S$\vec{e}$MA

BOLETÍN NÚMERO 16

Diciembre 2000

sumario

FOTO DE PORTADA

Pedro Puig Adam (Barcelona, 1900 – Madrid, 1960), matemático e ingeniero industrial, es bien conocido en España por los diversos libros que publicó (parte de ellos en colaboración con su "maestro y amigo entrañable" Julio Rey Pastor). También es reconocido internacionalmente como *Pedagogo de las Matemáticas* (en 1955 fue nombrado miembro de la *Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza Matemática*).

En la página 97 de este Boletín aparece su famoso *"decálogo de la Didáctica Matemática Media"*, dentro de un artículo que también contiene referencias [2, 43, 44, 46, 49] (y algunas páginas *web*) alusivas a Puig Adam. Una página *web* confeccionada especialmente para conmemorar el centenario de su nacimiento es:

http://leo.worldonline.es/frmartin/pagina_de_pedro_puig_adam.htm

edición

Dirección editorial: Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Edif. C-2, planta 3, Campus Universitario de Rabanales, 14071 Córdoba.
E-mail: `boletin_sema@uco.es`, *Fax:* 957 21 86 30

Diseño de portada: Antonio Espinosa López y Antonio Osuna Abad.
Imprime: TIPOGRAFÍA CATÓLICA, S. C. A.; tfo.: 957 297 188; Córdoba.
D. L.: CO-156/2000

PRESENTACIÓN

El pasado mes de Octubre, mediante el proceso electoral seguido tras el cese de Enrique Fernández Cara, Eduardo Casas Rentería fue elegido nuevo Presidente de S$\vec{e}$MA. Por tal motivo, ambos se dirigen a los socios de S$\vec{e}$MA en el presente Boletín. Tras sus respectivas "cartas de despedida" y "salutación", aparecen tres artículos sobre *Matemática Aplicada* y otros tres sobre *Educación Matemática.*

Los tres primeros se deben a los siguientes autores: el primero a Enrique Zuazua Iriondo, que nos habla de forma divulgativa sobre *ondas continuas y discretas*; el segundo a Jean Mawhin, que completa aquí la *lección inaugural del curso académico 1998/99* ofrecida en el *Departamento de Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada* y el tercero a Juan Casado Díaz, que consiguió el *Premio al Joven Investigador* de S$\vec{e}$MA en el año 1999.

Las tres aportaciones siguientes continúan añadiendo opiniones y datos sobre la *Educación Matemática,* consolidando la correspondiente sección iniciada en el Boletín número 14. En este caso, muestran su visión sobre el tema José Antonio Herencia González (que habla también sobre la *Matemática Difusa*), Enrique Fernández Cara (director del *Curso de Formación del Profesorado* titulado *La enseñanza de las Matemáticas a debate* celebrado en *El Escorial* del que ofrece aquí un resumen, incluyendo también las aportaciones de los demás ponentes) y Paz Morillo Bosch que, junto con Carlos Gete Alonso, muestran sus inquietudes sobre la enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería (esperando compartirlas con otros profesores de Escuelas Técnicas).

Finalmente, se incluyen varias informaciones de interés. Enrique Zuazua Iriondo nos ha hecho llegar las reseñas sobre el *Centro Internacional de Matemática* de Coimbra y sobre la revista *"Discrete and Continuous Dynamical Systems" (Series B).* Eduardo Casas Rentería nos ofrece un resumen de los contenidos recientemente impartidos en los *Cursos de Verano de la Universidad de Cantabria* y Luis María Abia Llera ha recopilado información sobre próximos Congresos. Asimismo aparecen secciones habituales que contienen reseñas y comentarios sobre varios libros, el resumen de una Tesis Doctoral leída recientemente y el listado de nuevos socios (que sigue estando gestionado por Juan Francisco Padial Molina).

GRUPO EDITOR
`boletin_sema@uco.es`

DESPEDIDA DEL PRESIDENTE SALIENTE

Estimado socio de S$\vec{e}$MA:

Una vez más deseo dirigirme a ti, ya como ex-Presidente de S$\vec{e}$MA y accediendo a una amable invitación de los compañeros del grupo editor de Córdoba.

Me gustaría aprovechar la ocasión para hacerte llegar algunas opiniones relacionadas con los últimos acontecimientos que ha vivido nuestra Sociedad.

En primer lugar, quiero expresar mi convicción de que los cambios en los Estatutos que han sido aprobados en la Asamblea Extraordinaria del pasado mes de septiembre serán muy positivos para el futuro de S$\vec{e}$MA. En efecto, estos cambios implican un mayor nivel de democratización en el proceso de elección de Presidente. Por otra parte, constituyen una prueba de que nuestra Sociedad está alcanzando una considerable madurez. En mi opinión, con estos nuevos Estatutos, el Presidente se sentirá más y mejor respaldado por la Sociedad lo cual, como ya he tenido ocasión de comentarte, es de suma importancia en los tiempos que corren.

Desde aquí, quiero dejar constancia de mi agradecimiento a nuestro compañero Eduardo CASAS por haber aceptado presentarse como candidato. Le deseo el mayor éxito posible en su nueva etapa de Presidente, con el convencimiento de que se aplicará a esta labor con el máximo interés.

En segundo lugar, me gustaría dedicar algunos párrafos a esta publicación desde la que te escribo. Pienso que, para que la salud de nuestra Sociedad no se resienta, para que no decrezca el entusiasmo ni la ilusión de los socios, es absolutamente necesario mantener y consolidar la edición de este Boletín. Esto exige un esfuerzo de todos. En el momento actual, nuestros compañeros de la Universidad de Córdoba dominan ya los "secretos" de tipo técnico. Pero hace falta la colaboración de todos los socios para conseguir calidad y cantidad en el material a partir del cual puedan ser concebidos y editados los números que han de venir. Por todo ello, te animo a que les hagas llegar artículos, reseñas, informes de reuniones, comentarios y opiniones personales, ... todo lo que pueda ser interesante difundir. Ya conoces la dirección editorial; figura en la primera página de este ejemplar.

Una tercera cuestión sobre la que deseo hablarte es la siguiente.

Afortunadamente, la Matemática Aplicada está de moda. En efecto, he tenido ocasión de comprobar en los últimos meses que, ahora, muchos matemáticos de renombre tienen a gala considerarse (también) matemáticos aplicados. En principio, yo veo que esto es positivo para todos. Es cierto que cada uno entiende la Matemática Aplicada a su manera y que hay quien piensa que la Matemática Aplicada es necesariamente una Matemática "light" que, enfrentada a la resolución de un problema, huye de las complicaciones técnicas de su análisis teórico. Nada más lejos de la realidad, de acuerdo con la concepción de otros. No obstante, estimo que esta tendencia hacia las aplicaciones puede ser muy ventajosa para nuestra Sociedad y debería significar una buena ocasión para ensanchar nuestro ámbito de trabajo.

En este momento, permitidme que introduzca una reflexión de carácter personal. Yo entiendo que el nivel científico de las Matemáticas de nuestro país, gracias al esfuerzo de muchos, ha experimentado cambios importantes los últimos años. Pero también creo que nos ha llegado el momento de eliminar excesivos parcelamientos y contactar, en la medida que sea posible, con personas que hagan cosas que no son exactamente las mismas. La interdisciplinaridad es útil, en especial en nuestro contexto. Deberíamos quizá ser más hábiles y empeñarnos en ser capaces de fomentarla.

También me gustaría hablarte de otros mensajes relativos a nuestra Sociedad que he podido captar. Uno de ellos se refiere al congreso CEDYA - CMA. Se puede afirmar sin ninguna exageración que, hoy por hoy, no hay ninguna otra manifestación matemática periódica en España que pueda comparársele en tradición, trascendencia e ímpetu. Estoy convencido de que otras Sociedades Matemáticas tienen una (sana) envidia de nuestro congreso. Así pues, mimémoslo. Habréis tenido ya ocasión de comprobar que, para la próxima edición, hemos podido preparar desde el Comité Organizador un programa de alto nivel científico. Quiero aprovechar esta ocasión para ensalzar el trabajo realizado por los organizadores, en especial Luis FERRAGUT, que previsiblemente conducirá a un gran éxito. Y a ti, estimado socio, te animo a que participes en el mismo.

Para terminar, quiero recordarte que, previsiblemente, S$\vec{e}$MA se va a ver envuelta, a medio plazo, en la organización de un evento de la máxima trascendencia a nivel mundial: El "International Congress of Mathematics" de 2006. Como sabes, hemos dado nuestro apoyo y conformidad a la candidatura de Madrid como sede del mencionado congreso. Estamos metidos en este proyecto junto con y al mismo nivel que la Real Sociedad Matemática Española (RSME). El buen ambiente que preside las actuales relaciones que mantenemos con la

RSME ha hecho posible y deseable esta iniciativa.

Y ya te dejo. Te pido perdón por los errores que haya podido cometer durante estos dos años en que he sido Presidente. Para mí, ha sido un orgullo poder servir a la Sociedad y a sus socios y deseo al nuevo Presidente que tenga al menos tanta suerte como yo en su mandato.

Un fuerte abrazo y hasta siempre.

Enrique Fernández Cara

Ex–Presidente de S$\vec{e}$MA

cara@numer.us.es

RELACIÓN DE PRESIDENTES DE S$\vec{e}$MA

Sept. 1993 – Sept. 1994	**Antonio Valle Sánchez** Universidad de Málaga
Sept. 1994 – Sept. 1995	**Jesús Ildefonso Díaz Díaz** Univ. Complutense de Madrid
Sept. 1995 – Sept. 1996	**Mariano Gasca González** Universidad de Zaragoza
Sept. 1996 – Sept. 1998	**Juan Luis Vázquez Suárez** Univ. Autónoma de Madrid
Sept. 1998 – Oct. 2000	**Enrique Fernández Cara** Universidad de Sevilla
Oct. 2000 – ...	**Eduardo Casas Rentería** Universidad de Cantabria

PALABRAS DEL NUEVO PRESIDENTE

Aprovecho la oportunidad que me proporciona la publicación del número 16 de nuestro boletín para dirigirme a todos vosotros. En primer lugar, os agradezco la confianza que habéis depositado en mí para presidir nuestra sociedad. Es una gran satisfacción y un gran honor saber que cuento con vuestra confianza. Espero no defraudaros, para lo cual os prometo trabajar para que nuestra sociedad siga su camino ascendente, continuando la labor de nuestros anteriores presidentes, representando a la sociedad allí donde se requiera nuestra presencia y defendiendo siempre los intereses de nuestro colectivo.

No obstante, para que la sociedad se consolide, progrese y llegue a tener el prestigio y reconocimiento que deseamos, es imprescindible la colaboración de todos nosotros. Debemos sentirnos miembros de S$\vec{e}$MA, dar a conocer nuestra sociedad y defenderla allí donde nos encontremos y siempre que tengamos la oportunidad, éste es un objetivo que todos los socios debemos procurar. En definitiva, debemos sentir y vivir S$\vec{e}$MA, contribuyendo en la elaboración y difusión de nuestro boletín, participando en los congresos y escuelas que nuestra sociedad respalda, participando en la gestión de la misma, emitiendo nuestras opiniones y nuestros votos o presentado nuestras candidaturas al Comité Ejecutivo o a la presidencia. Haceros escuchar en nuestro boletín, enviadnos vuestras informaciones, ideas, comentarios y artículos. Espero vuestra crítica. La crítica inteligente será siempre bienvenida y la deseo muy por encima de la indiferencia e impasibilidad. Fundamentalmente os quiero transmitir la necesidad de dar vida a nuestra sociedad, tarea que a todos nos debe ocupar. Os pido vuestra ayuda para el desarrollo de S$\vec{e}$MA. No podría ser de otra manera.

No puedo terminar estas líneas sin dar las gracias a mi predecesor, Enrique Fernández-Cara, por su labor y dedicación a nuestra sociedad. Enrique, nos sentimos en deuda contigo por el tiempo que nos has dedicado y los frutos que has cosechado. Gracias. También debemos agradecer a Francisco Lisbona Cortés su trabajo como miembro del Comité Ejecutivo, que ha dejado después de tres años. En la última Asamblea de S$\vec{e}$MA, celebrada el 19 de septiembre en Laredo, durante la IX Escuela Hispano-Francesa de Simulación Numérica en Física e Ingeniería, fueron elegidos Javier Chavarriga Soriano (Universidad de Lérida) e Ireneo Peral Alonso (Universidad Autónoma de Madrid) como los nuevos miembros del Comité Ejecutivo que reemplazarán a Enrique Fernández-Cara y a Francisco Lisbona. Nuestra bienvenida a ellos, así como nuestra felicitación por su elección y nuestra gratitud por haber presentado su candidatura, lo que siempre es una muestra del espiritu colaborador con la sociedad.

Eduardo Casas Rentería

Presidente de S$\vec{e}$MA

casas@macc.unican.es

DIRECCIÓN PARA SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Parte de la colaboración que solicita nuestro Presidente se puede canalizar mediante la dirección de *e-mail* del grupo editor del Boletín de S$\vec{e}$MA:

boletin_sema@uco.es

Asimismo, recordamos la página *web* de S$\vec{e}$MA, como medio adecuado de expresión para sus socios:

http://www.uca.es/sema

La actualización de esta página *web* corre ahora a cargo de J. Rafael Rodríguez Galván (rafael.rodriguez@uca.es).

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *16 (2000), 13–44.*

Ondas continuas y discretas

ENRIQUE ZUAZUA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
28040 MADRID
e-mail: zuazua@eucmax.sim.ucm.es

1 Introducción

La ecuación de ondas es sin duda uno de los ejemplos más clásicos y relevantes a los que se recurre en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Pero no es un ejemplo meramente académico, ni mucho menos. En efecto, los primeros estudios sobre esta ecuación a los que nos referiremos más adelante, se realizan a finales del siglo XVIII, época en la que se estaban estableciendo los pilares fundamentales del Análisis Matemático, tal y como lo entendemos hoy. Los desarrollos posteriores que se han producido han ido frecuentemente ligados a avances importantes en Análisis de Fourier, Optica Geométrica, Análisis Numérico, etc. de modo que, cabría decir, la ecuación de ondas ha sido uno de los protagonistas más destacados de las Matemáticas de estos dos últimos siglos.

En estas notas no pretendemos describir exhaustivamente la historia de la ecuación de ondas y/o de las Matemáticas que han intervenido o se han generado a través de ella. Tampoco haremos una descripción rigurosa del estado en el que hoy se encuentra la investigación sobre la ecuación de ondas y sus variantes. Nuestro objetivo al escribir estas notas no es más que introducir algunos conceptos clásicos relacionados con la ecuación de ondas desde un punto de vista histórico, para después presentar algunos avances más recientes que, si bien no exigen unas Matemáticas muy avanzadas, permiten entrever la riqueza de la problemática que esta ecuación encierra y las ideas necesarias para su comprensión.

Buena parte de estas notas están dedicadas al caso de una sola dimensión espacial, en la que la ecuación de ondas es un modelo simple para la descripción de las vibraciones de una cuerda. Mencionaremos muy brevemente cómo la Optica Geométrica ha de intervenir de manera crucial al pasar de una a varias dimensiones espaciales. En varias dimensiones, la ecuación de ondas es un modelo válido para describir las vibraciones de un tambor o la propagación de ondas acústicas. Ilustraremos a través de un artículo reciente dedicado a los terremotos en el entorno de la ciudad de Grenoble (Francia), cómo las ecuaciones de tipo ondas pueden ser de gran utilidad a la hora de simular y predecir la propagación de ondas sísmicas y sus efectos en nuestras ciudades y construcciones. Este ejemplo muestra con claridad lo que antes mencionábamos. La ecuación de ondas no es sólo un bello ejemplo de EDP sino que es un instrumento útil para entender el mundo que nos rodea.

Normalmente, en la teoría de Ecuaciones Diferenciales, nos encontramos ante *problemas directos*. Por ejemplo, dada una ecuación diferencial y los datos iniciales, calcular la solución correspondiente. Se trata del *problema de Cauchy*. Esto es así cuando, conociendo las propiedades del medio que nos rodea, las leyes que gobiernan un determinado fenómeno físico y la situación en el presente, pretendemos hacer una previsión de futuro. En definitiva, se trata de aquellas situaciones en las que disponemos de un modelo matemático. Pero en muchas de las aplicaciones más relevantes (prospección petrolífera, tomografía computerizada, etc.) nos encontramos ante *problemas inversos*. Se trata, como su propio nombre indica, de realizar el proceso inverso y, más concretamente, de identificar los parámetros de una ecuación diferencial de la que desconocemos, por ejemplo, el valor de sus parámetros, que modelice un determinado fenómeno del que conocemos las soluciones o alguna información sobre las mismas. Se trata por tanto de invertir la aplicación que hace corresponder a una ecuación diferencial sus soluciones. Por lo tanto, en esta ocasión, pretendemos determinar las propiedades de un medio o material o las leyes que gobiernan un determinado fenómeno, a través de observaciones y mediciones experimentales reales. Mostraremos mediante un ejemplo cómo, mediante informaciones suficientes sobre el problema directo, puede también resolverse el problema inverso.

Por último, en el capítulo 6, abordaremos el problema de las aproximaciones numéricas. Si bien confiamos que las conclusiones fundamentales sean accesibles a un amplio grupo de lectores, esta sección contiene algunos desarrollos más técnicos que, en cualquier caso, deberían ser asimilables por aquellos que dispongan de una formación básica en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

La motivación de esta última sección es bien simple. Hoy en día cualquier estudio que tenga como objetivo una aplicación tecnológica o industrial real, ha de ir acompañado de simulaciones numéricas que permitan realizar cálculos efectivos en el ordenador. Al discretizar la ecuación de ondas o, de manera más general, cualquier sistema continuo, nos encontramos con sistemas discretos o semi-discretos que confiamos reproduzcan la dinámica de la ecuación de ondas original. Pero frecuentemente nos encontramos ante una situación aparentemente paradójica. A pesar de haber elegido la discretización con criterios más que razonables, a menudo el esquema discreto o semi-discreto posee soluciones espurias que nada tienen que ver con la ecuación de ondas original. Se nos plantea entonces un problema que irremediablemente hemos de abordar de forma rigurosa. ¿Cómo podemos identificar las informaciones espurias que un método numérico proporciona y qué podemos hacer para eliminarlas? En otras palabras, a pesar de la creciente potencia de los ordenadores, ¿cómo podemos saber que lo que calculamos es efectivamente una buena aproximación de la realidad? ¿Cómo discernir entre la realidad virtual que sólo es producto del proceso de aproximación en el ordenador y la realidad del mundo que nos rodea? Veremos que el Análisis Matemático es una manera eficiente (si no indispensable) en este proceso de discernimiento. Este nos permite llegar a conclusiones interesantes: A pesar de la creciente potencia de cálculo de los ordenadores, el método matemático no puede ser suplantado por éstos.

Una de las primeras lecciones que cualquier texto de Análisis Numérico de EDP enseña es que no basta con que un método numérico parezca bien adaptado a la ecuación (lo que se denomina *consistencia* del método), sino que, si queremos garantizar su convergencia, hemos también de probar su estabilidad. La condición de estabilidad asegura que pequeños errores iniciales (inevitables en la práctica) no sean magnificados por el esquema numérico hasta corromper por completo la solución. Esto puede considerarse una primera prueba de algo que conviene tener siempre presente: A pesar de la enorme capacidad de cálculo de los ordenadores de hoy en día o, incluso, a pesar de la aparente consistencia de los esquemas numéricos utilizados, no podemos tener certeza de que las imágenes que el ordenador proporciona sea fiel reflejo de la realidad, salvo que realicemos previamente un Análisis Matemático riguroso.

Los resultados que presentamos en la última sección son una nueva prueba de este hecho ya conocido, si bien en este caso la carencia del método numérico utilizado es un poco más difícil de detectar y acontece en problemas como los mencionados en esa sección, de carácter inverso y de control, en los que el dato inicial del problema no es conocido a priori.

La ecuación de ondas que analizamos en esta sección es un sistema puramente conservativo en el que hemos ignorado todo efecto disipativo y de rozamiento. Sin embargo, en muchos procesos físicos, estos efectos están presentes y son también relevantes desde el punto de vista de la simulación numérica puestos que estos efectos disipativos pueden eliminar o compensar la presencia de estas soluciones numéricas espurias.

Hay muchos otros temas relacionados con la ecuación de ondas, igualmente interesantes, de los que podría hablarse. La elección realizada en este artículo no es más que una de las muchas posibles. El lector interesado podrá consultar, entre otros, el artículo divulgativo de A. Nachbin [N].

Antes de concluir esta introducción deseo agradecer a A. Rodríguez-Bernal por haber llamado mi atención sobre el artículo [CBBH], a J. Duoandikoetzea por haberme clarificado algunos aspectos históricos del Análisis de Fourier, a M. Pinillos por la atenta lectura de estas notas y sus constructivas sugerencias. Finalmente, agradezco a R. Rodríguez del Río sus correcciones y haber realizado las figuras del artículo.

2 Las fórmulas de d'Alembert y D. Bernouilli

Consideremos la *ecuación de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \tag{1}$$

El sistema (1) es un modelo simple para el análisis de las *vibraciones de una cuerda* de longitud L (que ocupa el intervalo espacial $x \in (0, L)$) y fija en sus extremos $x = 0, L$. La incógnita $u = u(x,t)$, que depende del espacio x y del tiempo t, denota la altura a la que se encuentra el punto x de la cuerda (del intervalo $(0, L)$), en el instante de tiempo t. Se trata de una ecuación en derivadas parciales de orden dos, complementada por dos condiciones de contorno que reflejan el que la cuerda esté fija en sus extremos.

En la última ecuación de (1) se establecen las *condiciones iniciales* que la solución ha de satisfacer en el instante t. Al tratarse de una ecuación de segundo orden en tiempo imponemos tanto la configuración inicial de u, u_0, como la velocidad u_1.

Mediante u_t (resp. u_x) denotamos la derivada parcial de u con respecto a t (resp. x). De este modo, u_{tt} representa la derivada parcial de orden dos de u con respecto de t dos veces. Más adelante también utilizaremos la notación ∂_t (resp. ∂_x) para denotar el operador de derivación parcial con respecto a t (resp. x). Asimismo ∂_t^2 (resp. ∂_x^2), denotará el operador de derivación parcial con respecto a t (resp. x) dos veces.

Este es uno de los modelos más clásicos que se analiza sistemáticamente en todos los textos básicos de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En 1747 d'Alembert en [D1,2] propuso la siguiente expresión para la solución general de la ecuación de ondas sin condiciones de contorno

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t). \tag{2}$$

Conviene observar que la expresión de la solución u que (2) proporciona no es más que la superposición de dos *ondas de transporte*: $f(x+t)$ que se desplaza sin deformarse a velocidad uno en la dirección negativa del eje de las x, mientras que $g(x-t)$ lo hace hacia la derecha. No es difícil llegar a la conclusión de que (2) proporciona la expresión de la solución general de la ecuación de ondas. En efecto, basta observar que el operador diferencial $\partial_t^2 - \partial_x^2$ involucrado en la ecuación de ondas se puede factorizar como

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x). \tag{3}$$

Vemos entonces que las dos ondas de transporte en las que se descompone la solución, corresponden a las soluciones de las ecuaciones

$$(\partial_t + \partial_x) u = 0; \ (\partial_t - \partial_x) u = 0 \tag{4}$$

respectivamente. En efecto, la solución de la primera ecuación es de la forma $u = g(x-t)$ mientras que la de la segunda es $u = f(x+t)$.

Posteriormente, D. Bernouilli en 1753 en [Be] obtuvo soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante de la siguiente forma:

$$u = \sum_{k \geq 1} \left[a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} t\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right). \tag{5}$$

De este modo se dieron los primeros pasos en el establecimiento de uno de los métodos clásicos en la resolución de las EDP: *el método de separación de variables o de Fourier.*

Cabe plantearse por qué este método lleva el nombre de J. Fourier si D. Bernouilli ya lo utilizó. Esto es así porque sólo en el histórico trabajo de 1822 de J. Fourier sobre la ecuación del calor [F] quedó completamente establecido el programa a seguir a la hora de resolver una EDP a través de este método y que involucra varias etapas:

- Descomposición de los datos del problema en series de Fourier.
- Obtención de la evolución de cada coeficiente de Fourier en función de la EDP y de los datos.
- Reconstrucción de la solución como superposición de cada una de las componentes de Fourier (serie de Fourier).

