tiene una única solución.*

En este caso, se puede probar que cada solución u tiene asociada una única $p \in L_0^2(\Omega)$.

Los teoremas que se enuncian a continuación resumen los resultados más conocidos sobre el problema de evolución (12), y son debidos, principalmente, a Leray ([46, 47, 48]), Hopf ([41]), Ladyzhenskaya ([44]), Lions ([50]), Prodi con Lions y Foias ([26, 51]) y Serrin ([70]). En estos resultados se distingue entre soluciones débiles y fuertes, dependiendo de la regularidad requerida a la solución.

Teorema 2 *Sean $N \leq 3$, $f \in L^2(0, T; V')$ y $u_0 \in H$; entonces el problema (12) admite una solución $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ (solución débil). Además,*

si $N = 2$, u es única y $u \in C([0, T]; H)$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V')$; si $N = 3$, entonces u es débilmente continua de $[0, T]$ en H (es decir, $t \mapsto (u(t), v)$ es continua en $[0, T]$, $\forall v \in H$) y $\frac{du}{dt} \in L^{4/3}(0, T; V')$.

Si los datos son más regulares, podemos deducir también más regularidad para las soluciones:

Teorema 3 Sean $N = 2$, $f \in L^2(0, T; H)$ y $u_0 \in V$; entonces existe una única $u \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$ solución de (12) (solución fuerte). Además, $u \in C([0, T]; V)$ y $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$.

Sean $N = 3$, $f \in L^\infty(0, T; H)$ y $u_0 \in V$; entonces existe, $T^* = T^*(u_0) \leq T$, de manera que, sobre $[0, T^*]$, existe una única $u \in L^2(0, T^*; D(A)) \cap C([0, T^*]; V)$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T^*; H)$ solución de (12) con T sustituido por T^* .

Se observa que el análisis de la existencia y unicidad de soluciones es bien distinto dependiendo de la dimensión de que se trate; en efecto, si bien en $N = 2$ la situación es satisfactoria, el tridimensional está incompleto: no sabemos si la solución débil es única, o qué condición más habría que añadir para que lo fuera (véase [54] y las referencias que allí se enumeran); tampoco se sabe si una solución fuerte existe para cualquier instante de tiempo. Un acercamiento a esta cuestión nos la ofrece el siguiente teorema debido a Fursikov ([28, 76]).

Teorema 4 Sean $N = 3$ y $u_0 \in V$; entonces existe un conjunto $F \subset L^2(0, T; H)$, denso en $L^q(0, T; V')$, $\forall q \in [1, 4/3)$, tal que para cada $f \in F$, el problema (12) con datos f y u_0 posee una única solución $u \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V)$ (solución fuerte).

La solución fuerte, en $N = 3$ (en su intervalo de definición) es única en la clase de las soluciones débiles ([70, 75]). Desde el punto de vista matemático, estas diferencias tan notables entre los casos $N = 2$ y $N = 3$ se deben principalmente a la merma de regularidad de los elementos de los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ a medida que N crece, y a la pérdida de compacidad entre ciertos espacios funcionales que intervienen en dicho análisis. En efecto, es el tratamiento del término no lineal $(u \cdot \nabla)u$ el que exige un cuidado especial, sobre todo en lo que se refiere al proceso de paso al límite de dicho término, así como la regularidad resultante de éste; este último aspecto queda patente al observar los distintos espacios funcionales donde pertenece la derivada temporal $\frac{du}{dt}$. Otro aspecto importante, relacionado con lo anterior, lo constituye la denominada identidad de energía

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \nu \|u(t)\|^2 = \langle f(t), u(t) \rangle \quad \text{en } (0, T),$$

que es satisfecha por toda solución fuerte (si $N = 3$ hay que sustituir T por T^* ; si $N = 2$, la identidad también es válida para las soluciones débiles). Sin embargo, en el caso tridimensional, lo único que se conoce es que existe una solución débil que cumple la desigualdad de energía $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \nu \|u(t)\|^2 \leq \langle f(t), u(t) \rangle$ en $(0, T)$, y no se sabe si cualquier solución débil la cumple o incluso si dicha desigualdad es en realidad una igualdad.

Supóngase que $f \in L^\infty(0, T; H)$, $u_0 \in V$ y sea $N = 2$; si u es solución débil, entonces por la unicidad, u también es solución fuerte. Por otro lado, bajo la misma condición y $N = 3$ se puede afirmar lo mismo en $(0, T^*)$; en tal caso, para deducir que u es solución fuerte en todo $(0, T)$ se deberá exigir un poco más de regularidad a dicha solución (por ejemplo, toda solución débil que pertenezca a $L^4(0, T; V)$ es solución fuerte).

También es posible deducir más regularidad de la(s) solución(es) si los datos f y u_0 son más regulares ([75]). Si f es analítica en tiempo, se deduce una dependencia analítica con respecto de t de las soluciones fuertes ([75]).

Teorema 5 Sean $u_0 \in V$ y $f \in C^\infty(0, +\infty; H)$ analítica en un entorno de $(0, \infty)$. Si $N = 2$, la única solución fuerte de (12) es analítica en tiempo, $t \in (0, +\infty) \mapsto D(A)$, en un entorno de $(0, +\infty) \subset \mathbb{C}$. Si $N = 3$, la única solución fuerte de (12) es analítica en tiempo, $t \in (0, T^*) \mapsto D(A)$, en un entorno de $(0, T^*) \subset \mathbb{C}$.

Este resultado es interesante a la hora de la resolución numérica de (12), al menos en lo que se refiere a la aproximación en tiempo (por ejemplo, con un método de diferencias finitas).

En el caso $f \in H$ (es decir, f no depende de t) aparece una cuestión interesante: ¿cuál es el comportamiento de $u(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$? Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \bar{u}$, ¿es \bar{u} solución del problema estacionario de Navier-Stokes (11)? Se sabe que la respuesta es afirmativa si, por ejemplo, ν es suficientemente grande o f es suficientemente pequeño ([76]).

2.4 Sistema dinámico de dimensión infinita

Otro posible enfoque para estudiar el comportamiento de las soluciones para $t \rightarrow +\infty$ consiste en formular las ecuaciones de Navier-Stokes como un sistema dinámico de dimensión infinita (se supone f independiente de t):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F_\nu(y), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (13)$$

donde $F_\nu: G \subset E \mapsto E$ y E un espacio de Hilbert. A partir de aquí se pueden estudiar diversas propiedades de las soluciones, dependiendo del valor

de ν : solución estacionaria única y estable; soluciones estacionarias múltiples, cada una con sus respectivos dominios de atracción; bifurcación de Hopf, existencia de soluciones periódicas y quasiperiódicas; turbulencia; atractores extraños, etc. ([66]). En [27] se prueba que los atractores de las ecuaciones de Navier-Stokes muestran que el comportamiento asintótico de las soluciones, para $t \rightarrow +\infty$, es de dimensión finita, a pesar de que el sistema (13) sea de dimensión infinita. Este resultado es válido para $N = 2$, mientras que para $N = 3$ lo es si las soluciones mantienen la regularidad en tiempo. De hecho, en $N = 2$, el sistema (13) admite un atractor cuya dimensión de Hausdorff se encuentra entre los valores $C\nu^{-4/3}$ y $C\nu^{-2}$ ([20, 67, 68]). En el caso tridimensional, el atractor posee una dimensión de Hausdorff del orden de $\nu^{-9/4}$ ([20]). Estos resultados pueden servir para estimar una cota superior del número de puntos que hacen falta para calcular numéricamente la solución.

2.5 Comportamiento cuando $\nu \rightarrow 0$

Otra cuestión interesante, objeto de incesantes estudios, es el análisis del comportamiento de u y p cuando $\nu \rightarrow 0$ (es decir, para grandes números de Reynolds). Esta cuestión está relacionada con la generación de capas límites y flujos turbulentos. En la sección que sigue se describe un poco más el fenómeno de la turbulencia, así como su posible tratamiento. Nótese que el paso al límite $\nu \rightarrow 0$ es delicado, puesto que se pasa de una ecuación diferencial de orden dos a otra de orden uno, lo que significa que algunas condiciones de contorno pueden cambiar (o incluso desaparecer).

Es natural pensar que al hacer $\nu \rightarrow 0$, las correspondientes soluciones converjan (en algún sentido) a una solución del problema incompresible de Euler ($\nu = 0$, fluido ideal). En algunas situaciones, se ha podido dar respuesta afirmativa a esta cuestión (¡pero las condiciones de contorno han de ser modificadas convenientemente!): por ejemplo, en el caso $\Omega = \mathbb{R}^3$, hay que imponer cierto comportamiento de $u(x, t)$ para $|x| \rightarrow +\infty$ ([43, 74]). También es posible deducir conclusiones afirmativas para $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ ([1]). En el caso general de un abierto cualquiera, esta cuestión no ha podido ser resuelta en su totalidad ([40]).

El caso más interesante se produce al analizar el flujo en torno a un objeto (coche, avión, submarino, etc.); es de esperar que cuanto más pequeño sea ν , más van a dominar los efectos inerciales sobre los viscosos: $|(u \cdot \nabla)u| \gg |\nu \Delta u|$, y esto justificaría la aproximación mediante las ecuaciones de Euler. Sin embargo, debido a la presencia de la viscosidad ($\nu > 0$) y por pequeña que ésta sea, el campo de velocidades es nulo sobre la pared sólida del obstáculo, mientras que ‘muy cerca’ del mismo, digamos a una distancia $\delta > 0$, el campo de

velocidades es del mismo orden que las velocidades del flujo en la entrada; se estima que $\delta = O(\nu^{1/2})$, lo que significa que sobre una franja de grosor δ en torno al obstáculo se producen grandes gradientes de velocidades, lo que obliga a que no se desprecie el término de difusión $-\nu\Delta u$ en las ecuaciones. Esta franja, donde los efectos viscosos dominan sobre los inerciales se denomina capa límite ([11, 69]), concepto que fue acuñado por Prandtl.⁹ En el caso del flujo en torno a un avión de línea a velocidad de crucero, el grosor de la capa límite se reduce a una fracción de milímetro.

3 Turbulencia

En la sección anterior ha quedado de manifiesto cómo influye el parámetro ν en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Observamos de manera general que cuanto más pequeño es ν (número de Reynolds grande) más compleja y caótica se puede comportar la solución. Desafortunadamente, los casos interesantes que se producen en la práctica son tales que el número de Reynolds es bastante elevado (tabla 1). Este inconveniente tiene graves repercusiones a la hora de la resolución numérica del problema. En efecto, supongamos que (9) se aproxima en espacio por un método de elementos finitos (con funciones afines a trozos); en [4] se demuestra que si u_h es la solución aproximada obtenida por tal método, entonces

$$\left(\int_{\Omega \times (0,T)} |u(x,t) - u_h(x,t)|^2 dxdt \right)^{1/2} \leq h^2 \frac{C}{\nu} \left(\int_{\Omega \times (0,T)} |(u \cdot \nabla)u|^2 dxdt \right)^{1/2} \quad (14)$$

Se puede encontrar una estimación de la integral del segundo miembro mediante un análisis dimensional, obteniéndose

$$\int_{\Omega \times (0,T)} |(u \cdot \nabla)u|^2 dxdt = O(\nu^{-1/2})$$

Esto muestra que $|u - u_h|_{\Omega \times (0,T)}$ es pequeño si el diámetro de la triangulación h es menor que $\nu^{5/8}$ (asintóticamente se debe tener $h = o(\nu^{5/8})$). Tomemos por ejemplo $\Omega = (0,1)^3$; con K nodos en cada dirección se tendrá $h = 1/K$, y la triangulación constará de K^3 puntos. Por tanto, el número de incógnitas del problema aproximado será del orden de $4K^3$ (en cada iteración en tiempo).

⁹LUDWIG PRANDTL (Freising, Alemania 1875 - Gotinga 1953). Profesor de mecánica en las universidades de Hanover y Gotinga. En 1904 introdujo el concepto de capa límite (Grenzschicht). Demostró que los efectos viscosos se concentran en una fina capa que rodea al cuerpo inmerso en el fluido, mientras que el resto del flujo puede ser considerado como un fluido ideal; esta idea le llevó a una simplificación de las ecuaciones, dando lugar a las ecuaciones de Prandtl de la capa límite.

	U	L	ν	Re
espermatozoide	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-2}
cometa	1	1	0.15×10^{-4}	6.67×10^4
coche	22	3	0.15×10^{-4}	4.40×10^6
avión de línea	250	60	0.15×10^{-4}	10^9
avión supersónico	600	20	0.15×10^{-4}	8.00×10^8
submarino	11	50	10^{-6}	5.50×10^8

Tabla 1: Estimaciones de algunos números de Reynolds. La velocidad está expresada en metros por segundo, la longitud en metros.

Con la capacidad de los ordenadores actuales permitiría tomar K del orden de 220. Teniendo en cuenta que $\text{Re} < K^{8/5}$, se tiene que la simulación numérica de (9) mediante un método de elementos finitos sólo será posible para valores de Re inferiores a 5600. La conclusión precedente puede ser generalizada a situaciones más generales, independientemente del método numérico utilizado. Es decir, en la actualidad, cualquier simulación numérica de (9) de forma directa sólo será significativa para números de Reynolds no excesivamente altos. ¿Cuál es la explicación física de estos despropósitos? la razón es simple: se sabe que, cuando Re tiende a infinito ($\nu \rightarrow 0$), la solución de (9) es cada vez más oscilante en tiempo y en espacio, de manera que las oscilaciones más pequeñas de u se realizan a distancias del orden de $\nu^{3/4}$ ([60]); cualquier intento de simulación numérica de (9) exigiría, al menos teóricamente, una triangulación de Ω de tamaño $h = O(\nu^{3/4})$; ello permitiría representar al torbellino más pequeño sobre dicha triangulación. Parece pues conveniente admitir que un cálculo completo para flujos con grandes números de Reynolds es imposible en la actualidad.

Como consecuencia de estos resultados, se nos presenta un fenómeno que en mecánica de fluidos se conoce con el nombre de *turbulencia*. Se podría decir que la turbulencia es el estado desordenado que presenta el campo de velocidades de un flujo como consecuencia de que el número de Reynolds que le caracteriza toma valores suficientemente grandes. Ejemplos de flujos turbulentos lo constituyen las capas límites atmosféricas, las corrientes marinas, la fotosfera solar, de las estrellas, nebulosas, etc., el chorro de un reactor, las capas límites en las alas de los aviones, las estelas de los barcos, coches, submarinos, etc., el flujo en el cauce de un río, etc.

3.1 Modelado de la turbulencia

En la práctica, la gran mayoría de los flujos de interés se encuentra en régimen turbulento, poseyendo números de Reynolds por encima de 10^5 (tabla 1). Puesto que estos flujos no pueden ser calculados directamente se hace necesario desarrollar modelos alternativos que permitan extraer la información suficiente. En general, no es necesario conocer todos los detalles del flujo; el interés se centra fundamentalmente en ciertas cantidades de carácter macroscópico. Por ejemplo, en el estudio aerodinámico de vehículos tales como aviones, trenes o coches, basta determinar tan sólo propiedades como la presión media sobre la superficie del vehículo o la descripción de los principales torbellinos próximos a la estela, etc. Este hecho conduce al modelado y simulación de la turbulencia: se trata de encontrar ecuaciones que deberán regir estas cantidades *medias*. Los modelos existentes comparten la misma idea inicial: la descomposición del campo de velocidades en dos partes; la primera, llamada campo medio de velocidades, es la que nos va a interesar conocer, y describe las grandes estructuras (portadoras de la energía cinética del campo); la segunda, llamada campo fluctuante, describe las pequeñas estructuras (los remolinos más pequeños, que no quedan registrados en una simulación numérica directa). Esta descomposición se generaliza a todas las demás variables (presión, temperatura, densidad, etc.); matemáticamente se escribe $u = \bar{u} + u'$, $p = \bar{p} + p'$ donde (\bar{u}, \bar{p}) es el campo medio de velocidades y la presión media y (u', p') la parte fluctuante o perturbación turbulenta. La media puede ser definida de varias formas; en cada caso se deberá tomar la definición que mejor se adapte al problema.

3.2 El problema del cierre de Reynolds

El problema que se presenta a continuación es el de hallar unas ecuaciones para las nuevas variables \bar{u} y \bar{p} . Para ello, se promedian las ecuaciones de Navier-Stokes (se suponen ciertas propiedades a la media, como por ejemplo que conmute con la derivación) obteniéndose

$$\begin{cases} \bar{u}_{,t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{u} = -\nabla \cdot (\overline{u' \otimes u'}) + \bar{f} \\ \nabla \cdot \bar{u} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

El sistema (15) se denomina ecuaciones de Reynolds; el problema que ahora se presenta, conocido como el problema del cierre, consiste en relacionar el tensor de Reynolds $R = \overline{u' \otimes u'}$ con el flujo medio \bar{u} . Existen numerosas aproximaciones que cada modelo de turbulencia trata de explicitar; estas aproximaciones están basadas en diversas hipótesis físicas, análisis dimensional, órdenes de magnitud y resultados experimentales. En todos los casos, la

aproximación que se haga del tensor de Reynolds dependerá del problema que se esté considerando.

3.3 Algunos modelos de turbulencia y problemas matemáticos que se derivan de ellos

El primer autor en atacar el problema del cierre fue Boussinesq que, en 1877, introdujo el concepto de viscosidad turbulenta (viscosidad debida a la presencia de estructuras turbulentas); el modelo obtenido se basa en la hipótesis de que el tensor de Reynolds actúa como un tensor de viscosidad y, en consecuencia, debe ser proporcional al gradiente de la velocidad media. El coeficiente de proporcionalidad, representado por ν_{turb} , se denomina *viscosidad turbulenta*. Por consiguiente, la aproximación de Boussinesq es

$$-\overline{u' \otimes u'} = \lambda I + \nu_{\text{turb}}(x, t) (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T) \quad (16)$$

A diferencia del coeficiente de viscosidad cinemática ν , que es un parámetro característico del fluido considerado, el coeficiente ν_{turb} no lo es, y su valor varía en espacio y tiempo. En consecuencia, el problema no ha quedado cerrado todavía, pues será necesario obtener una expresión para la viscosidad turbulenta $\nu_{\text{turb}}(x, t)$ (al tomar divergencia en (16) el factor λI es absorbido por el gradiente de la presión). Por esta razón, el modelo de Boussinesq no constituye en sí mismo un modelo de turbulencia; no obstante, proporciona una idea de partida para la construcción de modelos.

Los modelos con cero ecuaciones ([45]) proponen una expresión algebraica de la viscosidad turbulenta en términos de la velocidad media, o de sus derivadas. En [63] se ha tomado $\nu_{\text{turb}} = \nu_1 |\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T|$, $\nu_1 > 0$ constante; en este trabajo se realiza un análisis completo de dicho modelo, incluyendo un tratamiento especial de la capa límite al considerar condiciones de contorno no lineales sobre la frontera sólida (leyes de pared).

Los modelos con una ecuación expresan la viscosidad turbulenta en función de una nueva variable que debe ser calculada como solución de una ecuación de transporte-difusión acoplada a las ecuaciones de Reynolds. En 1942, Kolmogórov y posteriormente, en 1945, Prandtl ([45]) propusieron la siguiente expresión para la viscosidad turbulenta $\nu_{\text{turb}} = l_m \sqrt{k}$ donde l_m es la longitud de mezcla y k el promedio de la energía cinética turbulenta $k = \frac{1}{2} \overline{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}$.

La ecuación para k se obtiene a partir de la de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{,t} + \bar{u} \nabla k = -\overline{u' \otimes u'} : \nabla \bar{u} - \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{k u'_j} + \overline{p u'_j}) \right] \\ + \nu \sum_{i,j=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \right) + \frac{\partial^2 (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_i \partial x_j} \right] - \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j=1}^3 \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} \end{array} \right. \quad (17)$$

Esta expresión constituye la ecuación exacta para k ; pero ésta no podrá ser utilizada ‘a priori’ pues las correlaciones turbulentas que aparecen en el segundo miembro son desconocidas. Será necesario, por tanto, modelar esta ecuación. Por otro lado, hará falta una expresión para l_m ([45]). En [49] se estudia el siguiente modelo con una ecuación, basado en (17), (se pone (u, p) en lugar de (\bar{u}, \bar{p}))

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nabla \cdot ((\nu + \nu_{\text{turb}}(k))\nabla u) = f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ k_{,t} + (u \cdot \nabla)k - \nabla \cdot ((\nu + \nu_{\text{turb}}(k))\nabla k) = \nu_{\text{turb}}(k)|\nabla u|^2 - k^{3/2} \end{array} \right. \quad (18)$$

(junto con condiciones iniciales y de contorno apropiadas) y se prueba la existencia de solución (u, p, k) en ciertos espacios funcionales. Desde un punto de vista matemático, el sistema (18) contiene varias dificultades (términos no lineales, sistema acoplado, segundo miembro en L^1). Asimismo, se pueden encontrar versiones más generales de este sistema en [17, 18]. En [34] se estudia una versión general de la ecuación de k , pero considerándola desacoplada de u , a saber: Dadas $f \in L^1(Q)$ ($Q = \Omega \times (0, T)$) y $u \in L^2(Q)$, $\nabla \cdot u = 0$, $u \cdot n = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0, T)$ y $k_0 \in L^1(\Omega)$, hallar k solución de

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{,t} + u \nabla k - \nabla \cdot [\nu_1(k) \nabla k] + g(k) = \nu_2(k) f, \quad \text{en } Q, \\ k = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ k = k_0 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (19)$$

mientras que en [35] se analiza la versión estacionaria de este problema. La técnica de resolución de estos problemas exige la combinación adecuada de herramientas y nuevos conceptos del análisis funcional que han sido desarrollados en los últimos años por diversos autores: soluciones renormalizadas ([5, 6, 24]), estimaciones de Boccardo-Gallouët ([7]), compacidad ([71]), etc.