Si bien D. Bernouilli obtuvo efectivamente una expresión del tipo (5), en su tiempo aún no estaban claras las nociones de función y de representación analítica de una función ([L]) por lo que era aún demasiado pronto para establecer de forma sistemática el método de Fourier. Sólo J. Fourier en [F] indicó con claridad cómo, dada una función, se pueden calcular sus coeficientes de Fourier. De este modo estableció las bases de una de las herramientas más potentes de las Matemáticas: El Análisis de Fourier o Análisis Armónico. El lector interesado por este apasionante pasaje histórico puede consultar el artículo de N. Luzin [L].

Una primera cuestión importante que se plantea de manera natural es la coincidencia de expresiones del tipo (2) y (5). Efectivamente, en la medida en que para datos iniciales fijados (posición y velocidad inicial de la cuerda) la solución de (1) es única, y si las dos representaciones (2) y (5) son válidas, ambas han de coincidir.

Esto es efectivamente así. Consideremos uno de los términos involucrados en (5). Por ejemplo $\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$. Utilizando las fórmulas trigonométricas habituales vemos que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+t)\right)+\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[f_k(x+t)+f_k(x-t)\right]\end{aligned}$$

donde

$$f_k(z)=\sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right).$$

Tratando de un modo análogo los demás términos de (5) vemos que efectivamente, la función desarrollada en series de Fourier (5) puede ser escrita en la forma (2) como superposición de dos ondas de transporte.

Esta simple observación ilustra el modo en que en un desarrollo en serie de Fourier puede detectarse la velocidad a la que se propaga la función representada por dicha serie. Efectivamente, tal y como mencionábamos anteriormente, como se desprende de la fórmula de d'Alembert (2), la velocidad de propagación en el modelo (1) es uno. Esto puede observarse también en el desarrollo en serie de Fourier (5) por el simple hecho de que a una oscilación espacial $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ le corresponda una respuesta temporal de la forma $a_k\sin(k\pi t/L)+b_k\cos(k\pi t/L)$. Se observa asimismo que en la ecuación de ondas considerada hay una ausencia de *dispersión*, entendiendo por dispersión el fenómeno según el cual los diferentes componentes de Fourier se propagan a velocidades distintas, tal y como ocurre en el clásico modelo de Korteweg-de Vries [KdV] para el avance de las olas o en la ecuación de Schrödinger.

Evidentemente, los efectos dispersivos hacen que la forma de la solución cambie completamente en el tiempo.

Para convencerse de ésto basta considerar la ecuación de KdV linealizada:

$$u_t + u_{xxx} = 0.$$

En este caso, si el dato inicial es de la forma

$$u(x,0) = \sum_{k\geq 1} a_k e^{ik\pi x} \tag{6}$$

la solución correspondiente es

$$u = \sum_{k\geq 1} a_k e^{ik^3\pi^3 t} e^{ik\pi x}. \tag{7}$$

Observamos entonces que las diferentes componentes de Fourier de la solución son de la forma $e^{ik^3\pi^3 t}e^{ik\pi x} = f_k(k^2\pi^2 t + x)$ con $f_k(z) = e^{ik\pi z}$. Por lo tanto, cada componente de Fourier se propaga a una velocidad distinta $-k^2\pi^2$.

3 La óptica geométrica

La expresión (2) de la solución de la ecuación de ondas como superposición de dos ondas de transporte indica que en el modelo (1) la información se propaga a lo largo de las curvas características. Las curvas características son poligonales a trozos en el espacio-tiempo constituidas por segmentos de pendiente ± 1 que se reflejan en la frontera de la cuerda (tanto en el extremo $x = 0$, L) (véase fig. 3.1)

La misma filosofía es válida en varias dimensiones espaciales. Consideramos por ejemplo las vibraciones de una membrana o tambor que ocupa un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$. En este caso, si $u = u(x, y, t)$ representa la deformación de la membrana, i.e. la altura a la que se encuentra el punto (x, y) de la membrana en el instante t, el sistema que describe la evolución de u viene dado por la ecuación de ondas bidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x,y) \in \Omega, t > 0 \\ u = 0, & (x,y) \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y),\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y), & (x,y) \in \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

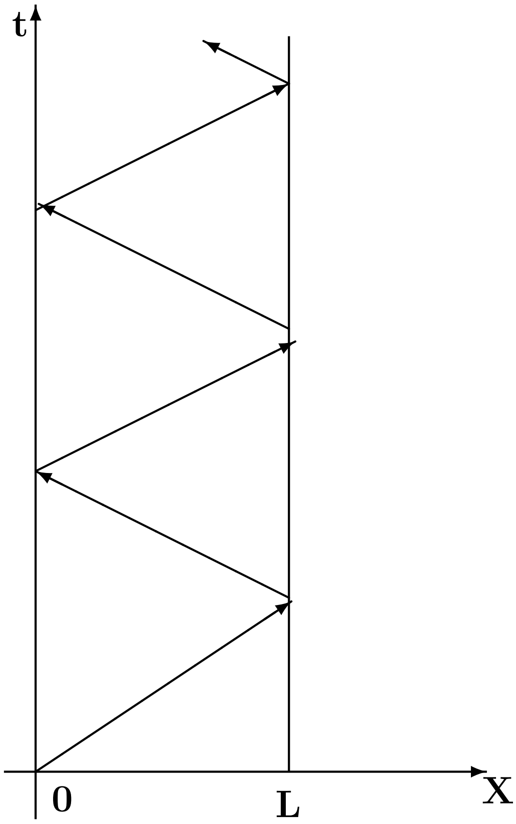

Figura 3.1.

En (8) Δ denota el *operador Laplace*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{9}$$

La primera ecuación de (8) es la ecuación de ondas bidimensional. La segunda ecuación de (8) proporciona una *condición de contorno* que en este caso representa que la membrana está fijada en su borde (como en el caso de un tambor). Las dos últimas condiciones establecen los datos iniciales que proporcionan la configuración y velocidad inicial de la membrana en el instante $t = 0$ y que permiten determinar de manera única la solución u.

También en el caso de la ecuación de ondas bidimensional o incluso en más dimensiones espaciales la evolución subyacente en el modelo (8) puede entenderse a través de la propagación a lo largo de las curvas o rayos característicos. Sin embargo, con el objeto de definir con claridad lo que es un rayo hemos de utilizar las nociones básicas de *Optica Geométrica*. Un rayo es una poligonal a trozos que en el interior de la membrana Ω se propaga en el espacio tiempo en una dirección constante y a velocidad uno. Sin embargo, al alcanzar la frontera el rayo rebota según las leyes de óptica geométrica: ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión. Véase la figura 3.2:

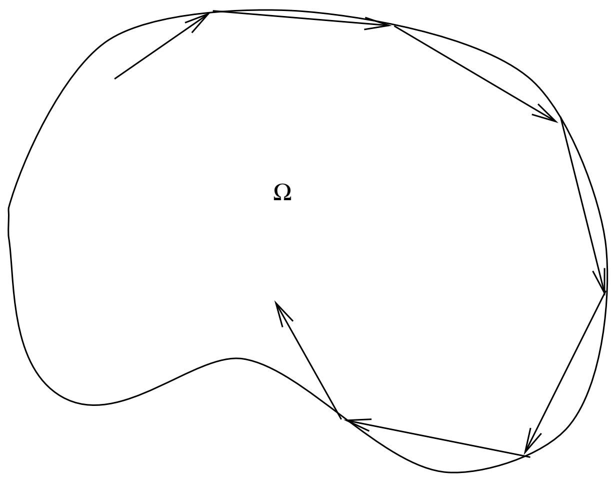

Figura 3.2.
Proyección sobre Ω de un rayo.

Conviene observar que esta ley de propagación y reflexión está bien definida siempre y cuando el rayo no sea tangente a la frontera de Ω en cuyo caso pueden ocurrir dos cosas. O bien el rayo no se modifica al tocar la frontera (véase la figura 3.3) o bien el rayo entra en la frontera y adopta su forma curva hasta salir nuevamente (véase la figura 3.4).

De este modo hemos definido los rayos. Sin embargo, el análisis de las soluciones del modelo (8) a lo largo de estos rayos dista de ser tan simple como en una dimensión espacial quedó de manifiesto a través de la fórmula de d'Alembert (2). En realidad este análisis exige de desarrollos asintóticos sofisticados. El lector interesado podrá consultar en particular los trabajos [B], [K], [R], [T] y [CLOT].

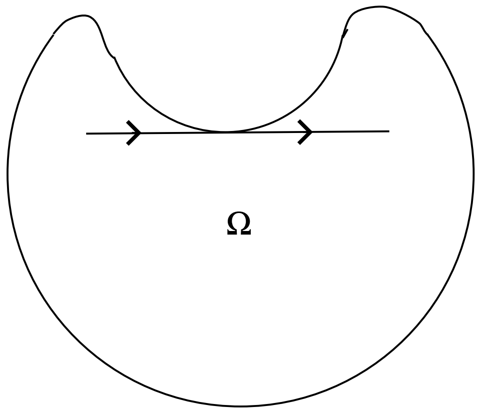

Figura 3.3.

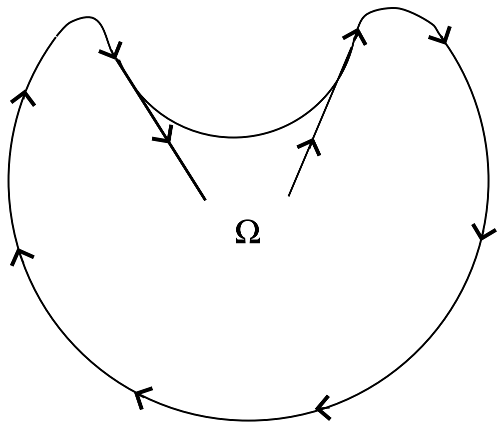

Figura 3.4.

Pero hasta ahora no hemos hablado más que de la propagación de ondas en un *medio homogéneo*, constituido por un único material distribuido con una densidad constante sobre un dominio Ω. Como describimos seguidamente, en el ámbito de los *medios heterogéneos*, parte de lo dicho hasta ahora deja de ser válido y surgen nuevos fenómenos debidos al comportamiento de las ondas en las *interfases*, i.e. en los lugares en los que el material o su densidad cambian de tipo.

Con el objeto de ilustrar estos nuevos fenómenos consideremos el ejemplo de un tambor Ω de $\mathbb{R}^2$ constituido por dos materiales. El interno que ocupa la región central Ω_i y el externo que ocupa la corona Ω_e tal y como ilustra la figura 3.5.

Como decíamos, el tambor está constituido por dos materiales distintos. Suponemos que en Ω_i la velocidad de propagación de las ondas es a_i, mientras que en Ω_e la velocidad es a_e, con $a_i > 0$, $a_e > 0$ y $a_i \neq a_e$. Para describir las vibraciones de este tambor conviene introducir dos funciones $u_i = u_i(x, y, t)$ y $u_e = u_e(x, y, t)$, definidas en Ω_i y Ω_e respectivamente. Estas funciones han de resolver las ecuaciones

$$u_{i,tt} - a_i^2 \Delta u_i = 0, \ (x, y) \in \Omega_i, \ t > 0 \tag{10}$$

$$u_{e,tt} - a_e^2 \Delta u_e = 0, \ (x, y) \in \Omega_e, \ t > 0. \tag{11}$$

Además, si suponemos que el tambor está fijado en su borde exterior Γ habremos de imponer la condición de contorno

$$u_e = 0, \ (x, y) \in \Gamma, \ t > 0. \tag{12}$$

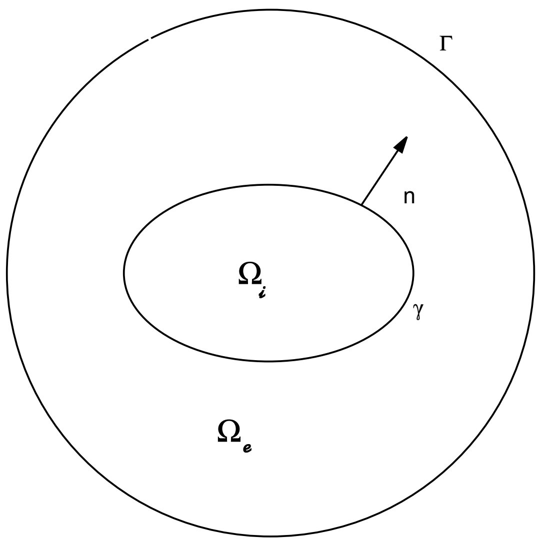

Figura 3.5.
Tambor constituido por dos materiales que ocupan respectivamente Ω_i y Ω_e.

Pero el sistema no estará completo hasta que hayamos introducido también las *condiciones de interfase* o *de transmisión* en la frontera común γ. Con el objeto de que ambas partes del tambor permanezcan unidas a lo largo de la vibración hemos de imponer la condición de continuidad de los desplazamientos:

$$u_i = u_e,\ (x,y) \in \gamma,\ t > 0. \tag{13}$$

Pero también la tensión del tambor habrá de ser la misma a ambos lados de γ. Obtenemos así la condición:

$$a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = a_e \frac{\partial u_e}{\partial n},\ (x,y) \in \gamma,\ t > 0, \tag{14}$$

siendo n el vector normal unitario a γ que apunta hacia Ω_e, de modo que $\partial \cdot / \partial n$ denota la derivada normal en esta dirección, i.e.

$$\partial f / \partial n = \nabla f \cdot n, \tag{15}$$

siendo $\cdot$ el producto escalar Euclídeo.

La noción de rayo o de curva característica ha de ser modificada de acuerdo a las condiciones de transmisión (13)-(14). Consideremos por ejemplo un rayo que arranca de un punto de Ω_i en una determinada dirección tal y como se indica en la Figura 3.6. Mientras el rayo permanece en Ω_i se trata de un segmento rectilíneo que se traslada a una velocidad a_i. Al cabo de un cierto tiempo el rayo alcanza la interfase γ. En ese momento caben esencialmente tres posibilidades:

(a) El rayo se refleja según las leyes de la Optica Geométrica en Ω_i

(b) El rayo se refracta pasando a Ω_e

(c) El rayo se divide en dos. Un rayo refractado que pasa a Ω_e y otro reflejado en Ω_i (véase la Figura 3.6) .

Conviene recordar que el ángulo θ_e de refracción en función del ángulo de incidencia θ_i viene dado por la fórmula (véase la Figura 3.7):

$$a_i \mid \sin\theta_e \mid = a_e \mid \sin\theta_i \mid . \tag{16}$$

De la fórmula (16) se desprende en particular que cuando

$$a_e > a_i, \tag{17}$$

si el rayo proveniente de Ω_i incide sobre la interfase γ de manera casi tangente de modo que $\mid \sin\theta_i \mid$ sea muy próximo a la unidad, entonces

$$a_e \mid \sin\theta_i \mid > a_i > a_i \mid \sin\theta_e \mid . \tag{18}$$

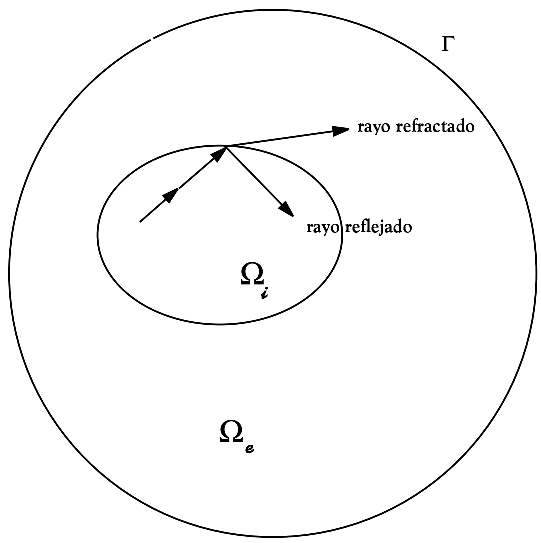

Figura 3.6.

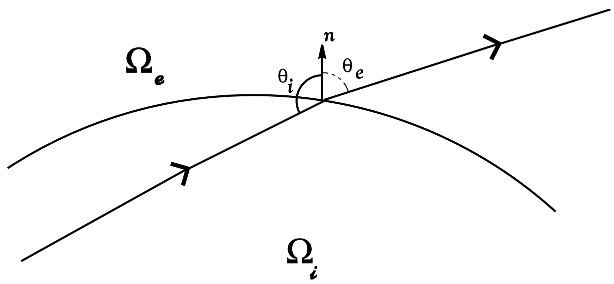

Figura 3.7.
Rayo refractado.

Cuando (18) ocurre, la ecuación (16) evidentemente no admite ninguna solución θ_e. Por tanto no existe dirección de refracción y el rayo es completamente reflejado en Ω_i. Este hecho, en geometrías adecuadas (Ω_i convexo, por ejemplo), puede dar lugar a rayos que permanecen eternamente capturados en el medio Ω_i (véase la Figura 3.8):

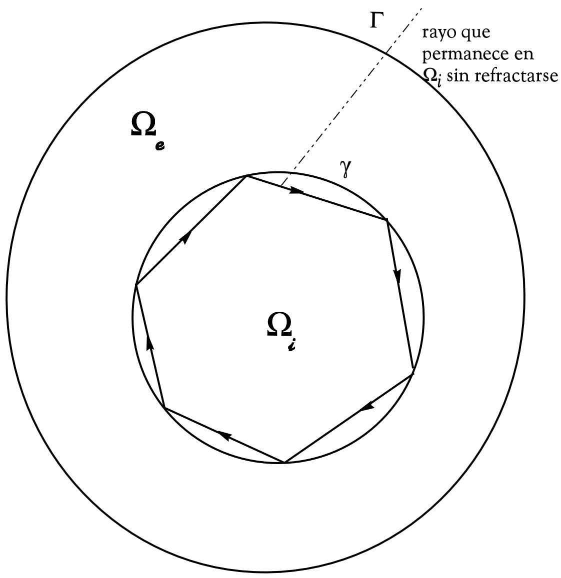

Figura 3.8.

Esto puede ser interpretado de dos maneras distintas si bien equivalentes: Como decíamos anteriormente, hay rayos y por tanto vibraciones del tambor que permanecen capturadas en Ω_i. O, visto de otro modo, hay vibraciones que son invisibles o imperceptibles desde el medio exterior Ω_e.

Este hecho tiene consecuencias evidentes en muchos problemas inversos o de control que se plantean en el marco de las vibraciones en medios heterogéneos. En la siguiente sección describiremos algunas consecuencias importantes en la propagación de señales sísmicas.

Conviene sin embargo hacer una matización. Las vibraciones que se localizan en Ω_i no lo están al 100%. Es decir, estas vibraciones dan también lugar a una pequeña vibración de la membrana exterior Ω_e. Lo que ocurre es que el ratio entre la energía de la vibración en Ω_e y el de la vibración en Ω_i puede hacerse más y más pequeño a medida que la vibración se concentra a lo largo del rayo capturado en Ω_i. El ínfimo de este ratio es por tanto cero, lo cual no garantiza que haya vibraciones que dejan inmóvil Ω_e. De hecho este tipo de vibraciones (aquéllas en las que la corona exterior de la membrana Ω_e permanece inmóvil) no puede existir como se deduce fácilmente del Teorema de Unicidad de Holmgren (véase [J]).

El teorema de Unicidad de Holmgren es una consecuencia del célebre Teorema de Cauchy-Kowaleskaya. En este Teorema Sonia Kowalevskaya, en la segunda mitad del siglo XIX, culminó con éxito el programa de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) iniciado por Cauchy mediante desarrollos en series de potencias. La idea de Cauchy, que describimos brevemente, hoy en día nos puede resultar muy natural si bien en su momento supuso una auténtica revolución. Consideremos una EDO lineal en el que tanto los coeficientes como los datos son funciones analíticas reales. Esto nos permite desarrollarlas en series de potencias. Busquemos entonces la solución del problema de valores inciales en esta misma clase de funciones analíticas. Para encontrarla basta determinar los sucesivos coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la solución. Esto puede hacerse de forma recurrente a partir de los coeficientes de los desarollos de los coeficientes de la ecuación y de los datos. Ahora bien, no es difícil convencerse de que la expresión de estos coeficientes se complica a medida que avanzamos en la recurrencia. Lo interesante de este método es que, gracias al criterio de la mayorante M de Weierstrass, se puede probar sin demasiada dificultad la convergencia local de la nueva serie solución. De este modo se produjo un avance notable en la teoría de las EDO: El problema de valores inciales para una ecuación lineal con coeficientes analíticos admite una única solución local analítica. El método propuesto por Cauchy proporciona asimismo un verdadero método de cálculo efectivo de la solución.

Era sumamente natural pensar en extender este método al marco de la resolución del problema de Caucy para EDP. Pero en esta extensión surgía una nueva dificultad que describimos a continuación. En el marco de las EDP, los datos de Cauchy están dados en una hipersuperficie que también habrá de ser analítica. Pero la aniliticidad de la hipersuperficie puede no bastar puesto que hay casos en los que el método de Cauchy parece no funcionar pues la regla de recurrencia antes descrita no permite obtener de manera biunívoca los coeficientes de la solución. El lector podrá convencerse fácilmente de ésto analizando el problema de Cauchy para la ecuación del calor en la hipersuperficie $t = 0$:

$$u_t - \Delta u = 0; \quad u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x).$$

La ecuación del calor es de orden dos y por tanto damos datos de Cauchy tanto para u como para su derivada parcial u_t con respecto al tiempo. Pero el sistema resulta entonces estar sobredeterminado puesto que la condición de compatibilidad siguiente que se deriva de la ecuación es una condición necesaria para la existencia de solución:

$$\Delta u_0 = u_1.$$

Precisamente el problema de valores iniciales para la ecuación del calor es uno de los ejemplos más clásicos de EDP que todos los libros recogen en el que la solución puede ser obtenida explícitamente por convolución con el núcleo de Gauss, pero para ello sólo se impone un dato inicial $u(x,0)$.

En efecto, la solución es entonces $u = G * u_0$, siendo G el núcleo de Gauss

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$$

y denotando mediante $*$ la convolución en las variables espaciales, y es la única solución “razonable” de

$$u_t - \Delta u = 0; \quad u(x,0) = u_0(x),$$

sienco n el número de variables espaciales involucradas.

Kowalevskaya explicó de manera definitiva esta diferencia que se presenta al abordar las EDO y las EDP mediante el método de Cauchy. Para que el teorema de Cauchy sea válido en el marco de las EDP es necesario que la hipersuperficie sobre la que se imponen los datos de Cauchy sea *no característica.* Las hipersuperficies características son entonces las *malas*, aquéllas en las que el método de Cauchy no funciona, como lo es la hipersuperficie $t = 0$, para la ecuación del calor.

El teorema de Holmgren garantiza que cuando los coeficientes de la ecuación son analíticos y los datos son cero en una hipersuperficie no característica analítica, la única solución es la nula. Esto puede parecer una consecuencia trivial del teorema de Cachy-Kowalevskaya, pero no lo es puesto que la unicidad se garantiza para cualquier tipo de solución (incluso las soluciones distribucionales) y no sólo para las analíticas.

Pero puede parecer sorprendente que pretendamos aplicar este Teorema en el caso que nos ocupaba de una ecuación de ondas con coeficientes constantes a trozos que presentan un salto a lo largo de una interfase. Esto se puede hacer en dos tiempos. Primero se aplica en el dominio exterior Ω_e, de modo que si suponemos que la vibración deja inmóvil una parte abierta no vacía de Ω_e durante un tiempo suficientemente grande, por el teorema de Holmgren, acaba dejando inmóvil todo Ω_e. En la interfase se detecta entonces la ausencia de desplazamiento y de tensión. Esto permite ahora aplicar nuevamente el Teorema de Holmgren en Ω_i (puesto que la hipersuperficie interfase vertical en el espacio-tiempo no es característica) y deducir que todo Ω_i permanece también inmóvil.

De este modo vemos, como mencionábamos anteriormente, que no puede haber vibraciones concentradas al 100% en el dominio interior Ω_i.

4 Propagación de señales sísmicas

Un reciente artículo aparecido en Mundo Científico [CBBH] de cuatro geólogos franceses ilustra muy claramente la importancia de las ondas localizadas que acabamos de describir.

El problema que preocupa a este grupo de geólogos es la gran intensidad con la que se perciben en la ciudad de Grenoble (Francia) seísmos de escasa amplitud que en zonas no muy lejanas apenas son observados. Tal y como los autores del artículo explican se trata de un *fenómeno local*. En efecto,

> "la ciudad está construida en el centro de un valle excavado por los glaciares y repleto de sedimentos mucho más flexibles que la roca subyacente"

tal y como ellos indican.

Lo que ocurre entonces es que, reproduciendo literalmente parte del texto de [CBBH],

> "Las ondas se propagan más deprisa en un medio rígido que en un medio blando, y el contraste de velocidad en el límite entre los dos, sólo deja pasar bien la energía sísmica de lo rígido a lo blando. La consecuencia es que una vez en la cuenca las ondas casi no pueden escapar. Se reflejan entonces en la superficie y en las paredes rocosas. Estas reflexiones sucesivas conducen a fenómenos de resonancia a determinadas frecuencias que se traducen en la superficie en fuertes amplificaciones de los movimientos del suelo y en un aumento de su duración. Se comprende fácilmente que las consecuencias pueden ser dramáticas cuando estas frecuencias amplificadas corresponden a frecuencias de resonancia de los edificios".

Estos pasajes de este artículo divulgativo ilustran con claridad cómo los fenómenos de localización de ondas descritos en el apartado anterior pueden observarse en la naturaleza en el contexto de las ondas sísmicas y hasta qué punto pueden ser importantes en nuestra vida cotidiana.

En la Figura 4.1 ilustramos el fenómeno que se describe en este artículo y que es coherente con el análisis de la sección anterior. El medio blando Ω_i está rodeado por el medio más rígido Ω_e. Una onda proveniente de Ω_e entra en Ω_i pero queda capturada en su interior indefinidamente puesto que la energía no se transmite desde Ω_i a Ω_e. A medida que aumenta el ratio entre la velocidad de propagación en el medio rígido y el medio blando este fenómeno se acentúa. En efecto, con la notación de la sección anterior, cuanto más grande es el cociente

a_e/a_i, mayor es el abanico de ángulos de incidencia θ_i que dan lugar a ondas que permanecen atrapadas en Ω_i sin refractarse en absoluto. Esto hace posible que se tenga la situación de la figura 4.1 en la que la onda, una vez en Ω_i puede incidir en la interfase con un ángulo de 45° sin que haya transmisión de energía a Ω_e. Basta para ello con que $a_e/a_i > \sqrt{2}$.

El artículo antes citado concluye subrayando la importancia de los estudios teóricos y numéricos que se están desarrollando en este terreno. Efectivamente, tal y como ellos explican, el reto en la actualidad consiste en predecir si las normas impuestas a las empresas de construcción de edificios tradicionales son suficientes o no para garantizar la robustez de los edificios en caso de seísmos de una magnitud 5,5 que no se pueden excluir.

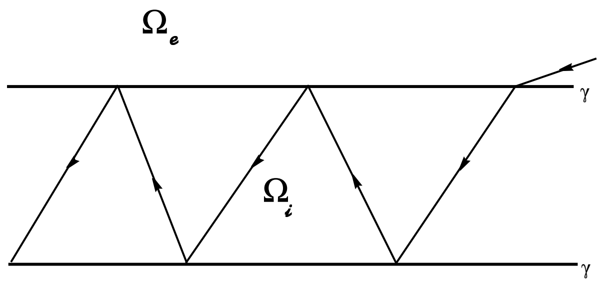

Figura 4.1.
Rayo que, proveniente de Ω_e, queda indefinidamente capturado en Ω_i.

La predicción del comportamiento de las construcciones humanas durante los seísmos y su control constituyen uno de los grandes retos de la ingeniería en nuestros días en los que las Matemáticas y la simulación numérica necesariamente desempeñan y habrán de seguir desempeñando un papel central (véase por ejemplo [BR] y [Si]). Tal y como ha quedado de manifiesto, el "ingenuo protagonista" es, una vez más, la ecuación de ondas.

5 Problemas inversos

Tal y como hemos mencionado en la introducción, con frecuencia, los problemas que se plantean en el ámbito de las aplicaciones tecnológicas, si bien involucran Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o Parciales (EDO/EDP) no pueden formularse en el marco clásico de los problemas de Cauchy o de contorno en los que se suponen conocidos los parámetros de la ecuación y los diversos datos y se trata de calcular (analítica o numéricamente) la solución (o probar su existencia y unicidad), sino que se trata de problemas inversos en los que hemos de identificar los parámetros de la ecuación a través de informaciones parciales o globales sobre las soluciones que somos capaces de medir y observar de forma experimental.

La teoría matemática sobre problemas inversos está hoy en día muy desarrollada y ha adquirido un alto grado de sofisticación. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, la monografía de V. Isakov [I] y su bibliografía.

Son muchos los problemas de la vida real en los que nos encontramos con problemas inversos. Cabe mencionar por ejemplo la prospección petrolífera, la exploración del subsuelo y diversas aplicaciones médicas como por ejemplo la tomografía computerizada, entre otros. Hay otros problemas de carácter más académico pero de gran belleza. Entre ellos cabe destacar el problema clásico conocido como "Can one hear the shape of a drum?", o, ¿Puede escucharse la forma de un tambor?. Obviamente, estamos aquí haciendo referencia a "tambores matemáticos" en los que la forma puede ser la de un abierto arbitrario del plano.

Desde un punto de vista matemático, para formular de manera precisa el problema, hemos de introducir el espectro del Laplaciano con condiciones de contorno de Dirichlet en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^2$. Conviene recordar que el Laplaciano es el operador de Laplace introducido en (7). Se trata de los números λ, denominados *autovalores*, para los cuales la ecuación elíptica

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda e, & (x,y) \in \Omega \\ e = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{19}$$

admite una solución no trivial $e = e(x,y) \not\equiv 0$.

La analogía de este problema de autovalores con el asociado a una matriz es clara. Cabe sin embargo resaltar que, en el marco del Laplaciano, hemos de imponer también la condición de Dirichlet que garantiza que $e = 0$ en la frontera del dominio Ω, lo cual refleja que el tambor está fijo en su borde. Obviamente, pueden considerarse otras condiciones de contorno, en función del problema físico considerado.

Conviene observar que este problema espectral surge de manera natural cuando se desarrollan en series de Fourier las soluciones de la ecuación de ondas o del calor. Por tanto, su relevancia va mucho allá del problema inverso que aquí nos ocupa.

La teoría de descomposición de operadores autoadjuntos compactos permite probar la existencia de una sucesión de autovalores reales positivos de multiplicidad finita $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ que tienden a infinito y de forma que la sucesión de autofunciones correspondientes constituyan una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ (el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable definidas en Ω). Más brevemente, a cada dominio Ω (a cada forma del tambor) le asignamos de este modo una sucesión no decreciente de números positivos $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ que tiende a infinito.

El problema inverso al que hacíamos referencia consiste en determinar la forma del tambor Ω a través del espectro.

Recientemente se dió una respuesta negativa al problema exhibiendo dos dominios poligonales (y no convexos) distintos que daban lugar al mismo espectro. Pero, a nuestro entender, el problema permanece aún abierto si nos limitamos a clases de dominios regulares y/o convexos. El lector interesado puede consultar el artículo recapitulativo de A. Sánchez-Calle a este respecto [SC].

Antes de continuar describiendo otras situaciones en las que estos problemas inversos intervienen conviene reflexionar un momento sobre las herramientas matemáticas a nuestra disposición a la hora de abordarlos. No tardaremos mucho en caer en la cuenta de que la herramienta por excelencia a la hora de estudiar este tipo de problemas es el Teorema de la Función Inversa (TFI). En efecto, los problemas inversos que normalmente se plantean suelen ser de carácter genuinamente no lineal. Esto quiere decir que la aplicación involucrada en el problema y que hemos de invertir es habitualmente no-lineal. En el ejemplo anterior la aplicación a invertir es aquélla que a un dominio Ω asocia su espectro $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$. Se trata efectivamente de una aplicación genuinamente no-lineal.

Como decíamos, el TFI es la herramienta adecuada para abordar los problemas inversos puesto que garantiza la invertibilidad local de una aplicación siempre y cuando ésta sea regular (basta con que sea diferenciable) y su diferencial sea invertible. Vemos por tanto que la resolución del problema inverso pasa por un estudio detallado del problema directo puesto que hemos de comprobar si la aplicación a invertir, la que proporciona el problema directo, es regular y su linealizada invertible.

Es por ello que el análisis de un problema inverso viene habitualmente precedido por el estudio detallado del problema directo correspondiente.

Conviene recordar que el TFI proporciona resultados de carácter puramente local y que la obtención de resultados globales necesita normalmente de desarrollos adicionales puesto que rara vez se pueden aplicar directamente las versiones globales del TFI (que garantizan que la aplicación no-lineal es globalmente invertible si la diferencial en todo punto lo es y con normas uniformemente acotadas, i. e. con una cota independiente del punto donde calculemos la diferencial). Para ilustrar este hecho consideremos un par de ejemplos. Consideramos la función real de una variable real $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x$ que es distinta de cero en todo punto. En cada punto x_0 la diferencial $f'(x_0) = e^{x_0}$ actúa como una aplicación lineal: $L_{x_0}y =< f'(x_0), y >=$

$e^{x_0}y$ que es invertible, siendo su inversa, $L_{x_0}^{-1}y = e^{-x_0}y$. Por tanto se deduce del TFI que la función e^x es localmente invertible (e^x establece una biyección de un entorno de cada punto x_0 en un entorno de su imagen e^{x_0}). Pero, obviamente, no es globalemnte invertible pues e^x es un número real positivo para cada real x, y por tanto los números negativos quedan fuera de la imagen de e^x. Esto es debido a que la inversa de la diferencial, e^{-x_0}, no está inferiormente acotada cuando x_0 tiende a $-\infty$. Sin embargo la función $g(x) = 2x + \sin(x)$ es globalemente invertible puesto que su diferencial $g'(x) = 2+\cos(x)$ es invertible en cada punto con inversa $[2 + \cos(x)]^{-1}$ uniformemente acotada entre $1/3$ y 1.

Para concluir esta sección presentamos un problema inverso relacionado con la ecuación de ondas que nos ocupa y que podemos resolver completamente.

Consideramos una cuerda de longitud L desconocida que vibra según el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{20}$$

al estar fija en sus extremos $x = 0$ y L.

Suponemos que, a través de un sensor, podemos medir la tensión que las vibraciones de la cuerda producen en el extremo $x = 0$. Obviamente, al desconocer la longitud total de la cuerda L desconocemos la ubicación del otro extremo $x = L$. Lo que si sabemos es que la cuerda está fija también en el otro extremo.

¿Podemos identificar la longitud L a través de las mediciones que el sensor proporciona de la tensión en el extremo conocido $x = 0$?

La respuesta es, como vamos a ver, afirmativa.

Como indicamos anteriormente las soluciones de (20) pueden desarrollarse en series de Fourier del siguiente modo:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left[a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)\right] \sin(k\pi x/L). \tag{21}$$

La tensión en el extremo $x = 0$ viene dada por

$$u_x(0,t) = \sum_{k\geq 1} \frac{k\pi}{L} \left[a_k \sin(k\pi t/L) + b_k \cos(k\pi t/L)\right]. \tag{22}$$

Se observa que la tensión es siempre una función periódica de período $2L$. Por tanto, la periodicidad de la tensión ($2L$) está relacionada de manera unívoca (y en este caso lineal) con la longitud L de la cuerda. Esto responde afirmativamente al problema inverso planteado.

Pero cabe plantearse aún una cuestión más. ¿Cuántas mediciones hemos de hacer en $x = 0$ para determinar completamente la longitud? Dejamos esta cuestión para el lector interesado.

Como hemos mencionado en la introducción, son muchos los contextos en los que se plantean problemas inversos. Entre ellos cabe destacar la prospección petrolífera, las numerosas aplicaciones médicas (tomografía computerizada, etc.), radares, etc. En realidad, como hemos visto, cada vez que el TFI se aplica estamos, esencialmente, resolviendo un problema inverso. Si reflexionamos un poco a este respecto nos daremos cuenta de cómo de habitual es enfrentarse a problemas inversos en la vida diaria que, sin embargo, resolvemos a menudo, afortunadamente, sin apelar al TFI.

6 Simulación numérica y ondas espúreas

Tal y como mencionabamos más arriba y como se pone de manifiesto en el artículo sobre ondas sísmicas al que hemos hecho referencia en la sección 4, en muchos problemas de la vida real es necesario un análisis riguroso de fenómenos de ondas que han de ir acompañados de simulaciones numéricas.

La gran potencia de cálculo de los ordenadores de hoy nos permite realizar en nuestro ordenador personal y/o portatil cálculos muy sofisticados que hasta hace unos años exigían trabajar con los más grandes ordenadores. Esta potencia de cálculo no va a hacer más que aumentar en los próximos años. Cabe entonces plantearse la siguiente cuestión ¿Es necesario continuar con un análisis matemático riguroso de las ondas o podemos simplemente confiar en nuestra creciente capacidad de cálculo y de simulación numérica?

No es fácil responder a esta pregunta. Si uno reflexiona con rigor sobre la misma enseguida se dará cuenta que, para responder con total certeza a esta cuestión es necesario realizar un análisis matemático riguroso de la adecuación de los esquemas numéricos planteados al problema en cuestión. Pero entonces, implícitamente, estamos respondiendo negativamente a la pregunta planteada.

Nos encontramos pues ante la paradoja de necesitar responder negativamente a la cuestión para poder reflexionar seriamente sobre la misma.

A pesar de esta aparente paradoja son muchos los que creen que las Matemáticas, en el sentido que las hemos entendido en este siglo, tienen sus días contados, al menos en el contexto de los problemas abordados en estas notas, y que todos y cada uno de los problemas pueden ser resueltos a base de calcular más y más con nuestro ordenador que mejorará sus prestaciones cada día.

En esta sección vamos a retomar el problema del final de la sección anterior para concluir que: Efectivamente, mediante métodos numéricos adecuados, se puede simular la realidad del modelo continuo de manera satisfactoria. Pero, el desarrollo de métodos numéricos adecuados exige un análisis matemático previo muy fino.

Al final del camino nos encontraremos pues con una respuesta sumamente salomónica y tendremos que rendirnos ante la evidencia de que sólo combinando un estudio teórico riguroso y los métodos numéricos se puede avanzar con paso firme, aún a riesgo de hacerlo un poco más lentamente.

Retomemos por tanto las ecuaciones de la vibración de una cuerda de longitud L fija en sus extremos $x = 0,\ L$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \tag{23}$$

Como ya habíamos indicado, las soluciones de (23) pueden desarrollarse en series de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1} \left[a_k \sin\left(k\pi t/L\right) + b_k \cos\left(k\pi t/L\right) \right] \sin\left(k\pi x/L\right) \tag{24}$$

con coeficientes $\{a_k,\ b_k\}_{k\geq 1}$ que vienen determinados unívocamente por los datos iniciales $\{u_0(x),\ u_1(x)\}$ de modo que

$$u_0(x) = \sum_{k\geq 1} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right);\ u_1(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{k \geq 1} k\, a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{25}$$

Conviene también observar que (23) es un modelo puramente *conservativo* en el que no se tiene en cuenta ningún fenómeno de rozamiento y/o disipación. Este hecho queda perfectamente de manifiesto en la *ley de conservación de la energía*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\mid u_x(x,t) \mid^2 + \mid u_t(x,t) \mid^2 \right] dx = Cte. \tag{26}$$

En efecto, se tiene

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{27}$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^L \left[u_x u_{xt} + u_t u_{tt} \right] dx \\ &= \int_0^L \left\{ \left[-u_{xx} + u_{tt} \right] u_t \right\} dx + u_x(x,t) u_t(x,t) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

gracias a la ecuación y a las condiciones de contorno.

A la hora de aproximar numéricamente las soluciones de (23) la primera idea que surge de manera natural es la de introducir una semi-discretización en espacio para aproximar (23) mediante un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para ello, dado un número natural N descomponemos el intervalo $[0, L]$ que ocupa la cuerda en reposo en N subintervalos iguales. Con este objetivo, introducimos la partición del intervalo $[0, L]$:

$$x_0 = 0,\ x_j = jh,\ j = 1, \cdots, N+1 \tag{29}$$

donde

$$h = L/(N+1). \tag{30}$$

Aproximamos la función $u(x, t)$ mediante $N+2$ funciones que dependen exclusivamente del tiempo t:

$$u_0(t), \cdots, u_{N+1}(t). \tag{31}$$

Cada función $u_j(t)$ proporciona una aproximación de $u(x, t)$ en el punto $x_j = jh$ del mallado.

Hemos de introducir un sistema de EDO que determine las funciones $\{u_j(t)\}_{j \leq 0, \cdots, N+1}$ de manera única y que proporcione una buena aproximación de u. Para ello, mediante el desarrollo de Taylor observamos que

$$u_{xx}(x_j, t) \sim \frac{u(x_{j+1}, t) + u(x_{j-1}, t) - 2u(x_j, t)}{h^2}.$$

Por lo tanto parece natural reemplazar la ecuación de ondas por las ecuaciones diferenciales

$$u_j''(t) - \frac{[u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t)]}{h^2} = 0,\ t > 0$$

para los puntos interiores del mallado correspondientes a los índices $j = 1, \cdots, N$.

Por otra parte, las condiciones de que la cuerda está fija en sus extremos se reflejan en que

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0,\ t > 0.$$

Obtenemos así el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\overrightarrow{u}'' + \frac{1}{h^2} A \overrightarrow{u} = 0,\ t > 0 \tag{32}$$

donde el vector $\overrightarrow{u} = (u_1, \cdots, u_N)^t$ (excluimos los valores extremos u_0 y u_{N+1} puesto que $u_0 \equiv u_{N+1} \equiv 0$) siendo A la matriz tridiagonal $N \times N$ con valor constante 2 en la diagonal principal y con valor constante -1 en las diagonales superior e inferior. En el caso $N=5$ esta matriz es de la forma

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Se trata de una matriz tridiagonal, simétrica y definida positiva.

Los autovalores y autovectores de A se conocen explícitamente. Recordemos que el número λ es un autovalor de la matriz A si existe un vector e tal que $Ae=\lambda e$. En efecto, en el caso que nos ocupa,

$$\frac{1}{h^2}A\overrightarrow{\phi^k}=\lambda^k\overrightarrow{\phi}^k \tag{34}$$

si y solamente si

$$\lambda_h^k=\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) \tag{35}$$

y (módulo una constante multiplicativa)

$$\overrightarrow{\phi_h^k}=\begin{bmatrix} \sin(k\pi h/L) \\ \sin(2k\pi h/L) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sin(Nk\pi h/L) \end{bmatrix} \tag{36}$$

para $k=1,\dots,N$.

Conviene observar que los autovalores y autovectores dependen de $h=L/(N+1)$ o, lo que es lo mismo, de N, puesto que la matriz A es de dimensión $N\times N$.

Conociendo el espectro de A se puede dar la expresión de la solución general de la semi-discretización (32). En efecto, tenemos

$$\overrightarrow{u}(t)=\sum_{k=1}^{N}\left[a_k\sin\left(\sqrt{\lambda_h^k}t\right)+b_k\cos\left(\sqrt{\lambda_h^k}t\right)\right]\overrightarrow{\phi_h^k}. \tag{37}$$

La expresión (37) es análoga a la obtenida en (24) para la solución general de la ecuación de ondas mediante series de Fourier. Conviene observar que:

- En (37) tenemos una suma finita para $k=1,\cdots,N$, pero $N\to\infty$ cuando $h\to 0$. Es decir, la suma finita (37) se convierte en una serie de la forma (24) cuando el peso h del mallado se afina;

- Para cada k fijo, los autovalores

$$\lambda_h^k \to \frac{k^2\pi^2}{L^2} \tag{38}$$

cuando $h \to 0$ que son los autovalores que surgen en la descomposicón en series de Fourier (24) de las soluciones del problema continuo;

- Los autovectores $\overrightarrow{\phi_h^k}$ no son más que la evaluación de las autofunciones $\sin(k\pi x/L)$ del problema continuo en los puntos del mallado.

Por todo ello, (32) es, a todas luces, una buena aproximación de la ecuación de ondas (23). En realidad, no es difícil comprobar que, *conocidos los datos iniciales* $\{u_0, u_1\}$, si resolvemos (32) con los datos iniciales naturales

$$\begin{cases} u_j(0) = u_{0,j} = u_0(x_j), & j = 1, \cdots, N \\ u_j'(0) = u_{i,j} = u_1(x_j), & j = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{39}$$

las soluciones de (32) cuando $h \to 0$ convergen a las de (23).

Un análisis un poco más riguroso de la proximidad entre (37) y (24) plantea de manera natural cómo de uniforme es la convergencia de los autovalores λ_h^k con respecto a k.

En la siguiente figura representamos las raíces cuadradas de los autovalores del problema continuo y del problema discreto para $L = \pi$.

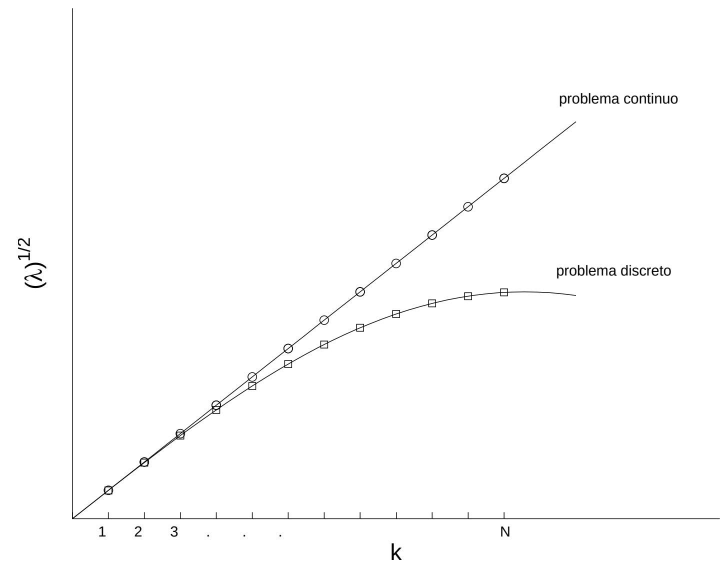

Figura 6.1.
Problema continuo: $\sqrt{\lambda} = k$.
Problema discreto: $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{h}\sin(kh/2)$.

Esta gráfica pone de manifiesto que la curva de autovalores del problema discreto se separa de manera importante de la curva (recta) correspondiente a los autovalores del problema continuo en cuanto k aumenta.

¿Qué repercusión tiene este hecho?

Volvamos al problema inverso analizado en la sección anterior en el que se trataba de identificar la longitud L de la cuerda a través de las mediciones de la tensión de sus vibraciones en el extremo $x = 0$. Obtuvimos una respuesta satisfactoria observando que las soluciones de la ecuación de ondas en el intervalo de longitud L son periódicas de período $2L$.

Calculemos ahora la tensión en $x = 0$ asociada al sistema semi-dicreto. Habida cuenta que

$$u_x(0,t) \sim \left[u(x_1,t) - u(0,t)\right]/h \tag{40}$$

parece natural definir la *tensión discreta* del siguiente modo:

$$\tau(t) = \frac{u_1(t)}{h}. \tag{41}$$

En virtud de (37) la tensión $\tau(t)$ asociada a una solución del sitema semi-discreto (32) viene dada por

$$\tau(t) = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left[a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_h^k}t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_h^k}t\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi h}{L}\right). \tag{42}$$

Comparemos el comportamiento de las tensiones discretas (42) en relación a las de la cuerda vibrante real (que, sabemos, son funciones periódicas del período $2L$).