En los modelos de turbulencia con dos ecuaciones, la ecuación de Reynolds se encuentra acoplada a dos ecuaciones de transporte-difusión. El más familiar y estudiado entre estos modelos es el conocido modelo k - ε , debido a Launder y Jones ([45, 59]). Mediante un argumento basado en análisis dimensional, este modelo expresa la viscosidad turbulenta en función de dos magnitudes escalares: la energía cinética turbulenta k , y la tasa de disipación de la energía cinética

turbulenta $\varepsilon = \frac{\nu}{2} \overline{|\nabla u' + \nabla u'^T|^2}$, y se pone $\nu_{\text{turb}} = c_1 k^2 / \varepsilon$. Las ecuaciones para k y ε se deducen de manera exacta a partir de (9). La ecuación para k está escrita en (17). Evidentemente, el problema no quedará cerrado, puesto que estas ecuaciones contienen a su vez términos de cierre. Las ecuaciones para k y ε pueden ser modeladas como sigue ([23, 45]):

$$k_{,t} + \bar{u} \nabla k = R : \nabla \bar{u} - \varepsilon + \nabla \cdot \left[\left(\nu + c_1 \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \nabla k \right] \quad (20)$$

$$\varepsilon_{,t} + \bar{u} \nabla \varepsilon = \frac{1}{2} c_2 k (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T) : (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T) - c_3 \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left[\left(\nu + c_4 \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] \quad (21)$$

Aquí R es el tensor de Reynolds, y c_1, c_2, c_3, c_4 , son constantes del modelo que pueden ser obtenidas a partir de consideraciones matemáticas o experimentales ([19]). Por sus aplicaciones industriales, el modelo k - ε ha sido y es objeto de muchos estudios. El modelado k - ε dado en (20)-(21) no es el único que existe; otras versiones del modelo han sido propuestas con el fin de adaptarlos mejor a las más diversas situaciones (presencia o no de paredes sólidas, turbulencia con números de Reynolds pequeños, etc.). Este modelo tiene también adaptaciones para el caso compresible ([57, 58]). Desde el punto de vista matemático, el sistema u - k - ε contiene enormes dificultades teóricas y hasta ahora no existe ningún resultado de existencia o unicidad de solución para este modelo (en [8] se resuelve el sistema para k y ε , suponiendo que u entra como dato, y es suficientemente regular). Mohammadi constató en diversas simulaciones numéricas ([59]) que el modelo mostraba un comportamiento inestable, en el sentido de que k se hacía negativo al tiempo que ε tomaba valores arbitrariamente grandes. Para evitar estas inestabilidades, propuso el cambio de variables $\theta = k^\alpha \varepsilon^\beta$ y $\varphi = k^\gamma \varepsilon^\delta$ ([57]) donde los parámetros α, β, γ y δ se eligen de manera que $\varphi_{,t} + u \nabla \varphi \leq 0$. Una posible elección es $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -3$ y $\delta = -2$ lo que dio lugar a un nuevo modelo con dos ecuaciones: el modelo θ - φ . Las ecuaciones para θ y φ se deducen de las de k y ε . Al despreciar los términos de derivadas superiores, este modelo es de la forma siguiente:

$$\begin{cases} u_{,t} + (u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot (A_1(\theta, \varphi) \nabla u) + \nabla p = f, & \nabla \cdot u = 0, & \text{en } Q \\ \theta_{,t} + u \nabla \theta - \nabla \cdot (A_2(\theta, \varphi) \nabla \theta) = 1 - \theta^2 |\nabla u|^2, & & \text{en } Q \\ \varphi_{,t} + u \nabla \varphi - \nabla \cdot (A_3(\theta, \varphi) \nabla \varphi) = -\varphi \left(\theta |\nabla u|^2 + \frac{1}{\theta + r} \right), & & \text{en } Q \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), & & \text{en } \Omega \\ u(x, t) = 0, \quad \theta(x, t) = a, \quad \varphi(x, t) = b, & & \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Se puede encontrar en [34, 36, 37] el análisis teórico del modelo θ - φ , con algunos

resultados de existencia de solución, tanto para el caso estacionario como para el de evolución.

En [31] se estudia el siguiente problema

$$\begin{cases} u \nabla \varepsilon - \nabla \cdot [(B_1 + B_2 a(\varepsilon)) \nabla \varepsilon] + g(x, \varepsilon) = f, & \text{en } \Omega, \\ \varepsilon = \bar{\varepsilon}, & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases} \quad (22)$$

donde $u \in L^2(\Omega)^N$, $f \in L^1(\Omega)$, $B_1, B_2 \in L^\infty(\Omega)^{N \times N}$ y son uniformemente definidas positivas, $g: \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory, $a: (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es continua, $a(s) \geq 0$, $\forall s > 0$ y $\lim_{s \rightarrow 0^+} a(s) = +\infty$, y $\bar{\varepsilon} > 0$ es una constante. El problema (22) constituye la ecuación estacionaria de ε , supuesto que tanto u como k entran como datos. Este tipo de problemas surgen, por ejemplo, en la resolución numérica del modelo completo u - k - ε . Nótese ahora que a la dificultad de la poca regularidad de los datos u y f , se añade además la singularidad del coeficiente de difusión $a(s)$ en $s = 0$; consecuentemente, el término $a(\varepsilon) \nabla \varepsilon$ es una indeterminación sobre el conjunto $\{\varepsilon = 0\}$, que podría tener medida estrictamente positiva.

En los últimos años, otros modelos de turbulencia han sido estudiados. Por ejemplo los modelos de transporte del tensor de Reynolds (que proponen una ecuación de transporte-difusión para cada una de las componentes del tensor simétrico de Reynolds, resultando un modelo con seis ecuaciones). Los modelos obtenidos por técnicas de la homogeneización periódica están basados en los métodos asintóticos, inicialmente introducidos en el estudio de los materiales compuestos ([3, 42]); la primera idea de aplicarlos en el modelado de la turbulencia fue de McLaughlin, Papanicolaou y Pironneau ([55, 56]) originando los modelos denominados MPP de turbulencia; estos modelos suponen esencialmente tres hipótesis de partida: (i) separación de escalas entre las grandes y pequeñas estructuras, (ii) la turbulencia ya sido generada, lo que se traduce en condiciones iniciales muy oscilantes, y (iii) desarrollos asintóticos para el campo de velocidades y la presión. Sin necesidad de añadir ninguna otra hipótesis física, se deduce finalmente un modelo de turbulencia para el campo medio de velocidades u , la energía cinética turbulenta k , la helicidad h , y las coordenadas lagrangianas inversas a ([12, 15, 62]). La propiedad más remarcable de los modelos MPP es que, al menos teóricamente, son cerrados, en el sentido de que el tensor de Reynolds (y otros más que aparecen) puede ser calculado como función de $(k, h, \nabla a \nabla a^T)$ ([13, 15]) a través de la resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno periódicas ([61]). Diversas extensiones del modelo MPP han sido estudiadas desde entonces: para flujos compresibles ([21]), inclusión de capas límites turbulentas ([22]), derivación de modelos k - ε -MPP, incompresibles ([9]) o compresibles ([14]).

Otros estudios han indicado la conexión entre los modelos $k-\varepsilon$ y MPP ([16]).

En conclusión, no existe una técnica universal que permita tratar los flujos en régimen turbulento; los modelos de turbulencia conducen a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, acoplados y, a veces, con términos singulares; los modelos clásicos no han podido ser abordados desde un punto de vista teórico, aunque sí ha sido posible estudiar algunos modelos que derivan de éstos.

4 Simulación numérica en mecánica de fluidos

Sólo se conocen algunas soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero en casos muy particulares ([39]); la expresión de estas soluciones suministra una información valiosísima. Desgraciadamente, en general no se dispone de la expresión analítica de la solución, con lo que, prácticamente sólo nos quedan tres opciones: (i) realizar mediciones experimentales, (ii) reproducir el experimento en el laboratorio, y (iii) calcular la solución de forma aproximada, mediante algún algoritmo numérico. Cuando es posible, se utilizan las tres opciones simultáneamente, no renunciando a la información que cada una de ellas ofrezca. La simulación numérica ha demostrado ser una herramienta valiosísima en todas las ciencias experimentales; en lo que se refiere a los fluidos, a veces es la única con la que el ingeniero puede contar, ante la imposibilidad de reproducir el experimento en el laboratorio con las suficientes garantías de fiabilidad y de no disponer de los suficientes datos experimentales.

La aproximación numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes exige la combinación adecuada de algoritmos sofisticados; éstos incluyen: el método de los elementos finitos, el método de los volúmenes finitos, descomposición de dominios, métodos espectrales, transformada rápida de Fourier, el método de las diferencias finitas (Euler, Runge-Kutta, pasos fraccionarios, etc.) explícitos o implícitos, método de las características, métodos de optimización, mínimos cuadrados, control óptimo, gradiente conjugado y sus variantes, toda clase de algoritmos eficientes para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales (métodos directos e iterativos), etc. La lista detallada sería interminable; téngase en cuenta que cada año aparecen métodos numéricos nuevos, más robustos y eficientes con aplicaciones diversas. La bibliografía sobre estos métodos es muy extensa (por ejemplo [33, 38, 65, 77] y las referencias de estas obras).

Si el flujo es laminar (número de Reynolds pequeño), éste puede ser calculado mediante una simulación directa, aproximando las ecuaciones de Navier-Stokes. Por el contrario, como se ha puesto de manifiesto en la sección anterior, si el

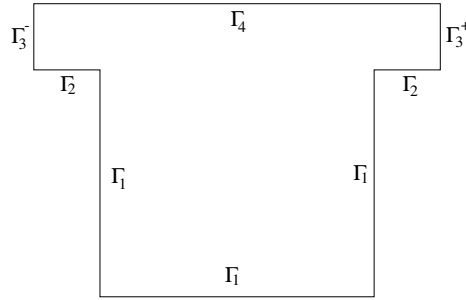


Figura 1: El dominio Ω y su frontera referenciada: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\Gamma_3 = \Gamma_3^- \cup \Gamma_3^+$.

flujo es turbulento, será necesario aproximar las ecuaciones de un modelo de turbulencia. La elección de un modelo y de un esquema numérico no siempre es tarea fácil, y está sujeta a discusión. En general, la aproximación de un problema de evolución, como (9), exige una discretización en espacio (lo que lleva a aproximar el dominio Ω , por ejemplo mediante una triangulación con vistas a aplicar un método de elementos o volúmenes finitos, lo cual permite a su vez aproximar el espacio V), y otra en tiempo (seleccionando una partición del intervalo de integración $[0, T]$ y aplicando un método de diferencias finitas, características, paso fraccionario, etc.). La elección de la aproximación en espacio está influenciada por la propia geometría del dominio Ω y por las condiciones de contorno sobre las incógnitas. Por ejemplo, si el dominio es un cubo y las condiciones de contorno son periódicas, podemos aproximar por series de Fourier y hacer uso de la transformada rápida de Fourier. Sin embargo, los casos que se presentan en la práctica se corresponden con dominios con geometrías complejas (exterior de un avión, helicóptero, coche, etc., el océano y mares con su batimetría, etc.) y, por esta razón, se prefiere el método de los elementos finitos; este método es capaz, además, de incorporar condiciones de contorno muy generales de modo sencillo.

Como ejemplo ilustrativo, se considera el siguiente modelo bidimensional con una ecuación

$$\begin{cases} u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nabla \cdot ((\nu + \nu_t(k))(\nabla u + \nabla u^T)) = f, & \text{en } \Omega_T \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{en } \Omega_T \\ k_{,t} + (u \cdot \nabla)k - \nabla \cdot ((\nu + \nu_t(k))\nabla k) = \frac{\nu_t(k)}{4} |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \frac{|k|^{1/2}k}{l} & \text{en } \Omega_T \end{cases} \quad (23)$$

donde ([59]) $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\nu_t(k) = c_1 l |k|^{1/2}$, $l = \chi c_1^{-3/4}$, $\chi = 0.41$ y $c_1 = 0.09$, y Ω es el dominio representado en la figura 1. Con este ensayo se pretende analizar el comportamiento de un fluido en una cavidad, partiendo

de que el fluido entra a través de la frontera Γ_3^- y sale por Γ_3^+ con velocidades prefijadas; las fronteras Γ_4 y Γ_3^+ son artificiales. Las condiciones de contorno para $u = (u_1, u_2)^T$ y k son

$$k = 10^{-2} \text{ sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3^-, \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_3^+ \cup \Gamma_4$$

$u_1 = 0$ sobre Γ_1 , 0.15 sobre Γ_2 , $(y-1)y + 0.15$ sobre $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $u_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Como condición inicial, se ha elegido $k|_{t=0} = k_0 = 10^{-2}$ en todo Ω , mientras que $u|_{t=0} = u_0$, donde u_0 (figura 2) es la única solución del problema estacionario de Stokes

$$\begin{cases} -\nabla \cdot ((\nu + \nu_t(k_0))\nabla u_0) + \nabla p_0 = 0, & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = (u_1, u_2)^T & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

La resolución numérica de este problema, ha sido llevada a cabo mediante el método de las características para la discretización en tiempo y el método de los elementos finitos para la discretización en espacio. Este tipo de esquemas es muy usado para el tratamiento numérico del término de transporte en los problemas que provienen de la mecánica de fluidos ([59, 65]). La idea básica del método de las características es hacer que la parte convectiva coincida con la derivada total; así

$$\{u_{,t} + (u \cdot \nabla)u\}(x, t) = \frac{Du}{Dt}(x, t) = \frac{d}{d\tau}u(\chi(x, t; \tau), \tau)|_{\tau=t},$$

donde $\chi(x, t; \tau)$, es la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{d\chi(x, t; \tau)}{d\tau} = \begin{cases} u(\chi(x, t; \tau), \tau) & \text{si } \chi(x, t; \tau) \in \Omega, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \\ \chi(x, t; t) = x, \end{cases} \quad (24)$$

ello justifica la siguiente aproximación

$$u_{,t}(x, t^{n+1}) + (u(x, t^{n+1}) \cdot \nabla)u(x, t^{n+1}) = \frac{Du(x, t^{n+1})}{Dt} \simeq \frac{u^{n+1}(x) - u^n(\chi^n(x))}{\Delta t}$$

donde Δt es el paso de tiempo elegido, $t^n = n\Delta t$ el n -ésimo nivel de tiempo, u^n, k^n la velocidad aproximada y la energía cinética aproximada respectivamente en el tiempo t^n y χ^n es la función que hace corresponder a cada punto x el punto $\chi(x, t^{n+1}; t^n)$. Según la ecuación diferencial (24), $\chi(x, t^{n+1}; t^n)$ representa la posición en el tiempo t^n de la partícula que se encontrará en el punto x en el instante t^{n+1} . Se propone entonces el siguiente esquema para la semidiscretización en tiempo de (23):

1. Conocida k^n , calcular u^{n+1} , p^{n+1} como la única solución del problema

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} - \nabla \cdot [(\nu + \nu_t(k^n))(\nabla u^{n+1} + \nabla u^{n+1T})] + \nabla p^{n+1} \\ \quad = f^n + \frac{1}{\Delta t} u^n \circ \chi^n, \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \end{cases}$$

2. Conocido u^{n+1} , hallar k^{n+1} solución de

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\nu_t(k^n)}{l^2 c_1} \right) k^{n+1} - \nabla \cdot [(\nu + \nu_t(k^n))\nabla k^{n+1}] \\ \quad = \frac{\nu_t(k^n)}{4} |\nabla u^{n+1} + \nabla u^{n+1T}|^2 - \frac{1}{\Delta t} k^n - u^{n+1} \nabla k^n \end{cases}$$

Por tanto, en cada iteración en tiempo, hay que resolver problemas del tipo

$$\int_{\Omega} (\nu + \nu_t(\bar{k}))(\nabla u + \nabla u^T)(\nabla v + \nabla v^T) + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} \left(f + \frac{1}{\Delta t} \bar{u} \right) v \quad (25)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nu + \nu_t(\bar{k}))\nabla k \nabla \Psi + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\nu_t(\bar{k})}{l^2 c_1} \right) k \Psi \\ \quad = \int_{\Omega} \frac{\nu_t(\bar{k})}{4} |\nabla u + \nabla u^T|^2 \Psi - \int_{\Omega} u \nabla \bar{k} \Psi \end{cases} \quad (26)$$

El problema (25) es del tipo de Stokes estacionario ([33]), mientras que el análisis teórico de (26) puede consultarse en [34, 35]. Para resolver estos problemas, se hace uso del método de los elementos finitos; a tal objeto se introducen los espacios discretos

$$Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega) / q_h|_Q \in \mathbb{P}_1(Q), \forall Q \in T_h\}$$

$$V_h = \{v_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2 / v_h|_{\partial\Omega} = 0, v_h|_Q \in \mathbb{Q}_2(Q), \forall Q \in T_h, \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot v_h) q_h = 0, \forall q_h \in Q_h\}$$

$$K_h = \{k_h \in C^0(\bar{\Omega}) / k_h|_{\partial\Omega} = 0, k_h|_Q \in \mathbb{Q}_2(Q), \forall Q \in T_h\}$$

donde T_h es una malla de Ω constituida por rectángulos (denotados por Q , figura 2), $\mathbb{P}_1(Q)$ es el espacio vectorial de los polinomios generados por $\{1, x, y\}$ definidos en Q y $\mathbb{Q}_2(Q)$ es el espacio vectorial de los polinomios generados por $\{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$ definidos en Q . Finalmente, los problemas aproximados se escriben de la siguiente manera:

Hallar $u_h \in V_h$, $k_h \in K_h$ tales que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nu + \nu_t(\bar{k}_h))(\nabla u_h + \nabla u_h^T)(\nabla v_h + \nabla v_h^T) + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_h v_h \\ \quad = \int_{\Omega} \left(f_h + \frac{1}{\Delta t} \bar{u}_h \right) v_h, \forall v_h \in V_h, \end{cases}$$

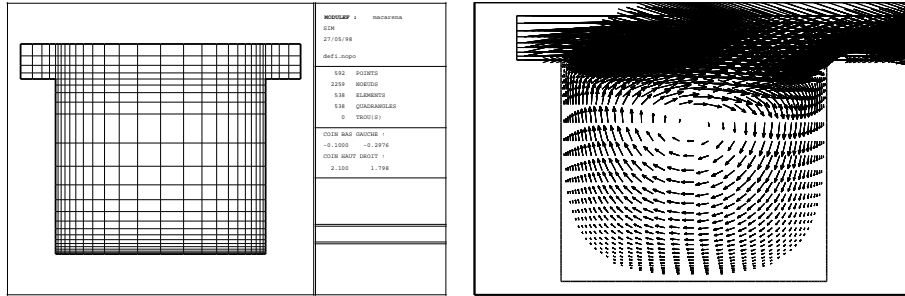


Figura 2: Triangulación T_h de Ω y velocidad inicial u_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\nu + \nu_t(\bar{k}_h)) \nabla k_h \nabla \Psi_h + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\nu_t(\bar{k}_h)}{l^2 c_1} \right) k_h \Psi_h \\ = \int_{\Omega} \frac{\nu_t(\bar{k}_h)}{4} |\nabla u_h + \nabla u_h^T|^2 \Psi_h - \int_{\Omega} u_h \nabla \bar{k}_h \Psi_h \quad \forall \Psi_h \in K_h. \end{array} \right.$$

Se han realizado dos ensayos, correspondientes a números de Reynolds $Re = 10^3$ y $Re = 10^6$, respectivamente ($Re = \nu^{-1}$). Cuando el número de Reynolds es 10^3 , los resultados son comparables con los ensayos realizados por Mohammadi en [57, 59], además se observa en este caso que los efectos viscosos son importantes. Para $Re = 10^6$ los efectos viscosos son dominados por los efectos inerciales como se observa en las gráficas del campo de velocidades (figura 3) y de las líneas de corriente (figura 4). Obsérvese, asimismo, la generación de pequeñas estructuras cerca de las esquinas de la cavidad. El número de Reynolds también afecta directamente al paso de tiempo que hay que considerar, y al número de iteraciones en tiempo necesarias para llegar a una aproximación aceptable del estado estacionario.

Cuanto más pequeño sea el diámetro de la triangulación h , mejor se aproxima el espacio V ; evidentemente, existe una cota inferior de los h permitidos, y esta cota está impuesta por meras limitaciones informáticas: el ordenador destinado a ejecutar el algoritmo en cuestión posee una capacidad de memoria y una velocidad de procesamiento limitados. Si h fuera excesivamente pequeño, el número de incógnitas del problema discreto sería tan elevado que rápidamente la memoria del ordenador se desbordaría; además, también hay que tener en cuenta la velocidad de cálculo: en la mayoría de los casos, se necesitan los resultados en un plazo de pocas horas, y muchos programas podrían ejecutarse durante meses y años antes de dar el resultado definitivo (piénsese en el cálculo para la previsión del tiempo: sería totalmente inaceptable que el pronóstico de

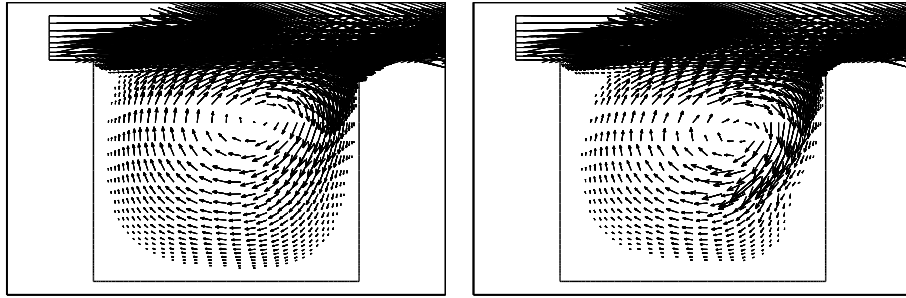


Figura 3: Campo de velocidades para $Re = 10^3$ (izquierda) y $Re = 10^6$ (derecha).

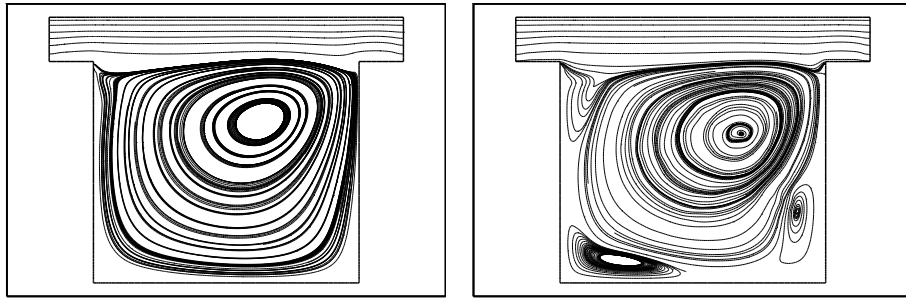


Figura 4: Líneas de corrientes (trayectorias) para $Re = 10^3$ (izquierda) y $Re = 10^6$ (derecha).

un día para otro exigiera dos días de cálculo). La revolución tecnológica que estamos viviendo parece no poner límites a las capacidades de los ordenadores, tanto de memoria como de velocidad de procesamiento; esto significa que la cota inferior de h cada vez es más pequeña, lo que viene acompañado de una sensible mejora de los resultados numéricos. En esta mejoría, no sólo interviene el algoritmo numérico en cuestión, o el ordenador que lo ejecuta, sino que cada vez se disponen de más medios de toda índole suministrando datos más fiables (teledetección, láser, radiometría, técnicas acústicas, etc.); toda esta tecnología puede proporcionar, entre otras cosas, las condiciones iniciales y de contorno necesarias para la resolución numérica del problema considerado.

Hace menos de veinte de años, el cálculo numérico del flujo en torno a un avión completo, con resultados fiables y en un plazo razonable de tiempo, era una ilusión; hace unos diez, se empezaron a realizar los primeros ensayos

numéricos, que involucraban del orden de dos o tres millones de incógnitas. Hoy día, se pueden manipular triangulaciones con más de veinticuatro millones de vértices, que generan sistemas de ecuaciones con más de ciento veinte millones de incógnitas en cada iteración de tiempo. A pesar de este panorama alentador en el que la potencia actual de los ordenadores permite acercarnos un poco más en el conocimiento de flujos complejos, el estudio completo de los flujos turbulentos es todavía imposible y constituye un reto en todos los sentidos para las generaciones futuras.

Agradecimientos

Los resultados de los ensayos numéricos mostrados en la sección anterior se deben a la Dra. Macarena Gómez Mármol, a la que agradezco el haberme permitido reproducirlos aquí.

Referencias

- [1] K. Asano *Zero-viscosity limit of the incompressible Navier-Stokes equation*. II. Mathematical analysis of fluid and plasma dynamics, I (Kyoto, 1986). Sûrikaiseikikenkyûsho Kôkyûroku No. 656, pp. 105-128, 1988.
- [2] G. K. Batchelor *An introduction to fluid dynamics*. Masson, Paris, 1990.
- [3] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou *Asymptotic methods for periodic structures*. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] C. Bernardi, G. Raugel *A conforming FEM for the time dependent Navier-Stokes equations*. Report 84034, Univ. of Paris VI, Labo. Numer. Anal., 1984.
- [5] D. Blanchard, F. Murat *Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data: existence and uniqueness*. Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, 127A, 1137-1152, 1997.
- [6] L. Boccardo, D. Giachetti, J. I. Díaz, F. Murat *Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms*. Journal of Differential Equations 106, pp. 215-237, 1993.
- [7] L. Boccardo, T. Gallouët *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*. Journal of Functional Analysis 87, pp. 149-169, 1989.
- [8] M. C. Calzada Canalejo *Resultados teóricos y numéricos para algunos modelos de turbulencia no lineales*. Tesis doctoral de la Univ. de Sevilla, 1991.
- [9] B. Cardot *Modélisation de la turbulence par des méthodes de type $k-\varepsilon$ et homogénéisation*. Thèse, Université Paris VI, 1989.
- [10] T. Cazenave, A. Haraux *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Série Mathématiques et Applications, Ellipses, 1990.
- [11] T. Cebeci, A. M. O. Smith *Analysis of turbulent boundary layers*. Academic Press, 1974.