Para hacerlo, consideramos soluciones particulares de (32) lo más simples posible. Para ello tomamos coeficientes

$$b_k = 0, \quad \forall k = 1, \cdots, N \tag{43}$$

y

$$a_k = 0,\ k = 1, \cdots, N-2;\ a_{N-1} = \frac{h}{\sin\left((N-1)\pi h/L\right)}; a_N = \frac{-h}{\sin\left(N\pi h/L\right)}, \tag{44}$$

de modo que la solución correspondiente de (32) sea

$$\overrightarrow{u}(t) = h\left[\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_h^{N-1}}t\right)\overrightarrow{\phi}_h^{N-1}}{\sin((N-1)\pi h/L)} - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_h^{N}}t\right)\overrightarrow{\phi}_h^{N}}{\sin(N\pi h/L)}\right] \tag{45}$$

y la tensión discreta correspondiente

$$\tau(t) = \sin\left(\sqrt{\lambda_h^{N-1}}t\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda_h^N}t\right). \tag{46}$$

Es fácil comprobar que los coeficientes a_{N-1} y a_N son del orden de $L/2\pi$ y $-L/2\pi$ respectivamente cuando $h \to 0$. Por tanto la energía de la solución (45) del problema semi-discreto (45) es del orden de la unidad.

Sin embargo, ¿qué ocurre con la tensión semi-discreta $\tau(t)$ de (46)?

Conviene observar que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_h^N} &= \frac{2}{h}\sin\left(\frac{N\pi h}{2L}\right) = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{((N-1)+1)\pi h}{2L}\right)\\
&= \frac{2}{h}\left[\sin\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right) + \cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\right]\\
&= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\sqrt{\lambda^{N-1}h} + \frac{2}{h}\sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\cos\left(\frac{(N-1)\pi h}{2L}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\sqrt{\lambda_h^{N-1}} + \frac{2}{h}\sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi h}{L}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_h^N} - \sqrt{\lambda_h^{N-1}} &= \sqrt{\lambda_h^{N-1}}\left[1-\cos\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\right] + \frac{2}{h}\sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi h}{L}\right)\\
&= O(h^2)\sqrt{\lambda_h^{N-1}} + O(h) = O(h).
\end{aligned}$$

Utilizando entonces el desarrollo de Taylor vemos que

$$\mid \tau(t) \mid = O(h) \mid t \mid . \tag{47}$$

¿Qué quiere decir (47)?

Esta cota significa que, para detectar que la solución del problema semi-discreto tiene una energía total del orden de la unidad, habremos de medir su tensión durante un intervalo temporal del orden de $1/h$. Evidentemente, este fenómeno no hace más que agravarse cuando $h \to 0$, pues las mediciones habrían de hacerse en intervalos temporales que tienden a infinito.

De este modo se pone de manifiesto la inadecuación del esquema semi-discreto (32) a la hora de abordar el problema inverso de la determinación de la longitud de la cuerda a través de la tensión.

Y, sin embargo, tal y como habíamos mencionado, (32) es un esquema satisfactorio a la hora de obtener una buena aproximación de las soluciones de (23) para datos iniciales fijos.

¿Qué está ocurriendo entonces? En un problema inverso desconocemos absolutamente la forma en que la energía de las soluciones puede distribuirse sobre las diferentes componentes de Fourier. Por ello, una convergencia puntual del espectro como en (39), para cada k fijo, es insuficiente y precisamos convergencias uniformes con respecto a k.

Pero, tal y como se desprende de la figura 6.1, en el caso presente, la rapidez de la convergencia se deteriora muy rápidamente cuando k aumenta.

¿Qué podemos hacer entonces? ¿Hay alguna forma de "arreglar" el esquema numérico (32) para garantizar su buen comportamiento en el problema inverso? Curiosamente esto puede hacerse pero a base de despreciar parte de la información que el esquema numérico proporciona.

Retomemos la solución (37) que el esquema numérico proporciona. De la figura 6.1 se desprende que la proximidad del espectro continuo y numérico mejora cuando nos limitamos a considerar autovalores correspondientes a índices $k \leq \delta N$ con $\delta > 0$ pequeño.

¿Qué ocurre entonces cuando truncamos la suma (37) para considerar

$$\overrightarrow{u}_{\delta}(t) = \sum_{k=1}^{\delta N} \left[a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_h^k} t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_h^k} t\right)\right] \overrightarrow{\phi}^k \tag{48}$$

con $0 < \delta < 1$?

Evidentemente, al hacerlo, estamos despreciando parte de la información que el esquema numérico proporciona. Pero estamos precisamente despreciando aquéllo que corresponde a las altas frecuencias que producen las patologías que acabamos de describir.

Se puede efectivamente probar que la *solución filtrada* tiene un mejor comportamiento que la solución completa. En efecto, por una parte, para datos iniciales fijos y $0 < \delta < 1$ también fijado, la solución truncada (48) del problema semi-discreto converge cuando $h \to 0$ a la del problema continuo. Por otro, utilizando resultados clásicos de series de Fourier no armónicas (véase [IZ]), se puede probar que, en el contexto del problema inverso, las soluciones numéricas filtradas (48) tienen un buen comportamiento pues la medición de la tensión a lo largo de un intervalo temporal del orden de $2\sigma(\delta)L$ proporciona una información completa sobre la solución.

De acuerdo con la figura 6.1 y el sentido común se observa que el parámetro $\sigma(\delta)$ satisface:

- $\sigma(\delta) \to 1$, $\delta \to 0$;
- $\sigma(\delta) \to \infty$, $\delta \to 1$.

¿Qué quiere esto decir?

Que a medida que δ decrece, la solución numérica filtrada reproduce un comportamiento más próximo a la solución real del sistema continuo (23).

Nos encontramos así ante un hecho aparentemente paradójico. Filtrando más y más las altas frecuencias numéricas, i.e. usando cada vez menos información de todo lo que el esquema numérico proporciona, nos encontramos más cerca de la realidad.

Tal vez esto contribuya a que todos reflexionemos un poco sobre si la creciente capacidad de cálculo que los ordenadores proporcionan es, en sí misma, una garantía de progreso.

Bibliografía

[B] V.M. Babich, "The Higher-Dimensional WKB Method or Ray Method", en *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, **34**, Springer-Verlag, Berlin 1997.

[BR] A. Baratta y J. Rodellar eds., *Proceedings of the First European Converence on Structural Control*, Series on Stability, Vibration and Control of Systems, **13**, World Scientific, 1996.

[Be] D. Bernouilli, Réflexions et éclarcissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, **9** (1753), 147-172 y 173-195.

[Br] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad, 1983.

[CH] S. L. Campbell y R. Haberman, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor frontera*, McGrawHill, MÈxico, 1998.

[CLOT] S.J. Chapman, J.M.H. Lawry, J.R. Ockendon y R.H. Tew, On the theory of complex rays, SIAM Review, **41** (3) (1999), 417-509.

[CBBH] F. Cotton, P.-Y. Bard, C. Berge y D. Hatzfeld, ¿Qué es lo que hace vibrar Grenoble?, Mundo Científico, **203** (1999), 21-23.

[D1] J.R. d'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, **3** (1747), 214-219 y Suite des recherches, **3** (1747), 220-249.

[D2] J.R. d'Alembert, Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration, Hist. de l'Acad. Roy de Berlin, **6** (1750), 355-360.

[F] J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Jacques Gabay, Paris, 1988. (reedición del trabajo inicialmente editado por Firmin Didot, Père et Fils, en Paris en 1822).

[IZ] J.A. Infante y E. Zuazua, Boundary observability for the space semi-discretizations of the $1-d$ wave equation, M2AN, **33** (2) (1999), 407-438.

[I] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equaitons*, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[J] F. John, *Partial Differential Equations*, 4. ed., Springer Verlag, Nueva York, 1982.

[K] J. B. Keller, Semiclassical mechanics, SIAM Rev., **27** (1985), 485-504.

[KdV] D.J. Korteweg y G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Meq., **39** (1895), 422-423.

[L] N. Luzin, Function: Part I, Amer. Math. Monthly, **105** (1998), 59-67; Part II. 263-270.

[M] F. Macía, Ondas Gaussianas y aplicaciones a la observación, estabilización y control de vibraciones, Tesina, UCM, 1999.

[N] A. Nachbin, Some Mathematical Models for Wave Propagation, Cubo Matemática Educacional, Universidad de la Frontera, Chile, en vías de publicación.

[R] J. Ralston, Solution of the wave equation with localized energy, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 807-823.

[SC] A. Sánchez-Calle, El problema espectral inverso. ¿puede oírse la forma de un tambor?, Fronteras de la Ciencia, CSIC, **14** (1997), 43-46.

[Si] SIAM, *Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective*, SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences, Philadelphia, 1988.

[T] M.E. Taylor, *Partial Differential Equations. Basic Theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.

[VSPG] L. Vázquez, L. Streit y V.M. Pérez-García, eds., *Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems: Theory and Applications*, World Scientific, 1996.

[We] H. F. Weinberger, *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Reverté, Barcelona, 1986.

[W] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Willey, Nueva York, 1974.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *16 (2000), 45–65.*

Landesman-Lazer conditions for boundary value problems: A nonlinear version of resonance [1]

Jean Mawhin
Université Catholique de Louvain

Cordially dedicated to Alan Lazer for his sixtieth birthday anniversary, and to Gaetano Villari for his seventy-fifth birthday anniversary

1 Introduction

Resonance phenomena are present and important in many scientific disciplines. The usual meaning is the following: if a vibrating system is excited by an external time-periodic force whose frequency is close to one of the natural frequencies of vibration of the system, its response may consist in oscillations whose amplitude increases considerably (and even indefinitely) with time, even for an external force of very small amplitude. A good example is a child pushing another one on a swing. A cristal glass can be broken by a sound having specific tone, and Jericho's story may have some links with resonance. Another military example is the suspended bridge in Tours which broke, in the XIXth century, when a troup of soldiers crossed it without breaking the step. Some "shimmy" in the direction of a car is another manifestation of resonance.

In electricity, radioelectricity and electronics, where oscillations play a big role, resonance phenomena have a major part. Notice the difference in terminology between mechanical and electronical engineers: the firsts one speak of *vibrations* and the second ones of *oscillations.* This is not only a matter of language but reveals their opposed attitude: the mechanical engineer wants mostly to *suppress* the vibrations and the electronical engineer is interested in *producing* them! This is easily exemplified when listening the radio in a running car.

Resonance phenomena are very important in celestial mechanics. As shown by Poincaré, *tides* are a resonance phenomenon due to the double action of the

[1] An expanded version of the *Lección inaugural del curso académico 1998/99,* Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, October 9, 1998

moon and the sun, and according to Ch. Ed. Guillaume, in his *Initiation à la mécanique,* "L'océan est une escarpolette que la Lune pousse en mesure". As the natural period of vibration of the Mediterranean Sea is about thirty to fourty minutes and hence very different of the periods of the Moon and the Sun, this sea has essentially no tides. In contrast, the Pacific Ocean has a natural period of vibration largely greater than one day and one can observe essentially local tide phenomena depending on special configurations close to the coasts. Finally, the natural period of vibration of the North Atlantic Ocean, close to twelve hours, in resonance with the second harmonic of the perturbing forces, gives important tides.

Resonance phenomena also play a role in biological systems, as revealed by *chronobiology* and the study of *circadian* (close to twenty-four hours) rythms.

2 A periodically forced first order linear equation

In order to keep the mathematics as elementary as possible in the study of the associated nonlinear problem, we shall not consider here the canonical example of a second order linear equation with a periodic forcing term, but the simpler case of a first order differential equation. Physically, this can hardly be seen as an oscillator, but the essentials of the mathematical theory of resonance are preserved.

2.1 Classical results

Consider the differential equation

$$x'(t) + \lambda x(t) = f(t), \tag{1}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ and $f \in C_T$, the space of real continuous and *T-periodic* functions ($f(t+T) = f(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$ and some $T > 0$.) An elementary study based upon the variation of constants formula

$$x(t) = e^{-\lambda t}c + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s)\, ds \tag{2}$$

for the solutions of (1) shows that, *when* $\lambda \neq 0$, *all solutions of (1) are bounded in the future and tend, for* $t \to +\infty$ *to the (unique) T-periodic solution of (1).* On the other hand, *when* $\lambda = 0$, *all solutions of (1) are unbounded for* $t \to \pm\infty$ *when*

$$\overline{f} := \frac{1}{T}\int_0^T f \neq 0, \tag{3}$$

(in which case (1) has *no* T-periodic solution), and *all solutions of (1) are T-periodic when*

$$\overline{f} = 0. \tag{4}$$

Thus, the difference between the *nonresonant* ($\lambda \neq 0$) and the *resonant* situation ($\lambda = 0$) can be characterized by the fact that equation (1) has or not a T-periodic solution for *every* forcing term $f \in C_T$, and, in the resonant case, the *physical* resonance (unbounded response) can only be avoided by a suitable restriction of the class of T-periodic forcings.

2.2 A functional analytic approach

For further reference and the introduction of some notations, it is useful to study the T-periodic solutions of (1) in a different way. Any continuous T-periodic function u has a Fourier series (converging at least in L^2-sense) $u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ik\omega t}$, where $\omega = \frac{2\pi}{T}$ and $u_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(s)e^{-ik\omega s}\,ds$, so that $u_0 = \overline{u}$ and we can write $u(t) = \overline{u} + \widetilde{u}(t)$, with $\widetilde{u}$ of mean value zero. Consequently, finding the T-periodic solutions of equation (1) is equivalent to finding the T-periodic functions $x(t) = \overline{x} + \widetilde{x}(t)$ such that

$$\widetilde{x}'(t) + \lambda\widetilde{x}(t) = \widetilde{f}(t), \quad \lambda\overline{x} = \overline{f}. \tag{5}$$

If we denote by $H\widetilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \frac{f_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}$ the unique (T-periodic) primitive of $\widetilde{f}$ with mean value zero, the system (5) is equivalent to

$$\widetilde{x} + \lambda H\widetilde{x} = H\widetilde{f}, \quad \lambda\overline{x} = \overline{f}. \tag{6}$$

Now, a Fourier series analysis immediately shows that $(I + \lambda H)^{-1}H\widetilde{f}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \frac{f_k}{ik\omega+\lambda} e^{ik\omega t}$, exists for each $\lambda \in \mathbb{R}$, so that the system (6) is equivalent to

$$\widetilde{x} = (I + \lambda H)^{-1}H\widetilde{f}, \quad ,\lambda\overline{x} = \overline{f}. \tag{7}$$

Notice that $(I + \lambda H)^{-1}H\widetilde{f}$ is continuous and bounded for all real λ. Consequently, we have the following result.

Proposition 1 *When $\lambda \neq 0$, equation (1) has, for each $f \in C_T$, the unique T-periodic solution*

$$x = \frac{\overline{f}}{\lambda} + (I + \lambda H)^{-1}H\widetilde{f}. \tag{8}$$

When $\lambda = 0$ and $\overline{f} = 0$, equation (1) has the (unbounded) family of T-periodic solutions $x = c + H\widetilde{f}$, ($c \in \mathbb{R}$), and, when $\lambda = 0$ and $\overline{f} \neq 0$, equation (1) has no T-periodic solution, and all its solutions $x(t) = c + t\overline{f} + \int_0^t \widetilde{f}$ ($c \in \mathbb{R}$), are unbounded for $t \to \pm\infty$.

The result is summarized in Fig. 1, where, in the left part, the x-axis is part of the set.

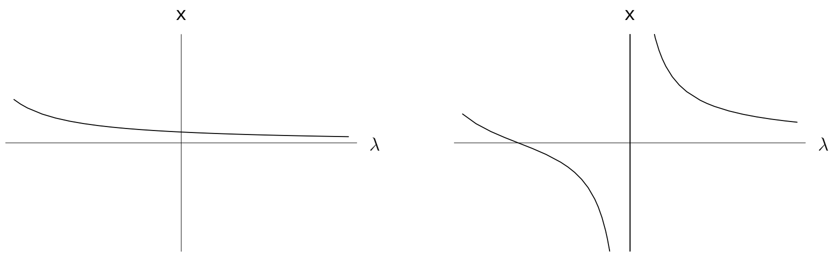

Figure 1: Structure of the solution set for $\overline{f} = 0$ and $\overline{f} \neq 0$

3 A periodically forced first order nonlinear equation

Let now $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a bounded and (for simplicity) locally Lipschitzian function, and consider the periodically forced nonlinear equation

$$x'(t) + \lambda x(t) + g(x(t)) = f(t). \tag{9}$$

3.1 The case where $\lambda \neq 0$

It is well known that, for each $c \in \mathbb{R}$, equation (9) has a unique solution $x(t) = \xi(t, c)$, with ξ defined and continuous over $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Consequently, $\xi(t, c)$ will be a T-periodic solution of (9) if and only if $c \in \mathbb{R}$ satisfies the equation

$$\xi(T, c) = c. \tag{10}$$

By the variation of constants formula (2) applied to (9), ξ satisfies, on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, the identity

$$\xi(t, c) = e^{-\lambda t} c + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} [f(s) - g(\xi(s, c))] \, ds. \tag{11}$$

Hence equation (10) can be written in the equivalent form

$$\left(1 - e^{-\lambda T}\right) c = \int_0^T e^{-\lambda(T-s)} [f(s) - g(\xi(s, c))] \, ds. \tag{12}$$

Defining the continuous and bounded function $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$\Gamma(c) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^T g(\xi(s, c)) \, ds,$$

we see that, for $\lambda \neq 0$, equation (12) is equivalent to the equation

$$c + \Gamma(c) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^T e^{-\lambda(T-s)} f(s)\, ds,$$

which has a solution for each f, because the left-hand member tends to $\pm\infty$ when $c \to \pm\infty$. We therefore have proved the following extension of the nonresonant case for the linear equation.

Theorem 1 *If $\lambda \neq 0$, equation (9) has at least one T-periodic solution for each $f \in C_T$.*

3.2 The case where $\lambda = 0$

When $\lambda = 0$, equation (12) is equivalent to the equation

$$\Phi(c) = \overline{f},$$

where Φ is the continuous and bounded function defined over $\mathbb{R}$ by $\Phi(c) = \frac{1}{T}\int_0^T g(\xi(s,c))\, ds$. Therefore equation (9) can only have a T-periodic solution when

$$\overline{f} \in [\inf g, \sup g]. \tag{13}$$

However, the necessary condition (13) is not always sufficient, as shown by the example

$$x'(t) + \sin x(t) = 1 - \sin t, \tag{14}$$

for which condition (13) holds. However, (14) admits the solution $x(t) = t$, which prevents, because of the uniqueness of the Cauchy problem, the existence of any T-periodic solution.

To find some sufficient conditions for the existence of a T-periodic solution of (9), let us first notice that, when $\lambda = 0$, the identity (11) reduces to

$$\xi(t,c) = c + \int_0^t [f(s) - g(\xi(s,c)]\, ds,$$

showing that, for some $M > 0$ and all $(t,c) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, we have

$$c - M \leq \xi(t,c) \leq c + M.$$

Consequently, $\xi(t,c) \to \pm\infty$ when $c \to \pm\infty$, uniformly in $t \in [0,T]$. It is therefore natural to consider the special class of functions g having respective limits $g(-\infty)$ and $g(+\infty)$ at $-\infty$ and $+\infty$. For those functions, $\Phi(c) \to g(\pm\infty)$ when $c \to \pm\infty$, and we deduce immediately from the intermediate value theorem the following extension to the nonlinear case of the resonance conditions.

Theorem 2 *If g has limits $g(\pm\infty)$ at $\pm\infty$, then equation (9) has at least one T-periodic solutions for all $f \in C_T$ such that*

$$\min[g(-\infty), g(+\infty)] < \overline{f} < \max[g(-\infty), g(+\infty)]. \tag{15}$$

Condition (15) is called a *Landesman-Lazer condition* for the T-periodic solutions of equation (9) with $\lambda = 0$. The terminology will be explained later. Extensions of this condition for more general equations or systems of type (9) can be found in [21] and [46].

We see that, with respect to the associated linear case $x'(t) = f(t)$, the presence of the nonlinear term has *increased* the set of forcing terms which give a T-periodic response from $\{f \in C_T : \overline{f} = 0\}$ to

$$\{f \in C_T : \overline{f} \in \,]\min[g(-\infty), g(+\infty)], \max[g(-\infty), g(+\infty)][\}.$$

It can immediately be verified that, for the functions g such that

$$\min[g(-\infty), g(+\infty)] < g(s) < \max[g(-\infty), g(+\infty)][$$

for all $s \in \mathbb{R}$, Landesman-Lazer condition (15) is *necessary* as well.

3.3 The structure of the solution set in the (λ, x)-space

It may be of interest to try to describe the structure of the set of T-periodic solutions of (9) when λ varies near 0 and a Landesman-Lazer condition holds. To do this in the simplest possible way, let us consider the particular example

$$x'(t) + \lambda x(t) + \frac{x(t)}{1 + |x(t)|} = \overline{f}, \tag{16}$$

with constant forcing term. It is easy to see that any possible T-periodic solution of (16) is constant (multiply each member by x' and integrate over $[0, T]$), and hence is a solution of the numerical equation

$$\lambda x + \frac{x}{1 + |x|} = \overline{f}. \tag{17}$$

The Landesman-Lazer condition for (16) reduces to $\overline{f} \in \,]-1, 1[$. When $\overline{f} = 0$, the set of (x, λ) satisfying (17) has the shape given on the right part of Fig. 2 (the λ-axis is part of the set). When $f \in \,]-1, 1[\setminus\{0\}$, this set has the shape given (for $\overline{f} = 1/2$) by the left part of Fig. 2. Those pictures show how the presence of the nonlinear term deforms the corresponding solution sets given in Fig. 1.

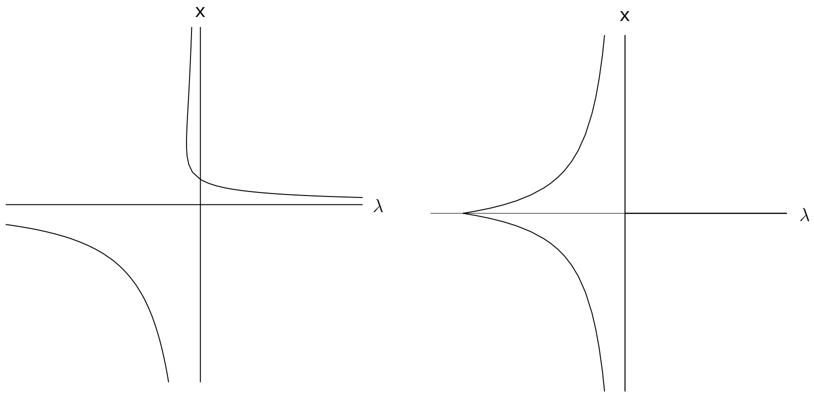

Figure 2: Structure of the solution set for $\overline{f} = 1/2$ and $\overline{f} = 0$

4 The origin of Landesman-Lazer conditions

4.1 Periodic solutions of second and third order differential equations

Let again $f \in C_T$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, and g be continuous and bounded.

In 1966, Gaetano Villari [1] studied the existence of T-periodic solutions for *third order* equations of the form

$$x'''(t) + bx''(t) + cx'(t) + g(x(t)) = f(t), \tag{18}$$

when $b, c \in \mathbb{R}$ are such that the equation $x'''(t) + bx''(t) + cx'(t) = 0$ has only constant T-periodic solutions. A (non explicited) special case of his existence result is the following one.

Theorem 3 *Equation (18) has at least one T-periodic solution if $f \in C_T$ satisfies condition (15).*

In 1968, Lazer [2] independently considered the existence of T-periodic solutions of *second order* equations of the form

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t)) = f(t), \tag{19}$$

when $c \in \mathbb{R}$. A (non explicited) special case of his existence result is the following one.

Theorem 4 *Equation (19) has at least one T-periodic solution if $f \in C_T$ satisfies condition (15).*

If one tries to mimick the proof given in Section 2 for the first order case, and $\xi(t, c_1, c_2)$ denotes the solution of the Cauchy problem $x(0) = c_1,\ x'(0) = c_2$ for (19), equation (10) has to be replaced by the system

$$\xi(T, c_1, c_2) = c_1, \quad \xi'(T, c_1, c_2) = c_2,$$

whose study requires more sophisticated topological tools than the intermediate value theorem. Indeed, to prove Theorem 4, Lazer applied, in a technically sophisticated way, Schauder theorem to an equivalent fixed point problem in the space of T-periodic functions, although, to prove Theorem 3, Villari used Leray-Schauder degree. It was shown in 1972 that *coincidence degree theory,* extending Leray-Schauder degree to relatively compact perturbations of Fredholm operators of index zero (see an exposition in [44]), provided a suitable frame for simplified proofs or extensions of Theorem 4 ([7]).