- [12] T. Chacón Rebollo *Étude d'un modèle pour la convection des microstructures*. Thèse de troisième cycle, Université de Paris VI, 1985.
- [13] T. Chacón Rebollo, D. Franco Coronil, F. Ortegón Gallego *Homogenization of incompressible flow with helical microstructures* Adv. Math. Sci. Appl. 1, No. 2, pp. 251–300, 1992.
- [14] T. Chacón Rebollo, D. Franco Coronil, F. Ortegón Gallego, M. I. Sánchez Muñoz *Modelling of compressible flows with highly oscillating initial data by homogenization*. Appl. Numer. Math. 26 No. 4, pp. 435-464, 1998.
- [15] T. Chacón Rebollo, F. Ortegón Gallego *On a Rivlin-Eriksen's theorem application to a turbulence model*. European Journal of Mechanics, B Fluids, No. 5, pp. 557-576, 1986.
- [16] T. Chacón Rebollo, O. Pironneau *On the mathematical foundations of the $k-\varepsilon$ turbulence model*. Vistas in applied mathematics, A. V. Balakrishnan, A. Dorodnitsyn, J. L. Lions. Springer-Verlag, pp. 44-56, New York, 1986.
- [17] B. Climent Ezquerro *Soluciones débiles y renormalizadas de algunas EDP no lineales con origen en mecánica de fluidos*. Tesis doctoral de la Univ. de Sevilla, 1996.
- [18] B. Climent Ezquerro, E. Fernández Cara *Resultados de existencia y unicidad de solución para algunos sistemas acoplados con origen en mecánica de fluidos*. Actas de la Jornada Científica en homenaje al Prof. Antonio Valle Sánchez, Servicio de Publicaciones de la Univ. de Sevilla, pp. 91-103, 1997.
- [19] Y. Coeffe: *Les modèles de turbulence $k-\varepsilon$ appliqués à l'écoulement de plan*. EDF Report LNH HE 041/80.04, 1980.
- [20] P. Constantin, C. Foias, O. Manley, R. Temam *Determining modes and fractal dimension of turbulent flows*. J. Fluid Mech., Vol. 150, pp. 427-440, 1985.
- [21] J. Couce Calvo, T. Chacón Rebollo, M. R. Echevarría Líbano, E. Fernández Cara, J. D. Martín Gómez, F. Ortegón Gallego *Sobre los modelos asintóticos y el tratamiento numérico de la turbulencia para fluidos compresibles*. Actas del XI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones / I Congreso de Matemática Aplicada, Univ. de Málaga, pp. 233-240, 1990.
- [22] J. Couce Calvo, T. Chacón Rebollo, M. R. Echevarría Líbano, E. Fernández Cara, J. D. Martín Gómez, F. Ortegón Gallego *Un modelo asintótico para la descripción de la turbulencia en una capa límite*. Actas del XI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones / I Congreso de Matemática Aplicada, Univ. de Málaga, pp. 233-240, 1990.
- [23] C. Deschenes *Simulation par éléments finis d'un écoulement interne turbulent avec le modèle $k-\varepsilon$* . Thèse M. Sc. Univ. Laval, Canada, 1986.
- [24] R. J. DiPerna, P. L. Lions *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability*. Ann. of Math. (2) 130, No. 2, pp. 321-366, 1989.
- [25] G. Duvaut *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1990.
- [26] C. Foias, G. Prodi *Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2*. Rend. Sem. Mat. Padova, 39, pp. 241-244, 1981.

- [27] C. Foias, R. Temam *Some analytic and geometric properties of the solutions of the Navier-Stokes*. J. Math. Pures Appl., 58, pp. 339-368, 1979.
- [28] A. V. Fursikov *On some problems of control*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, pp. 1066-1070, 1980 (en ruso).
- [29] G. P. Galdi *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: linearised steady problems*. Vol. I, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 38, NY, 1994.
- [30] G. P. Galdi *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: nonlinear steady problems*. Vol. II, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 39, NY, 1994.
- [31] C. García Vázquez, F. Ortega Gallego *Sur un problème elliptique non linéaire avec diffusion singulière et second membre dans L^1* . C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1-6, 2001.
- [32] P. Germain *Mécanique des milieux continus*. T. 1, Masson, Paris, 1973.
- [33] V. Girault, P. A. Raviart *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [34] M. Gómez Mármol *Estudio matemático de algunos problemas no lineales de la mecánica de fluidos incompresibles*. Tesis doctoral de la Univ. de Sevilla, 1998.
- [35] M. Gómez Mármol, F. Ortega Gallego *Existencia y unicidad de solución renormalizada para la ecuación de Kolmogórov*. Actas de la Jornada Científica en homenaje al Prof. Antonio Valle Sánchez, Servicio de Publicaciones de la Univ. de Sevilla, pp. 167-183, 1997.
- [36] M. Gómez Mármol, F. Ortega Gallego *Coupling the Stokes and Navier-Stokes equations with two scalar nonlinear parabolic equations*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 33, No. 1, pp. 157-167, 1999.
- [37] M. Gómez Mármol, F. Ortega Gallego *Existence of solution to nonlinear elliptic systems arising in turbulence modelling*. Math. Models Methods Appl. Sci. 10, No. 2, pp. 247-260, 2000.
- [38] R. Glowinski *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [39] R. A. Granger *Fluid Mechanics*. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
- [40] J. P. Heywood *Open problems in the theory of the Navier-Stokes equations for viscous incompressible flow*. The Navier-Stokes equations (Oberwolfach, 1988), pp. 1-22, Lecture Notes in Math., 1431, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [41] E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*. Math. Nachr., 4, pp. 213-231, 1951.
- [42] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [43] T. Kato *Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary*. Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983), pp. 85-98, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 2, Springer, New York-Berlin, 1984.
- [44] O. A. Ladyzhenskaya *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second edition, Gordon and Breach, NY, 1969.

- [45] B. E. Launder, D. B. Spalding *Mathematical models of turbulence*. Academic Press, 1972.
- [46] J. Leray *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*. J. Math. Pures Appl., 12, pp. 1-82, 1933.
- [47] J. Leray *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*. J. Math. Pures Appl., 13, pp. 331-418, 1934.
- [48] J. Leray *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Math., 63, pp. 193-248, 1934.
- [49] R. Lewandowski *The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, No. 2, pp. 393-417, 1997.
- [50] J. L. Lions *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [51] J. L. Lions, G. Prodi *Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 248, pp. 3519-3521, 1959.
- [52] P. L. Lions *Mathematical topics in fluid mechanics: incompressible models*. Vol. 1, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [53] P. L. Lions *Mathematical topics in fluid mechanics: compressible models*. Vol. 2, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [54] P. L. Lions, N. Masmoudi *Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans $L^N(\Omega)$* . C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, pp. 491-496, 1998.
- [55] D. McLaughlin, G. Papanicolaou, O. Pironneau *Simulation numérique de la turbulence par homogénéisation des structures de sous-maille*. Rapport de recherche INRIA N° 188, Rocquencourt, 1983.
- [56] D. McLaughlin, G. Papanicolaou, O. Pironneau *Convection of microstructures and related problems*. SIAM J. Appl. Math. 45, pp. 780-793, 1985.
- [57] B. Mohammadi *Étude du modèle $k-\varepsilon$ de la turbulence pour les écoulements compressibles*. Thèse, Université de Paris VI, 1991.
- [58] B. Mohammadi *A stable finite element algorithm for the $k-\varepsilon$ model for compressible turbulence*. J. Fluid Mechanics, Vol. 239, pp. 780-796, 1991.
- [59] B. Mohammadi, O. Pironneau *Analysis of the $k-\varepsilon$ turbulence model*. Wiley-Masson, Paris, 1993.
- [60] A. S. Monin, A. M. Yaglom *Statistical Fluid Mechanics of Turbulence*. Vol. 1 and 2. MIT Press, Cambridge, 1971, 1975.
- [61] F. Ortegón Gallego *Tabulations of the closure tensors for the MPP model of turbulence*. Rapport de recherche INRIA N° 757, Rocquencourt, 1987.
- [62] F. Ortegón Gallego *Modélisation des écoulements turbulents à deux échelles par méthodes d'homogénéisation*. Thèse, l'Université Paris VI, 1989.
- [63] C. M. Parés Madroñal *Estudio de diversos tipos de condiciones de contorno para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles*. Tesis doctoral de la Univ. de Málaga, 1988.
- [64] O. Pironneau *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*. Numer. Math. 38, No. 3, pp. 309-332, 1981/82.

- [65] O. Pironneau *Finite element methods for fluids*. Wiley, 1989.
- [66] D. Ruelle, F. Takens *On the nature of turbulence*. *Comm. Math. Phys.*, 20, pp. 167-192, 1971; *Note*, 23, pp. 343-344, 1971.
- [67] D. Ruelle *Les attracteurs étranges*. *La recherche*, vol. 108, 1980.
- [68] D. Ruelle *Characteristic exponents for a viscous fluid subjected to time dependent forces*. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 92, pp. 285-300, 1984.
- [69] H. Schlichting *Teoría de la capa límite*. Ediciones Urno, 1972.
- [70] J. Serrin *The initial value problem for Navier-Stokes equations*. *Nonlinear Problems*, R. E. Langer, ed., Univ. Wisconsin Press, Madison, pp. 69-98, 1963.
- [71] J. Simon *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* . *Annali di Matematica pura et applicata (IV)*, Vol. CXLVI, pp. 65-96, 1987.
- [72] J. Simon *Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham*. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 316, Série I, pp. 1167-1172, 1993.
- [73] J. Simon *On the existence of the pressure for solutions of the variational Navier-Stokes equations*. *J. Theoretical Fluid Mech.*, 1999.
- [74] H. S. G. Swann *The convergence with vanishing viscosity of nonstationary Navier-Stokes flow to ideal flow in \mathbb{R}^3* . *Trans. Amer. Math. Soc.* 157, 1971.
- [75] R. Temam *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. North Holland, Amsterdam, 1979.
- [76] R. Temam *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Second Edition, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [77] S. Turek *Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic and computational approach* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Análisis Teórico de Varias Cuestiones con Origen en Mecánica de Fluidos

BLANCA CLIMENT
DEPTO. DE ECUACIONES DIFERENCIALES
Y ANÁLISIS NUMÉRICO
UNIVERSIDAD DE SEVILA
APTO. 1160, 41080 SEVILLA
e-mail: blanca@numer.us.es

En este artículo, presentamos varios resultados recientes relacionados con las ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes y también con las ecuaciones que describen el comportamiento de una clase de fluidos no Newtonianos. Asimismo, indicamos algunas cuestiones abiertas de interés.

1 Soluciones débiles-renormalizadas

El primer tema que abordamos se refiere al uso del concepto de *solución renormalizada* para la resolución de algunos problemas en derivadas parciales no lineales no escalares.

Las soluciones renormalizadas aparecen, por ejemplo, en el análisis de ecuaciones elípticas no lineales del tipo

$$-\Delta u + \nabla \cdot \Phi(u) = f \tag{1}$$

(completadas con condiciones de contorno adecuadas), consideradas en un abierto acotado Ω de \mathbb{R}^N , cuando Φ es una función para la cual tan sólo se sabe que es continua y/o $f = f(x)$ es un segundo miembro para el cual tan sólo sabemos que está en $L^1(\Omega)$.

En el planteamiento de este problema, aparecen enseguida dos dificultades. En efecto, a menos que u esté acotada, $\Phi(u)$ no tiene por qué ser localmente integrable. Puesto que no podemos en principio interpretar $\Phi(u)$ como una distribución, tenemos que preguntarnos qué sentido tiene $\nabla \cdot \Phi(u)$. En segundo

lugar, como f sólo está en $L^1(\Omega)$, no es lícito usar u como función “test”, de modo que no somos capaces de obtener las estimaciones débiles habituales para u .

Cualquiera de estas dos razones induce a introducir un nuevo concepto de solución, que es el siguiente:

Diremos que u es una solución renormalizada de (1) si

$$u \in L^1(\Omega), \quad T_M(u) \in H_0^1(\Omega) \quad \forall M > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{n \leq |u| \leq 2n} |\nabla u|^2 dx = 0$$

y, para toda función $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ de soporte compacto, se verifica la igualdad

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (h(u)\nabla u) + h'(u)|\nabla u|^2 \\ + \nabla \cdot (h(u)\Phi(u)) - h'(u)\Phi(u)\nabla u = f h(u) \end{cases} \quad (2)$$

en el sentido de las distribuciones.

Aquí T_M es la función truncante definida por $T_M(s) = s$ si $s \in [-K, K]$ y $T_M(s) = K \text{sign}(s)$ fuera de $[-K, K]$.

Puede comprobarse que ahora, puesto que h es de soporte compacto, podemos sustituir en (2) u por $T_M(u)$ para M suficientemente grande. Esto hace que cada sumando de (2) tenga sentido. Por ejemplo, el segundo sumando puede ser escrito en la forma

$$h'(T_M(u))|\nabla T_M(u)|^2$$

y pertenece a $L^1(\Omega)$.

Obsérvese que lo que se ha hecho para conseguir (2) equivale a multiplicar la ecuación de partida por la función “test” $\varphi h(u)$, donde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ es de soporte compacto.

Las soluciones renormalizadas parecen haber sido introducidas por R. DiPerna y P.L. Lions en [19], en el contexto de las ecuaciones de Boltzmann. En relación con la resolución de problemas elípticos para ecuaciones como (1), han sido utilizadas por P.L. Lions y F. Murat, cf. [25]. También se puede consultar la referencia [6] (aquí aparecen bajo el nombre de soluciones de

entropía y una apariencia diferente) y los artículos [9] y [10], donde previamente se habían introducido y analizado conceptos similares.

Para problemas de evolución, véanse las referencias [7] y [8] y las que se citan allí. Nuestro interés por las soluciones renormalizadas nació a raíz de unas conferencias impartidas por F. Murat en 1992 en la Universidad de Sevilla que dieron lugar a la redacción del trabajo [25].

Una cuestión de gran interés (y aparentemente también de gran dificultad), que carece en la actualidad de respuesta satisfactoria, consiste en generalizar el concepto de solución renormalizada al caso de un sistema. Más generalmente, se desconoce realmente el marco adecuado en el que debe ser resuelto (por ejemplo) el sistema elíptico

$$-\Delta u_i + \nabla \cdot \Phi^i(u) = f^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3)$$

donde las $\Phi^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ son (sólo) continuas y las $f^i \in L^1(\Omega)$.

No obstante, seremos capaces de indicar a continuación de qué modo puede ser usado el concepto de solución renormalizada en el marco de ciertos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales particulares.

La idea principal consistirá en permitir que algunas componentes de la solución resuelvan algunas de las ecuaciones en un sentido renormalizado y que, por el contrario, otras resuelvan la ecuaciones restantes en el sentido débil habitual. Esta idea parece haber sido utilizada por primera vez por R. Lewandowski en [23]. También se puede consultar el trabajo [5], de J. Baranger y A. Mikelić.

En [14], se analiza un sistema para un modelo “académico” de tipo *reacción-difusión*. Este sistema podría ser utilizado para describir la difusión de un contaminante en un medio que ocupa los puntos de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ó $N = 3$), con $u = u(x)$ la concentración del contaminante y $v = v(x)$ la temperatura del medio:

$$\begin{cases} -\Delta u - \nabla \cdot (\beta(v)X'(u)) = f & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v - \nabla \cdot (\beta'(v)X(u)) = g & \text{en } \Omega, \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

En (4), $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y de clase C^1 , i.e.

$$X \in (C^1(\mathbb{R}))^N \cap (C_b^0(\mathbb{R}))^N, \quad (5)$$

β es una función cuyas derivadas segundas están esencialmente acotadas, i.e.

$$\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}) \quad (6)$$

y

$$f, g \in H^{-1}(\Omega). \quad (7)$$

Obsérvese que no hemos impuesto restricciones al crecimiento de X' . De acuerdo con ello, encontramos para u una de las dos dificultades que hemos explicado antes: parece lógico buscar u y v en el espacio $H_0^1(\Omega)$, ya que f y g pertenecen a $H^{-1}(\Omega)$. Pero entonces $\nabla \cdot (\beta(v)X'(u))$ puede no tener sentido. Por este motivo, buscaremos un par $\{u, v\}$ tal que u es solución de la primera ecuación en sentido renormalizado y v es solución de la segunda en el sentido débil habitual.

A continuación, enunciaremos el resultado de existencia obtenido, que aprovecharemos para indicar qué es una *solución débil-renormalizada*:

Existen u y v , con $u, v \in H_0^1(\Omega)$, tales que la segunda ecuación de (4) se verifica en sentido distribucional o débil y la primera se verifica en el sentido siguiente:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (h(u)\nabla u) + \nabla u \cdot \nabla h(u) - \nabla \cdot (\beta(v)h(u)X'(u)) \\ \quad + \beta(v)X'(u) \cdot \nabla h(u) = fh(u) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \forall h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \quad \text{de soporte compacto.} \end{cases} \quad (8)$$

La demostración está detallada en [14]. La idea principal consiste en plantear problemas aproximados adecuados, truncando X con $T_{1/\varepsilon}$ para después pasar al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Hemos de tener en cuenta que la presencia de la no linealidad obliga a demostrar convergencia fuerte de las soluciones de los problemas aproximados. No basta con la convergencia débil. Esto complica la demostración.

Los resultados de los que hablaremos a continuación se refieren a sistemas con origen en Mecánica de Fluidos, relacionados con las ecuaciones de Navier-Stokes, que fueron el objeto de estudio de la Tesis Doctoral [13]. Presentaremos versiones simplificadas del problema tanto en el caso estacionario como en el caso de evolución:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u - \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ -\nabla \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u - \nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t k - \nabla \cdot (\mu(k)\nabla k + B(k)) + u \cdot \nabla k = \nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u. \end{cases} \quad (10)$$

En estos sistemas, los datos del problema son las funciones $D \mapsto \Phi(D)$, $k \mapsto \mu(k)$ y $k \mapsto B(k)$, el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la constante $\nu > 0$ y la función f . La incógnita es la terna $\{u, p, k\}$. En el caso de (9), se busca una *solución débil-renormalizada* definida para $x \in \Omega$ que cumpla condiciones de contorno apropiadas. Por el contrario, en el caso de (10), fijado un tiempo final $T > 0$, buscaremos una solución definida para $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ que habrá de verificar adecuadas condiciones de contorno y condiciones iniciales para $t = 0$.

En pocas palabras, esto significará que pediremos a las dos primeras ecuaciones de (9) ó (10) que se cumplan en el sentido habitual y que pediremos además que la tercera ecuación sea satisfecha en un sentido similar a (8).

Las dificultades que presentan estos sistemas son de índole diversa. En primer lugar, las dificultades habituales en un sistema de Navier-Stokes, es decir, la presencia del término de transporte $(u \cdot \nabla)u$ (que es no lineal) y la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot u = 0$. En segundo lugar, las funciones μ y B carecen de hipótesis de crecimiento y, para el término de *producción*

$$\nu|\nabla u|^2 + k\Phi'(\nabla u) : \nabla u,$$

sólo cabe esperar la pertenencia a $L^1(\Omega \times (0, T))$. Son las dos razones que nos hacen recurrir al concepto de renormalización. Pero hay otra dificultad adicional y es el paso al límite en el tensor $-\nabla \cdot (k\Phi'(\nabla u))$ en los problemas aproximados. Por ello, se hace también necesario imponer hipótesis que permitan utilizar argumentos de monotonía.

Con objeto de comprender mejor estos problemas, veamos de qué manera surgen y cómo conducen a estas ecuaciones.

Una de las posibles motivaciones tiene su origen en el modelado de la *Turbulencia*. Sean $U = U(x, t)$ y $P = P(x, t)$ respectivamente el campo de velocidades y la presión de un fluido viscoso incompresible en régimen turbulento. Entonces el par $\{U, P\}$ debe satisfacer las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\partial_t U - \nu \Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla P = F, \quad \nabla \cdot U = 0. \quad (11)$$

Debido a las grandes fluctuaciones que puede sufrir el campo de velocidades, se debe renunciar a su cálculo directo. Se necesita “promediar” en algún sentido.

Denotaremos u y p las correspondientes variables promediadas y pondremos $u = \bar{U}$, $p = \bar{P}$. Entonces

$$U = u + u', \quad P = p + p', \quad (12)$$

donde u' y p' son las correspondientes perturbaciones debidas al carácter turbulento del flujo.

Es usual reemplazar la búsqueda de una solución $\{U, P\}$ de (11) por la búsqueda de u y p . Por tanto, interesa averiguar cuáles son las ecuaciones satisfechas por estas variables. Cuando se “promedia” en tiempo, i.e. cuando u y p están dadas por las igualdades

$$u(x) = \frac{1}{T} \int_0^T U(x, t) dt, \quad p(x) = \frac{1}{T} \int_0^T P(x, t) dt,$$

tras algunos cálculos, se llega a que

$$-\nabla \cdot (\nu Du + R) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (13)$$

Cuando se “promedia” en algún otro sentido, usando alguna otra técnica que permita escribir igualdades como (12), las ecuaciones encontradas son

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\nu Du + R) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (14)$$

Aquí, f es el promedio de los esfuerzos exteriores que actúan sobre las partículas del fluido, i.e. $f = \bar{F}$ y R es el llamado *tensor de Reynolds*, que se obtiene a partir del término no lineal $(u \cdot \nabla)u$ como sigue:

$$R = \{R_{ij}\}, \quad \text{con } R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}.$$

Como en (13) y (14) aparecen las incógnitas u'_i , es necesario hacer hipótesis de modelado adicionales que relacionen R con u y permitan *cerrar* el sistema.

En el caso de los modelos con una ecuación, es habitual imponer la siguiente hipótesis *de tipo Boussinesq*, cf. [22]:

$$R = \nu_T Du, \quad \text{donde } \nu_T = G(k) \quad (\text{una relación algebraica}). \quad (15)$$

En (15), k es la *energía cinética turbulenta*, i.e.

$$k = \frac{1}{2} \overline{|u'|^2}.$$

El problema podrá quedar cerrado considerando (13) ó (14) junto con (15) y una ecuación adicional para k .

Sin embargo, cuando se intenta deducir una ecuación para k , nuevamente encontramos términos en los que aparecen las perturbaciones turbulentas u'_i (y k'). Más precisamente, en el caso del sistema (13), se llega a la ecuación

$$-\nabla \cdot \left(\nu \nabla k + \overline{-(p' + k')u'} \right) + u \cdot \nabla k = R : Du - \frac{\nu}{2} \overline{|Du'|^2}, \quad (16)$$

donde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$. Cuando el sistema satisfecho por u y p es (14), obtenemos

$$\partial_t k - \nabla \cdot \left(\nu \nabla k + \overline{-(p' + k')u'} \right) + u \cdot \nabla k = R : Du - \frac{\nu}{2} \overline{|Du'|^2}. \quad (17)$$

Por tanto, es necesario aproximar algunos de los términos de (16) y de (17). Esto se consigue introduciendo nuevas hipótesis:

- Naturalmente, se usa de nuevo (15) para aproximar $R : Du$.
- Para el término de disipación $\frac{\nu}{2} \overline{|Du'|^2}$, hoy día se acepta casi siempre la misma aproximación: Una constante positiva por $k^{3/2}$.
- En cambio, la aproximación del término $\overline{-(p' + k')u'}$ ha sido realizada por varios autores de diferentes maneras. En la mayoría de los trabajos, este término es aproximado por un campo de la forma $c \nu_T \nabla k$, donde c es una constante positiva que suele determinarse en base a valores experimentales, véanse por ejemplo [26], [29] y sus referencias. En otros casos, se aproxima por un vector $B(k)$ o, más generalmente, por un vector de la forma $c \nu_T \nabla k + B(k)$, cf. [11].

Por simplicidad, hemos eliminado en (9) y (10) los últimos sumandos de (13) y (14), porque no conducen a dificultades de envergadura en su tratamiento. También, hemos sustituido $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ por ∇u por la misma razón.

Así pues, queda claro que sistemas como (9) ó (10) pueden ser usados para describir el comportamiento de ciertos fluidos turbulentos. Otra motivación para este tipo de problemas puede encontrarse en la *Mecánica de Fluidos no Newtoniana* (cf. por ejemplo [28]). En este caso, el par $\{u, p\}$ proporciona el campo de velocidades y la presión reales del fluido y k es la temperatura. Aquí, se está admitiendo que el tensor de esfuerzos tangenciales τ depende de ∇u y k en la forma siguiente:

$$\tau = \nu \nabla u + k \Phi'(\nabla u).$$

En los artículos [15], [16] y [17], aparecen los principales resultados que hemos obtenido sobre este tema. Más precisamente, en [15] presentamos la existencia

de solución débil-renormalizada de (9) cuando $N = 2$ y cuando $N = 3$. Vemos que, si por ejemplo $B = 0$, la solución encontrada es de hecho una solución débil (en el sentido habitual). En estas condiciones, podemos probar unicidad cuando ν es suficientemente grande.

En [16], se muestran variantes y generalizaciones de la situación anterior. Así, es posible demostrar existencia de solución débil-renormalizada para sistemas que contienen términos más complicados que $k\Phi'(\nabla u)$ y $\mu(k)\nabla k$. También probamos en [16] existencia y unicidad de solución débil para B no necesariamente nula, pero sometida a ciertas condiciones de crecimiento, con $\|f\|_{H^{-1}}$ suficientemente pequeña.

El caso de evolución, en contra de lo que pueda parecer a primera vista, no es una mera generalización del caso anterior. En primer lugar, indicaremos que sólo podemos conseguir existencia de solución cuando $N = 2$ ya que, cuando $N = 3$, no se sabe acotar uniformemente las aproximaciones $\partial_t u^\varepsilon$ en el espacio adecuado. Esto se debe a la presencia del término de transporte $(u \cdot \nabla)u$ (sí sería posible probar la existencia de solución en ausencia de este término, i.e. para sistemas similares a (10) de tipo Stokes).

En segundo lugar, mencionemos que, para pasar al límite, es necesario probar la convergencia fuerte de las funciones truncadas $T_M(k^\varepsilon)$ para cada $M > 0$. En el caso estacionario, se puede usar un argumento debido a P. L. Lions y F. Murat y recogido en [25] que ahora no funciona. Se utiliza pues un argumento diferente, esencialmente debido a D. Blanchard y H. Redwane que es notablemente más complicado, cf. [8].

Por último, la condición inicial no se puede comprobar a través de los mecanismos habituales. Hace falta recurrir a un resultado de compacidad específico, que se debe a J. Simon. Véanse [13], [16] y [17] para algunos resultados adicionales (entre otros, un resultado de existencia de solución débil-renormalizada para turbulencia tridimensional con flujo medio bidimensional).

Permanecen abiertas, entre otras, las siguientes cuestiones:

- La unicidad de solución débil-renormalizada.
- Las demostraciones que hacemos se basan en todos los casos por acotaciones que necesitan la hipótesis

$$\mu \geq \mu_0 > 0.$$

Sería interesante encontrar resultados similares para funciones μ positivas arbitrarias (por ejemplo, $\mu(k) = (k_+)^{\alpha}$, con $\alpha > 0$).

- Aplicar estas técnicas a modelos de turbulencia con más de una ecuación como, por ejemplo, el conocido modelo $k - \varepsilon$.
- La existencia de solución débil-renormalizada de (10) cuando $N = 3$, por ejemplo, con condiciones de Dirichlet homogéneas para u y condiciones iniciales para u y k . Posiblemente, en este caso, lo adecuado es re-escribir el sistema, o más precisamente la tercera ecuación, introduciendo la nueva variable $e = \frac{1}{2}|u|^2 + k$ (la energía cinética total promediada). Pero esta vía debe ser explorada con detalle.

2 El efecto de la rugosidad en un fluido laminar con condiciones de tipo Fourier

Consideramos a continuación un fluido cuya velocidad u^ε y presión p^ε verifican una ecuación de Stokes en el dominio \mathcal{O}_ε , periódico en $x' = (x_1, x_2)$, limitado superiormente por una pared \mathcal{R}_ε que soporta *asperezas* de pequeño tamaño ε e inferiormente por una pared plana \mathcal{P} . Suponemos que el sistema de referencia es fijo respecto de \mathcal{R}_ε , de manera que esta pared está en reposo y \mathcal{P} se mueve con velocidad constante $g = (g_1, g_2, 0)$.

El caso en el que las partículas del fluido se adhieren a las paredes (condiciones de *no deslizamiento*) ha sido estudiado en [1] y [2] para fluidos gobernados por las ecuaciones de Stokes y en [3] para fluidos de Navier-Stokes. Para la ecuación de Laplace con condiciones de Fourier y/o condiciones de Neumann, se dan resultados análogos en [12], [27] y [30].

En [4], hemos considerado un fluido de Stokes con condiciones *de tipo Fourier* sobre las paredes:

$$\sigma_\varepsilon \cdot n + ku^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \mathcal{R}_\varepsilon. \quad (18)$$

Aquí, σ_ε es el *tensor de esfuerzos*, i.e.

$$\sigma_\varepsilon = -p^\varepsilon \text{Id.} + \nu Du^\varepsilon, \quad \text{con } Du^\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^t). \quad (19)$$

Por otra parte, k es el *coeficiente de fricción* (una constante positiva) y $n = n(x)$ es vector normal unitario en $x \in \partial\Omega$, dirigido hacia el exterior.

Estas condiciones son válidas cuando permitimos que el fluido, de algún modo, pueda penetrar las paredes del dominio. Sería más realista imponer

condiciones de deslizamiento, que son incompatibles con los efectos de porosidad y toman la forma

$$u^\varepsilon \cdot n = 0, \quad (\sigma_\varepsilon \cdot n)_{\text{tang}} + ku^\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \mathcal{R}_\varepsilon, \quad (20)$$

donde $(\sigma_\varepsilon \cdot n)_{\text{tang}}$ denota la componente tangencial de $\sigma_\varepsilon \cdot n$. Sin embargo, esta situación conduce a dificultades que, por el momento, no sabemos resolver.

Debido a la periodicidad de \mathcal{O}_ε , realizaremos el análisis de las ecuaciones en un dominio acotado Ω_ε que, por traslaciones, genera todo \mathcal{O}_ε .

Más precisamente, pongamos

$$\Omega_\varepsilon = \{ (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_i < \ell_i, \quad i = 1, 2; 0 < x_3 < r_\varepsilon(x') \},$$

donde $r_\varepsilon(x') = r(x')(1 + \varepsilon\eta(x', x'/\varepsilon))$ para algunas funciones periódicas y Lipschitz-continuas $r = r(x')$ y $\eta = \eta(x', y')$. Pongamos también

$$R_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \cap \{ x_3 = r_\varepsilon(x') \}, \quad P = \partial\Omega \cap \{ x_3 = 0 \}.$$

Entonces la velocidad u^ε y la presión p^ε del fluido verifican

$$\begin{cases} -\nu\Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0, & \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon \cdot n + ku^\varepsilon = 0 & \text{sobre } R_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon \cdot n + k(u^\varepsilon - g) = 0 & \text{sobre } P, \\ \{u^\varepsilon, p^\varepsilon\} & \text{periódica en } x', \text{ de período } (\ell_1, \ell_2), \end{cases} \quad (21)$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad del fluido.

La influencia de la rugosidad viene medida por el arrastre (resistencia al avance del fluido) asociado a \mathcal{R}_ε , que se define como

$$T_\varepsilon = -g \cdot \int_{R_\varepsilon} \sigma_\varepsilon \cdot n \, d\Gamma = g \cdot \int_{R_\varepsilon} ku^\varepsilon \, d\Gamma. \quad (22)$$

Es decir, T_ε es la proyección de la componente normal de los esfuerzos ejercidos por el fluido sobre \mathcal{R}_ε en la dirección $-g$.

Después de demostrar la existencia y unicidad de solución de (21), la cuestión interesante consiste en averiguar qué ocurre con u^ε , p^ε y T_ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cuando se consideran condiciones de Dirichlet sobre R_ε y P , el efecto de la rugosidad es despreciable. En otras palabras, la velocidad, la presión y el arrastre asociados a \mathcal{R}_ε convergen a los que corresponden a un fluido que se mueve en un dominio análogo sin asperezas.

En nuestro caso, en presencia de condiciones de Fourier, el campo de velocidades y la presión correspondientes a un dominio sin asperezas están determinados por el sistema

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = 0, & \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \sigma \cdot n + ku = 0 & & \text{sobre } R, \\ \sigma \cdot n + k(u - g) = 0 & & \text{sobre } P, \\ \{u, p\} & \text{periódica en } x', & \text{de período } (\ell_1, \ell_2). \end{cases} \quad (23)$$

Aquí, hemos introducido la notación

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_i < \ell_i, \quad i = 1, 2; \quad 0 < x_3 < r(x')\}$$

y

$$R = \partial\Omega \cap \{x_3 = r(x')\}.$$

Sin embargo, en nuestra situación, u^ε , p^ε y T_ε convergen, en un sentido apropiado, respectivamente a u^0 , p^0 y T_0 . El par $\{u^0, p^0\}$ está determinado por ser solución del problema límite o *problema homogeneizado*

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_0 + \nabla p^0 = 0, & \nabla \cdot u^0 = 0 & \text{en } \Omega, \\ \sigma^0 \cdot n + K(x')u^0 = 0 & & \text{sobre } R, \\ \sigma^0 \cdot n + k(u^0 - g) = 0 & & \text{sobre } P, \\ \{u^0, p^0\} & \text{periódica en } x', & \text{de período } (\ell_1, \ell_2), \end{cases} \quad (24)$$

donde $\sigma^0 = -p^0 \text{Id.} + \nu D u^0$ y T_0 es el arrastre asociado:

$$T_0 = -g \cdot \int_R \sigma^0 \cdot n \, ds = g \cdot \int_R K(x') u^0(x', r(x')) \, d\Gamma(x').$$

En (24), el coeficiente de fricción homogeneizado K es diferente de k . En realidad, se trata de k multiplicado por un coeficiente amplificador que varía con x' y está relacionado con la geometría de la rugosidad. Se puede probar rigurosamente que, en el caso particular en que \mathcal{R}_ε viene dado por un plano con asperezas, i.e. $r(x') \equiv \ell_3$ y η es independiente de x' , T_0 es estrictamente mayor que el arrastre T asociado a la solución de (23). Este fenómeno (semicontinuidad inferior de T_ε respecto de ε) está de acuerdo con la experiencia.

Las cuestiones que quedan pendientes en este tema son las siguientes:

- Como ya hemos mencionado, se ha de estudiar el caso en que las condiciones de contorno son como en (20). En esta situación, somos

capaces de hallar la solución al problema análogo a (21) e incluso obtener estimaciones uniformes para las funciones u^ε y p^ε en los espacios de energía habituales. Pero, por el momento, no está claro del todo hacia qué funciones convergen.

- En el caso particular de una placa, parece factible obtener expresiones asintóticas de u^ε , p^ε y T_ε de tipo Saint-Venant, con errores exponencialmente pequeños. Pero esto queda aún por hacer con detalle.

3 Flujos de Poiseuille en un dominio cilíndrico para fluidos viscoelásticos de tipo Oldroyd

Existe una multitud de fluidos de gran interés práctico que pueden ser modelados por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos son llamados fluidos *Newtonianos* (el agua, el aire). Sin embargo, algunas experiencias demuestran que existen fluidos de otro tipo que no pueden ser modelados mediante dichas ecuaciones. Son los llamados fluidos *no Newtonianos* (las tintas, los detergentes líquidos, los champús, la sangre, etc.).

La descripción matemática del comportamiento dinámico de un fluido se hace utilizando las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, que se obtienen a partir de las leyes de conservación de la masa y la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 && \text{(ecuación de continuidad),} \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) &= \nabla \cdot \sigma + \rho f && \text{(ecuación de movimiento).}\end{aligned}$$

Aquí, ρ es la densidad del fluido, u es el campo de velocidades, σ es el tensor de esfuerzos y f es un dato que determina los esfuerzos exteriores que actúan sobre el fluido. Supondremos en esta sección que estamos en presencia de un fluido incompresible y homogéneo. Más precisamente, supondremos que $\rho \equiv 1$ y que se verifica la condición de incompresibilidad:

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Obviamente, el sistema formado por las ecuaciones anteriores no es suficiente para describir el comportamiento del movimiento del fluido, puesto que tenemos más incógnitas que ecuaciones. Para completar la descripción (además de añadir condiciones iniciales y de contorno apropiadas), necesitamos relacionar el tensor σ con las otras variables, es decir, imponer una *ley constitutiva* para σ . Según sea la naturaleza del fluido, así será la ley constitutiva que determine σ .

El tensor de esfuerzos σ suele descomponerse en la forma

$$\sigma = -pId + \sigma^*,$$

donde p es la presión y σ^* es el *tensor de esfuerzos tangenciales*. En el caso de un fluido *Newtoniano*, se supone que σ^* depende linealmente de las derivadas parciales espaciales de las u_i . Esto es de hecho lo que hemos impuesto en (19). Más generalmente, si es posible modelar el fluido con una ley en virtud de la cual σ^* puede escribirse “explícitamente” en términos de ∇u , se dice que el fluido es *quasi-Newtoniano*. Ya hemos visto ejemplos de modelos para fluidos quasi-Newtonianos, (9) ó (10) pueden ser considerados como tales. No obstante, en otras ocasiones la única ley aceptable es una nueva ecuación para σ^* acoplada con las leyes de conservación. Esto ocurre, por ejemplo, con los fluidos *de tipo Oldroyd*.

El modelo diferencial de tipo Oldroyd sirve para describir el comportamiento de ciertos fluidos que poseen propiedades en parte características de los materiales elásticos y, en parte, de los fluidos viscosos; por ello, estos fluidos son llamados *viscoelásticos*. Estos fluidos poseen *memoria*, lo cual significa “grosso modo” que los esfuerzos que unas partículas ejercen sobre otras en un determinado instante t dependen no sólo del estado mecánico en t , sino también de lo ocurrido anteriormente.

En el modelo de Oldroyd, la ley constitutiva es

$$\sigma^* = 2\nu Du + \tau,$$

donde (de nuevo) ν es el coeficiente de viscosidad y τ es el *tensor de esfuerzos elásticos*, que está determinado por Du a través de la ecuación no escalar

$$\partial_t \tau + (u \cdot \nabla) \tau + g(\nabla u, \tau) + a\tau = 2bDu,$$

donde

$$g(\nabla u, \tau) = \tau \cdot W(u) - W(u) \cdot \tau - \alpha(Du \cdot \tau + \tau \cdot Du).$$

Aquí, a y b son constantes positivas, $W(u) = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u)$ es el *tensor de vorticidad* y $\alpha \in [-1, 1]$.

La mayor dificultad que presenta el análisis de las ecuaciones resultantes es que, salvo en el caso particular en que $\alpha = 0$, no se conoce hoy día una “energía” que permita obtener estimaciones “a priori” de las soluciones en sus espacios naturales. Así, en general tan sólo se saben probar resultados de existencia locales en tiempo, cf. [20] y [21]. Recientemente, P.L. Lions y N. Masmoudi

han conseguido probar la existencia de solución global en tiempo cuando $\alpha = 0$, cf. [24].

Nos ceñiremos aquí a una clase particular de movimiento paralelo donde no aparece esta dificultad. Concretamente, abordamos el estudio del flujo de Poiseuille para un fluido viscoelástico de tipo Oldroyd en el cilindro

$$\Omega(0, R) = \{(r, \varphi, z) : 0 < r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, z \in \mathbf{R}\}.$$

Imponiendo simetría axial, se puede llegar mediante una serie de simplificaciones [20], a que la velocidad del fluido v en la dirección z y ciertas combinaciones lineales σ_1 y σ_2 de las componentes del tensor de esfuerzos verifican el siguiente sistema en el abierto $(0, R) \times (0, T)$:

$$\partial_t v - \mu \frac{1}{r} (rv_r)_r = \frac{1}{r} (r\sigma_2)_r + f, \quad (25)$$

$$\partial_t \sigma_1 + a\sigma_1 = b\sigma_2 v_r, \quad (26)$$

$$\partial_t \sigma_2 + a\sigma_2 = cv_r - \sigma_1 v_r. \quad (27)$$

Ahora, v , σ_1 y σ_2 son funciones del tiempo t y del radio r de la sección del cilindro. La derivada respecto de r se ha denotado con el subíndice correspondiente; μ , a , b y c son constantes positivas dadas.

En [20], se han resuelto estas ecuaciones en el abierto

$$\{(r, t) : 0 < R_1 < r < R_2, 0 < t < T\},$$

completadas con condiciones de contorno de tipo Dirichlet para v sobre $r = R_1$ y $r = R_2$ y condiciones iniciales para v , σ_1 y σ_2 . Esto corresponde al flujo de Poiseuille de un fluido entre dos cilindros concéntricos.

En un reciente trabajo, se ha llevado a cabo una extensión de algunos resultados de [20] al caso en que hay un único cilindro. Aquí encontramos dos dificultades. Por un lado, puesto que r puede hacerse cero, no podemos acotar superiormente r^{-1} (los coeficientes degeneran cuando $r \rightarrow 0$). Por otro lado, no está claro qué condición de contorno debemos imponer para $r = 0$.

Llevando a cabo la formulación variacional en espacios de Sobolev con peso adecuado, somos capaces de demostrar existencia y unicidad de solución débil global en tiempo de (25)–(27). La ecuación (25) se verifica en sentido variacional, mientras que (26) y (27) lo hacen puntualmente c.p.d. Probamos también que, cuando los datos son más regulares, la solución es fuerte, es decir, (25) se verifica también puntualmente c.p.d. Todos estos resultados aparecen en [18].

En cuanto a las cuestiones que quedan pendientes en relación con este tema, indicaremos las siguientes:

- En primer lugar, se ha de plantear el caso más general posible de un flujo de Oldroyd con simetría axial, i.e. con una velocidad que depende, además, de la altura del cilindro: $v = v(t; r, z)$.
- En segundo lugar, cabe preguntarse si los argumentos que hemos utilizado son aplicables a otros fluidos visco-elásticos (generalizaciones de los modelos de Oldroyd, Giesekus, Phan Thien-Tanner, etc.).

Referencias

- [1] Y. AMIRAT, J. SIMON – *Influence de la rugosité en hydrodynamique linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 313–318, 1996.
- [2] Y. AMIRAT, J. SIMON – *Riblets and drag minimization*, Optimizations Methods in PDE's, S. Cox and I. Lasiecka eds., AMS, p. 9–17, 1997.
- [3] Y. AMIRAT, D. BRESCH, J. LEMOINE, J. SIMON – *Effect of rugosity on a flow governed by Navier-Stokes equations*, preprint, Univ. Blaise Pascal (Clermont-Ferrand), 1999.
- [4] Y. AMIRAT, B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA, J. SIMON – *The Stokes equations with Fourier boundary conditions on a wall with asperities*, Math. Models and Methods Appl. Sciences (aparecerá); cf. también *Effect de la rugosité sur un fluide laminaire avec conditions de Fourier*, C.R. Acad. Sci. Paris (aparecerá).
- [5] J. BARANGER, A. MIKELIĆ – *Stationary solutions to a quasi-Newtonian flow with viscous heating*, Math. Models and Methods Appl. Sciences, Vol. 5, No. 6 (1995), 725–738.
- [6] P. BENILAN, L. BOCCARDO, T. GALLOUËT, R. GARIEPY, M. PIERRE, J.L. VÁZQUEZ – *An L^1 -theory of existence and uniqueness of solution of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22 No. 2, p. 240–273, 1995.
- [7] D. BLANCHARD, F. MURAT – *Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data: Existence and uniqueness*, preprint 1998.
- [8] D. BLANCHARD, H. REDWANE – *Renormalized solutions for a class of nonlinear evolution problems*, J. Math. Pures Appl. (aparecerá); cf. también C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 831–835, 1994.

- [9] L. BOCCARDO, T. GALLOUËT – *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. 87, 1989, p. 149–169.
- [10] L. BOCCARDO, J.I. DÍAZ, D. GIACHETTI, F. MURAT – *Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation*, “Recent Advances in Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems”, P. Benilan et al. eds., Pitman Research Notes in Math., 208, Longman, Harlow 1989.
- [11] P. BRADSHAW – *The understanding and prediction of turbulent flow*, Aeronautical J., july 1972, p. 403–418.
- [12] G.A. CHECHKIN, A. FRIEDMAN, A.L. PIANITSKI – *Boundary value problems in domains with rapidly oscillating boundary with large height of “cogs”*, preprint 1996.
- [13] B. CLIMENT – Tesis, Universidad de Sevilla, 1996.
- [14] B. CLIMENT, – *Existence of weak-renormalized solution for nonlinear system*, preprint 1999.
- [15] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Existence and uniqueness results for a coupled problem related to the stationary Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl., t. 76 - No. 4, pp. 307–319, 1997.
- [16] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Resultados de existencia y unicidad de solución para algunos sistemas acoplados con origen en Mecánica de Fluidos*, Actas de la Jornada Científica en Homenaje al Prof. Antonio Valle, Sevilla 1997.
- [17] B. CLIMENT, E. FERNÁNDEZ-CARA – *Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier-Stokes kind*, Math. Models and Methods Appl. Sciences, Vol. 8, No. 4, pp. 603–622, 1998.
- [18] B. CLIMENT, F. GUILLÉN – *Global solutions for the Poiseuille flow of Oldroyd type in 3D domains*, preprint.
- [19] R. DI PERNA, P.L. LIONS – *On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability*, Annals of Math. (2) 130 (1989), No. 2, p. 321–366.
- [20] E. FERNÁNDEZ-CARA, F. GUILLEN, R.R. ORTEGA – *Some theoretical results concerning Non-Newtonian fluids of the Oldroyd kind*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), Vol. XXVI, p. 1–29, 1998; cf. también

Mathematical Modeling and Analysis of Viscoelastic Fluids of the Oldroyd Kind, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, Amsterdam (aparecerá).