In 1969, Lazer and Leach [3] initiated the study of the T-periodic solutions of second order equations of the form

$$x''(t) + n^2\omega^2 x(t) + g(x(t)) = f(t), \tag{20}$$

where $n \geq 1$ is an integer. The corresponding linear problem

$$x''(t) + n^2\omega^2 x(t) = f(t),$$

has a T-periodic solution if and only if f satisfies the orthogonality conditions

$$\int_0^T f(s)\cos n\omega s\, ds = 0 = \int_0^T f(s)\sin n\omega s\, ds,$$

(Fredholm alternative) or, equivalently

$$\widehat{f}(n) := \int_0^T f(s)e^{in\omega s}\, ds = 0, \tag{21}$$

so that the linear part of (20) corresponds to a resonant situation. If (20) has a T-periodic solution $x(t)$, it follows from multiplying (20) by $e^{in\omega t}$ and integrating it over $[0, T]$ that

$$\widehat{f}(n) = \int_0^T g(x(t))e^{in\omega t}\, dt. \tag{22}$$

Assuming that $g(-\infty)$ and $g(+\infty)$ exist, and that, say, the following condition

$$g(-\infty) \leq g(s) \leq g(+\infty) \tag{23}$$

holds for all $s \in \mathbb{R}$, we obtain from (22) that

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\int_0^T g(x(t))e^{in\omega t}\, dt\right|$$

$$= \max_{\phi\in\mathbb{R}} \int_0^T g(x(t))\sin(n\omega t+\phi)\,dt = \max_{\phi\in\mathbb{R}} \int_0^T g\left(x\left(t-\frac{\phi}{n\omega}\right)\right)\sin n\omega t\,dt$$

$$\leq \max_{\phi\in\mathbb{R}} \left[\int_0^T g(+\infty)(\sin n\omega t)^+\,dt - \int_0^T g(-\infty)(\sin n\omega t)^-\,dt\right],$$

and hence

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq 2[g(+\infty)-g(-\infty)].$$

This is a necessary conditions for the existence of a T-periodic solution for (20). Using again Schauder's fixed point theorem in a very sophisticated way, Lazer and Leach have proved that, when $g(-\infty)$ and $g(+\infty)$ exist, the same condition with strict inequality (or the symmetric one) is also sufficient.

Theorem 5 *Equation (20) has at least one T-periodic solution for all $f \in C_T$ such that*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| < 2\{\max[g(+\infty), g(-\infty)] - \min[g(-\infty), g(+\infty)]\}. \tag{24}$$

We see again that, with respect to the condition (21) of the linear case, the presence of the nonlinearity g has increased the set of forcing terms $f \in C_T$ which provide a T-periodic response.

In the same paper, Lazer and Leach have shown that (20) *has no T-periodic solution when g is not constant and f is such that*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \geq 2[\sup g - \inf g]. \tag{25}$$

This result has been improved in 1996 by Alonso and Ortega [35], who proved that *condition (25) implies that every solution of (20) is such that*

$$\lim_{|t|\to\infty} \left[x^2(t)+x'^2(t)\right] = +\infty$$

and that *the negation of condition (24) implies that the solutions of (20) with sufficiently large initial conditions verify either*

$$\lim_{t\to+\infty} \left[x^2(t)+x'^2(t)\right] = +\infty$$

or

$$\lim_{t\to-\infty} \left[x^2(t)+x'^2(t)\right] = +\infty.$$

Very recently, A.M. Krasnosel'skii and Mawhin [37] have shown that if the function Ψ and the numbers Ψ_+, Ψ^+ are defined by

$$\Psi(c) = \int_0^T g(\sin n\omega t)\sin n\omega t\,dt, \quad \Psi_+ = \liminf_{c\to+\infty} \Psi(c), \quad \Psi^+ = \limsup_{c\to+\infty} \Psi(c),$$

then *the Lazer-Leach condition (24) for the existence of a T-periodic solution to (20) can be extended to*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| < \max\left[\Psi_+(c), -\Psi^+(c)\right],$$

and that one of the inequalities

$$\Psi^+(c) > \left|\widehat{f}(n)\right| > \Psi_+(c) > 0, \quad -\Psi_+(c) > \left|\widehat{f}(n)\right| > -\Psi^+(c) > 0,$$

$$\Psi^+(c) > \left|\widehat{f}(n)\right| > 0 \geq \Psi_+(c), \quad -\Psi_+(c) > \left|\widehat{f}(n)\right| > 0 \geq \Psi^+(c),$$

implies the existence of an unbounded sequence of T-periodic solutions of (20). For example, if

$$g(x) = \max[-1, \min(1, x)]\{3 + \sin[\log(1 + \log(1 + |x|))\},$$

then equation (20) has at least one T-periodic solution if $\left|\widehat{f}(n)\right| < 2$, and an unbounded sequence of T-periodic solutions if $2 < \left|\widehat{f}(n)\right| < 4$.

4.2 Dirichlet problems for semilinear elliptic equations

A T-periodic solution to a second order equation can also be considered as a soIution satisfying the *boundary conditions* $x(0) - x(T) = 0 = x'(0) - x'(T)$. In 1970, Landesman and Lazer [4] have extended the approach of [3] to the study of the (weak) solvability of a *semilinear Dirichlet problem* of the form

$$\Delta u(x) + \lambda_k u(x) + g(u(x)) = f(x), \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \qquad (26)$$

when $\Omega \in \mathbb{R}^N$ is a bounded domain, λ_k is an eigenvalue of $-\Delta$ with Dirichlet conditions on $\partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$, and g is continuous, bounded, and has limits at $-\infty$ and $+\infty$.

Assuming for simplicity that λ_k is simple and denoting by ϕ_k the corresponding eigenfunction, it is easy to see, like in the Lazer-Leach case, that if we assume for a moment that the inequality (23) holds, a necessary condition for the existence of a solution to (26) is that

$$g(-\infty)\int_\Omega \phi_k^+ - g(+\infty)\int_\Omega \phi_k^- \leq \int_\Omega f\phi_k$$

$$\leq g(+\infty)\int_\Omega \phi_k^+ - g(-\infty)\int_\Omega \phi_k^- .$$

Using Schauder's fixed point theorem, Landesman and Lazer have proved that the same condition with strict inequalities is sufficient for the solvability of (26).

Theorem 6 *Problem (26) has at least one weak solution for each $f \in L^2(\Omega)$ such that*

$$\min[g(-\infty), g(+\infty)] \int_\Omega \phi_k^+ - \max[g(-\infty), g(+\infty)] \int_\Omega \phi_k^- \tag{27}$$
$$< \int_\Omega f\phi_k < \max[g(+\infty), g(-\infty)] \int_\Omega \phi_k^+ - \min[g(+\infty), g(-\infty)] \int_\Omega \phi_k^- .$$

Condition (27) is the origin of the name *Landesman-Lazer condition* for the extensions of the orthogonality condition for the linear case met in the previous examples. The reader can ask why such a condition was not called a Lazer, or Lazer-Villari, or Lazer-Leach condition, because of the anteriority of the papers on periodic solutions. The reason must probably be found in the fact Landesman-Lazer's paper made on experts in partial differential equations a much greater impression than Villari, Lazer and Lazer-Leach's papers made on experts in ordinary differential equations (even if their legacy in this area has been impressive too).

Indeed, all previous results on semilinear or quasilinear elliptic problems based on Schauder or Leray-Schauder techniques were dealing with nonlinear perturbations of linear *invertible* elliptic operators or with problems which could be reduced to this situation. Landesman-Lazer's paper considered a nonlinear perturbation of a *non-invertible* linear elliptic operator.

In addition, the sixties had seen a tremendous development of the theory of *operators of monotone type* and of their application to nonlinear elliptic boundary value problems. This new technique could solve some problems outside of the scope of Leray-Schauder theory but could hardly apply to (26), except in the special case where $k = 1$ and g is nonincreasing (see Subsection 5.1). For $k \neq 1$, $-\Delta - \lambda_k I$ is not monotone and no monotonicity assumption needs to be made on g in Landesman-Lazer's approach. Hence, the experts in partial differential equations were facing a new and fascinating class of problems (see for example Nirenberg's comments and extensions in [5]), and the name *Landesman-Lazer condition* was rapidly adopted for all similar situations in concrete or abstract problems at resonance.

5 Some developments of Landesman-Lazer conditions

For the sake of brevity, we shall only quote, in what follows the first (possibly independent) papers dealing with the considered question. References to the subsequent literature can be found in the bibliography of the survey and reference books listed at the end of this paper.

5.1 Resonance at the first eigenvalue

In 1975, Kazdan and Warner [14] considered the problem

$$\Delta u(x) + \lambda_1 u(x) + g(u(x)) = f(x), \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \tag{28}$$

around the first eigenvalue λ_1, with g and f Hölder continuous, and g *not necessarily bounded.* Using the *method of upper and lower solutions,* they proved the following extension of Landesman-Lazer condition.

Theorem 7 *If $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is nonincreasing, then (28) has at least one classical solution if and only if there exists $c \in \mathbb{R}$ such that*

$$\int_\Omega g\left(x, c\phi_1\right)\, dx = \int_\Omega f\phi_1.$$

Notice that, in this situation, the nonlinear differential operator associated to equation (28) is monotone. The theory of *monotone operators* has been used in problems of this type by M. Schatzman (1973) [10] (using methods of J.L. Lions-Stampacchia for noncoercive variational inequalities), Hess (1974) and Brézis-Haraux (1976) [16]. Further contributions were made by Gossez-de Figueiredo, Brézis-Nirenberg, Iannacci-Nkashama-Ward, and others.

5.2 Variational approach

In 1976, Ahmad, Lazer and Paul [15] proved an existence result whose special case applied to (26) can be stated as follows, where $G(u) = \int_0^u g$.

Theorem 8 *Problem (26) has at least one solution for each $f \in L^2(\Omega)$ such that either*

$$\int_\Omega \left[G(c\phi_k(x)) - f(x)\phi_k(x)\right]\, dx \to +\infty \tag{29}$$

or

$$\int_\Omega \left[G(c\phi_k(x)) - f(x)\phi_k(x)\right]\, dx \to -\infty \tag{30}$$

as $|c| \to \infty$.

It is easy to verify that conditions (29) or (30) imply condition (27), but the converse is not true. In particular, under condition (29) or (30), the set of solutions of (26) may be unbounded.

The approach in [15] is of variational nature. The weak solutions of (26) are the *critical points* of the *energy functional*

$$J(u) := \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - \frac{\lambda_k u^2(x)}{2} - G(u(x)) + f(x)u(x)\right]\, dx,$$

over the Sobolev space $H_0^1(\Omega)$, i.e. the points u where its derivative $J'(u)$ vanishes. To prove the existence of such a critical point when (29) or (30) holds, Ahmad, Lazer and Paul first reduce the problem to a sequence of variational problems in finite-dimensional spaces, whose solvability is proved in applying some ideas from Wazewski's method to the associated gradient flow.

Rabinowitz, whose attention to paper [15] was called by Nirenberg, showed in 1978 [22] that a general frame in critical point theory for results of the type of Theorem 7 was a *saddle point theorem* for C^1 functionals J satisfying a *Palais-Smale condition* (all sequences (u_n) such that $(J(u_n))$ is bounded and $J'(u_n) \to 0$ have a convergent subsequence) on a real Banach space $E = E_1 \oplus E_2$ with dim E_1 finite. The existence of a critical point for J is insured when $\sup_{\partial B(r) \cap E_1} J < \inf_{E_2} J$ for some $r > 0$. Such a result and its extensions or variants, like Ambrosetti-Rabinowitz *mountain pass lemma,* are widely used in many applications of modern critical point theory (see e.g. [61, 54, 55, 53]).

5.3 Bifurcation from infinity

In 1988, Mawhin and Schmitt [29] raised the question of the structure of the solution set (λ, u) of the Dirichlet problem

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) + g(u(x)) = f(x), \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0, \quad (x \in \partial\Omega), \tag{31}$$

when λ is close to a (say) simple eigenvalue λ_k of $-\Delta$ and h and g satisfy Landesman-Lazer condition (27).

Combining Krasnosel'skii-Rabinowitz-Toland result for *bifurcation from infinity* together with the *a priori bounds* of a topological degree proof of Landesman-Lazer theorem given for example in [44], they proved a multiplicity result for λ near λ_k which partially extends to (31) the elementary discussion of Subsection 3.3.

Theorem 9 *Assume that $f \in L^2(\Omega)$ is such that*

$$g(-\infty)\int_\Omega \phi_k^+ - g(+\infty)\int_\Omega \phi_k^- < \int_\Omega f\phi_k \tag{32}$$

$$< g(+\infty)\int_\Omega \phi_k^+ - g(-\infty)\int_\Omega \phi_k^-.$$

(resp.

$$g(+\infty)\int_\Omega \phi_k^+ - g(-\infty)\int_\Omega \phi_k^- < \int_\Omega f\phi_k \tag{33}$$

$$< g(-\infty)\int_\Omega \phi_k^+ - g(+\infty)\int_\Omega \phi_k^-.)$$

Then there exists $\lambda_- < \lambda_k < \lambda_+$ *(resp.* $\mu_- < \lambda_k, \mu_+$*) such that problem (31) has*

1. *At least one weak solution if* $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_+]$.

2. *At least three weak solutions if* $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_k[$.

(resp.

1. *At least one weak solution if* $\lambda \in [\mu_-, \lambda_k]$.

2. *At least three weak solutions if* $\lambda \in]\lambda_k, \mu_+]$.*)*

The situation described by in the first conclusion corresponds, qualitatively, to the restriction of Fig. 4 to a small neighborhood of the x-axis. Improvements, variations and other applications in the line of Theorem 9 have been given by various authors, including Arcoya, Badiale, Chiapppinelli, de Figueiredo, Gámez, Lupo, Ramos, Sanchez, Schmitt, Wang.

5.4 Landesman-Lazer conditions for other problems

Landesman-Lazer conditions have been obtained for other problems like abstract *operator equations* (Berger-Schechter (1972) [6], Nečas (1973) [9]), *time-periodic solutions of semilinear heat or telegraph equations* (Mawhin (1977) [18], Brézis-Nirenberg (1978) [19]), *time- periodic solutions of semilinear wave equations* (Bahri-Brézis (1980) [24]), elliptic problems on *unbounded domains* (Hetzer-Landesman (1983) [27]), *quasilinear elliptic equations* (Shapiro (1986) [28], *perturbed p-Laplacians* (Boccardo-Drábek-Kučera (1989) [30], Anane-Gossez (1990) [31]), bounded perturbations of *singular ordinary differential equations* (Mawhin-Omana (1992) [33]).

In 1991, the study of Landesman-Lazer conditions for solutions *bounded over* $\mathbb{R}$ of equations of the type

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t)) = f(t) \tag{34}$$

was initiated by Ahmad [32]. We again assume that g has limits at infinity. Denoting respectively by BC and BP^1 the spaces of bounded continuous functions over $\mathbb{R}$ and the space of continuous functions having a primitive bounded over $\mathbb{R}$, and introducing, with Tineo, the lower and upper averages

$$\underline{f} = \lim_{r \to +\infty} \inf_{t-s \geq r} \left[\frac{1}{t-s} \int_s^t f(u)\, du \right], \quad \overline{f} = \lim_{r \to +\infty} \sup_{t-s \geq r} \left[\frac{1}{t-s} \int_s^t f(u)\, du \right]$$

of $f \in BC + BP^1$, one has the following result, respectively due to Ortega [34] and to Mawhin and Ward [38].

Theorem 10 *Equation (34) with $c > 0$ has at least one solution x bounded over $\mathbb{R}$ together with its first derivative for each $f \in BC + BP$ such that*

$$g(-\infty) < \underline{f} \leq \overline{f} < g(+\infty) \tag{35}$$

or

$$g(+\infty) < \underline{f} \leq \overline{f} < g(-\infty). \tag{36}$$

Furthermore, for $c = 0$, the same result holds for all $f \in BC$ satisfying (36).

Notice that, in contrast to Landesman-Lazer problems for problems with boundary conditions, the techniques of proof are quite different according to assumption (35) or assumption (36) is made.

Alonso, Mawhin and Ortega [36] have recently shown that the following extension of (35)

$$g(-\infty) < \underline{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t,x)\,dx} \leq \overline{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t,x)\,dx} < g(+\infty)$$

leads to a solution $u(t,x)$ with a suitable x-norm bounded over $\mathbb{R}$ for the nonlinear telegraph equation

$$u_{tt}(t,x) + cu_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + g(u(t,x)) = f(t,x)$$

with Dirichlet conditions in x.

5.5 Generalized Landesman-Lazer or growth conditions

The Landesman-Lazer condition (15) requires that

$$g(-\infty) < g(+\infty) \text{ or } g(+\infty) < g(-\infty),$$

and hence does not cover the linear case where $g = 0$ or situations where $g(-\infty) = g(+\infty)$. One already finds in the papers of Villari [1] and Lazer [2] an existence condition which works in those cases, namely

$$\overline{f} = 0 \text{ and } g(x)x \geq 0 \text{ or } g(x)x \leq 0 \text{ for } |x| \geq R. \tag{37}$$

This condition was extended to Neumann problems for partial differential equations in 1973 [8], and situations where

$$g(-\infty) = g(+\infty) = 0 \text{ and } \int_\Omega f\phi_k = 0$$

where first considered by Fučik in 1974 [47] and Dancer in 1977 [17] for the Dirichlet problem. Existence under conditions of type (37) for the Dirichlet problem was first proved by de Figueiredo-Ni in 1979 [23].

Landesman-Lazer conditions have been extended by Gallouët and Kavian (1982) [26] to problems of the form

$$\Delta u(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) + g(u(x)) = f(x), \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0, \quad (x \in \partial\Omega),$$

when (α, β) belongs to the *Fučik spectrum,* i.e. is such that

$$\Delta u(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0, \quad (x \in \partial\Omega),$$

has a nontrivial solution. Further contributions are due to Arias, Fabry, Habets-Metzen, Mawhin-Ward, and others.

The boundedness of g can be replaced by less restrictive conditions like *sublinearity* (Fučik-Kučera-Nečas (1975) [13]), *linear growth* (Mawhin (1973) [8], Fučik (1974) [11]), *boundedness from below or from above* (Ward (1981) [25]). Further contributions in those directions are due, among others, to Arias, Cañada, Drábek, Iannacci-Nkashama, Kannan-Ortega.

6 Conclusion

Resonance in physics refers to situations where a (possibly) small excitation produces a very large response. This has surely been the case for the mentioned papers of Lazer and his coworkers in the differential equations community. Thirty years after this pioneering work, the amplitude of the response is still steadily increasing not only in the directions indicated in this paper, but also in several other ones which have not been treated by lack of space or of competence. The reader may check this assertion by consulting the references listed in the books dealing with Landesman-Lazer conditions mentioned in the bibliography.

Acknowledgments. I am indebted to Christian Fabry for his precious help in obtaining the pictures through “Mathematica.”

References

Articles

[1] 1966 – G. Villari, Soluzioni periodiche di una classe di equazioni differenziali, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 73, 103-110

[2] 1968 – A.C. Lazer, On Schauder's fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscillations, *J. Math. Anal. Appl.* 21, 421-425

[3] 1969 – A.C. Lazer and D.E. Leach, Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 82, 49-68

[4] 1970 – E.M. Landesman and A.C. Lazer, Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, *J. Math. Mech.* 19, 609-623

[5] 1971 – L. Nirenberg, An application of generalized degree to a class of nonlinear problems, in *Troisième Colloque du CBRM sur l'analyse fonctionnelle*, Vander, Louvain, 57-74

[6] 1972 – M.S. Berger and M. Schechter, On the solvability of semilinear operator equations and elliptic boundary value problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78, 741-745

[7] 1972 – J. Mawhin, An extension of a theorem of A.C. Lazer on forced second order oscillations, *J. Math. Anal. Appl.* 40, 20-29

[8] 1973 – J. Mawhin, Problèmes aux limites du type de Neumann pour certaines équations différentielles ou aux dérivées partielles non linéaires, in *Equations différentielles et fonctionnelles non linéaires,* Janssens, Mawhin and Rouche ed., Hermann, Paris, 123-134

[9] 1973 – J. Nečas, On the range of nonlinear operators with linear asymptotes which are not invertible, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 14, 63-72

[10] 1973 – M. Schatzman, Problèmes aux limites non linéaires, non coercifs, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.* 27, 641-686

[11] 1974 – S. Fučik, Surjectivity of operators involving linear noninvertible part and nonlinear compact perturbation, *Funkcialaj Ekvacioj* 17, 73-83

[12] 1974 – P. Hess, On semicoercive nonlinear problems, *Indiana Univ. Math. J.* 23, 645-654

[13] 1975 – S. Fučik, M. Kučera and J. Nečas, Ranges of nonlinear asymptotically linear operators, *J. Differential Equations* 17, 375-394

[14] 1975 – J.L. Kazdan and F.W. Warner, Remarks on some quasilinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 567-597

[15] 1976 – S. Ahmad, A.C. Lazer and J.L. Paul, Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance, *Indiana Univ. Math. J.* 25, 933-944

[16] 1976 – H. Brézis and A. Haraux, Image d'une somme d'opérateurs monotones et applications, *Israel J. Math.* 23, 165-186

[17] 1977 – E.N. Dancer, On the Dirichlet problem for weakly non-linear elliptic partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 76A, 283-300

[18] 1977 – J. Mawhin, Periodic solutions of nonlinear telegraph equations, in *Dynamical Systems,* Bednarek and Cesari ed., Academic Press, New York, 193-210

[19] 1978 – H. Brézis and L. Nirenberg, Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, *Ann. Scuola Norm. Sup.* 5, 225-326

[20] 1978 – S. Fučik and J. Mawhin, Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations, *Nonlinear Anal.* 2, 609-617

[21] 1978 – J. Mawhin and W. Walter, Periodic solutions of ordinary differential equations with one-sided growth restrictions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* A 82, 95-106

[22] 1978 – P. Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations, in *Nonlinear Analysis,* Cesari, Kannan, Weinberger ed., Academic Press, New York, 161-178

[23] 1979 – D. de Figueiredo and W.M. Ni, Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landesman-Lazer conditions, *Nonlinear Anal.* 3, 629-634

[24] 1980 – A. Bahri and H. Brézis, Periodic solutions of a nonlinear wave equation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 85, 313-320

[25] 1981 – J.R. Ward, Asymptotic conditions for periodic solutions of ordinary differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 81, 415-420

[26] 1982 – T. Gallouët and Kavian, Resonance for jumping nonlinearities, *Comm. Partial Differential Equations* 7, 325-342

[27] 1983 – G. Hetzer and E.M. Landesman, The solvability of a semilinear operator equation at resonance as applied to elliptic boundary value problems in unbounded domains, *J. Differential Equations* 50, 318-329

[28] 1986 – V.L. Shapiro, Resonance and quasilinear ellipticity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 294, 567-584

[29] 1988 – J. Mawhin and K. Schmitt, Landesman-Lazer type problems at an eigenvalue of odd multiplicity, *Results in Math.* 14, 138-146

[30] 1989 – L. Boccardo, P. Drábek, M. Kučera, Landesman-Lazer conditions for strongly nonlinear boundary value problems, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 30, 411-427

[31] 1990 – A. Anane et J.P. Gossez, Strongly nonlinear elliptic problems near resonance: a variational approach, *Comm. Partial Differential Equations* 15, 1141-1159

[32] 1991 – S. Ahmad, A nonstandard resonance problem for ordinary differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 323, 857-875

[33] 1991 – J. Mawhin and W. Omana, Bounded nonlinear perturbations of singular boundary value problems at resonance, *Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique* (6) 2, 343-356

[34] 1995 – R. Ortega, A boundedness result of Landesman-Lazer type, *Differential and Integral Equations* 8, 729-734

[35] 1996 – J.M. Alonso and R. Ortega, Unbounded solutions of semilinear equations at resonance, *Nonlinearity* 9, 1099-1111

[36] 1998 – J.M. Alonso, J. Mawhin and R. Ortega, Bounded solutions of second order semilinear evolution equations and applications to the telegraph equation, *J. Math. Pures Appl.*, to appear

[37] 1998 – A.M. Krasnosel'skii and J. Mawhin, Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities, *Mathematical and Computer Modelling,* to appear

[38] 1998 – J. Mawhin and J.R. Ward, Bounded solutions of some second order nonlinear differential equations, *J. London Math. Soc.,* to appear

Surveys or Monographs dealing with Landesman-Lazer conditions

[39] 1974 – J. Mawhin, *Nonlinear Perturbations of Fredholm Mappings in Normed Spaces and Applications to Differential Equations,* Trabalho de Mat. No. 61, Univ. de Brasilia

[40] 1974 – L. Nirenberg, *Topics in Nonlinear Functional Analysis,* Courant Institute, New York University

[41] 1976 – L. Cesari, R. Kannan and J. Schuur, *Nonlinear Functional Anaysis and Differential Equations,* Dekker, New York

[42] 1977 – M.S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis,* Academic Press, New York

[43] 1977 – R.E. Gaines and J. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Equations,* Lecture Notes in Math. No. 568, Springer, Berlin

[44] 1977 – J. Mawhin, *Landesman-Lazer's type Problems for Nonlinear Equations,* Confer. Semin. Mat. Univ. Bari No. 147, Laterza & Figli, Bari

[45] 1978 – D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear Mappings of Montone Type,* Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan de Rijn

[46] 1979 – J. Mawhin, *Topological Degree and Nonlinear Boundary Value Problems,* CBMS Regional Confer. No. 40, Amer. Math. Soc., Providence

[47] 1980 – S. Fučik, *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems,* Reidel, Dordrecht

[48] 1980 – S. Fučik and A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations,* Elsevier, Amsterdam

[49] 1981 – A. Haraux, *Nonlinear Evolution Equations – Global Behavior of Solutions,* Lecture Notes in Math. No. 841, Springer, Berlin

[50] 1981 – J. Mawhin, *Compacité, monotonie et convexité dans l'étude de problèmes aux limites semi-linéaires,* Sémin. Anal. Moderne No. 19, Université de Sherbrooke

[51] 1985 – K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis,* Springer, Berlin

[52] 1985 – J. Mawhin, *Points fixes, points critiques et problèmes aux limites,* Sémin. Math. Sup. No. 92, Presses Univ. Montréal, Montréal

[53] 1986 – P. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations,* CBMS Reg. Conf. No. 65, Amer. Math. Soc., Providence

[54] 1987 – J. Mawhin, *Problèmes de Dirichlet variationnels non linéaires,* Sémin. Math. Sup. No. 104, Presses Univ. Montréal, Montréal

[55] 1989 – J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems,* Springer, New York

[56] 1990 – I.V. Skrypnik, *Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems,* Nauka, Moscow. English translation: Amer. Math. Soc., Providence, 1994

[57] 1990 – E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications,* vol. II/B, Springer, New York

[58] 1992 – P. Drábek, *Solvability and Bifurcation of Nonlinear Equations,* Res. Notes in Math. No. 264, Longman, Harlow

[59] 1992 – A.M. Krasnosel'skii, *Asymptotics of Nonlinearities and Operator Equations,* Nauka, Moscow. English translation: Operator Theory, Advances and Applic. No. 76, Birkhäuser, Basel, 1995

[60] 1993 – A. Ambrosetti and G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis,* Cambridge Univ. Press, Cambridge

[61] 1993 – K.C. Chang, *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solutions Problems,* Birkhäuser, Basel

[62] 1995 – W.V. Petryshyn, *Generalized Topological Degree and Semilinear Equations,* Cambridge Tracts in Math. No. 117, Cambridge Univ. Press, Cambridge

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 16 (2000), 67–85.