- [21] C. GUILLOPÉ AND J.-C. SAUT,– *Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law*, Nonlinear Analysis, T M & A, Vol. 15, No. 9, p. 849–869, 1990.
- [22] B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING – *Mathematical models of turbulence*, Academic Press , London 1972.
- [23] R. LEWANDOWSKI – *Les équations de Stokes et de Navier-Stokes couplées avec l'équation de l'énergie cinétique turbulente*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 381, Série I, p. 1097–1102, 1994.
- [24] P.L. LIONS, N. MASMOUDI – *Global solutions for some Oldroyd models of non-newtonian flows*, Chin. Ann. of Math. 21 B 2, p. 131–146, 2000.
- [25] F. MURAT – *Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales*, Research Report R93023, LAN, University Paris VI, 1993.
- [26] M. NALLASAMY – *Turbulence models and their applications to the prediction of turbulent flows*, Computers & Fluids, Vol. 15, No. 2, p. 151–194, 1987.
- [27] O.A. OLEINIK, A.S. SHAMAEV, G.A. YOSIFIAN – *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam 1992.
- [28] M. RENARDY, W.J. HRUSA, J.A. NOHEL– *Mathematical problems in viscoelasticity* , Longman Scientific & Technical, New York 1987.
- [29] W.C. REYNOLDS – *Computation of turbulent flows*, Annual Reviews (1976), p. 183–207.
- [30] E. SANCHEZ-PALENCIA – *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lectures Notes in Physics no. 127, Spriger-Verlag, Berlin 1980.

Análisis y Control Óptimo de Sistemas Elípticos que surgen en Dinámica de Poblaciones

ANTONIO CAÑADA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD DE GRANADA

e-mail: acanada@ugr.es

1. INTRODUCCIÓN.

¿Cuál es el objeto de la Matemática? ¿La Matemática es una Ciencia abstracta o aplicada, o ambas cosas? Si es que se pudiese hablar de Matemática Pura y Matemática Aplicada, ¿Cómo se distingue una de otra? Sin duda, estas son cuestiones de las llamadas, en términos matemáticos, “indecidibles”, que han animado en no pocas ocasiones las charlas de café de los matemáticos y de todos aquellos que se interesan por las cuestiones científicas. Sería suficiente leer con un mínimo de reflexión algún buen tratado de Historia de la Matemática (por ejemplo [24]), para darse cuenta de que, muchas veces, el origen del conocimiento matemático se encuentra en el intento de explicar fenómenos concretos de la Naturaleza. En otras numerosas ocasiones, los matemáticos han inventado nuevos problemas, a partir de otros más sencillos que ya habían sido resueltos. Por ejemplo, hablando sobre el tema de los métodos de Fourier, la curiosidad científica por explicar fenómenos de tipo vibratorio (como el problema de la cuerda vibrante) o de difusión del calor, fue lo que motivó a D. Bernouilli y a J. Fourier a crear lo que se llamó posteriormente la teoría de Series de Fourier, que ha tenido una gran influencia en el desarrollo de muchos temas abstractos, como la Teoría de Conjuntos, la Teoría de Integración y Medida, Operadores definidos en espacios de dimensión infinita, etc. ([9], [19]). Recíprocamente, la creación de la teoría abstracta de espacios normados y de Hilbert de dimensión infinita

Este trabajo ha sido sufragado en parte por la Dirección General de Enseñanza Superior, DGES, Ministerio de Educación y Cultura, proyecto PB98-1343 y por la Junta de Andalucía (FQM116). Quiero mostrar mi agradecimiento al profesor O. Arino por sugerir el estudio del modelo aquí considerado al grupo de investigación que sobre estos problemas existe en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada. Al profesor J. A. Montero quiero agradecerle la lectura detallada de este artículo y sus críticas y comentarios constructivos. Por último, mi agradecimiento a José Luis Cruz Soto, por haberme animado a elaborar esta colaboración para el Boletín de SEMA

y, en general, el desarrollo del Análisis Funcional y de métodos abstractos y generales en Análisis, ha permitido ver con mucha más claridad cuáles son las verdaderas y tremendas posibilidades de aplicación de los métodos de Fourier en problemas concretos, de gran interés en las aplicaciones, pero aparentemente muy distintos ([7], [20], [35], [41], [46]).

Debe ponerse también de manifiesto que el abanico de aplicaciones de la Matemática tuvo una tremenda expansión a partir de mediados del siglo XX, lo que ha llevado consigo la creación, entre otros hechos, de diversas Sociedades de Matemática Aplicada, como la nuestra, donde aquellos matemáticos cuya motivación principal para el estudio de nuevos problemas son las posibles aplicaciones de sus resultados, han encontrado el ambiente y apoyo adecuados para el desarrollo de su labor. El esfuerzo desarrollado por tales entidades, en el sentido de intentar mostrar de cara a la sociedad en general la utilidad de la Matemática, está teniendo un efecto importante en orden a poner de manifiesto la importancia y carácter imprescindible de la Matemática en el conocimiento científico ([4], [6]). Ahora bien, no cabe ninguna duda de que el verdadero matemático es básicamente vocacional, y que, aunque el estudio de un problema concreto motive su interés, una vez que ha comenzado a tratarlo se interesará por todos aquellos aspectos del mismo que despierten su curiosidad, sin preocuparle lo más mínimo las posibles aplicaciones.

En este trabajo vamos a hablar de Dinámica de Poblaciones y Teoría de Control Óptimo, dos campos de gran interés en la investigación matemática actual ([8]). Desde los trabajos pioneros de V. Volterra ([45]) y A.J. Lotka ([34]), en Dinámica de Poblaciones se han planteado numerosos interrogantes que han exigido la elaboración de modelos matemáticos adecuados para intentar darles una explicación, lo que ha motivado la creación y desarrollo de técnicas matemáticas abstractas, de interés general ([39], [40]). También, la Teoría de Control Óptimo, nacida en los años cincuenta del siglo XX y que estuvo motivada por el estudio de problemas en Industria e Ingeniería, ha contribuido, por una parte a mostrar la gran utilidad de la Matemática en procesos de optimización, y por otra al enorme desarrollo de los métodos abstractos del Análisis Funcional no Lineal y de aproximación numérica([5], [28], [31]).

De manera más precisa, en este artículo describimos algunos problemas concretos que surgen en Dinámica de Poblaciones y que originan el estudio de un problema de Control Óptimo para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico no lineales. Nuestro sistema es un modelo para el estudio de las situaciones de equilibrio de la evolución en el tiempo de dos subpoblaciones de una misma especie que conviven en una región dada, formadas respectivamente por jóvenes y adultos. Suponiendo que tenemos la posibilidad

de cosechar, en alguna proporción variable, parte de las subpoblaciones dadas y consecuentemente, influir en el crecimiento de las mismas, se trataría de estudiar cómo ha de hacerse la citada cosecha para tener un rendimiento máximo como producto de la venta.

Como veremos, el uso de diversos resultados teóricos, desarrollados para ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico (el principio del máximo-mínimo, el método de soluciones superiores e inferiores, la teoría abstracta de existencia, unicidad y regularidad de soluciones para el caso lineal, etc.), así como el uso de técnicas de Análisis Funcional lineal y no lineal (teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert, operadores convexos en espacios de Banach ordenados, teoremas de punto fijo en dimensión infinita, etc.), hacen posible un estudio adecuado del problema planteado.

En el apartado segundo de este trabajo presentamos detalladamente cuál es el problema a tratar y describimos el modelo matemático que se ha elaborado para su estudio. En los dos siguientes llevamos a cabo su análisis y control óptimo. Las demostraciones detalladas de los resultados novedosos que aquí se exponen pueden verse en [15].

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y MODELIZACIÓN DEL MISMO.

En esta sección presentamos el problema a considerar y deducimos un modelo para su estudio. Obviamente la discusión es informal, y no establecemos hipótesis precisas cuando, por ejemplo, derivemos o integremos una función. Ello se hará en las dos secciones siguientes.

Supongamos que dos subpoblaciones de una misma especie, por ejemplo adultos y jóvenes, habitan en una región D del espacio y que cada una de estas subpoblaciones influye, de una forma concreta que determinaremos más adelante, en el crecimiento de la otra. Representemos por $u(x, t)$ y $v(x, t)$, respectivamente, las densidades de las poblaciones de adultos y jóvenes en el punto x de D y en el tiempo t . Sea Ω un subconjunto arbitrario de D .

Asumamos, por el momento y por hacer la discusión más simple, que el índice de crecimiento de la población u en Ω , respecto del tiempo t es proporcional al flujo de u a través de la frontera de Ω . Entonces, puesto que la población total de adultos en Ω , para el tiempo t , viene dada por la expresión $\int_{\Omega} u(x, t) dx$ (o una proporcional a ella), se tendría

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} \langle \varphi(s, t), n(s) \rangle ds \quad (2.1)$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera topológica de Ω , la integral que aparece en la parte derecha de la relación anterior es una integral de superficie y $n(s)$ es el vector

normal exterior a la superficie $\partial\Omega$ en el punto s . Por su parte, la función φ representa el flujo de la población u . La expresión anterior es una ley de conservación, expresada en forma integral. Es muy conveniente pasar a una forma diferencial, por ser ésta más tratable desde el punto de vista matemático. ([32], [43]).

Usando el Teorema de la divergencia, podemos expresar la integral de superficie anterior como una integral de volumen, mediante la expresión

$$\int_{\partial\Omega} \langle \varphi(s, t), n(s) \rangle ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}_x \varphi(x, t) dx$$

donde $\operatorname{div}_x \varphi(x, t)$ es la divergencia, respecto de la variable x , del flujo φ . En suma, se tiene

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \operatorname{div}_x \varphi(x, t) \right] dx = 0.$$

Como Ω es arbitrario, si u_t expresa la derivada parcial de u respecto de la variable t , llegamos a la ecuación

$$u_t(x, t) + \operatorname{div}_x \varphi(x, t) = 0, \quad \forall x \in D, \quad \forall t > 0, \quad (2.2)$$

que es una ley de conservación dada por una Ecuación en Derivadas Parciales. Las leyes de conservación, tanto en forma integral, como en forma diferencial juegan un papel fundamental en la explicación de numerosos fenómenos naturales (ver ([32], [33], [43] y sobre todo [42]).

Es lógico pensar que en la mayoría de las situaciones hay una relación entre u y φ . En el caso más simple posible, la llamada ley del fisiólogo Fick relaciona, de manera proporcional, el flujo de población desde las partes con más densidad a las de menos, con la tasa de variación de la población respecto de la variable espacial x (véase [10] para más detalles). Matemáticamente, esto se expresa como

$$\varphi(x, t) = -\alpha \nabla_x u(x, t) \quad (2.3)$$

donde $\nabla_x u(x, t)$ es el vector gradiente de u , respecto de x y α es una constante de proporcionalidad que depende de la situación particular tratada.

Sustituyendo (2.3) en (2.2), obtendríamos la llamada Ecuación de la Difusión (lineal)

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta_x u(x, t) = 0,$$

donde Δ_x es el operador Laplaciano, respecto de x .

Recordemos que en la deducción de la ecuación anterior, habíamos supuesto, momentáneamente, que el índice de crecimiento de la población u , respecto del tiempo t es proporcional al flujo de u a través de la frontera de Ω . En nuestro problema, esto es un poco más complicado. Dicho índice depende

no sólo del flujo de población a través de la frontera de Ω , sino también de otros factores, que pueden deberse a la misma subpoblación u , a v (puesto que ambas subpoblaciones se influyen mutuamente en su crecimiento) e incluso a condiciones ambientales que varían en general con el tiempo t y con la variable espacial x ([40]). Si estas ideas se incorporan en la relación (2.1), obtendríamos al final una ecuación del tipo

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta_x u(x, t) = f(x, t, u, v).$$

Un razonamiento análogo permite concluir que la función v verifica una ecuación de la forma

$$v_t(x, t) - \beta \Delta_x v(x, t) = g(x, t, u, v).$$

A modo de resumen, en la deducción de las ecuaciones anteriores, hemos aplicado dos tipos de leyes fundamentales: una ley de conservación, aplicada al índice de crecimiento de la población y la ley de Fick, que relaciona, de manera lineal, el flujo de la población con el índice de variación de la misma respecto de la variable espacial.

Las funciones f y g pueden ser de forma muy diversa, puesto que ello depende de los factores que se tengan en cuenta. Obviamente, si se tienen en cuenta más factores el modelo será más realista, pero puede ocurrir que dicho modelo sea intratable desde el punto de vista matemático. Esto es un problema que se plantea siempre en el tema de la modelización matemática ([17], [22], [29], [30], [39], [40]). En nuestro caso y concentrándonos en la población u , suponemos además de lo ya dicho, que sobre el crecimiento de la misma influye:

1. De manera positiva y proporcional, la población v (recordemos que u y v representan, respectivamente, las subpoblaciones de adultos y jóvenes, de una única especie) puesto que lo usual es que los jóvenes se transformen en adultos.
2. De manera negativa, la competición, entre los individuos de la misma subpoblación u por el alimento.
3. De manera negativa la competición por el alimento derivada de la interacción entre las subpoblaciones u y v .

Si suponemos, además, que se cosecha parte de la subpoblación u , con objeto de mejorar quizás la calidad de la misma, y obtener más beneficio en la venta posterior, llegamos a una ecuación de la forma

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta_x u(x, t) = a(x, t)v(x, t) - c(x, t)u(x, t) - e(x, t)u(x, t)(u(x, t) + v(x, t))$$

donde los coeficientes, a, c y e reflejan, respectivamente la tasa de individuos jóvenes que llegan a ser adultos, la proporción de cosecha de u y la competición por el alimento, tanto de los individuos de la supopoblación u consigo mismos, como del resultado de la interacción con los individuos de la subpoblación v .

Realizando consideraciones análogas sobre v , llegaríamos a un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \alpha \Delta_x u(x, t) &= a(x, t)v(x, t) - c(x, t)u(x, t) - e(x, t)u(x, t)(u(x, t) + v(x, t)), \\ v_t(x, t) - \beta \Delta_x v(x, t) &= b(x, t)u(x, t) - d(x, t)v(x, t) - f(x, t)v(x, t)(u(x, t) + v(x, t)). \end{aligned}$$

que es un sistema de Ecuaciones en Derivadas Parciales no lineales del tipo reacción-difusión ([32], [33], [43]).

Un caso de particular interés es aquél en el que los coeficientes que aparecen en el sistema anterior no dependen del tiempo t . Entonces, las soluciones de equilibrio son de especial importancia. En primer lugar, porque en Dinámica de Poblaciones esto se puede interpretar como que los individuos de las dos subpoblaciones llegan a convivir en una cierta armonía y su número se mantiene invariante respecto del tiempo. En segundo lugar, suele ocurrir que las soluciones del problema de evolución tienden, cuando el tiempo diverge positivamente, a alguna solución de equilibrio ([43]). En nuestro caso, el problema estacionario correspondiente es

$$\begin{aligned} -\alpha \Delta u(x) &= a(x)v(x) - c(x)u(x) - e(x)u(x)(u(x) + v(x)), \\ -\beta \Delta v(x) &= b(x)u(x) - d(x)v(x) - f(x)v(x)(u(x) + v(x)). \end{aligned}$$

Al ser el sistema anterior un sistema de tipo elíptico, parece lógico considerar un problema de contorno asociado. Podemos suponer, por ejemplo, que en la frontera de un determinado dominio Ω , no hay individuos ni de u ni de v . Llegamos así al problema

$$\begin{aligned} -\alpha \Delta u(x) &= a(x)v(x) - c(x)u(x) - e(x)u(x)(u(x) + v(x)), \quad x \in \Omega, \\ -\beta \Delta v(x) &= b(x)u(x) - d(x)v(x) - f(x)v(x)(u(x) + v(x)), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como ya hemos mencionado, los coeficientes c y d hacen el papel de control. Bajo condiciones que serán establecidas de manera precisa en la próxima sección, veremos que, para cada par de funciones (c, d) , en un cierto espacio de controles, el sistema anterior tiene un único estado de coexistencia $(u_{c,d}, v_{c,d})$ (una solución con ambas componentes no negativas y no triviales). Si vendemos el producto obtenido, tendremos un beneficio $J(c, d)$, que vendrá dado por un funcional que dependerá, en general, de $c, d, u_{c,d}$ y $v_{c,d}$. Una expresión que ha sido utilizada por diversos autores, en problemas similares de control y que expresa la diferencia entre el beneficio obtenido y el coste del control es

$$J(c, d) = \int_{\Omega} [\lambda u_{c,d}(x)c(x) - c^2(x) + \mu v_{c,d}(x)d(x) - d^2(x)] \, dx \quad (2.5)$$

donde λ y μ son constantes positivas ([3], [14], [26], [27]). En definitiva, obtenemos el problema de control óptimo

$$-\alpha\Delta u(x) = a(x)v(x) - c(x)u(x) - e(x)u(x)(u(x) + v(x)), \quad x \in \Omega, \quad (c, d) \in A,$$

$$-\beta\Delta v(x) = b(x)u(x) - d(x)v(x) - f(x)v(x)(u(x) + v(x)), \quad x \in \Omega, \quad (c, d) \in A,$$

$$u(x) = v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$J(g, h) = \max_{(c,d) \in A} J(c, d),$$

$$J(c, d) = \int_{\Omega} [\lambda u_{c,d}(x)c(x) - c^2(x) + \mu v_{c,d}(x)d(x) - d^2(x)] \, dx \quad (2.6)$$

donde A es el espacio de controles.

Este problema de control (ver [25] para el correspondiente problema de evolución) será estudiado en las dos secciones que siguen, bajo restricciones adecuadas sobre Ω , los coeficientes a, b, c, d, e y f , y el conjunto A .

3. ANÁLISIS DEL MODELO.

Por simplicidad en los razonamientos y exposición, trataremos con un caso particular de (2.4) donde $\alpha = \beta = 1$ y las funciones e y f son constantes:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= a(x)v(x) - c(x)u(x) - eu(x)(u(x) + v(x)), \quad x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= b(x)u(x) - d(x)v(x) - fv(x)(u(x) + v(x)), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

En esta sección nos ocupamos del problema de la existencia y posible unicidad de estados de coexistencia de (3.1). Para ello, en adelante suponemos el siguiente conjunto de hipótesis

$$[\mathbf{H1}] \quad \begin{aligned} &\Omega \text{ es un dominio acotado y regular de } \mathbb{R}^n, \\ &a, b, c, d \in L_+^\infty(\Omega), \quad e, f \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

donde $L_+^\infty(\Omega) = \{g \in L^\infty(\Omega) : g \geq 0\}$.

Una solución (débil) de (3.1) es cualquier par de funciones $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual), que verifican

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} [a(x)v(x) - c(x)u(x) - eu(x)(u(x) + v(x))] \varphi(x) \, dx,$$

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \nabla \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} [b(x)u(x) - d(x)v(x) - fv(x)(u(x) + v(x))] \varphi(x) \, dx,$$

para cualquier $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Es conocido que cualquier solución débil (u, v) de (3.1) pertenece al espacio de Hölder $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para todo $\alpha \in (0, 1)$

([18]). Un estado de coexistencia de (3.1) es una solución del mismo tal que ambas componentes son no negativas y no triviales.

El Teorema que sigue (probado detalladamente en [15]), proporciona bajo hipótesis amplias y razonables, desde el punto de vista de la interpretación biológica de (3.1), la existencia y unicidad de estados de coexistencia de (3.1). Respecto de la notación utilizada, para cada función $q \in L^\infty(\Omega)$, $\rho_1(q)$ es el valor propio principal del problema de valores propios

$$\begin{aligned} -\Delta u + qu &= \rho u, \text{ en } \Omega, \\ u &= 0, \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

También, \underline{q} y \bar{q} denotan, respectivamente, el ínfimo esencial y supremo esencial de q en Ω .

TEOREMA 3.1. Sean $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$, números positivos dados. Supongamos [H1] y

$$[\mathbf{H2}] \quad \underline{a} \underline{b} > \rho_1(\delta_1)\rho_1(\delta_2), \quad \bar{a} \leq \underline{a}(1 + \Gamma), \quad \bar{b} \leq \underline{b}(1 + \Gamma^{-1}),$$

$$\text{donde } \Gamma = \frac{af}{be}.$$

Entonces, para cada $(c, d) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ ($C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} = \{(p, q) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) : 0 \leq p \leq \delta_1, 0 \leq q \leq \delta_2\}$), existe un único estado de coexistencia (u, v) de (3.1). Además, $(u, v) \in [0, \frac{a}{e}]_{L^\infty(\Omega)} \times [0, \frac{b}{f}]_{L^\infty(\Omega)}$.

NOTA. Observemos que las hipótesis que establecemos son por una parte que la cantidad $\underline{a} \underline{b}$ sea más grande que una constante positiva que depende de δ_1 , δ_2 y Ω ; por otra, ambas constantes, \bar{a} y \bar{b} , deben ser, respectivamente, más pequeñas que otras dos constantes positivas que dependen de $\underline{a}, \underline{b}, e$ y f .

Principales ideas de la demostración.

La existencia de estados de coexistencia está basada en el método de soluciones superiores e inferiores para sistemas de ecuaciones de tipo elíptico. De hecho, si $\varphi_1(0)$ es la función propia positiva asociada a $\rho_1(0)$ tal que $\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, las funciones

$$u_* = \nu\tau\varphi_1(0), \quad u^* = \frac{a}{e}, \quad v_* = \tau\varphi_1(0), \quad v^* = \frac{b}{f},$$

constituyen un sistema de soluciones superiores-inferiores para (3.1), donde

$$\frac{\rho_1(\delta_2)}{\underline{b}} < \nu < \frac{a}{\rho_1(\delta_1)}$$

y τ es un número real positivo suficientemente pequeño. En efecto, es sencillo comprobar que dichas funciones satisfacen

$$-\Delta u^* \geq a(x)v(x) - c(x)u^* - eu^*(u^* + v) \quad (3.2)$$

para cada $v \in [v_*, v^*]$,

$$-\Delta u_* \leq a(x)v(x) - c(x)u_* - eu_*(u_* + v) \quad (3.3)$$

para cada $v \in [v_*, v^*]$,

$$-\Delta v^* \geq b(x)u - d(x)v^* - fv^*(u + v^*) \quad (3.4)$$

para cada $u \in [u_*, u^*]$, and

$$-\Delta v_* \leq b(x)u - d(x)v_* - fv_*(u + v_*) \quad (3.5)$$

para cada $u \in [u_*, u^*]$.

Las relaciones (3.2)-(3.5) y el Teorema 2.3 de [12] permiten concluir, mediante la aplicación del Teorema del punto fijo de Schauder, que (3.1) tiene al menos un estado de coexistencia (u, v) que pertenece al producto de intervalos (en $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$) $[u_*, u^*] \times [v_*, v^*]$ (véase también [23] para el caso de soluciones clásicas).

La demostración de la unicidad de estados de coexistencia de (3.1) es bastante más delicada y curiosa. Básicamente consiste en establecer una equivalencia, vía el estudio de cada ecuación de (3.1) por separado, entre el conjunto de los estados de coexistencia de (3.1) y los puntos fijos de un operador que, en un adecuado subconjunto de un espacio de Banach ordenado, es estrictamente convexo. Vamos a tratar de exponerlo de manera relativamente sencilla.

En primer lugar, para cada $v \in C(\bar{\Omega})$ (funciones continuas en $\bar{\Omega}$), con $0 \leq v \leq \frac{b}{f}$, el problema (escalar) de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta u &= a(x)v - c(x)u - eu(u + v), & \text{en } \Omega, \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

tiene una única solución débil no negativa $P(v)$, que por teoría de regularidad pertenece al espacio $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0, 1)$. De hecho, puede comprobarse fácilmente que las funciones $u_* = 0$, $u^* = \frac{a}{\epsilon}$ son, respectivamente, una solución inferior y una solución superior para (3.6). Entonces, podemos aplicar el Teorema 1 de [13] (ver también [1] para el caso clásico), para concluir la existencia de funciones $w_* \leq w^*$ que son, respectivamente, solución maximal y solución minimal de (3.6) en el intervalo $[u_*, u^*]$. Ahora bien, una comprobación elemental prueba que

$$-\Delta(w^* - w_*) + ev(w^* - w_*) \leq 0.$$

Por tanto, el principio del máximo implica $w^* \leq w_*$ y consecuentemente $w^* = w_*$. Es conocido ([1]) que esto implica la unicidad de soluciones de (3.6) en el intervalo $[u_*, u^*]$. Pero observemos que en lugar de u^* , podemos tomar como solución superior de (3.6) cualquier constante positiva suficientemente grande. Además, por teoría de regularidad, cualquier solución débil de (3.6) que sea no negativa debe estar acotada. Estos razonamientos permiten concluir, dada la función continua v en el intervalo $[0, \frac{b}{f}]$, la unicidad de soluciones no negativas de (3.6). Recordemos que notamos por $P(v)$ a dicha solución.

Diferentes aplicaciones del principio del máximo implican, además, que $v \equiv 0 \Leftrightarrow P(v) \equiv 0$ y que si $v \neq 0$ y $t \in (0, 1)$, entonces $P(tv) - tP(v) > 0$ en Ω . La demostración de esta última desigualdad se basa en el hecho de que la función $tP(v)$ es una subsolución estricta de (3.6) para la función tv (en lugar de v). Finalmente, puede probarse que P es un operador monótono; es decir, $v_2 \geq v_1$ implica $P(v_2) \geq P(v_1)$.

Resultados análogos pueden obtenerse para la segunda ecuación del sistema (3.1). Tenemos así definido un operador $Q(u)$, con propiedades análogas al operador $P(v)$. Aquí, $Q(u)$ representa, para cada función $u \in C(\bar{\Omega})$ tal que $0 \leq u \leq \frac{a}{e}$, la única solución débil no negativa del problema

$$\begin{aligned} -\Delta v &= b(x)u - d(x)v - fv(u+v), & \text{en } \Omega, \\ v &= 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ahora puede probarse la unicidad de estados de coexistencia de (3.1) en el intervalo $[0, \frac{a}{e}] \times [0, \frac{b}{f}]$. Para ello, observemos que si (u, v) es un estado de coexistencia de (3.1) tal que $0 \leq u \leq \frac{a}{e}$, $0 \leq v \leq \frac{b}{f}$, entonces $u = P(v)$ y $v = Q(u)$. Por tanto $(QP)(v) = v$. Recíprocamente, si $v \in C(\bar{\Omega}) \setminus \{0\}$, satisface $0 \leq v \leq \frac{b}{f}$, y $(QP)(v) = v$, entonces el par $(P(v), v)$ es un estado de coexistencia para (3.1). Finalmente, si $v_i \in C(\bar{\Omega}) \setminus \{0\}$, $0 \leq v_i \leq \frac{b}{f}$, son tales que $(QP)(v_i) = v_i$, $i = 1, 2$, se sigue, del principio del máximo fuerte que existe un número positivo s tal que $v_1 \geq sv_2$ en Ω . Además, si s es cualquier número positivo tal que $v_1 > sv_2$ en Ω , debe existir $\epsilon > 0$ satisfaciendo $v_1 > (s + \epsilon)v_2$ en Ω (Lemma 5.3 de [2]). Si ahora definimos $s_0 = \sup \{s > 0 : v_1 \geq sv_2 \text{ en } \Omega\}$ y fuese $s_0 < 1$, se tendría

$$v_1 = (QP)(v_1) \geq (QP)(s_0v_2) \geq Q(s_0P(v_2)) > s_0(QP)(v_2) = s_0v_2, \text{ en } \Omega,$$

que contradice la definición de s_0 . Por tanto, $s_0 \geq 1$ y $v_1 \geq v_2$ en Ω . Es claro que análogamente puede probarse que $v_1 \leq v_2$.

La última parte de la demostración de la unicidad de estados de coexistencia

para (3.1), consiste en probar que, curiosamente, cualquier estado de coexistencia (u, v) de (3.1) verifica $0 \leq u \leq \frac{a}{e}$, $0 \leq v \leq \frac{b}{f}$. Para ello se usan ideas similares a las ya comentadas (véase [15]).

4. CONTROL DEL MODELO.

En la sección anterior hemos realizado un análisis del modelo que, al menos desde el punto de vista teórico, puede considerarse satisfactorio. Ahora bien, como ya hemos dicho, y debido a la interpretación biológica de (3.1), nuestro interés es que los coeficientes c y d hagan el papel de control con el objetivo de conseguir un beneficio máximo. Esto es lo que llevamos a cabo en esta sección. Dadas las constantes positivas δ_1 y δ_2 , nuestro espacio de controles admisibles va a ser

$$A = C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} = \{(c, d) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) : 0 \leq c \leq \delta_1, 0 \leq d \leq \delta_2\}.$$

Bajo las hipótesis [H1] y [H2], en la sección anterior hemos probado que cada par de funciones $(c, d) \in A$, el sistema (3.1) tiene un único estado de coexistencia $(u_{c,d}, v_{c,d})$. Nuestro objetivo ahora es maximizar, en el espacio de controles A definido anteriormente, el funcional

$$J(c, d) = \int_{\Omega} [\lambda u_{c,d}(x)c(x) - c^2(x) + \mu v_{c,d}(x)d(x) - d^2(x)] dx$$

donde λ y μ son constantes positivas dadas. Posteriormente, trataremos de caracterizar los controles óptimos en términos de un sistema de optimalidad. En toda esta sección asumimos las hipótesis [H1] y [H2].

La existencia de $\max_A J$ puede probarse sin ninguna dificultad. En efecto, puesto que tanto los controles admisibles como las soluciones de (3.1) están uniformemente acotados, independientemente de $(c, d) \in A$, si $\{(g_n, h_n)\}$ es cualquier sucesión maximizante, es decir, verificando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n, h_n) = \sup_{(g,h) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}} J(g, h)$$

y (u_n, v_n) es el único estado de coexistencia de (3.1) para $(c, d) = (g_n, h_n)$, entonces existe alguna subsucesión, denotada por simplicidad también como (g_n, h_n) , tal que

$$\begin{aligned} (g_n, h_n) &\rightharpoonup (g^*, h^*), \text{ débilmente en } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ (u_n, v_n) &\rightarrow (u, v), \text{ fuertemente en } H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Puede probarse entonces fácilmente que (u, v) es el único estado de coexistencia de (3.1) asociado con (g^*, h^*) . Por último, usando el hecho de que la norma

en $L^2(\Omega)$ es inferiormente semicontinua con respecto a la convergencia débil en $L^2(\Omega)$, y la definición de J , tenemos

$$J(g^*, h^*) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n, h_n) = \sup_{(g, h) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}} J(g, h).$$

Esto es, (g^*, h^*) maximiza J en $C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$.

En orden a obtener un sistema de optimalidad que caracterice los controles óptimos y permita obtener propiedades adicionales de los mismos, así como su posible aproximación numérica, es necesario estudiar previamente las propiedades de diferenciabilidad de las soluciones de (3.1) con respecto a los controles. Esto exige para un control dado $(c, d) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ y $(g, h) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ tal que $(c, d) + \beta(g, h) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ para $\beta > 0$ suficientemente pequeño, un estudio preciso de los cocientes

$$\xi_\beta = \frac{u_\beta - u}{\beta}, \quad \eta_\beta = \frac{v_\beta - v}{\beta},$$

donde (u, v) es el único estado de coexistencia de (3.1) para (c, d) y (u_β, v_β) el único estado de coexistencia de (3.1) para $(c + \beta g, d + \beta h)$. Como es usual en los problemas de control óptimo, la propiedad clave que hay que demostrar es que las funciones ξ_β, η_β están acotadas, independientemente de β . Esto puede llevarse a cabo usando un resultado sumamente interesante de Sweers ([44], Teorema 1.1) sobre unicidad de soluciones de ciertos sistemas elípticos. Concretamente, puede probarse que $(\xi_\beta, \eta_\beta) \rightarrow (\xi, \eta)$ en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, cuando $\beta \rightarrow 0^+$, donde (ξ, η) es la única solución del sistema lineal

$$\begin{aligned} -\Delta \xi + [c + e(2u + v)]\xi - (a - eu)\eta &= -gu, \quad \text{en } \Omega, \\ -\Delta \eta + [d + f(u + 2v)]\eta - (b - fv)\xi &= -hv, \quad \text{en } \Omega, \\ \xi = \eta = 0, &\quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Con la ayuda de este resultado, usando algunas propiedades de los operadores lineales y compactos en espacios de Banach, y razonamientos usuales en teoría de control (véase [15] para los detalles), puede probarse que si se verifican las hipótesis [H1] y [H2] y las constantes λ y μ son suficientemente pequeñas, entonces cualquier control óptimo $(c, d) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ puede expresarse en la forma

$$c = \frac{\lambda}{2}u(1 - r)^+, \quad d = \frac{\mu}{2}v(1 - s)^+,$$

donde (u, v, r, s) satisface el sistema de optimalidad

$$\begin{aligned} -\Delta u &= v(a - eu) - \frac{\lambda}{2}u^2(1 - r)^+ - eu^2, \\ -\Delta v &= u(b - fv) - \frac{\mu}{2}u^2(1 - s)^+ - fv^2, \\ -\Delta r + \left[\frac{\lambda}{2}u(1 - r)^+ + e(2u + v) \right] r - \frac{\mu}{\lambda}(b - fv)s &= \frac{\lambda}{2}u(1 - r)^+, \\ -\Delta s + \left[\frac{\mu}{2}v(1 - s)^+ + f(u + 2v) \right] s - \frac{\lambda}{\mu}(a - eu)r &= \frac{\mu}{2}v(1 - s)^+, \\ u > 0, v > 0 \text{ en } \Omega; u = v = r = s = 0, & \text{ en } \partial\Omega \end{aligned}$$

El sistema de optimalidad anterior puede usarse para deducir algunas propiedades cualitativas y cuantitativas de los controles óptimos. Por ejemplo, tales controles óptimos deben pertenecer al espacio $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$. Además, usando ideas similares a las de [3] y [14], puede probarse que el control óptimo es único si las constantes λ y μ son suficientemente pequeñas. Aquí, la idea básica es demostrar que el operador

$$T : C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} \rightarrow C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$$

definido como

$$T(c, d) = \left(\frac{\lambda}{2}u(1 - r), \frac{\mu}{2}v(1 - s) \right),$$

donde (u, v) es el único estado de coexistencia de (3.1) y (r, s) es la única solución del sistema adjunto

$$\begin{aligned} -\Delta r + [c + e(2u + v)]r - \frac{\mu}{\lambda}(b - fv)s &= c, \text{ en } \Omega, \\ -\Delta s + [d + f(u + 2v)]s - \frac{\lambda}{\mu}(a - eu)r &= d, \text{ en } \Omega, \\ r = s = 0, & \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

es contráctil. Además, en este caso es posible definir, a partir del método de soluciones superiores e inferiores para sistemas de ecuaciones, una sucesión de funciones que aproximan a tal control óptimo ([14]), aunque de manera muy teórica. De hecho, el tratamiento numérico de los problemas de control como el que aquí hemos tratado está aún por hacer (véanse, para problemas con algunas similitudes, [36], [37] y [38]).

5. NOTAS FINALES.

El uso de métodos de Control Óptimo en Dinámica de Poblaciones origina muchas cuestiones en la investigación actual. Por ejemplo, si nos centramos en el tipo de problemas que aquí hemos presentado, sería interesante el estudio de modelos como (2.6) con hipótesis más generales que las que hemos considerado. Por concretar más, podríamos considerar espacios de controles más amplios como $L^{\infty}_+(\Omega) \times L^{\infty}_+(\Omega)$ o $L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Omega)$, donde el espacio de controles admisibles no es necesariamente acotado. También parece lógico admitir que las funciones a y b no tengan necesariamente signo positivo en el dominio Ω , puesto que, por ejemplo refiriéndonos a la función a , en algunas partes de Ω puede ser beneficioso para los adultos la presencia de jóvenes (ya que suponemos que estos se transforman en adultos), pero en otras puede ser perjudicial (debido, por ejemplo, a la competición por el alimento). En estas generalizaciones, el primer problema serio que se plantea es el de las posibles cotas a priori de los estados de coexistencia para el sistema considerado.

Quizás una reflexión vendría bien aquí: si el problema que estudiamos modela alguna situación concreta de otras Ciencias, como Biología, Economía, Física, etc., es fácil proponer nuevos problemas de investigación. Basta repasar cuidadosamente las hipótesis y circunstancias bajo las que ha sido posible deducir el modelo, para tener nuevas cuestiones. No se trata de generalizar por generalizar, sino de considerar hipótesis más generales que son de interés teniendo en cuenta la interpretación del modelo.

La ley de Fick (2.3), que hemos usado en la deducción de nuestro modelo, asegura que el flujo de población es directamente proporcional, de manera negativa, al gradiente de la población respecto de la variable espacial. Esta ley se cumple en muchas situaciones; sin embargo, en otras es necesario suponer hipótesis más complicadas sobre el flujo, y su relación con el gradiente de población. Por ejemplo, puede ser $\varphi(x, t) = -D(x)\nabla_x u(x, t)$ o incluso podemos considerar casos donde la difusión no sea necesariamente lineal como $\varphi(x, t) = -|\nabla_x u(x, t)|^{p-2}\nabla_x u(x, t)$, con $p > 1$ ([11], [16], [21], [40]).

La modelización matemática y simulación numérica están teniendo una importancia creciente en Biología y por supuesto en otras muchas disciplinas. Es indiscutible en el ambiente científico la importancia de la Matemática en orden a la interpretación de datos y a la explicación de numerosos fenómenos naturales. Ahora bien, actualmente también existe una cierta tendencia a no considerar de interés la llamada Matemática Pura. ¿Qué podría yo haber contado en este trabajo sin el método abstracto y general de soluciones superiores e inferiores, sin

la teoría de existencia y unicidad de ecuaciones lineales elípticas en espacios de Sobolev, sin el Análisis Convexo? ¿Cuál sería la utilidad de la Matemática actual sin todas las técnicas y teorías abstractas desarrolladas por los matemáticos a lo largo de los siglos para dar explicación simplemente a cuestiones teóricas? ¿Qué sería de las técnicas de aproximación y simulación numérica sin el soporte teórico adecuado? ¿Cuál sería el papel actual de la Matemática en las aplicaciones sin la teoría abstracta de los espacios de dimensión infinita, el cálculo diferencial e integral para funciones abstractas, los métodos generales del Cálculo de Variaciones, etc.? No olvidemos tampoco el papel fundamental y a veces definitivo jugado por otras Ciencias y por los fenómenos naturales en la creación y desarrollo de la Matemática. Como se ve, acabo como comencé. Ya dije que estas cuestiones eran “indecidibles” (al menos para mí). Pero por favor, no demos a conocer lo que es la Matemática de manera mutilada e incorrecta, sin referencia a las motivaciones (siempre que ello sea posible) y a sus posibles aplicaciones. Quizás no convendría hablar de Matemática Pura o Aplicada, sino simplemente de Matemática en toda su extensión.

Bibliografía

- [1] H. AMANN, *On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., 21, 1971, 125-146.
- [2] H. AMANN, *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces*, J. Func. Anal., 11, 1972, 346-384.
- [3] O. ARINO Y J.A. MONTERO, *Optimal control of a nonlinear elliptic population system*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 43, 2000, 225-241.
- [4] V. ARNOLD, M. ATIYAH, P. LAX Y B. MAZUR (EDITORES), *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, American Mathematical Society, providence, RI, 1999.
- [5] V. BARBU, *Mathematical methods in Optimization of Differential Systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [6] J.P. BOURGUIGNON, *A basis for a new relationship between Mathematics and Society*, Systems of Conservation Laws: a Challenge for the XXIst Century. Mathematics Unlimited-2001 and Beyond B. Engquist y W. Schmid editores. Springer, Milan, 2001, 171-188
- [7] E.O. BRIGHAM, *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

- [8] R. BROCKETT, *New Issues in the Mathematics of Control*, Systems of Conservation Laws: a Challenge for the XXIst Century. Mathematics Unlimited-2001 and Beyond B. Engquist y W. Schmid editores. Springer, Milan, 2001, 189-220
- [9] A. CAÑADA, *Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos*, Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 3, 2, 2000, 293-320.
- [10] A. CAÑADA, *Control Óptimo en Dinámica de Poblaciones*, EMA, Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, 2000; aparecerá.
- [11] A. CAÑADA, P. DRÁBEK Y J.L. GÁMEZ, *Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion*, Transactions Amer.Math.Soc., 349, 1997, 4231-4249.
- [12] A. CAÑADA Y J.L. GÁMEZ, *Elliptic systems with nonlinear diffusion in Population Dynamics*, Diff. Equations and Dynamical Systems, 3, 1995, 189-204.
- [13] A. CAÑADA Y J.L. GÁMEZ, *Some new applications of the method of lower and upper solutions to elliptic problems*, Appl. Math. Letters, 6, 1993, 41-45.
- [14] A. CAÑADA, J.L. GÁMEZ Y J.A. MONTERO, *Study of an optimal control problem for diffusive nonlinear elliptic equations of logistic type*, SIAM J. Control and Opt., 36, 1998, 1171-1189.
- [15] A. CAÑADA, P. MAGAL Y J. A. MONTERO, *Optimal Control of harvesting in a Nonlinear Elliptic System arising from Population Dynamics*, J. Math. Anal. Appl., 254, 2001, 571-586.
- [16] M. DELGADO Y A. SUÁREZ, *Un problema de control óptimo para la ecuación logística con difusión no lineal*, EMA, Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla 2000; aparecerá.
- [17] L. EDELSTEIN-KESHET, *Mathematical models in Biology*, Random House, New York, 1988.
- [18] D. GILBARG Y N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order, second edition*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [19] E.A. GONZÁLEZ VELASCO, *Connections in Mathematical Analysis, the case of Fourier series*, Amer. Math. Monthly, 1992, 427-441.

- [20] E.A. GONZÁLEZ VELASCO, *Fourier Analysis and Boundary value problems*, Academic Press, San Diego, California, 1995.
- [21] M. E. GURTIN Y R.C. MACCAMY, *On the diffusion of biological populations*, *Mathematical Biosciences*, 33, 35-49, 1977.
- [22] R. HABERMAN, *Mathematical models: Mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [23] J. HERNÁNDEZ, *Qualitative methods for nonlinear diffusion equations*, En *Nonlinear Diffusion problems*, A. Fasano y M. Primicerio, editores. *Lec. Not. Math.*, 1224 (1986), 47-118..
- [24] M. KLINE, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972. Versión española de Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1992.
- [25] S. LENHART Y J.A. MONTERO, *Optimal control of harvesting in a parabolic system modelling two subpopulations*, Aparecerá en *M³AS, Math. Mod. and Methods. in Applied Sciences*.
- [26] A. LEUNG, *Optimal harvesting-coefficient control of steady-state Prey-Predator diffusive Volterra-Lotka systems*, *Appl. Math. Opt.*, 31, 1995, 219-241.
- [27] A. LEUNG Y S. STOJANOVIC, *Periodic optimal control for competing parabolic Volterra-Lotka-type systems*, *J. Comp. Appl. Math.*, 52, 1994, 199-217.
- [28] W.S. LEVINE (EDITOR), *The control handbook*, CRC Press, Florida, 1996.
- [29] C.C. LIN Y L.A. SEGEL, *Mathematics applied to deterministic problems in the Natural Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1987.
- [30] J.L. LIONS, *¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?*, *Boletín de SEMA, Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 15, 2000, 59-70.
- [31] X.J. LI Y J.M. YONG, *Optimal control theory for infinite dimensional systems*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [32] J.D. LOGAN, *Applied Mathematics, a contemporary approach*, Wiley, New York, 1987.
- [33] J.D. LOGAN, *Nonlinear Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1994.

- [34] A.J. LOTKA, *Elements of Mathematical Biology*, Dover Publications, New York, 1956.
- [35] A.G. MARSHALL Y F.R. VERDUN, *Fourier Transform in NMR, Optical, and Mass Spectroscopy*, Elsevier, New York, 1990.
- [36] H.D. MITTELMANN Y H. MAURER, *Solving elliptic control problems with interior point and SQP methods: control and state constraints*, Preprint..
- [37] H. MAURER Y H.D. MITTELMANN, *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints. Part 1: boundary control.*, Preprint..
- [38] H. MAURER Y H.D. MITTELMANN, *Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints. Part 2: distributed control*, Preprint..
- [39] J.D. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [40] A. OKUBO, *Diffusion and ecological problems*, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [41] A.V. OPPENHEIM, A.S. WILLSKY Y I.T. YOUNG, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [42] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws: a Challenge for the XXIst Century*, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond. B. Engquist y W. Schmid editores. Springer, Milan, 2001, 1061-1080
- [43] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [44] G. SWEERS, *Strong positivity in $C(\overline{\Omega})$ for elliptic systems*, Math. Z., 209, 251-271, 1992.
- [45] V. VOLTERRA, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthiers-Villars, Paris, 1931.
- [46] J.S. WALKER, *Fourier Analysis and Wavelet Analysis*, Notices of the AMS, 44, 1997, 658-670.

Algunos resultados sobre métodos de tipo Runge-Kutta

MARI PAZ CALVO

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA Y COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

e-mail: maripaz@mac.cie.uva.es

El objetivo de esta comunicación es exponer algunos de los resultados de la investigación que he realizado, gracias a los cuales obtuve el Premio SEMA al joven investigador en su edición de 2000. He querido incluir en el título el término *Runge-Kutta* porque es el elemento unificador de todos mis trabajos, incluidos los más recientes.

Mi investigación se ha desarrollado en el campo de la integración numérica de ecuaciones diferenciales, dentro de lo que se ha llamado posteriormente *integración geométrica*. Más precisamente se ha centrado en el estudio de métodos simplécticos para la integración numérica de sistemas Hamiltonianos de ecuaciones diferenciales ordinarias, sin duda, la familia de integradores geométricos más estudiada.

A partir de 1993, fecha en que visité el Departamento de Matemática Aplicada y Física Teórica de la Universidad de Cambridge, inicié una segunda línea de investigación, también dentro de la integración geométrica, orientada hacia el estudio de métodos numéricos para integrar los llamados flujos isoespectrales.

Más recientemente, y en colaboración con otros miembros del Departamento de Matemática Aplicada y Computación de la Universidad de Valladolid, he comenzado a interesarme por cuestiones relacionadas con la integración temporal de las ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen tras la discretización espacial de ecuaciones en derivadas parciales de evolución.