Algunos trabajos relacionados con la teoría de E.D.P. y su homogeneización

Juan Casado
Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Universidad de Sevilla

e-mail: jcasado@numer.us.es

El presente trabajo tiene como objetivo exponer algunos resultados relacionados con los problemas de E.D.P. sobre los cuales he trabajado y gracias a los cuales obtuve el premio de la Sociedad Española de Matemática Aplicada en su edición de 1999, Sociedad a la que quiero aprovechar la ocasión para expresar mi más sincero agradecimiento.

A fin de no extenderme demasiado, a la hora de comentar los resultados previos de otros autores, sólo referenciaré aquéllos que considero básicos al tener una relación directa con mi trabajo

1. Relajación de un funcional cuadrático no coercivo y no acotado.

Los resultados correspondientes a esta sección se encuentran en [13]. El problema consiste en calcular la envolvente semicontinua inferior $\bar{F}$ en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, del funcional

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega A(x)\, \nabla u\, \nabla u\, dx \text{si } u \in W^{1,\infty}(\Omega), \\ +\infty \text{si } u \in L^p(\Omega) \setminus W^{1,\infty}(\Omega), \end{cases}$$

donde Ω es un abierto, acotado de $\mathbf{R}^N$ y A una aplicación medible de Ω en el conjunto de las matrices simétricas semidefinidas positivas de orden N. Nótese que no se hace ninguna hipótesis de coercividad ni de acotación sobre A, lo cual lleva a que las topologías de tipo Sobolev no sean interesantes. el problema se encuentra relacionado con la minimización de funcionales en los cuales interviene F.

Nuestra intención es caracterizar el dominio H de $\bar{F}$, i.e. el espacio donde este funcional es finito y obtener una representación integral de $\bar{F}$ en este espacio. Obsérvese que H es el espacio donde $\bar{F}$ se encuentra definida de forma natural.

A fin de exponer los resultados obtenidos conviene introducir alguna notación:

Se denota por $W_A(\Omega)$ el espacio definido por

$$W_A(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,\infty}(\Omega) : \sqrt{A}\,\nabla u \in L^2(\Omega)^N \right\}.$$

y por V, el cierre en la topología de $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega)^N$ del espacio

$$\left\{ (u, \sqrt{A}\,\nabla u) \in W_A(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \right\}.$$

La primera caracterización de $\bar{F}$ y H viene entonces dada por:

$$\begin{cases} H = \{ u \in L^p(\Omega) : \ \exists\, v \in L^2(\Omega)^N \text{ con } (u,v) \in V \}, \\ \bar{F}(u) = \min \left\{ \int_\Omega |v|^2\, dx : \ (u,v) \in V \right\}, \quad \forall u \in H. \end{cases}$$

El elemento que da el mínimo en esta última expresión se nota por w_u y verifica propiedades análogas a las de un gradiente. De esta forma, se puede ver que el espacio H adquiere una estructura similar a la de un espacio de Sobolev.

El siguiente punto, consiste en utilizar la caracterización anterior de $\bar{F}$ y H, para obtener una representación integral de $\bar{F}$. Para ello se establece la siguiente hipótesis $(\tilde{\mathrm{H}})$:

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \begin{cases} \text{Para todo } u \in L^\infty(\Omega) \text{ existe una sucesión } u_n \in W_A(\Omega) \\ \text{que converge a } u \text{ en casi todo.} \end{cases}$$

Esta hipótesis significa que los coeficientes de A no pueden ser arbitrariamente grandes. En particular $(\tilde{\mathrm{H}})$ se verfica si A pertenece a $L^1(\Omega)^{N\times N}$.

Bajo la hipótesis $(\tilde{\mathrm{H}})$, se tiene el siguiente resultado: Existe una función medible P (que no depende de p) definida en Ω y con valores en las matrices de orden $N \times N$, tal que para casi todo $x \in \Omega$, $P(x)$ es la matriz de una proyección ortogonal sobre un subespacio $T(x)$ de $\mathbf{R}^N$, y que verifica

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega |Pv|^2\, dx, \quad \forall\, (u,v) \in V. \tag{1.1}$$

En particular, se tiene

$$\bar{F}(u) = \int_\Omega B\, \nabla u\, \nabla u\, dx, \ \forall u \in W_A(\Omega), \tag{1.2}$$

con B definida por

$$B = \sqrt{A} P \sqrt{A}. \tag{1.3}$$

En realidad, a partir de un teorema de L. Carbone y C. Sbordone ([8]), se sabía ya que si A pertenece a $L^1(\Omega)^{N\times N}$ entonces existe otra matriz B tal que se verifica (1.2) para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Lo más novedoso de este resultado es la expresión (1.3) de B, así como la representación (1.1) cuando u no es tan regular.

El problema que aparece ahora es el de caracterizar la función P. Esto solamente lo he llevado a cabo en el caso unidimensional, $\Omega = (0,\,1)$, donde la matriz A se reduce a una función a que supondremos valuada en $[0,\,+\infty]$. La hipótesis ($\tilde{\mathrm{H}}$) no es necesaria en este caso.

El resultado es el siguiente: Sea G el mayor abierto contenido en $(0,1)$ tal que $1/a$ es localmente integrable en él, es decir

$$G = \left\{ x \in (0,\,1) :\ \exists\,\delta = \delta(x) > 0 \text{ tal que } \frac{1}{a} \in L^1(x-\delta,\,x+\delta) \right\}.$$

Entonces, se tiene

$$\begin{cases} H = \left\{ u \in L^p(0,1) \cap W^{1,1}_{loc}(G) \ \text{ tales que } \ \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx < +\infty \right\} \\ \bar{F}(u) = \int_G a \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx,\ \forall u \in H. \end{cases}$$

Este teorema mejora un resultado anterior debido a P. Marcellini ([39]) quién obtiene la expresión anterior de $\bar{F}(u)$ pero solamente para u en $H^1(0,1)$ y suponiendo que la función a pertenece a $L^\infty(0,1)$. La demostración que realizamos es muy distinta de la de P. Marcellini (la cual es más constructiva que la nuestra) y está basada en la caracterización de $\bar{F}$ y H dada por el primer resultado expuesto.

2. Homogeneización de problemas de Dirichlet no lineales en abiertos que varían

El problema es esencialmente el siguiente: Se considera un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ y una sucesión Ω_n de abiertos contenidos en él. En cada abierto Ω_n consideramos entonces un problema elíptico no lineal de segundo orden con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera. Suponiendo entonces las soluciones u_n de estos problemas, prolongadas por cero fuera de Ω_n, podemos considerar que se encuentran definidas en todo Ω. Bajo ciertas hipótesis sobre los operadores, tendremos además que las funciones u_n están acotadas en un cierto espacio de Sobolev y por tanto, al menos para una subsucesión, convergen débilmente hacia una función u. La cuestión que se trata de resolver es encontrar el problema que satisface esta función u, (problema límite).

Como caso más simple, comenzamos hablando del problema lineal. Aquí la función u_n se supone que satisface el problema

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,(A\nabla u_n) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n), \end{array}\right. \tag{2.1}$$

con A en $L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ y coercitiva. Este problema ha sido ya estudiado desde hace tiempo por varios autores, así por ejemplo, cuando A se reduce a la identidad, la homogeneización de (2.1) fue realizada por D. Cioranescu y F. Murat ([26]) bajo las siguientes hipótesis sobre Ω_n: Existen una sucesión de funciones w_n y una distribución μ tales que

$$w_n \in H^1(\Omega), \tag{H1}$$

$$w_n = 0 \text{ en } \Omega \setminus \Omega_n, \tag{H2}$$

$$w_n \rightharpoonup 1 \text{ en } H^1(\Omega), \tag{H3}$$

$$\mu \in H^{-1}(\Omega), \tag{H4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, v_n, v \text{ tales que} \\ \\ v_n \rightharpoonup v \text{ en } H^1(\Omega), \quad v_n = 0 \text{ en } \Omega \setminus \Omega_n, \text{ se tiene} \\ \\ \int_\Omega \nabla\, w_n\, \nabla\,(\varphi v_n) \rightarrow <\mu, \varphi v>, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{array}\right. \tag{H5}$$

Bajo estas condiciones, se prueba que para toda distribución $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solución u_n de (2.1) (con A=I) converge en $H_0^1(\Omega)$ débil hacia la solución u del problema

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,(A\nabla u) + \mu u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Vemos por tanto que u ya no verifica el problema (2.1) sino que un nuevo término μu aparece; es lo que D. Cioranescu y F. Murat llaman el "término extraño".

Estas hipótesis son justificadas en [26] mediante la presentación de varios ejemplos, de los cuales el más característico es el caso en el que $N \geq 3$ y Ω_n es de la forma $\Omega_n = \Omega \setminus T_n$, con T_n la unión de bolas de radio $(1/n)^{N/(N-2)}$, cuyos centros se sitúan en los vértices de un enrejado formado por las aristas de cubos de lado $1/n$ que recubren periódicamente $\mathbf{R}^N$. Con respecto a la distribución μ, debemos notar que la hipótesis (H5) implica que es el límite en el sentido de las medidas $*$-débil de la sucesión $|\nabla w_n|^2$ y por tanto se trata de una medida boreliana finita y no negativa. Los resultados se generalizan fácilmente cuando A es distinta de la identidad suponiendo condiciones similares. Además del resultado de homogeneización mencionado, se obtiene también un resultado de corrector, es decir, una aproximación de ∇u_n en la topología fuerte de $L^2(\Omega)^N$, que establece que si la solución u de (2.2) es muy regular, por ejemplo $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, entonces

$$\nabla u_n - \nabla u - u\nabla w_n \to 0 \ \text{ en } L^2(\Omega)^N.$$

Conseguí una mejora de estos resultados en [9], donde probé que, suponiendo tan sólo la existencia de una sucesión z_n tal que

$$\left\{\begin{array}{l} z_n \in H^1(\Omega), \\ z_n = 0 \text{ en } \Omega \setminus \Omega_n, \\ z_n \rightharpoonup 1 \text{ in } H^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.3}$$

entonces, para una subsucesión de Ω_n, existen una sucesión w_n y una medida finita μ perteneciente a $\mathcal{M}_0^2(\Omega)$ (por $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ se indica el conjunto de medidas borelianas no negativas que se anulan en conjuntos de p-capacidad nula) tales que la sucesión w_n y la medida μ verifican propiedades muy similares a las impuestas por D. Cioranescu y F. Murat. Esto permite por tanto realizar la homogeneización de (2.1) suponiendo tan sólo la existencia de la sucesión z_n mencionada anteriormente. El resultado de corrector también es mejorado probando que basta suponer que la función límite u se encuentra en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En realidad, los resultados que aparecen en [9], son válidos para el p-laplaciano ($p > 1$)

$$\left\{\begin{array}{l} -div\,(|\nabla\, u_n|^{p-2}\nabla\, u_n) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n). \end{array}\right. \tag{2.4}$$

El término extraño que aparece tiene ahora la estructura $|u|^{p-2}u\mu$, con μ perteneciente a $\mathcal{M}_0^p(\Omega)$ y finita.

En realidad, anteriormente a mi trabajo, G. Dal Maso y U. Mosco ([30], [31]) habían ya realizado la homogeneización de (2.1), sin imponer ninguna condición adicional al hecho de que Ω_n esté contenida en Ω. Ellos prueban en este caso, la existencia de una medida $\mu \in \mathcal{M}_0^2(\Omega)$ y una subsucesión de Ω_n que sequiremos denotando por Ω_n tal que para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solución u_n de (2.1), converge en $H_0^1(\Omega)$ débil hacia la solución del problema

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega), \\ \int_\Omega A\nabla u\nabla v\,dx + \int_\Omega uv\,d\mu = \langle f, v\rangle, \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_\mu(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.5}$$

En el caso en que μ es una medida de Radon (lo cual puede no ser cierto), las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ pertenecen a $L^2_\mu(\Omega)$ y por tanto la ecuación (2.5) se puede escribir en la forma (2.2). El método empleado para probar este resultado es la Γ-convergencia, el cual tiene sin embargo el inconveniente de que el problema debe poderse escribir como un problema de minimización y por tanto la matriz A debe ser simétrica (problema que también se presenta en [9]). Además, no aparece un resultado de corrector, lo cual como mencionaremos más adelante es de gran importancia para afrontar problemas no lineales. El resultado más general referente a la homogeización de (2.1) se debe a G. Dal Maso y A. Garroni ([28]) quienes prueban el resultado anterior, para A no es necesariamente simétrica. Además aparece un resultado de corrector.

En el caso de problemas no lineales debemos mencionar un trabajo de G. Dal Maso y A. Defranceschi ([27]) quienes estudian el problema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} -div\, a(x,\nabla u_n) = f, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in W^{1,p}_0(\Omega_n), \end{array}\right. \tag{2.6}$$

donde como en el caso considerado por G. Dal Maso y U. Mosco, los abiertos Ω_n satisfacen tan sólo la propiedad de estar contenidos en Ω y donde $a : \Omega \mapsto \mathbf{R}^N$ define un operador monótono de orden p. Esta función se supone además que satisface la siguiente propiedad de homogeneidad

$$a(x,t\xi) = |t|^{p-2}ta(x,\xi),\ \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \forall t \in \mathbf{R},\ \text{p.c.t. } x \in \Omega. \tag{2.7}$$

Como ejemplo, podemos considerar el caso $a(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, que nos vuelve a dar el problema (2.4). El resultado que obtienen para este problema consiste en la existencia de una subsucesión de n, que seguiremos denotando por n, y de una medida $\mu \in \mathcal{M}^p_0(\Omega)$, tal que la solución u_n de (2.6) converge hacia la solución u del problema

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega), \\ \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla v\, dx + \int_\Omega |u|^{p-2}uv\, d\mu = \langle f, v\rangle, \\ \forall\, v \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^p_\mu(\Omega). \end{array}\right.$$

La técnica empleada en la demostración es, como en el caso de G. Dal Maso y U. Mosco, la Γ-convergencia y por tanto, a fin de que el problema se pueda escribir como un problema de minimización, se debe suponer que $a(x,\xi)$ es la derivada con respecto a ξ de una función $F(x,\xi)$ convexa en ξ. Tampoco aparece resultado de corrector en este trabajo. La eliminación de estas restricciones fue realizada por G. Dal Maso y F. Murat ([32], [33]) mediante una generalización del método usado por G. Dal Maso y A. Garroni. Sin embargo la hipótesis de homogeneidad (2.7) es aún impuesta.

Mi principal contribución a la homogeneización del problema (2.6), ha consistido principalmente en la eliminación de la hipótesis (2.7). Otros resultados en esta dirección pero menos generales y mediante un método completamente diverso han sido obtenidos por I.V. Skrypnik (ver por ejemplo [41], [42]). Suponiendo como en [9] la existencia de una sucesión z_n que satisface (2.3), (con $H^1(\Omega)$ reemplazado por $W^{1,p}(\Omega)$, se prueba en [12] la existencia de una subsucesión de n y de una función $g : \Omega \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que la solución u_n del problema (2.6) converge hacia la solución u del problema

$$\begin{cases} -div\, a(x, \nabla u) + g(x, u)\mu = f, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

donde μ puede ser tomada como la misma medida que aparece en la homogeneización de (2.4). Tal y como fue probado más tarde en un trabajo conjunto con A. Garroni ([20]) y a diferencia de lo que sucede cuando se impone (2.7), la función $g(x, s)$ no tiene ahora por qué satisfacer una hipótesis de homogeneidad del tipo

$$g(x, ts) = |t|^{p-2} t g(x, s), \ \forall s \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}, \ \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

Si bien se prueba que $g(x, .)$ es creciente, con un crecimiento de orden $p - 1$, vale cero en cero y es localmente hölderiana. La demostración de este resultado es distinta de la anteriores y consiste en comparar la solución u_n de (2.6) con el corrector de (2.4) que aparece en [9]. De aquí la necesidad de tener un corrector ya mencionada anteriormente. Debemos mencionar que en general no es cierto que el corrector que aparece al homogeneizar (2.4) sea aún un corrector para (2.6). Sin embargo, la comparación aporta la suficiente información sobre ∇u_n como para pasar al límite en (2.6). El método permite también encontrar un resultado de corrector para (2.6), el cual establece esencialmente la existencia de una sucesión de funciones $P_n : \Omega \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^N$ que verifican

$$\nabla u_n - \nabla u - P_n(x, u) \to 0 \ \text{ en } L^p(\Omega)^N \tag{2.8}$$

(el verdadero resultado es más complejo técnicamente).

Usando el corrector para (2.4) que aparece en [33], es también posible generalizar todos estos resultados al caso en que no se impone la existencia de z_n satisfaciendo (2.3). Es decir, Ω_n es completamente general. Esto ha sido realizando en un trabajo conjunto con A. Garroni ([21]), en el cual además las funciones u_n que aparecen en (2.6) toman valores en $\mathbf{R}^M$, es decir a diferencia de los trabajos anteriores se trata de un sistema y no de una sola ecuación. Ello es posible gracias a que el método no usa el principio del máximo.

En realidad, la idea de comparar con el corrector de un problema más simple, la introduje para estudiar la homogeneización del siguiente problema:

$$\text{(2.9)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_n + H(x, u_n, \nabla u_n) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n) \cap L^\infty(\Omega_n), \end{cases}$$

donde f es una función de $L^\infty(\Omega)$ y $H(x, s, \xi)$ es una función de clase C^2 en las variables s y ξ, cuyas dos propiedades principales son las siguientes:

a) Existe una constante $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{\partial H(x, s, \xi)}{\partial s} \geq \lambda, \quad \forall\, (s, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

b) Existen dos constantes C_0, C_1 tales que

$$|H(x, s, \xi)| \leq C_0 + C_1 |\xi|^2.$$

La existencia de solución a este problema fue probada por L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel en [6], mientras que la unicidad se debe a G. Barles y F. Murat ([3]). Comparando las soluciones de (2.9) con el corrector de (2.1) y bajo la hipótesis de la existencia de una sucesión z_n que verifica (2.3), pruebo en [11] la existencia de un problema límite del tipo

$$\text{(2.10)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + H(x, u, \nabla u) + g(x, u)\mu = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu). \end{cases}$$

Como en el caso anterior, se obtiene también un resultado de corrector similar a (2.8). La demostración de estos resultados es bastante más compleja que la del caso monótono ya que es necesario introducir un cambio de variables debido a G. Barles y F. Murat ([3]) que produce gran cantidad de dificultades técnicas.

Respecto al problema (2.9), deseo referenciar también un trabajo anterior ([10]) en el que considero el caso particular

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_n + \lambda |u_n|^2 + \gamma |\nabla u_n|^2 = f \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega_n) \\ u_n \in H_0^1(\Omega_n) \cap L^\infty(\Omega_n) \end{cases}$$

el cual puede ser resuelto mediante el cambio de variables $z_n = e^{\gamma u_n} - 1$, que lo transforma en un problema semilineal.

Para terminar con este apartado referente a la homogeneización de problemas no lineales en abiertos variables, debemos comentar también el siguiente problema

$$\text{(2.12)} \qquad \begin{cases} -div\, a(x, u_n, \nabla u_n) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n), \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega_n), \end{cases}$$

donde ahora la función a define un operador pseudo-monótono. En principio, podemos pensar que el problema es bastante similar al considerado en (2.6). De hecho, en el trabajo con A. Garroni ([21]) mostramos cómo los resultados obtenidos para (2.6), se pueden aplicar a (2.12) en algunos casos particulares. Estos casos sin embargo son bastante restrictivos, ya que suponen para la función $a(x,s,\xi)$ una lipschitzianidad local del tipo

$$\begin{aligned}|a(x,s_1,\xi)-a(x,s_2,\xi)| \leq C(1+|\xi|^{p-1-\sigma})|s_1-s_2|,\\ \forall\, s_1,s_2\in\mathbf{R},\ \forall\,\xi\in\mathbf{R}^N,\ \text{p.c.t. } x\in\Omega,\end{aligned}$$

con σ una constante positiva; esta hipótesis no se verifica en los casos más simples, como por ejemplo

$$\begin{cases} -div\,\big(a(x,u_n)\nabla u_n\big)=f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_n),\\ u_n\in W_0^{1,p}(\Omega_n),\end{cases}$$

donde σ es igual a cero.

La homogeneización de (2.12) en el caso $\sigma=0$ es un resultado que he conseguido realizar de hecho bastante tiempo después que la de (2.6) (ver [14]) y para llevarla a cabo he necesitado antes, obtener algunos resultados nuevos referentes al comportamiento de la soluciones de un problema pseudo-monótono (ver la Sección 4 de este trabajo). La principal diferencia con (2.6) es que ahora no es posible obtener un resultado de corrector del tipo (2.8), que es el que conducía a la ecuación límite en el caso de los problemas (2.6) y (2.9). Es decir, no se obtienen resultados acerca del comportamiento de ∇u_n en la topología fuerte de $L^p(\Omega)^N$. Las estimaciones de las que he hablado anteriormente permiten sin embargo obtener resultados sobre el comportamiento del término $a(x,u_n,\nabla u_n)$ y dan como resultado la existencia de un término nuevo en la ecuación límite, del tipo de los que aparecen en (2.6) y (2.9). El método hace uso de truncatura y por tanto, a diferencia de lo que ocurría con (2.6), no es válido para sistemas. Estos resultados se refieren al caso en que los abiertos Ω_n son completamente arbitrarios. Un caso más simple en el cual Ω_n tiene una estructura periódica ha sido analizado en [15], trabajo en el cual he aplicado técnicas de convergencia en dos escalas de las cuales hablaré en la Sección 3 y que simplifican notablemente el problema. Si bien, presenta ya gran parte de las dificultades del caso general y, de hecho, fue estudiando este caso sencillo como llegué a obtener las estimaciones necesarias para afrontar el problema general.