El índice de los temas que voy a tratar es el siguiente:

1. Integración simpléctica de sistemas Hamiltonianos

1.1 Caracterización de métodos de tipo Runge-Kutta simplécticos

1.2 Condiciones de orden para métodos de tipo Runge-Kutta simplécticos

cos

- 1.3 Desarrollo de métodos simplécticos de paso variable
- 1.4 Desarrollo de métodos simplécticos de orden alto
- 1.2 Propagación del error en la integración simpléctica
- 2. Integración numérica de flujos isoespectrales
 - 2.1 Desarrollo de métodos isoespectrales
 - 2.2 Propagación del error en la integración con métodos isoespectrales
- 3. Incursiones en la integración temporal de EDPs de evolución
 - 3.1 Métodos linealmente implícitos para ecuaciones de convección-reacción-difusión
 - 3.2 Reducción de orden para problemas de valores iniciales y en la frontera

1 Integración simpléctica de sistemas Hamiltonianos

Los sistemas Hamiltonianos están relacionados con numerosas ramas de las matemáticas y tienen muchos campos de aplicación (mecánica clásica, estadística y cuántica, óptica, astronomía, dinámica molecular, física de plasmas, etc.). Recordemos que si Ω es un dominio en el espacio orientado \mathbf{R}^{2d} de los puntos $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d)$ y $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ es una función real, suficientemente regular definida en Ω , el sistema Hamiltoniano de ecuaciones diferenciales con Hamiltoniano H está dado por

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.1)$$

El entero d es el número de grados de libertad y Ω el espacio de las fases. Es bien conocido que dichos sistemas tienen muchas propiedades que no poseen otras ecuaciones diferenciales. Todas estas propiedades son consecuencia del hecho de que el flujo de un sistema Hamiltoniano preserva la estructura simpléctica del espacio de las fases [4]. Cuando un sistema Hamiltoniano es integrado numéricamente, el flujo exacto es reemplazado por una aproximación. Para la mayor parte de los integradores convencionales esta aproximación no es simpléctica y, por tanto, la solución numérica que generan no posee las propiedades características de la solución exacta. Los integradores simplécticos son métodos numéricos especialmente diseñados para la simulación

de sistemas Hamiltonianos y por definición reemplazan el flujo exacto por una aproximación simpléctica. Hasta hace no muchos años los sistemas Hamiltonianos! os eran integrados numéricamente con métodos convencionales, no específicamente contruidos para preservar las ‘propiedades Hamiltonianas’. En los últimos quince años han aparecido multitud de publicaciones relacionadas con la integración simpléctica y se ha constituido así un campo de conocimiento bien definido. Los primeros integradores simplécticos que aparecieron en la literatura estaban basados en funciones generatrices [28] y requerían derivadas de orden alto de la función Hamiltoniana. Esto les hacía, por un lado, de difícil programación para Hamiltonianos generales y, por otro, de implementación sumamente cara. En 1988 F. M. Lasagni, J. M. Sanz-Serna e Y. B. Suris descubrieron (independientemente) que existen métodos Runge-Kutta simplécticos [38, 44, 50]. Este descubrimiento fue importante pues en este tipo de métodos no son necesarias nada más que las derivadas primeras de! l Hamiltoniano aunque, como contrapartida, se necesitan varias ! evaluaciones de estas derivadas en cada paso. Hay que notar que los métodos Runge-Kutta simplécticos son necesariamente implícitos y, por tanto, costosos [44]. Para obtener métodos simplécticos y explícitos análogos a los Runge-Kutta es necesario restringir la atención a ciertas familias de sistemas Hamiltonianos.

1.1 Caracterización de métodos de tipo Runge-Kutta simplécticos

En muchas aplicaciones, la función Hamiltoniana tiene la forma

$$H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{q}), \quad (1.2)$$

donde M es una matriz constante simétrica e invertible y V una función de d variables. En Mecánica, \mathbf{q} representa las coordenadas Lagrangianas, \mathbf{p} los correspondientes momentos, M es la matriz de masas, $T = (1/2) \mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p}$ es la energía cinética, V la energía potencial y H la energía total. Cuando la función Hamiltoniana está dada por (1.2), las ecuaciones del movimiento (1.1) se pueden escribir como el sistema d -dimensional de segundo orden

$$M \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{q}), \quad (1.3)$$

donde ∇ denota gradiente. Aunque (1.3) se puede reescribir como un sistema Hamiltoniano de primer orden y ser integrado numéricamente con un método Runge-Kutta simpléctico, es más conveniente utilizar métodos específicos para problemas de segundo orden [35] que además, en el contexto de la integración simpléctica, pueden aportar la ventaja de ser explícitos. Se eligieron los métodos

Runge-Kutta-Nyström [35] para la integración de (1.3) y en [17] presentamos una demostración rigurosa de la necesidad de las condiciones suficientes de canonicidad para métodos Runge-Kutta-Nyström formuladas por Suris [51]. Este trabajo [17] se enmarca dentro de una línea de investigación que se había iniciado años antes en el Departamento de Matemática Aplicada y Computación de la Universidad de Valladolid, donde previamente se habían establecido las condiciones de canonicidad para métodos Runge-Kutta y Runge-Kutta particionados respectivamente [44, 1]. En esta misma línea se puede incluir también [22], artículo en el que presentamos condiciones necesarias y suficientes para que una B-serie corresponda a un método simpléctico. Una B-serie es una serie formal en la que cada término de la serie aparece asociado a un árbol con raíz. Ejemplos de B-series son el desarrollo del flujo exacto de (1.1) y el desarrollo de la solución numérica de (1.1) que se obtiene con un método Runge-Kutta o con un método Runge-Kutta multiderivada. Cuando las condiciones de canonicidad de [22] se aplican al caso particular de la B-serie generada por un método Runge-Kutta se recuperan las ya conocidas condiciones para que un método Runge-Kutta sea simpléctico [38, 44, 50]. Otra consecuencia de los resultados probados en [22] es la no existencia de métodos Runge-Kutta multiderivada simplécticos [36].

1.2 Condiciones de orden para métodos de tipo Runge-Kutta simplécticos

Es bien conocido que las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de un método de tipo Runge-Kutta para tener un orden dado se obtienen comparando los desarrollos de Taylor del método numérico y de la solución exacta. Estas condiciones se pueden escribir de manera sistemática utilizando teoría de grafos, más precisamente, distintos tipos de árboles con raíz (árboles con raíz para métodos Runge-Kutta, árboles bicolor con raíz para métodos Runge-Kutta particionados, árboles especiales de Nyström con raíz para métodos Runge-Kutta-Nyström, etc.).

Cuando se consideran métodos de tipo Runge-Kutta simplécticos, los coeficientes del método deben satisfacer además las correspondientes condiciones de canonicidad. En [46] sus autores probaron que, como consecuencia de estas ligaduras entre los coeficientes, para métodos Runge-Kutta simplécticos algunas condiciones de orden son redundantes. Consideraciones similares se probaron en [1] para métodos Runge-Kutta particionados simplécticos. En [17] probamos que las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de un método Runge-Kutta-Nyström para ser simpléctico actúan como *hipótesis simplificadoras* en las condiciones de orden, es decir, pueden usarse para reducir el número de

condiciones (no lineales) que hay que imponer a los coeficientes del método para asegurar un orden dado. Lo que se concluye es que para métodos Runge-Kutta-Nyström simplécticos hay que imponer una condición de orden por cada árbol especial de Nyström en lugar de una condición de orden por cada árbol especial de Nyström con raíz [35]. Se presentaron además en [17] funciones generatrices para el número de condiciones de orden independientes para métodos Runge-Kutta-Nyström generales y simplécticos. En el caso particular de métodos explícitos estos resultados se mejoraron unos años más tarde. Un método Runge-Kutta particionado (RKP) simpléctico y explícito puede interpretarse como un ejemplo de método obtenido por composición [39]. Por tanto, el orden de este tipo de métodos puede estudiarse mediante las habituales condiciones de orden [6], o bien, utilizando el formalismo de Lie [39, 47]. Sin embargo, el número de condiciones de orden presentado en [39] para métodos RKP simplécticos explícitos era menor que el encontrado en [1] para métodos RKP simplécticos generales. En [10] investigamos las condiciones de orden para métodos RKP simplécticos explícitos utilizando las clásicas condiciones de orden asociadas a los árboles bicolor y obtuvimos el mismo número de condiciones de orden que en [39] con el formalismo de Lie. El carácter ! explícito del método actúa reduciendo aún más el número de condiciones de orden independientes que hay que imponer sobre los coeficientes del método. En el caso de métodos Runge-Kutta-Nyström simplécticos explícitos se efectuó un análisis similar y se mejoraron los resultados presentados por McLachlan en [39] utilizando el formalismo de Lie.

1.3 Desarrollo de métodos simplécticos de paso variable

Tras la publicación de las condiciones de canonicidad para los métodos de tipo Runge-Kutta, se comprobó que algunas familias bien conocidas de métodos Runge-Kutta eran simplécticas. Tal es el caso de los métodos de Gauss [44], de algunos métodos de Lobatto y de algunos métodos de Radau. También se desarrollaron algunos métodos simplécticos nuevos (ver [47] y las referencias que allí se citan), aunque todos ellos fueron implementados únicamente con paso fijo.

En [20] (ver también [18], [19]) construimos un par encajado de métodos Runge-Kutta-Nyström explícitos de órdenes 3 y 4. El método de orden 4 es simpléctico, no se deriva de ningún método Runge-Kutta particionado previamente conocido y se construyó para que minimizase los coeficientes del término dominante del desarrollo del error local, siguiendo las ideas apuntadas por Dormand, El-Mikkawy y Prince en la construcción de métodos Runge-Kutta-Nyström convencionales [26]. La construcción del método de orden 3 también se hizo utilizando técnicas de optimización propuestas en [26]. El par encajado de [20] es el primer algoritmo simpléctico de paso variable construido

en la literatura.

Para estudiar la eficiencia del nuevo código, fue utilizado para la integración de diversos sistemas Hamiltonianos, aunque los resultados obtenidos no fueron tan satisfactorios como se esperaba (ver Sección 1.5 para una explicación más detallada). De los experimentos numéricos incluidos en [20] se concluye que el método simpléctico implementado con paso variable presenta un comportamiento más parecido al de códigos de paso variable convencionales que al de la implementación con paso fijo del propio integrador simpléctico. Es más, mientras la implementación con paso variable del método Runge-Kutta-Nyström propuesto en [26] aventaja al correspondiente código con paso fijo, para el método simpléctico es el método implementado con paso fijo el que produce mejores resultados. No obstante, el método Runge-Kutta-Nyström simpléctico de [20] implementado con paso fijo llega a ser más eficiente que el código simpléctico de [26] implementado con paso variable, para tiempos de integración largos.

El problema de la integración simpléctica con paso variable sin perder el buen comportamiento de los integradores simplécticos de paso fijo fue un problema abierto durante algunos años. En 1997 Hairer [34] y Reich [42] propusieron independientemente una solución a este problema basada en la utilización de transformaciones de Poincaré. Más precisamente, el sistema Hamiltoniano original es transformado en un nuevo sistema Hamiltoniano de modo que integrar el sistema transformado con un método simpléctico con paso fijo es equivalente a integrar con paso variable el sistema original.

En [15] hicimos un estudio comparativo de distintas técnicas que combinan integradores geométricos (simplécticos o reversibles) con la utilización de paso variable. Se concluye que es posible desarrollar códigos simplécticos de paso variable que para problemas Hamiltonianos sean competitivos con software estándar.

Como los métodos simplécticos que se pueden combinar con las técnicas de paso variable antes mencionadas tienen que ser necesariamente implícitos, es importante que la resolución de las ecuaciones no lineales que surgen al aplicar un método Runge-Kutta implícito sea eficiente. En este sentido han aparecido recientemente en la literatura nuevas estrategias para elegir el iterante inicial que reducen el número de iteraciones necesarias en la resolución de las ecuaciones no lineales que definen las etapas [?, 37, 43]. Continuando en esta línea, en [7] proponemos nuevos algoritmos inicializadores de orden alto que utilizados con el método de Gauss de orden 4 hacen del correspondiente código simpléctico de paso variable un integrador competitivo para sistemas Hamiltonianos. Además, los algoritmos que se proponen en [7], aunque se han desarrollado en el contexto

de la integración simpléctica de sistemas Hamiltonianos son también válidos para combinar con métodos Runge-Kutta implícitos generales.

1.4 Desarrollo de métodos simplécticos de orden alto

A pesar de que la implementación con paso variable del método Runge-Kutta-Nyström simpléctico de [20] no resultó tan eficiente como se esperaba, los experimentos de [20] revelaron que en la integración a largo plazo de sistemas Hamiltonianos de la forma (1.3) la implementación con paso fijo de dicho método es más eficiente que el código no simpléctico optimizado de paso variable del mismo orden de [26].

En [21] nos propusimos construir un método Runge-Kutta-Nyström simpléctico y explícito de orden 8 y compararlo con códigos Runge-Kutta-Nyström no simplécticos de paso variable del mismo orden [27]. Hasta ese momento se disponía en la literatura de algún método simpléctico de orden seis [40] y de tres integradores simplécticos explícitos de orden ocho construidos por Yoshida en [53], utilizando el formalismo de Lie.

En [21] probamos en primer lugar que las bien conocidas *hipótesis simplificadoras* para métodos Runge-Kutta-Nyström [35] son compatibles con las condiciones de canonicidad, dando lugar a integradores que se pueden interpretar como métodos de composición [21, 47]. Para estos métodos el número de condiciones de orden independientes que deben satisfacer sus coeficientes es menor que para métodos Runge-Kutta-Nyström simplécticos más generales. Construimos en [21] un método Runge-Kutta-Nyström simpléctico explícito de orden 7, que compuesto con su adjunto da lugar a un método Runge-Kutta-Nyström simpléctico, simétrico y explícito de orden 8. La construcción de dicho método se hizo atendiendo a los criterios de optimización propuestos en [26, 27], de modo que las constantes de error del nuevo método resultaron considerablemente menores que las de los métodos de Yoshida (! ver [21] y [47]). El método así construido se manifestó más eficiente que los integradores simplécticos de [53], pero no es competitivo con el código estándar de paso variable de [27]. La principal razón de la ineficiencia de los integradores simplécticos de orden 8 es el alto número de etapas (y, por consiguiente, de evaluaciones de función) que requieren para que se satisfagan las condiciones de canonicidad.

1.5 Propagación del error en la integración simpléctica

Ya se ha mencionado en la Sección 1.3 que mientras para los integradores convencionales la utilización de paso variable supone una mejora para el método,

para los integradores simplécticos el ir de paso variable a paso fijo se traduce en una pérdida de eficiencia. En esta sección comentamos con un poco más de detalle los resultados que obtuvimos en este sentido y que están recogidos en [20] y [9].

En [20] se estudia por primera vez el efecto de utilizar paso variable en combinación con integradores simplécticos y se da una justificación rigurosa de un conjunto de fenómenos observados en los experimentos numéricos, algunos de ellos ya observados previamente en la literatura. Más precisamente, se integró el problema de Kepler con condiciones iniciales correspondientes a órbitas 2π -periódicas de distintas excentricidades. Se utilizaron métodos Runge-Kutta-Nyström de orden 4, uno simpléctico y el otro no simpléctico y ambos se implementaron tanto con paso fijo como con paso variable. Demostramos que para métodos de orden p , salvo términos $O(h^{2p})$, el error después de integrar durante N periodos crece, en general, cuadráticamente con N . Además, los términos cuadráticos en N aparecen en la dirección tangente a la solución, lo cual corresponde a un error de fase a lo largo de la trayectoria. Como consecuencia, el error en la energía tras integrar durante N periodos es, salvo términos $O(h^{2p})$, N veces el error en la energía después del primer periodo.

En el caso de que el método sea simpléctico y se implemente con paso fijo, los términos que crecen cuadráticamente con N son en sí mismos $O(h^{2p})$, de donde se deduce que, salvo términos $O(h^{2p})$, el error después de integrar durante N periodos crece sólo linealmente con N y que el error en la energía se mantiene acotado (también salvo términos $O(h^{2p})$). El análisis realizado se basa en interpretar formalmente la solución numérica calculada con un método de paso fijo como la solución exacta de una ecuación diferencial perturbada [32, 33] (análisis regresivo). Si la ecuación de partida es Hamiltoniana y el integrador utilizado es un método simpléctico de paso fijo, la ecuación perturbada también es Hamiltoniana [45, 33]. Desgraciadamente, para pasos variables no es válido el mismo argumento.

Las conclusiones de [20] son válidas no sólo para el problema de Kepler, sino para cualquier oscilador no lineal con un grado de libertad.

En [9] probamos que para problemas con soluciones periódicas y para sistemas integrables, el error cuando se integra con métodos simplécticos de paso fijo o con métodos simétricos de paso fijo o paso variable reversible [49] crece sólo linealmente con el tiempo, frente al crecimiento cuadrático observado para integradores convencionales. De nuevo, la herramienta utilizada en las demostraciones es el análisis regresivo de los errores [45, 33].

2 Integración numérica de flujos isoespectrales

Los flujos isoespectrales surgen en ciertos modelos utilizados en dinámica molecular y también están relacionados con diversos problemas de Álgebra Lineal Numérica (ver [23] y los ejemplos allí descritos). La forma general de un flujo isoespectral es una ecuación diferencial matricial

$$L'(t) = [B(L(t)), L(t)], \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

donde $L(0)$ es una matriz real $d \times d$, $B(L)$ es una función matricial de L y $[\cdot, \cdot]$ denota el conmutador de dos matrices. La elección de la matriz $B(L)$ caracteriza la dinámica del flujo $L(t)$. En muchas aplicaciones el dato inicial $L(0)$ es una matriz simétrica y $B(L)$ es antisimétrica, lo que hace que la solución de (2.4) sea simétrica para todo $t \geq 0$. La propiedad que caracteriza a los flujos isoespectrales es que los autovalores de la matriz solución $L(t)$ son independientes del tiempo t [29, 52]. Cuando un flujo isoespectral se integra numéricamente con un método convencional no es cierto, en general, que los autovalores de la solución numérica se mantengan constantes. Un integrador numérico se llama isoespectral cuando al integrar sistemas diferenciales de la forma (2.4), los autovalores de las aproximaciones numéricas que genera coinciden con los autovalores del dato inicial $L(0)$. En [12] probamos, en primer lugar, que los métodos Runge-Kutta no son isoespectrales para $d > 2$. Es cierto que cualquier método Runge-Kutta preserva los invariantes lineales de la solución y que los métodos Runge-Kutta simplécticos conservan además los invariantes cuadráticos [24, 44, 47]. Los métodos Runge-Kutta simplécticos son, por tanto, isoespectrales para $d \leq 2$. Sin embargo, para $d > 2$, la conservación de los autovalores de la solución implica la conservación de ciertos invariantes cúbicos [52] que no son preservados por los métodos Runge-Kutta [12].

El hecho de que los autovalores de la solución de (2.4) sean constantes es crucial, sobre todo en problemas procedentes de Álgebra Lineal Numérica. Ello motivó el que nos planteásemos la construcción de métodos isoespectrales para la integración numérica de (2.4).

2.1 Desarrollo de métodos isoespectrales

Flaschka probó en [29] que la solución del problema (2.4) está relacionada con la solución de los sistemas diferenciales lineales

$$U'(t) = B(L(t))U(t), \quad \text{con } L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.5)$$

y

$$V'(t) = -V(t)B(L(t)), \quad \text{con } L(t) = V^{-1}(t)L(0)V(t), \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

La condición inicial es en ambos casos la matriz identidad, lo que hace que $V(t) = U^{-1}(t)$.

Los métodos isoespectrales que proponemos en [12] y [14] están basados en definir las aproximaciones al flujo isoespectral utilizando la contrapartida discreta del formalismo de Flaschka (2.5). Nótese que si L es una matriz simétrica y $B(L)$ es antisimétrica (supuestos frecuentes en las aplicaciones), la solución de (2.5) es ortogonal y $U^{-1}(t)$ puede ser reemplazada por $U^T(t)$, con las consiguientes ventajas desde el punto de vista numérico. Similares consideraciones son válidas para la solución de (2.6).

En [12] proponemos un procedimiento general para la obtención de integradores isoespectrales de orden arbitrariamente alto. La idea es integrar (2.5) con un método unitario, es decir, que preserve el carácter ortogonal de la solución. La versión discreta de (2.5) genera aproximaciones a la solución de (2.4) que, además de ser simétricas si $L(0)$ lo es, van siendo ortogonalmente semejantes al dato inicial y, por tanto, comparten sus autovalores. Como integradores unitarios se eligieron los métodos de Gauss combinados con interpolación de Hermite para aproximar las matrices $B(L(t))$ en los niveles de tiempo en los que son necesarias. En [12] probamos que la interpolación utilizada no afecta al orden del integrador temporal. El precio que hay que pagar es que los esquemas resultantes son necesariamente implícitos.

En [14] presentamos una alternativa que evita el uso de integradores implícitos. En lugar de resolver (2.5) con un método unitario, utilizamos un método arbitrario pero para que las aproximaciones a la solución de (2.4) sigan siendo semejantes es necesario calcular en cada paso la inversa de una matriz $d \times d$. La utilización de métodos no unitarios para la integración de (2.5) supone la pérdida de simetría de la solución numérica aunque la solución exacta sea simétrica. Se pudo conseguir, sin embargo, que dicha falta de simetría no se manifieste (por tener orden superior al del integrador temporal) al ir alternando un paso en la integración numérica de (2.5) con un paso en la integración de la ecuación adjunta (2.6). Dado el carácter lineal de (2.5) y (2.6), se pensó en la utilización de métodos de Taylor para integrar (2.5) y (2.6).

En [11] se caracterizan los flujos ortogonales y se estudia el efecto de utilizar métodos Runge-Kutta para su integración numérica. Como la conservación de la ortogonalidad es equivalente a la preservación de un invariante cuadrático, se concluye que los métodos simplécticos son los candidatos adecuados para la integración de flujos ortogonales. Se estudia también el efecto de considerar la ecuación adjunta de un flujo ortogonal y cómo es posible utilizar integradores no unitarios alternando la integración numérica de (2.5) con la de (2.6) para que no se manifieste (por tener orden superior al del integrador temporal) la no

ortogonalidad de la solución numérica. Estas ideas fueron la base de los métodos isoespectrales semiexplícitos de [14].

2.2 Propagación del error en la integración con métodos isoespectrales

Los métodos isoespectrales propuestos en [12] fueron utilizados para integrar las ecuaciones de la red de Toda [52]. En los experimentos numéricos incluidos en [12] se observa al representar gráficamente la evolución del error con el tiempo que dicho error parece decrecer exponencialmente cuando se utiliza un método isoespectral de segundo orden mientras que se mantiene casi constante cuando se utiliza la regla implícita del punto medio (integrador unitario pero no isoespectral). En los experimentos de [13] se obtienen las mismas conclusiones para métodos de orden más alto. En [13] profundizamos en el estudio de la dinámica de la solución exacta de la red de Toda [25] (convergencia exponencial hacia la matriz diagonal de autovalores) y demostramos que se tiene el mismo comportamiento para las soluciones generadas con integradores numéricos de un paso, ya sean métodos Runge-Kutta o integradores isoespectrales construidos mediante el formalismo de Flaschka. El diferente comportamiento observado es debido únicamente a que el primer integrador es isoespectral mientras que el segundo no lo es. Más precisamente, lo que probamos es que la matriz diagonal hacia la que converge la solución numérica no es la misma en ambos casos. Mientras para métodos isoespectrales dicha matriz diagonal es la matriz de autovalores hacia la que también converge la solución exacta, para integradores convencionales de orden p los elementos diagonales de la matriz límite son sólo aproximaciones de orden p a los autovalores exactos de la matriz inicial. Por tanto, si se está interesado en que los autovalores de la solución numérica coincidan con los de la matriz inicial, es preciso recurrir a métodos isoespectrales aunque sean más costosos.

3 Incursiones en la integración temporal de EDPs de evolución

3.1 Métodos linealmente implícitos para ecuaciones de convección-reacción-difusión

Cuando una ecuación en derivadas parciales de evolución es discretizada en espacio, es preciso integrar numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante. Es bien conocida la ineficiencia de los integradores explícitos para estos fines, dado el carácter rígido de los sistemas diferenciales

que se obtienen. Por otra parte, si se utilizan métodos implícitos hay que resolver las ecuaciones no lineales para lo cual es preciso disponer de buenas aproximaciones de la matriz jacobiana. En el contexto de métodos espectrales, las habituales aproximaciones lineales a la matriz jacobiana no siempre producen los resultados esperados [30].