Para terminar esta Sección, comentar que los resultados anteriores estan relacionados con los Problemas de Control para EDP en los cuales la variable de Control, es el propio dominio en el cual tenemos la ecuación (se trata por tanto de un problema de diseño). Los resultados anteriores, muestran que en general el Problema de Control está mal planteado ya que la ecuación límite contiene el término $g(x,u)\mu$ que no estaba en las ecuaciones satisfechas por u_n. Debemos comentar sin embargo que una ecuación como por ejemplo (2.1), se puede escribir, análogamente a (2.5), en la forma

$$
\begin{cases} u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \\ \int_\Omega A\nabla u_n \nabla v\, dx + \int_\Omega u_n v\, d\mu_n = \langle f, v\rangle, \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^2_{\mu_n}(\Omega), \end{cases} \tag{2.5}
$$

sin más que introducir la medida μ_n definida por

$$
\mu_n(B) = \begin{cases} +\infty & \text{si } cap_2(B \cup (\Omega \setminus \Omega_n)) > 0 \\ 0 & \text{si } cap_2(B \cup (\Omega \setminus \Omega_n)) = 0, \end{cases} \quad \forall\, B \subset \Omega, \text{ Borel.}
$$

Esta observación fue realizada por G. Dal Maso y U. Mosco ([30], [31]) y conduce a una relajación de Problema de Control.

Actualmente, junto con C. Calvo ([7]), hemos considerado problemas de homogeneización en los cuales varían tanto el abierto en el que está planteada la ecuación como los coeficientes de la misma. La cuestión se encuentra relacionada con los Problemas de Control en los cuales las variables de Control son el abierto y los coeficientes.

3. Convergencia en dos escalas.

El concepto de convergencia en dos escalas fue introducido por G. Nguetseng ([40], ver también [1]) a fin de pasar al límite en una expresión del tipo

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx, \tag{3.1}
$$

la cual aparece habitualmente en problemas de homogeneización periódica. En (3.1), la sucesión u_ε es débilmente convergente en $L^p(\Omega)$ mientras que $\psi(x,y)$ es una función suficientemente regular y periódica en la variable y. Por tanto, $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ converge débilmente hacia la función

$$
\frac{1}{|Y|} \int_Y \psi(x,y)\, dy
$$

donde Y es el cubo de periodicidad. Nos encontramos pues con el producto de dos términos que convergen débil. El teorema de G. Nguetseng afirma que existen una subsucesión de u_ε que seguiremos notando por u_ε y una función $u \in L^p(\Omega \times Y)$ tales que u_ε converge en dos escalas hacia u, i.e.

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y u(x,y) \psi(x,y)\, dy\, dx
$$

para toda función ψ en las condiciones anteriores. Nótese que u depende de dos variables, mientras que u_ε sólo depende de una. En homogeneización, la función u representa el primer término del desarrollo asintótico de u_ε, de hecho bajo ciertas condiciones y suponiendo $u(x,.)$ prolongada a todo $\mathbf{R}^n$ por periodicidad, se prueba el siguiente resultado de corrector:

$$u_\varepsilon(x) - u(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Junto con I. Gayte, hemos generalizado el teorema anterior al caso en que la función ψ pertenece al espacio $CAP(\mathbf{R}^N)$ de las funciones casi-periódicas en el sentido de Böhr en la variable y. Recordemos que este espacio está definido como el cierre en la norma uniforme del espacio formado por los polinomios trigonométricos. Más general que este espacio, se puede considerar el espacio $B^p(\mathbf{R}^N)$ de las funciones casiperi-ódicas en el sentido de Besicovitch de orden p, definido como el cierre de $CAP(\mathbf{R}^N)$ respecto de la norma

$$\|f\|^p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{|B(0,T)|} \int_\Omega |f(y)|^p \, dy.$$

El teorema que probamos, muestra que, si u_ε está acotada en $L^p(\Omega)$, $p > 1$, entonces existe una subsucesión de u_ε que seguimos denotando por u_ε y existe $u \in L^p(\Omega, B^p(\mathbf{R}^N))$ tales que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \, dx = \int_\Omega M_y(u(x,y)\psi(x,y)) \, dydx$$

para toda función $\psi(x,y)$ suficientemente regular tal que $\psi(x,.) \in CAP(\mathbf{R}^N)$. Aquí, hemos notado por M_y la siguiente media

$$M_y(u(x,y)\psi(x,y)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{|B(0,T)|} \int_{B(0,T)} u(x,y)\psi(x,y) \, dy, \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

La principal dificultad del resultado radica en que $CAP(\mathbf{R}^N)$ no es un espacio separable, lo que nos ha llevado a realizar una oportuna generalización del teorema de compacidad secuencial en la topología $*$-débil del dual de un espacio separable. Concretamente, probamos que si Y es un espacio reflexivo, X un subespacio vectorial (no necesariamente cerrado) de Y y $f_n : X \mapsto \mathbf{R}$, una sucesión de funcionales lineales (no necesariamente continuos) tales que existe $C > 0$ verificando

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \le C\|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$

Entonces, existe una subsucesión de f_n, que seguimos notando por f_n, y existe un funcional $f \in Y'$ tales que

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Nótese que si f_n son continuas y X es cerrado, el resultado es una consecuencia inmediata del teorema de Banach-Steinhaus y la compacidad secuencial en la topología $*$-débil de la bola unidad en el dual de un espacio reflexivo.

En realidad, en el trabajo con I. Gayte Delgado, se consideran los espacios que hemos llamado de Besicovitch Generalizados introducidos por V. Jikov, M. Kozlov y O. Oleiknik (ver [36]) para $p = 2$.

Cuando en lugar de una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$, lo que se tiene es una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$, caso habitual en homogeneización, conseguimos también caracterizar la forma del límite en dos escalas de ∇u_ε que analógamente al caso periódico ([40], [1]) resulta ser de la forma

$$\nabla u(x) + \nabla u_1(x, y)$$

donde u es el límite en $W^{1,p}(\Omega)$ de u_ε y $u_1 : \Omega \times \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$ una función tal que su gradiente con respecto a y pertenece a $L^p(\Omega, B^p(\mathbf{R}^N)^N)$. Como hemos mencionado anteriormente, en este resultado consideramos los espacios de Besicovitch Generalizados y es necesario establecer previamente una teoría de derivación para estos espacios. Esta teoría contiene varios resultados nuevos incluso para los espacios de Besicovitch usuales y, además de a la homogeneización, se aplica a la búsqueda de soluciones en los espacios de Besicovitch para EDP con coeficientes en estos espacios (véase [23]).

Los resultados sobre convergencia en dos escalas mencionados anteriormente aparecen en [22], en el caso en que $p = 2$ y los espacios de Besicovtich son los usuales. El resultado general se encuentra en la tesis de I. Gayte ([35]), de la cual soy director, junto con el Profesor J. Couce. Los resultados se aplican a diferentes problemas de homogeneización como es el caso de

$$\begin{cases} -div\, a(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

donde $a(x, s, \xi)$ define un operador pseudomonótono y es tal que para cada $(s, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, $a(., s, \xi)$ pertenece a uno de los espacios mencionados anteriormente.

Continuando con esta Sección dedicada a la generalizcación del método de convergencia en dos escalas, quiero mencionar también otras extensiones de esta técnica, referidas a la homogeneización periódica, en las que he trabajado:

Definamos $\kappa : \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{Z}^N$ por

$$\max_{1 \leq 1 \leq N} |x_i - \kappa_i(x)| < \frac{1}{2},$$

función que está bien definida salvo en un conjunto de medida nula. Siguiendo un trabajo de T. Arbogast, J. Douglas y U. Hornung ([2]), definamos entonces la siguiente transformación que hace corresponder a una sucesión $u_\varepsilon : \Omega \subset \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$ la sucesión $\hat{u}_\varepsilon : \Omega \times Y \mapsto \mathbf{R}$ ($Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^N$), definida por

$$\hat{u}_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon y).$$

Nótese que si C_ε^k es el cubo de centro $k \in \mathbf{Z}^N$ y lado ε, entonces $\hat{u}_\varepsilon$ no depende de $x \in C_\varepsilon^k$ mientras que como función de y no es más que la transformada de u_ε por el cambio de variables

$$y = \frac{x - \varepsilon k(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon},$$

que lleva el cubo C_ε^k en el cubo Y. Es decir, se trata de agrandar cada pequeño cubo C_ε^k a fin de no perder información cuando ε tiende a cero.

Con esta sucesión $\hat{u}_\varepsilon$ y tal y como hace notar L. Lenczner ([37]), la función $u(x,y)$ que aparece en el teorema de G. Nguetseng, no es otra que el límite en $L^p(\Omega \times Y)$ de $\hat{u}_\varepsilon$.

En [15], aplico estas ideas al siguiente problema de homogeneización (ver la Sección 2)

$$\begin{cases} -div\, a(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon) \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon). \end{cases}$$

donde a define un operador pseudo-monótono de tipo Leray-Lions de orden $p \in (1, N)$ y donde Ω_ε está definido por (problema con talla crítica)

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus T_\varepsilon, \quad \text{con} \quad T_\varepsilon = \bigcup_{k \in Z^N} B(\varepsilon k, \varepsilon^{\frac{N}{N-p}}).$$

No es posible abordar este problema con el teorema de Nguetseng ya que, mientras que Ω_ε tiene una estructura periódica, con periodo ε, las bolas que aparecen en la definición de T_ε decrecen con orden $\varepsilon^{\frac{N}{N-p}}$. El problema puede sin embargo ser resuelto con la siguiente adaptación de la idea de T. Arbogast, J. Douglas y U. Hornung. Basta definir $\hat{u}_\varepsilon$ por

$$\hat{u}_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(\varepsilon\kappa(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^{\frac{N}{N-p}} y).$$

Cuando $p = N$, el problema guarda varias diferencias debido a que se trata de un caso crítico en las inyecciones de Sobolev. El problema se encuentra estudiado en [18] y para su resolución es necesario usar un cambio de variables no lineal.

Junto con J.D. Martín y M. Luna hemos usado también estas técnicas en la homogeneización de multiestructuras periódicas con varios parámetros (ver [24]). El método también se aplica a la resolución de problemas de homogeneización periódica en dominios que varían para operadores de orden mayor que 2, trabajo que se encuentra aún en proceso de redacción.

4. Propiedades de las soluciones de problemas pseudo-monótonos.

Los resultados de esta Sección se refieren a un problema del tipo

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} -div\, a(x,u,\nabla u) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbf{R}^N$, $a : \Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}^N$ define un operador pseudo-monótono de orden p, f es una distribución del espacio $W^{-1,p'}(\Omega)$ y u_0 un elemento de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como es conocido, la existencia de solución de este problema se debe a J. Leray y J.L. Lions ([38]). Respecto a la unicidad, se sabe que es cierta (ver [25], [4]) por ejemplo si $a(x,s,\xi)$ es localmente lipschitziana con respecto a s y fuertemente monótona con respecto a ξ. sin embargo, en casos más generales, el problema no tiene solución única (ver [4]).

Mi contribución en el contexto de este problema ([16]) ha consistido en probar que, bajo hipótesis más débiles que las necesarias para la unicidad, se puede aún probar el siguiente resultado: Si $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ son soluciones de (4.1), entonces ambas verifican la misma condición de Neumann en el borde, i.e., si n es la normal exterior en $\partial\Omega$, entonces

$$a(x,u_1,\nabla u_1)n = a(x,u_2,\nabla u_2)n \ \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Este resultado permite ahora mostrar que el máximo y el mínimo de dos soluciones de (4.1) son aún solución de (4.1), lo que permite probar la existencia de una solución minimal y una solución maximal, las cuales verifican además el siguiente principio del máximo:

Supongamos $f,g \in W^{-1,p'}(\Omega)$ y $u_0, v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tales que $f \le g$ en Ω, $u_0 \le v_0$ en $\partial\Omega$. Entonces, si $\underline{u}, \overline{u}$ son respectivamente la solución minimal y maximal de (4.1) con datos f y u_0 y $\underline{v}, \overline{v}$ son respectivamente la solución minimal y maximal de (4.1) con datos g y v_0, se tiene que

$$\underline{u} \le \underline{v}, \quad \overline{u} \le \overline{v} \ \text{ e.c.t. } \Omega.$$

Es importante señalar que un resultado anterior referente a la existencia de soluciones minimales y maximales para operadores pseudo-monótonos fue obtenido por L. Boccardo, F. Murat y J.P. Puel en [6], donde, no obstante, no se prueba que el máximo (resp. mínimo) de dos soluciones sea aún una solución sino tan sólo una subsolución (resp. supersolución). Se debe comentar también que las estimaciones que permiten resolver el problema (2.12) están basadas en estas propiedades.

Los resultados anteriores permiten también extender el concepto de capacidad a los operadores pseudo-monótonos de la siguiente forma. Si K es un compacto contenido en Ω y s es un número real, se define la capacidad de K en Ω respecto del operador $\mathcal{A} = -div\, a(x, u, \nabla u)$ y la constante s por

$$C_{\mathcal{A}}(K, \Omega, s) = \int_{\Omega} a(x, u_s, \nabla u_s) \nabla u_s \, dx,$$

donde u_s es una solución del problema

$$\begin{cases} -div\, a(x, u_s, \nabla u_s) = 0 \ \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega \setminus K), \\ u_s = s \text{ en } K, \\ u_s = 0 \ \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Nótese que, aunque (4.2) puede no tener solución única, el hecho de que dos soluciones verifiquen la misma condición de Neumann implica que la definición de $C_{\mathcal{A}}(K, \Omega, s)$ no depende de la solución u_s escogida. Esta capacidad se puede además probar que verifica propiedades análogas a las de la capacidad habitual, $a(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$. Estos resultados generalizan los obtenidos por G. Dal Maso e I.V. Skrpnik en [34], para el caso monótono y se encuentran en [17]. Análogamente al caso monótono, sirven para caracterizar el término $g(x, u)\mu$ que aparecía el la homogeneización de (2.12).

5. Un resultado de compacidad.

En esta última Sección voy a comentar un trabajo con G. Dal Maso que aunque ha sido usado en alguno de los trabajos mencionados anteriormente, tiene importancia por sí mismo y conviene ser tratado de forma independiente.

Es conocido, que una función de $W^{1,p}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^N$ abierto, $1 \leq p \leq N$) admite un representante que está definido salvo en un conjunto de p-capacidad nula (y por tanto de dimensión de Hausdorff $N - p$), el cual además es p-cuasi-continuo. Tomando para cada función de $W^{1,p}(\Omega)$ el correspondiente representante mencionado anteriormente, es conocido que se tiene el siguiente resultado. Si $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ converge fuertemente en $W^{1,p}(\Omega)$ hacia una función u, entonces existe una subsucesión que converge salvo en un conjunto de p-capacidad nula. Sin embargo, el resultado es falso si la convergencia es solamente débil. Junto con G. Dal Maso ([19]), probamos que si u_n converge débilmente en $W^{1,p}(\Omega)$ hacia u, entonces para toda medida boreliana μ, finita, que se anula en conjuntos de p-capacidad nula la sucesión u_n converge en μ-medida hacia u, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|u_n - u| > \varepsilon\}) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Se obtiene además un resultado inédito debido a E. De Giorgi, que establece que en las condiciones anteriores, existe una subsucesión de u_n, que denotamos aún u_n, tal que

$$\liminf_{n\to\infty} |u_n(x) - u(x)| = 0,$$

salvo en un conjunto de p-capacidad nula. Estos resultados, se aplican por ejemplo a los problemas de optimización siguientes:

$$\min\left\{\int_\Omega F(x,u,Du)\,dx + \int_\Omega f(x,u)\,d\mu:\ u\in W^{1,p}(\Omega)^m\right\}$$
$$\min\left\{\int_\Omega F(x,u,Du)\,dx:\ u\in W^{1,p}(\Omega)^m,\ u(x)\in K(x)\right\},$$

donde la función F es convexa en su última variable y satisface una condición del tipo

$$F(x,s,\xi)\geq \alpha|\xi|^p,$$

con $\alpha>0$, la función f es semicontinua en su segunda variabla y no negativa y los conjuntos $K(x)$ son cerrados en $\mathbf{R}^M$. En el segundo problema, la condición $u(x)\in K(x)$, se entiende verificada salvo a lo más en un conjunto de p-capacidad nula (problema fino de obstáculo).

Bibliografía

[1] G. ALLAIRE, *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal. 23, 6 (1992), 1482-1518.

[2] T. ARBOGAST, J. DOUGLAS, U. HORNUNG, *Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory.* SIAM J. Math. Anal., 21, 4 (1990), 823-836.

[3] G. BARLES, F. MURAT, *The maximum principle for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions.* Arch. Rat. Mech. Anal. 133 (1995), 77-101.

[4] L. BOCCARDO, T. GALLOUET, F. MURAT, *Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires.* C.R. Acad. Sci. Paris, 315, I (1992), 1159-1164.

[5] L. BOCCARDO, F. MURAT, J.P. PUEL, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique.* En *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. IV*, ed. por H. Brezis, J.L. Lions. Research Notes in Math. 84 (1983), Pitman, Londres, 19-73.

[6] L. BOCCARDO, F. MURAT, J.P. PUEL, *Quelques propiétés des opérateurs elliptiques quasi linéaires.* C.R. Acad. Sci. Paris, 307, I (1988), 749-752.

[7] C. CALVO-JURADO, J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of nonlineal Dirichlet problems with varying coefficients in general perforated domains.* En preparación.

[8] L. CARBONE, C. SBORDONE, *Some properties of Γ-limits of integral functionals.* Ann. Mat. Pur. Appl. IV, 122 (1979), 1-60.

[9] J. CASADO-DÍAZ, *Existence of a sequence satisfying Cioranescu-Murat conditions in homogenization of Dirichlet problems in perforated domains.* Rendiconti di Matematica, VII, 16 (1996), 387-413.

[10] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of a quasi-linear problem with quadratic growth in perforated domains: An example.* Ann. I. H. Poincaré, An. non Linéaire, 14, 5 (1997), 669-686.

[11] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of general quasi-linear Dirichlet problems with quadratic growth in perforated domains.* J. Math. Pur. Appl. 76 (1997), 431-476.

[12] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenisation of Dirichlet problems for monotone operators in varying domains.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 127 A (1997), 457-478.

[13] J. CASADO-DÍAZ, *Relaxation of a quadratic functional defined by a nonnegative unbounded matrix.* Potential Anal. 11, (1999), 39-76.

[14] J. CASADO-DÍAZ, *Homogenization of Dirichlet pseudomonotone problems with renormalized solutions in perforated domains.* J. Math. Pur. Appl. 79, 6 (2000), 553-590.

[15] J. CASADO-DÍAZ, *Two scale convergence for nonlinear Dirichlet problems in perforated domains.* P. Roy. Soc. Edimburgh, 130 A (2000), 249-276.

[16] J. CASADO-DÍAZ, *Minimal and maximal solutions for Dirichlet pseudomonotone problems.* Por aparecer en Nonlinear Analysis. Theor. Meth. and Appl.

[17] J. CASADO-DÍAZ, *The capacity for pseudomonotone operators.* Por aparecer en Potential Anal.

[18] J. CASADO-DÍAZ, *Asymptotic behaviour of nonlinear problems in periodically perforated domains. The case $p = N$.* Por aparecer

[19] J. CASADO-DÍAZ, G. DAL MASO, *A weak notion of convergence in capacity with applications to thin obstacle problems.* Por aparecer en *Calculus of Variations and Related Topics* (Technion, Haifa, Israel, 25-31 Marzo 1998), Pitman Research Notes in Mathematics, Addison Wesley Longman.

[20] J. CASADO-DÍAZ, A. GARRONI, *A non homogeneous extra term for the limit of Dirichlet problems in perforated domains.* Por aparecer en *Homogenization and applications to material sciences (Proceedings, Niza, 6-10 Junio, 1995).* Math. Sciences and Appl. Series, Gakkokotosho, 1996.

[21] J. CASADO-DÍAZ, A. GARRONI, *Asymptotic behaviour of Dirichlet solutions of nonlinear elliptic systems on varying domains.* SIAM J. Math. Anal., 31, 3 (2000), 581-624.

[22] J. CASADO-DÍAZ, I. GAYTE, *A general compactness result and its application to the two-scale convergence of almost periodic functions.* C. R. Acad. Sci. Paris, 323,1, (1996), 329-334.

[23] J. CASADO-DÍAZ, I. GAYTE, *A derivation theory for Generalized Besicovitch spaces and its application to partial differential equations.* Por aprecer.

[24] J. CASADO-DÍAZ, M. LUNA-LAYNEZ, J.D. MARTÍN-GÓMEZ, *An adaptation of the Arbogast, Douglas, Hornung's method for the analysis of very thin reticulated structures.* Por aparecer.

[25] M. CHIPOT, G. MICHAILLE, *Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1989), 137-166.

[26] D. CIORANESCU, F. MURAT, *Un terme étrange venu d'ailleurs.* En *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. II and III*, ed. por H. Brezis, J.L. Lions. Research Notes in Math. 60 and 70 (1982), Pitman, Londres, 98-138 and 154-178.

[27] G. DAL MASO, A. DEFRANCESCHI, *Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains.* Manuscripta Math. 61 (1988), 251-278.

[28] G. DAL MASO, A. GARRONI, *New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains.* Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 3 (1994), 373-407.

[29] G. DAL MASO, A. GARRONI, I.V. SKRYPNIK, *A capacitary method for the asymptotic analysis of Dirichlet problems for monotone operators.* J. Anal Math. 71 (1997), 263-313.

[30] G. DAL MASO, U. MOSCO, *Wiener-criterion and* Γ*-convergence.* Appl. Math. Optim. 15 (1987), 15-63.

[31] G. DAL MASO, U. MOSCO, *Wiener-criteria and energy decay for relaxed Dirichlet problems.* Arch. Rat. Mech. Anal. 95, 4 (1986), 345-387.

[32] G. DAL MASO, F. MURAT, *Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators on* H_0^1. En *Calculus of Variations, Homogenization and Continuum Mechanics (Proceedings, Cirm-Lumigny, Marsella, Junio 21-25, 1993)*, ed. por G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences 18 (1994), World Scientific, Singapur, 177-202.

[33] G. DAL MASO, F. MURAT, *Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 7, 4 (1997), 765-803.

[34] G. DAL MASO, I.V. SKRYPNIK, *Capacity theory for monotone operators.* Potential Anal. 7, 4 (1997), 765-803.

[35] I. GAYTE, *Espacios de Besicovitch generalizados y convergencia en dos escalas.* Universidad de Sevilla. 1998.

[36] V.V. JIKOV, S.M. KOZLOV, O.A. OLEINIK, *Homogenization of differential operators and integral functionals.* Springer-Verlag, Berlín, (1994).

[37] M. LENCZNER, *Homogénéisation d'un circuit électrique.* C. R. Acad. Sci. Paris, 324, S. II b (1997), 537-542.

[38] J. LERAY, J.L. LIONS, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder.* Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.

[39] P. MARCELLINI, *Some problems of semicontinuity and of* Γ*-Convergence for integrals of the calculus of variations.* En *Proceedings of the international meeting on recent methods in non lineal anallysis, (Roma, mayo 8-12, 1978),* ed. por E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco. Pitagora, Bologna, (1979), 205-221.

[40] G. NGUETSENG, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.* SIAM J. Math. Anal. 20, 3 (1989), 608-623.

[41] I.V. SKRIPNIK, *Asymptotic behaviour of solutions of nonlinear elliptic problems in perforated domains.* Math. Sb. 184 (1993), 67-90.