En [8] superamos estas dificultades proponiendo la utilización de métodos Runge-Kutta linealmente implícitos para la integración temporal de las ecuaciones semidiscretas que aparecen tras la discretización espacial de ecuaciones de convección-reacción-difusión. La idea, ya utilizada antes por otros autores [5], es combinar un método Runge-Kutta implícito para la integración de la parte lineal de la ecuación con un método Runge-Kutta explícito para tratar los términos no lineales de la misma. Estudiamos las propiedades de estabilidad de los nuevos métodos, dando una extensión adecuada del concepto de L -estabilidad. Construimos dos métodos Runge-Kutta linealmente implícitos de paso variable de órdenes 3 y 4 respectivamente. Aunque esta clase de métodos ya había sido considerada [5], no existían implementaciones de paso variable en la literatura. Además, los métodos propuestos en [8] tienen propiedades de estabilidad más adecuadas a los problemas que se quieren resolver que los esquemas del mismo tipo ya existentes. Los métodos propuestos se utilizaron para la integración de la ecuación de Burgers con distintos valores del parámetro de difusión y también para integrar una ecuación de reacción-difusión en un dominio bidimensional. Las propiedades de estabilidad de los nuevos métodos los hacen competitivos frente a unas fórmulas BDF de orden y paso variables.

3.2 Reducción de orden para problemas de valores iniciales y en la frontera

Otro de los problemas que surge en la integración temporal de las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas tras la discretización espacial de ecuaciones en derivadas parciales de evolución es el de la reducción de orden cuando se utilizan métodos Runge-Kutta. Es bien conocido que al integrar problemas de valores iniciales y en la frontera con un método Runge-Kutta de orden p , el orden de convergencia está gobernado no por el orden clásico del método Runge-Kutta, sino por el llamado orden de las etapas. El problema de la reducción de orden ha sido estudiado por diversos autores [2, 3, 41, 48] que han sugerido diferentes soluciones. En [16] proponemos una nueva estrategia para evitar la reducción de orden de los métodos Runge-Kutta cuando se utilizan para integrar numéricamente problemas lineales, autónomos, no homogéneos de valores iniciales y en la frontera. La idea básica es la siguiente. La solución del problema original se descompone en suma de dos términos, uno de ellos

computable en función de los datos del problema y el otro, solución de un problema de valores iniciales adecuado que no se ve afectado por la reducción de orden. La estrategia propuesta se puede aplicar tanto al problema semidiscreto como al totalmente discreto, consiguiendo con ello el orden completo tanto en espacio como en tiempo. Además, puede combinarse con discretizaciones espaciales convencionales (diferencias finitas o elementos finitos), a diferencia de lo que sucede con otros enfoques aparecidos previamente en la literatura. Presentamos también en [16] resultados numéricos que ponen de manifiesto que con la estrategia propuesta se puede recuperar el orden clásico del método Runge-Kutta.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al Profesor J. M. Sanz-Serna por iniciarme en la investigación e influir tan positivamente en mi trayectoria profesional y también a todos los matemáticos con los que he colaborado durante estos años.

Referencias

- [1] L. Abia & J. M. Sanz-Serna, *Partitioned Runge-Kutta methods for separable Hamiltonian problems*, Math. Comput. 60 (1993), 617–634.
- [2] I. Alonso-Mallo, *Explicit single step methods with optimal order of convergence for partial differential equations*, Appl. Numer. Math. 31 (1999), 117–131.
- [3] I. Alonso-Mallo & C. Palencia, *Optimal orders of convergence in Runge-Kutta methods for linear, non-homogeneous PDEs with singular source terms*, preprint.
- [4] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd edition*, Springer, New York, 1989.
- [5] U. M. Ascher, S. J. Ruuth & R. J. Spiteri, *Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations*, Appl. Numer. Math. 25 (1997), 151–167.
- [6] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations. Runge-Kutta and General Linear Methods*, John Wiley, Chichester, 1982.
- [7] M. P. Calvo, *High order initial iterants for implicit Runge-Kutta methods: an improvement for variable-step symplectic integrators*, aceptado en IMA J. Numer. Anal.

- [8] M. P. Calvo, J. de Frutos & J. Novo, *Linearly implicit Runge-Kutta methods for advection-reaction-diffusion equations*, aceptado en Appl. Numer. Math.
- [9] M. P. Calvo & E. Hairer, *Accurate long-term integration of dynamical systems*, Appl. Numer. Math. 18 (1995), 95–105.
- [10] M. P. Calvo & E. Hairer, *Further reduction in the number of independent order conditions for symplectic, explicit Partitioned Runge-Kutta and Runge-Kutta-Nyström methods*, Appl. Numer. Math. 18 (1995), 107–114.
- [11] M. P. Calvo, A. Iserles & A. Zanna, *Runge-Kutta methods for orthogonal and isospectral flows*, Appl. Numer. Math. 22 (1996), 152–163.
- [12] M. P. Calvo, A. Iserles & A. Zanna, *Numerical solution of isospectral flows*, Math. Comput. 66 (1997), 1461–1486.
- [13] M. P. Calvo, A. Iserles & A. Zanna, *Conservative methods for the Toda lattice equations*, IMA J. Numer. Anal. 19 (1999), 509–523.
- [14] M. P. Calvo, A. Iserles & A. Zanna, *Semi-explicit methods for isospectral flows*, aceptado en Adv. Comp. Math.
- [15] M. P. Calvo, M. A. López-Marcos & J. M. Sanz-Serna, *Variable step implementation of geometric integrators*, Appl. Numer. Math. 28 (1998), 1–16.
- [16] M. P. Calvo & C. Palencia, *Avoiding the order reduction of Runge-Kutta methods for linear initial boundary value problems*, aceptado en Math. Comput.
- [17] M. P. Calvo & J. M. Sanz-Serna, *Order conditions for canonical Runge-Kutta-Nyström methods*, BIT 32 (1992), 131–142.
- [18] M. P. Calvo & J. M. Sanz-Serna, *Variable steps for symplectic integrators*. En Numerical Analysis 1991, Griffiths, D. F. and Watson, G. A. eds., Longman, London, 1992.
- [19] M. P. Calvo & J. M. Sanz-Serna, *Reasons for a failure. The integration of the two-body problem with a symplectic Runge-Kutta-Nyström code with stepchanging facilities*. En Equadiff 91, Perelló, C., Simó, C. y Sola-Morales, J. de eds., World Scientific, Singapore, 1993.

- [20] M. P. Calvo & J. M. Sanz-Serna, *The development of variable step symplectic integrators, with application to the two-body problem*, SIAM J. Sci. Comput. 14 (1993), 936–952.
- [21] M. P. Calvo & J. M. Sanz-Serna, *High order symplectic Runge-Kutta-Nyström methods*, SIAM J. Sci. Comput. 14 (1993), 1237–1252.
- [22] M. P. Calvo & J. M. Sanz-Serna, *Canonical B-series*, Numer. Math. 67 (1994), 161–175.
- [23] M. T. Chu, *A list of matrix flows with applications*. En Hamiltonian and Gradients Flows, Algorithms and Control, A. Bloch ed., Fields Institute Communications, Amer. Math. Soc., 1994.
- [24] G. J. Cooper, *Stability of Runge-Kutta methods for trajectory problems*, IMA J. Num. Anal. 7 (1987), 1–13.
- [25] P. Deift, T. Nanda & C. Tomei, *Ordinary differential equations and the symmetric eigenvalue problem*, SIAM J. Numer. Anal. 20 (1983), 1–22.
- [26] J. R. Dormand, M. E. A. El-Mikkawy & P. J. Prince, *Families of Runge-Kutta-Nyström formulae*, IMA J. Numer. Anal. 7 (1987), 235–250.
- [27] J. R. Dormand, M. E. El-Mikkawy and J. P. Prince (1987b), *High-order embedded Runge-Kutta-Nyström formulae*, IMA J. Numer. Anal. 7 (1987), 423–430; Corrigendum in 11, pp. 297.
- [28] K. Feng, *Difference schemes for Hamiltonian formalism and symplectic geometry*, J. Comput. Math. 4 (1986), 279–289.
- [29] H. Flaschka, *The Toda lattice*, Phys. Rev. B 9 (1974), 1924–1925.
- [30] J. de Frutos & J. Novo, *Linearly implicit Runge-Kutta methods for advection-reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math. 33 (2000), 217–223.
- [31] S. González-Pinto, J. I. Montijano & S. Pérez-Rodríguez, *On the starting algorithms for fully implicit Runge-Kutta methods*, BIT 40 (2000), 685–714.
- [32] D. F. Griffiths & J. M. Sanz-Serna, *On the scope of the method of modified equations*, SIAM J. Sci. Comput. 7 (1986), 994–1008.
- [33] E. Hairer, *Backward analysis of numerical integrators and symplectic methods*, Annals of Numerical Mathematics 1 (1994), 107–132.

- [34] E. Hairer, *Variable time step integration with symplectic methods*, Appl. Numer. Math. 25 (1997), 219–227.
- [35] E. Hairer, S. P. Norsett & G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems, 2nd edition*, Springer, Berlin, 1993.
- [36] E. Hairer, A. Murua & J. M. Sanz-Serna, *The non-existence of symplectic multi-derivative Runge-Kutta methods*, BIT 34 (1994), 80–87.
- [37] M. P. Laburta, *Starting algorithms for IRK methods*, J. Comput. Appl. Math. 83 (1997), 269–288.
- [38] F. M. Lasagni, *Canonical Runge-Kutta methods*, Z. Angew. Math. Phys. 39 (1988), 952–953.
- [39] R. I. McLachlan, *On the numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods*, SIAM J. Sci. Comput. 16 (1995), 151–168.
- [40] D. Okunbor & R. D. Skeel, *Canonical Runge-Kutta-Nyström methods of orders five and six*, J. Comput. Appl. Math. 51 (1994), 375–382.
- [41] D. Pathria, *The correct formulation of intermediate boundary conditions for Runge-Kutta time integration of initial boundary value problems*, SIAM J. Sci. Comput. 18 (1997), 1255–1266.
- [42] S. Reich, *Backward error analysis for numerical integrators*, SIAM J. Numer. Anal. 36 (1999), 1549–1570.
- [43] T. Roldán & I. Higuera, *IRK methods for DAEs: Starting algorithms*, J. Comput. Appl. Math. 111 (1999), 77–92.
- [44] J. M. Sanz-Serna, *Runge-Kutta schemes for Hamiltonian systems*, BIT 28 (1988), 877–883.
- [45] J. M. Sanz-Serna, *Symplectic Integrators for Hamiltonian problems: an overview*, Acta Numerica 1 (1992), 243–286.
- [46] J. M. Sanz-Serna & L. Abia, *Order conditions for canonical Runge-Kutta schemes*, SIAM J. Numer. Anal. 28 (1991), 1081–1096.
- [47] J. M. Sanz-Serna & M. P. Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman and Hall, London, 1994.

- [48] J. M. Sanz-Serna, J. G. Verwer & W. H. Hundsdorfer, *Convergence and order reduction of Runge-Kutta schemes applied to evolutionary problems in partial differential equations*, Numer. Math. 50 (1986), 405–418.
- [49] D. Stoffer, *Variable steps for reversible integration methods*, Computing 55 (1995), 1–22.
- [50] Y. B. Suris, *Preservation of symplectic structure in the numerical solution of Hamiltonian systems*. En Numerical Solution of Differential Equations, Filippov, S. S. ed. Akad. Nauk. SSSR, Inst. Prikl. Mat., Moscow, 1988 (in Russian).
- [51] Y. B. Suris, *The canonicity of mappings generated by Runge-Kutta type methods when integrating the systems $x'' = -\partial U/\partial x$* , U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 29 (1989), 138–144.
- [52] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [53] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Lett. A 150 (1990), 262–268.

Universidad de Cantabria-Ayuntamiento de Laredo

3-7 Septiembre, 2001

**ESCUELA PROSPECTIVA DE
MATEMÁTICA APLICADA**

Director: Enrique ZUAZUA IRIONDO

Eduardo Casas, Universidad de Cantabria
Control Óptimo de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Vicent Caselles, Universidad Pompeu-Fabra
Modelos matemáticos en procesamiento de imágenes

Iñigo J. Losada, Universidad de Cantabria
El modelado matemático de la propagación del oleaje

Norbert J. Mauser, Universidad de Viena
Quantum Kinetic Theory with Applications

Juan Luis Vázquez, Universidad Autónoma de Madrid.
Mecánica de fluidos y ecuaciones de la filtración

Enrique Zuazua, Universidad Complutense
Comportamiento asintótico y homogeneización de ecuaciones de evolución

Esta Escuela está primordialmente destinada a jóvenes investigadores interesados en el área de la Matemática Aplicada, en un sentido amplio, y con una formación de, esencialmente, Matemático, Físico o Ingeniero. Por la actualidad de los temas abordados y por el nivel de competencia de los conferenciantes, la Escuela puede ser también de gran utilidad a profesionales consagrados en el área.

Presentaremos una panorámica de algunos temas de actualidad y que, creemos, van a ser objeto de desarrollos importantes en los próximos años. Los

temas cubiertos son diversos y hemos querido que tanto los aspectos relacionados con el modelaje y la Ingeniería así como los más analíticos y matemáticos estén representados, sin dejar de lado la vertiente computacional.

Es por ello que se ha buscado la participación de un grupo de expertos de reconocido prestigio de amplio espectro.

Entre los temas de la Escuela cabe destacar los destinados al modelaje y la simulación numérica del oleaje marino, así como un curso introductorio sobre Mecánica de Fluidos y las ecuaciones de filtración. Otro de los cursos está destinado al estudio de las ecuaciones de la Teoría Cinética Cuántica en la que la ecuación fundamental de Schrödinger es sustituida por la ecuación de Wigner. Se prestará especial atención al paso al límite de la Mecánica Cuántica a la Clásica cuando la constante de Planck tiende a cero. Se discutirán asimismo métodos de aproximación en elementos finitos para problemas de control óptimo en los que la ecuación de estado asociada es típicamente una ecuación en derivadas parciales. El problema del procesamiento de imágenes será también objeto de un curso en el que se presentarán algunos modelos matemáticos relevantes así como una introducción a las técnicas geométricas, analíticas y computacionales más útiles. Se abordará asimismo el problema de la restauración de imágenes. Finalmente, la Escuela contará también de un ciclo de conferencias sobre algunos útiles analíticos necesarios en el estudio del comportamiento asintótico para tiempos grandes en ecuaciones de evolución, entre los que cabe mencionar la teoría de homogeneización y algunas técnicas propias de la teoría de sistemas dinámicos en dimensión infinita.

Todos los cursos concluirán con la presentación del estado del arte actual y una lista de problemas abiertos relevantes.

El curso será asimismo un foro de encuentro para los expertos en el campo provenientes de diversas Universidades españolas y extranjeras, y especialmente de la Unión Europea.

Para más información relacionada con el programa, trámites de inscripción, becas, etc., diríjense a: Enrique Zuazua

**Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense
28040 Madrid
Tel.: (34) 91 394 45 30 /44 49
Fax: (34) 394 46 07
e-mail: zuazua@eucmax.sim.ucm.es**

PROGRAMA PROVISIONAL

Lunes, 3 de septiembre

9:00 Apertura
9:30-11:30 J. L. VÁZQUEZ
12:00-14:00 V. CASELLES

Martes, 4 de septiembre

9:30-11:30 J. L. VÁZQUEZ
12:00-13:00 V. CASELLES
13:00-14:00 I. LOSADA

Miércoles, 5 de septiembre

9:30-11:30 I. LOSADA
12:00-14:00 E. ZUAZUA

Jueves, 6 de septiembre

9:30-10:30 E. CASAS
10:30-11:30 E. ZUAZUA
12:00-14:00 N. MAUSER

Viernes, 7 de septiembre

9:30-11:30 E. CASAS
11:45-13:45 N. MAUSER
13:45 Clausura

VI CURSOS UNIVERSITARIOS DE VERANO EN CANARIAS

Lanzarote - 2001

Como uno de los VI Cursos Universitarios de Verano en Canarias, se desarrollará en Lanzarote, del 30 de julio al 3 de agosto el curso MATEMÁTICAS y CLIMA impartido por Jesús Ildefonso Díaz Díaz, Catedrático de Matemática Aplicada del Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid y Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias.

Se trata de un curso lectivo de una naturaleza algo distinta a los cursos de verano usuales. La docencia es llevada a cabo por un único profesor con una extensión de 20 horas lectivas. El objetivo primordial del curso antes señalado es mostrar que un sistema tan complejo como el climático puede ser abordado matemáticamente mediante la aplicación de una Trilogía Universal constituida por la modelización, el análisis matemático y numérico de los modelos, y el control.

PROGRAMA DEL CURSO

Lunes, 30 de julio

Hacia un tratamiento global del sistema climático: aspectos de una trilogía universal.

Martes, 31 de julio

Modelización matemática: de los modelos básicos a su articulación.

Miércoles, 1 de agosto

Análisis matemático de los modelos: predicción.

Jueves, 2 de agosto

Simulaciones numéricas.

Viernes, 3 de agosto

Control matemático: el momento de las decisiones.

Más información sobre matriculación, validez académica, becas, alojamiento etc. pueden encontrarse en la página web:

<http://www.cabildo.com/blas-cabrera/cursos2001/uni01.htm>

**ELECTRONIC JOURNAL OF
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

The Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) is dedicated to the rapid dissemination of high quality research in mathematics. All topics related to differential equations and their applications (ODE's, PDE's, integral equations, functional differential equations, etc.) will be considered for publication.

Research articles are refereed under the same standards as those used by the finest-quality printed journals. Proceedings of conferences and long expository papers (monographs) are accepted at the discretion of the editors.

Publications in the EJDE are copyright protected, but distribution of copies for non-commercial use is allowed. Articles are indexed by Math Reviews and by Zentralblatt fur Mathematik. Printed copies of articles are kept at the U.S. Library of Congress (ISSN: 1072-6691) and at the libraries of Southwest Texas State University and of University of North Texas.

Submissions should be formatted as TeX or LaTeX files and sent electronically to editor@ejde.math.swt.edu. If desired, manuscripts can be sent directly to any one of the EJDE editors. See the instructions to authors for more information.

Articles are available in PDF, DVI, PostScript, and TeX formats. PDF files can be previewed with Acrobat Reader from <http://www.adobe.com>, PostScript files with GhostScript from <http://www.cs.wisc.edu/ghost>, and DVI & TeX files with packages from <http://www.tug.org>.

The EJDE is housed at the offices of our main sponsor:

*Department of Mathematics
Southwest Texas State University
601 University Drive
San Marcos TX 78666, USA.*

RESÚMENES DE TESIS DOCTORALES

Título:	CONDICIONES DE OPTIMALIDAD EN PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO.
Doctorando:	Bienvenido Jiménez Martín.
Director/es:	Vicente Novo Sanjurjo.
Defensa:	4 de Diciembre de 2000, UNED.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: Se estudian problemas de optimización multiobjetivos, fundamentalmente, entre espacios de dimensión finita. Se introducen las nociones de eficiencia estricta (o mínimo estricto) y superrestricta de orden m para este tipo de problemas y se establecen condiciones necesarias y suficientes por medio de la derivada de Studniarski. Cuando las funciones son dos veces diferenciables se proporcionan condiciones necesarias de segundo orden de mínimo de Pareto local débil y condiciones suficientes de primer y segundo orden de mínimo estricto, tanto en forma primal, utilizando los conjuntos tangentes de primer y segundo orden, como en forma dual, mediante reglas de multiplicadores cuando el conjunto factible está definido por restricciones de desigualdad y de igualdad. Para establecer las condiciones suficientes se introduce la noción de función soporte.

Se introducen dos nociones de eficiencia propia tipo Borwein y se analizan sus relaciones con otras dos ya existentes y con la eficiencia estricta.

Se estudian varias generalizaciones de los teoremas de alternativas clásicos y se proporciona una expresión del cono tangente (o contingente) a un conjunto intersección de un convexo con otro definido por restricciones de igualdad diferenciables y de desigualdad derivables Hadamard mediante el cono linealizado. También se proporciona una expresión del cono normal.

Se establecen condiciones necesarias y suficientes de mínimo de Pareto cuando la función objetivo y las restricciones de desigualdad son derivables Dini (al menos) o bien localmente lipschitzinas mediante reglas de multiplicadores en términos de las subdiferenciales de Dini en el primer caso y de Clarke en el segundo caso.

Por último se introducen, analizan y clasifican cualificaciones de restricciones en las que intervienen las funciones objetivo y se obtienen bajo las más débiles nuevas condiciones necesarias de mínimo de Pareto de modo que los multiplicadores asociados a las funciones objetivo son todos positivos.

Título:	PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO GOBERNADOS POR ECUACIONES SEMILINEALES CON RESTRICCIONES DE TIPO INTEGRAL SOBRE EL GRADIENTE DEL ESTADO.
Doctorando:	Mariano Mateos Alberdi.
Director/es:	Eduardo Casas Rentería.
Defensa:	26 de Junio de 2000, Universidad de Cantabria.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude.

Resumen: La tesis versa sobre el estudio de distintos problemas de control óptimo.

En la primera parte se estudian las ecuaciones que aparecen en los problemas de control estudiados. En el Capítulo 2 hacemos un estudio sobre regularidad para ecuaciones lineales. Estos resultados serán aplicados más tarde para establecer la regularidad tanto del estado como del estado adjunto. En el Capítulo 3 estudiamos las ecuaciones de estado que gobiernan los problemas de control. Mostramos las relaciones de continuidad y diferenciabilidad que hay entre el control y el estado. También hacemos un análisis de la sensibilidad del estado respecto a perturbaciones difusas del control.

La segunda parte constituye el núcleo central de la memoria. En ella estudiamos condiciones de optimalidad, tanto necesarias como suficientes, para los problemas de control. En el Capítulo 4 exponemos propiedades de los funcionales que aparecen en los problemas de control: el funcional objetivo y las restricciones. Estudiamos bajo que condiciones son diferenciables y, en vistas a probar un Principio de Pontryagin, damos resultados de sensibilidad respecto a perturbaciones difusas del control. En el Capítulo 5 exponemos el Principio de Pontryagin. En el Capítulo 6 introducimos condiciones de optimalidad de primer y segundo orden. Por último, en el Capítulo 7 introducimos un nuevo tipo de condiciones de segundo orden en las que se ve involucrado el Hamiltoniano.

Se va intercalando en cada capítulo el caso elíptico y el parabólico.

En la tercera parte se realiza el análisis numérico de problemas con restricciones puntuales sobre el estado. Para ello en el Capítulo 8 se describen de manera detallada resultados de convergencia uniforme para la discretización de ecuaciones elípticas semilineales. Por último en el Capítulo 9 se discretiza el problema de control y se investiga de que manera los problemas discretizados convergen hacia el problema continuo.

S \vec{e} MA
BOLETÍN NÚMERO 17
Abril 2001

sumario

Presentación	5
En Memoria de Philippe Bénilan	7
Artículos	11
• <i>Números primos y Criptografía</i> , por A. Quirós	13
• <i>Conceptos fundamentales de la</i> <i>Matemática Difusa</i> , por J. A. Herencia	23
• <i>Algunos modelos de la Mecánica de Fluidos</i> , por F. Ortegón	51
• <i>Análisis Teórico de Varias Cuestiones con Origen</i> <i>en Mecánica de Fluidos</i> , por B. Climent	83
• <i>Análisis y Control Óptimo de Sistemas Elípticos</i> <i>que surgen en Dinámica de Poblaciones</i> , por A. Cañada	101
• <i>Algunos resultados sobre métodos de tipo</i> <i>Runge-Kutta</i> , por M. P. Calvo	119
Cursos de Verano	137
Anuncio de revista	141
Resúmenes de Tesis Doctorales	143