[42] I.V. SKRYPNIK, *Homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure.* Math Sb. 187, 8 (1996), 125-157.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *16 (2000), 89–118.*

Definiciones acerca de la Educación Matemática y la Matemática Difusa

José Antonio Herencia
Dpto. de Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba

e-mail: `jaherencia@uco.es`

1 *Introducción:* Definiciones matemáticas frente a la complejidad

Ya desde el "principio" quiero manifestar una cuestión de "principios": ante los lenguajes intrincados, las ideas enmarañadas, los embrollos mentales, etcétera, conviene intentar aclarar los conceptos mediante "definiciones" (al estilo que nos tienen bien acostumbrados las "Matemáticas"). Tales situaciones "complejas" se presentan en los apartados 1.1 a 1.4 que siguen. Tomadas como "premisas" y aplicándoles el "principio" anterior, me llevarán a una "conclusión" de la que se derivará el contenido del resto del presente artículo.

1.1 *Premisa 1:* "Educación Matemática" en el Boletín de S$\vec{e}$MA

La sección sobre "Educación matemática" comenzada en el *Boletín* $n^\circ 14$ *de S$\vec{e}$MA* contenía dos interesantes artículos. El titulado **"La Matemática Difusa"** por Alicia Delibes Liniers [16] revisaba las últimas tendencias sobre la enseñanza de las Matemáticas en el Reino Unido, Estados Unidos y España, alertando sobre los graves inconvenientes originados por la denominada *New New Math* o *Fuzzy Math.* El titulado **"Sobre las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria"** por José Luis Andrés Yebra [3] argumentaba de forma convincente la sensata propuesta de introducir una *Modalidad de Ciencias y Tecnología* en el Bachillerato LOGSE, análoga al *Bachillerato Científico* de los franceses. En el *Boletín* $n^\circ 15$, la sección de "Educación matemática" se dedicó a la reunión de Decanos y Directores de Departamentos de Matemáticas, celebrada en Santiago de Compostela en Febrero de 2000, donde se analizaron varios problemas relativos a las Licenciaturas de Matemáticas en las Universidades españolas.

Estos tres artículos responden a las inquietudes surgidas en la "reunión sobre Educación Matemática" mantenida en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales los días 5 y 6 de febrero de 1999 (narrada por Rosa Pardo y Soledad Rodríguez y comentada por Enrique Fernández-Cara en las páginas 8-14 del *Anuario 1999 de S$\vec{e}$MA*). A su vez, suponen una muestra más de la preocupación generalizada sobre la enseñanza actual y futura de las Matemáticas. Preocupación que es también patente en múltiples contribuciones publicadas en revistas especializadas como *SUMA* (de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), *Epsilon* (de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"), etc. e incluso en diarios de amplia difusión (por ejemplo, me permito destacar los cuatro artículos titulados *"El laberinto de los números"*, *"El analfabetismo numérico y el 2000"*, *"Importancia de las Matemáticas"* y *"El comportamiento humano no es reducible a matemáticas"*, entre los varios recopilados en la página web http://dulcinea.uc3m.es/ceamm/prensa.html). Tal inquietud por la enseñanza y desarrollo de las Matemáticas adquiere especial relevancia en el presente "Año Mundial de las Matemáticas".

Pero sobre este tema aparecen posturas bien distintas y distantes, tanto en las "altas esferas" (según indica la citada narración de la reunión de la Real Academia de CEFN) como a otros niveles (por ejemplo, al comparar el escrito de los profesores de Matemáticas de Olivares y Cantillana –Sevilla– "reclamando" más horas de clase y revisión de contenidos [7], con la respuesta aportada por profesores de Montilla –Córdoba– "dando una oportunidad a la ESO" [8]). Asimismo, suele haber enormes diferencias entre "teoría" y "práctica" (por ejemplo, entre el atractivo espíritu progresista de la LOGSE y la escasez de medios y presupuestos, o entre las sugerentes propuestas pedagógicas y los pésimos resultados reales de su aplicación). De manera que, cuando se analizan tales posturas encontradas y se observan tales enormes desajustes, la situación puede considerarse realmente complicada.

1.2 *Premisa 2:* Diversidad de materias para adolescentes

Los alumnos de Enseñanza Primaria y Secundaria tienen el derecho a recibir conocimientos sobre las más variadas materias, así como a que se les abra un amplio abanico de posibilidades de expresión, acción y trabajo. En particular, deben acceder al lenguaje corporal de gimnastas y dramaturgos, al lenguaje visual de pintores y escultores, al lenguaje escrito de literatos y poetas ... y a todo procedimiento artístico que les permita desarrollar su sutil plétora de emociones y sentimientos. Tienen derecho a ser asistidos por psicólogos y pedagogos para poder encauzar sus inquietudes personales. Pueden usar el lenguaje (muchas veces enrevesado) de los filósofos para expresar sus elucubraciones y cavilaciones.

Los niños y adolescentes acompañan a su crecimiento corporal todo un cúmulo de inquietudes y preocupaciones. La enseñanza que reciben en la familia, los Colegios e Institutos es fundamental para el encauzamiento de sus aspiraciones y el logro de su vocación.

Cuando las Matemáticas constituyen una materia árida y abstracta, tantas veces carentes de atractivo para jóvenes alumnos llenos de otras preocupaciones, ¿qué podemos aportar los profesores a tales alumnos?

1.3 *Premisa 3:* Interpretaciones de la Probabilidad

El filósofo Max Black, como paso previo a la exposición de los distintos significados de la probabilidad (matemático o "clásico", lógico, estadístico o "frecuencial" y subjetivo), escribe en su libro [6] un apartado titulado **"El sentido común de la probabilidad"**. En él examina los usos y sentidos de las palabras "probablemente", "probable" y "probabilidad" (enumerando una lista con ¡veintisiete consideraciones distintas!), destaca las versiones de los principales autores sobre el tema y concluye con un sub-apartado titulado **"Estructura del punto de vista del sentido común",** del que reproduzco literalmente el comienzo y el final:

> *En la vida ordinaria, una aserción del tipo de "probablemente P", donde "P" expresa la realización de algún posible suceso o situación, tiene la función de comprometer al interlocutor con la verdad de P, sobre la base de la existencia de "condiciones iniciales posibilitadoras" que favorecen la realización de P, sin asegurarla. Así pues, el uso del adverbio significa la supuesta existencia de tales condiciones y garantiza que la aserción en la que ocurre será tenida en cuenta o "prevista". En ausencia de otras indicaciones, las condiciones posibilitadoras se sobreentiende que constituyen el "estado del universo" o la parte relevante del mismo, en el momento de la proferencia. En las aserciones de probabilidad relativamente explícita, sin embargo, el fundamento viene expresado por una cláusula que formula información concerniente a algún aspecto general del universo, que se concibe como favorable a algún otro aspecto general (una relación de determinación parcial de atributos). En los sustantivales ("Dado D, la probabilidad de que P es tal y tal") la fuerza asertiva del uso adverbial es puesta entre paréntesis, o suspendida, siendo el cometido de tales usos tan sólo el estimar el grado en que las condiciones posibilitadoras importantes (expresadas por la referencia a "D") favorecen la realización del resultado P.*
>
> ... ...

> *Las teorías monolíticas tienden a distorsionar los aspectos inoportunos del habla ordinaria de probabilidad en aras de alguna preconcepción filosófica, mientras que a los planteamientos que abogan por una fragmentación apenas si se les urge que presenten algún principio de conexión entre los sentidos divorciados. Parece poco plausible, sin embargo, hacer cargar al habla ordinaria de probabilidad con una inexplicable propensión a los juegos de equívocos. Una teoría enteramente satisfactoria, aún por formular, ha de hacer justicia tanto a la variabilidad como a la unidad del habla ordinaria de probabilidad.*

Ante estas disertaciones (que considero bastante más ininteligibles que las reseñadas por Alicia Delibes en la página 92 de [16], transcritas literalmente del "currículo" oficial de la ESO), cabe pensar que el concepto de "probabilidad" es algo tan oscuro y complejo, que es preferible no intentar comprenderlo ni aplicarlo. ¡Ni mucho menos explicarlo en clase de Matemáticas!

1.4 *Premisa 4:* Origen de la Teoría de Conjuntos Difusos

En la década de los 60, el ingeniero Lotfi A. Zadeh observó el diferente tratamiento y comportamiento de los humanos y las máquinas en el control de procesos (sobre todo, industriales). Por un lado, los expertos humanos, tras años de experiencia, consiguen controlar y llevar a buen término muchos procesos complejos como "obtener cemento de calidad" tras aplicar los procedimientos físico-químicos pertinentes, o "construir un jarrón" en la alfarería usando solamente el torno, el barro y las manos, o "aparcar un trailer articulado de 8 ejes" en un espacio muy ajustado, o "esquivar un animal" que cruza la carretera cuando se va conduciendo, etcétera. Si a estos expertos se les pregunta qué "reglas" o "normas" siguen, darán unas ideas vagas, difícilmente expresables con exactitud matemática. Por ejemplo, usarán expresiones de los siguientes tipos (en las que aparecen resaltados los términos `difusos`):

- Si el producto está `muy` denso debemos añadir `bastante` agua.
- Disminuir `considerablemente` la cantidad de calor suministrada en cuanto se observen `ligeras` resquebraduras.
- Presionar `débilmente` en el sentido contrario al de caída.
- Girar `mucho` si estamos `muy` cerca y vamos `despacio`, pero girar `poco` si estamos `lejos` y vamos `rápido`.
- No frenar `bruscamente` si la curva es `muy` cerrada, etcétera.

Por otro lado, las máquinas se programan atendiendo a unas normas <u>exactas</u> y <u>rígidas</u>, del tipo:

- Si la densidad es <u>2 kgr/l</u> añadir <u>3 l</u> de agua.

• Cuando se llega a 120° C apagar la caldera, a 40° C encenderla.
• Si la distancia al obstáculo es de 2 m accionar el freno, salvo que el radio de curvatura sea inferior a 4m, etcétera.

Las Matemáticas se han desarrollado históricamente junto a la Física, proporcionando el lenguaje y las ecuaciones exactas que describen el comportamiento de muchas "leyes" que gobiernan la Naturaleza. Con el uso de los ordenadores, se pretende confeccionar programas informáticos basados en modelos matemáticos, capaces de controlar automáticamente procesos industriales. Pero, al tratar procesos complejos, los modelos matemáticos o bien se simplifican de forma que no reflejan fielmente la realidad o bien son complicados o imposibles de resolver (en cuyo caso se suelen obtener soluciones aproximadas mediante el Análisis Numérico). Zadeh, frente a estas dificultades propias del manejo de ecuaciones exactas, pensó en la posibilidad de construir ordenadores con procesadores `difusos`, cuya programación siguiera métodos análogos a los empleados por expertos humanos, usando conceptos `vagos` o `borrosos` o `difusos` en vez de datos y reglas exactas.

El primer paso dado por Zadeh fue definir el concepto de *conjunto difuso* (o *borroso*) y estudiar sus propiedades y aplicaciones fundamentales, en el famoso artículo titulado *"Fuzzy Sets"* [53]. Posteriormente, definió las *variables lingüísticas* [54] que permiten expresar los términos `difusos` usados en el razonamiento humano. También interpretó los conjuntos difusos en términos de la *Teoría de la Posibilidad* [55] (diferenciándolos así del concepto de *probabilidad*). Los silogismos empleados en los razonamientos humanos (junto con sus fundamentos teóricos) constituyen la denominada *Lógica Difusa*, herramienta importante de los *Sistemas Expertos* en particular [56] y de la *Inteligencia Artificial* en general. Entre las muchas contribuciones de Zadeh, los artículos fundamentales (incluyendo los antes citados) están recopilados en el libro [52]. Sus ideas se han extendido y aplicado enormemente, constituyendo la ahora denominada *Teoría de Conjuntos Difusos.* La aplicación más importante, conforme a las ideas originales, se encuentra en el uso del *Control Difuso* en Ingeniería. Un ejemplo notable es su empleo en un sistema de frenado automático instalado en el metro de Tokio. Muchos otros ejemplos se encuentran en electrodomésticos donde se usa la *tecnología "fuzzy"* (característica que suele identificarse para distinguirlos como preferibles a otros).

1.5 *Conclusión:* No es lo mismo "Educación Matemática" que *"equivocación matemática"*. Ni es lo mismo "Matemática Difusa" que *"matemática confusa"*

El manejo de la "probabilidad", sujeta a las consideraciones de Black antes citadas, así como la transcripción a un ordenador de las "reglas inexactas" expresadas en lenguaje coloquial (nada matemático) por expertos humanos, se antojan tareas bien difíciles. Tampoco parece fácil enseñar Matemáticas a adolescentes de mentalidad compleja, máxime cuando, en vez de unas directrices claras, el profesor se encuentra con distintas tendencias pedagógicas contrapuestas. ¿Cómo podremos salir de estos atolladeros?

Las dos primeras situaciones (correspondientes a las "premisas 3 y 4" previas) se resuelven de forma "matemática": dando definiciones "exactas" que aclaren lo que hacemos y cómo lo hacemos. Pese a las muchas interpretaciones y usos que se les pueda dar al término "probabilidad" (la mayoría de ellas tratadas en [20]) y pese a la diferencia que podemos encontrar entre su apreciación intuitiva/subjetiva y su cálculo formal (tratada de forma interesante en [10, 48]), todo queda mucho más claro con la definición axiomática de Kolmogorov [30]: la **probabilidad** es una medida aditiva acotada (tomando valores en el intervalo $[0, 1]$). A partir de aquí se desarrolla la *Teoría de la Probabilidad*, obteniendo propiedades conocidas de interés como el "Teorema de Bayes", las "leyes de los grandes números", etc. Se trata de un desarrollo matemático correcto, susceptible de un tratamiento claro en clase (exento de posibles exageraciones análogas a las de la *"new new math"* como: ¡nada es exacto, todo está sujeto al azar!, ...).

De igual forma, el mérito de Zadeh radica en expresar de forma matemática ideas aparentemente impropias de las Matemáticas, por inexactas. Así, cuando se habla de "un subconjunto A de X" debe estar claramente especificado qué elementos de X pertenecen a A y cuáles no pertenecen, pudiéndose identificar el subconjunto A con su función característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ (que asigna el valor 1 a los elementos de A y el valor 0 a los restantes). Esto permite expresar conceptos "nítidos" como $\underline{\{2\}}$ ó $\underline{[1.8, 2.2]}$ (por ejemplo para especificar una cantidad de agua: $\underline{2}$ litros ó $\underline{2 \pm 10\%}$ litros), pero descarta el uso matemático directo de cantidades como `mucha` o `bastante` agua (para ser bebida durante la tarde, por ejemplo). Zadeh usa **grados de pertenencia** comprendidos entre 0 y 1 (sin limitarse exclusivamente a estos dos valores extremos, como es usual), definiendo un **subconjunto difuso** (o **borroso**) A del conjunto X mediante su **función de pertenencia** μ_A, que es una aplicación de X en $[0, 1]$. Por ejemplo, en la situación antedicha, podemos modelar la cantidad difusa `bastante` por el subconjunto difuso de $\mathbb{R}$ dado por la función de pertenencia siguiente:

$$\mu(x) := \begin{cases} 2x-3, & 1.5 \leq x \leq 2 \\ 5-2x, & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \tag{1}$$

Partiendo de la definición de conjunto difuso, se desarrolla la amplia *Teoría de Conjuntos Difusos*. La cual es también susceptible de un correcto desarrollo en ciertos cursos académicos, considerando los conjuntos difusos como una forma más de incertidumbre, no exclusiva sino compatible con la exactitud de las fórmulas matemáticas y la determinación probabilística de los sucesos aleatorios.

Las situaciones correspondientes a las "premisas 1 y 2" previas (conflictivo panorama educativo para profesores de Matemáticas ante alumnos con preocupaciones diversas), no se pueden reducir a los simples términos "matemáticos" de definiciones y axiomas, hecho en el que insistiré en la Sección 3. Es evidente que en la enseñanza de las Matemáticas intervienen múltiples factores tanto generales (contenidos, metodología, temporización, ...) como particulares (medios disponibles, experiencia, conocimientos y personalidad del profesor, alumnos concretos a los que se dirige, ...). No obstante, ante tan complicada situación, interesará más aclarar los objetivos y delimitar las líneas de actuación (dentro de las limitaciones antedichas) que divagar errantes en disquisiciones contradictorias y en discusiones bizantinas sin principio ni fin. En particular, mostrando mi acuerdo con J. L. Andrés Yebra y con A. Delibes Liniers, quiero redundar en dos aspectos que considero claramente necesarios: ampliar la optatividad y heterogeneidad en la Enseñanza Secundaria y eliminar la "jerga confusa" y la "metodología light" de la "novísima matemática".

Junto a los diversos "lenguajes" que interesa aprendan, los alumnos tienen el derecho a conocer la precisión y el rigor del método científico (que tantos avances ha conseguido en la Historia moderna y contemporánea). Los profesores de Ciencias (Matemáticas inclusive) tenemos el deber de enseñarles cómo las Matemáticas constituyen un "lenguaje de la Naturaleza", que aparece implícito en la formulación de todas las Ciencias. Asimismo, junto a las diversas manifestaciones de su crecimiento personal, los alumnos deben desarrollar su razón. Para lo cual, las Matemáticas juegan un papel primordial (mediante su lógica, su precisión, sus demostraciones, etcétera). Hace años, la educación escolar daba a los aspectos "intelectuales" de la persona un valor preponderante sobre los demás, incluso discriminando personas con mucha capacidad en otros ámbitos, pero de bajo coeficiente intelectual. Ahora, la LOGSE "integra" a todos los individuos en el mismo sistema educativo, evitando injustas discriminaciones. Es cierto que el valor de la persona está por encima de que tenga unas u otras cualidades, que a las distintas personas y a las distintas materias debemos atribuirle el mismo valor, estableciendo una justa **"equi-valencia"**. Pero eso no implica que todos los alumnos tengan las mismas cualidades, ni que todos deban tener el mismo nivel en todas las materias. El "rigor" y la "lógica" matemáticas se deben introducir de forma gradual, sin tener que rebajarlo a un nivel accesible a todo el alumnado. Suponer que todos los alumnos tienen la mismas aptitudes y vocación para las matemáticas es una **"equi-vocación matemática"**. Precisamente la no discriminación consiste en permitir que cada persona profundice en las materias que más le interesen, acorde con su propia vocación.

Consideremos ahora la imprecisión del lenguaje, la incertidumbre del azar y la vaguedad de los conjuntos difusos. Cuando Pascal y Laplace intentaban hacer previsiones sobre los distintos resultados de los juegos de azar, se consideraría su empeño un entretenimiento alejado del uso correcto de las Matemáticas, aunque sus objetivos eran claros. La ya desarrollada Teoría de la Probabilidad estudia los aspectos "exactos" que subyacen en algo tan "caótico" y "desordenado" como es el azar. De forma análoga, la Teoría de Conjuntos Difusos y, en particular, la *Matemática Difusa* "propiamente dicha" pone "en orden" los aspectos de la incertidumbre presentes en el lenguaje humano, no limitándose al uso de conceptos "nítidos" o "exactos", sino permitiendo también usar conceptos "vagos", "borrosos" o "difusos". Pero esto es muy distinto a lo que hace la *Matemática Difusa* entendida como la *New New Math* o *Fuzzy Math* descrita por Delibes en [16]. Esta *novísima matemática* "añade entropía al desorden" planteado en la educación matemática, por lo que sería más correcto denominarla **"matemática confusa"**.

Las consideraciones anteriores me motivan a añadir más "opiniones personales" respecto al debate abierto sobre la educación matemática (en la subsección 2.3; intentando delimitar otros aspectos "básicos" que, tal vez por obvios, suelen descuidarse actualmente). Concluyo en la sección 3 resumiendo (de forma "difusa") la mayoría de las opiniones expresadas.

Además, creo conveniente explicar con mayor detalle algunos contenidos de la **Matemática Difusa** tal como se entiende entre los matemáticos e ingenieros (totalmente desligada de la *New New Math* o *"Matemática confusa"* de los "pseudo-pedagogos" de las Matemáticas). Espero que esos "conceptos fundamentales de la Matemática Difusa" aparezcan en otro artículo dentro del próximo Boletín de S$\vec{e}$MA.

2 Bases para una "Educación Matemática"

La mejor manera de establecer una "base sólida" en la que sustentar la Educación Matemática en España, es acudir a la experiencia y conocimiento de expertos en la materia. En ese sentido, antes de expresar mis modestas "opiniones personales", enumeraré tres relevantes aportaciones. En primer lugar, recordaré las conocidas propuestas de Pedro Puig Adam; a continuación enunciaré la "ampliación" de las mismas considerada por Claudi Alsina y, por último, hablaré de la "mesa redonda" sobre la enseñanza de las Matemáticas en España que tuvo lugar en la *"Jornada Matemática"* celebrada en el Congreso de los Diputados.

2.1 Los *decálogos* de Puig Adam y Alsina

La labor de Pedro Puig Adam como "Pedagogo de las Matemáticas" es mundialmente reconocida (y recordada especialmente este año 2000, centenario de su nacimiento [46, 49]). Entre sus valiosas aportaciones, nos dejó un **decálogo de la Didáctica Matemática Media** [44], formado por diez sugerencias sobre normas didácticas con las que pretendía *despertar una conciencia didáctica,* aunque indicaba su intento de sugerir "formas de sentir" más que "modos de hacer". La primera "norma" propugna *flexibilidad*, le siguen tres preceptos relativos al *método* y otros tres preceptos relativos al *modo*, concluyendo con tres normas sobre la *plenitud*:

1. *Flexibilidad:* no adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole atentamente.
2. *Genetismo:* no olvidar el origen concreto de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.
3. *Vitalismo:* presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
4. *Gradación:* graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5. *Eurismo:* enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
6. *Interés:* estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
7. *Autocrítica:* promover en todo lo posible la autocorrección.
8. *Maestría:* conseguir una cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

9. *Expresión:* cuidar que la expresión del alumno sea una traducción fiel de su pensamiento.
10. *Éxito:* procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

Claudi Alsina comenta este **"decálogo de 1955 de Puig Adam"** en [2], mientras que en [1] lo actualiza, incluyendo nuevas consideraciones que le inducen a proponer diversas *formas de renovar* la enseñanza de las Matemáticas, acordes a las siguientes diez **utopías:**

1. La utopía de la Enseñanza como guía de la actividad creadora y descubridora del alumno.
2. La utopía de una Enseñanza Matemática potenciadora de las capacidades mentales, prácticas y emotivas.
3. La utopía de una Matemática realista, adecuada al contexto y al momento.
4. La utopía de una Enseñanza integradora de recursos.
5. La utopía de una Enseñanza Matemática integradora de conocimientos.
6. La utopía de una Matemática interesante y comprensible que eluda dificultades y asegure éxitos.
7. La utopía de la Enseñanza Matemática sensible ante la diversidad del alumnado.
8. La utopía de una Enseñanza Matemática arropada por la comprensión social y el estímulo exterior.
9. La utopía de la Matemática comprometida con el futuro.
10. La utopía de una Enseñanza Matemática llena de ilusión, pasión y amor.

2.2 Mesa redonda sobre *"la enseñanza de las Matemáticas en España"*, celebrada en el Congreso de los Diputados

El 9 de febrero de 1999, la Comisión Mixta Congreso de los Diputados–Senado de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico aprobó, de forma unánime, una *Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000,* que había presentado algunos meses antes el Grupo Parlamentario Socialista (según propuesta elaborada por los diputados Antonio Martinón, Teresa Riera, Carmen Heras y Bernardo Bayona). El 21 de enero de 2000, como consecuencia de dicha *Proposición,* tiene lugar la **Jornada Matemática** en el Congreso de los Diputados, con diversos actos que se han recopilado en el libro [17]. Entre ellos, la conferencia de J. L. Lions que apareció publicada en el *Boletín n°15 de S$\vec{e}$MA* y la *mesa redonda sobre "la enseñanza de las Matemáticas* *en España",* en la que intervinieron cinco ponentes y se extrajeron varias conclusiones. A continuación, destaco algunos detalles de estas ponencias y enumero las conclusiones obtenidas.

Miguel de Guzmán indicó cómo la "búsqueda de la verdad" que supone la investigación matemática debe dar lugar a una enseñanza de las Matemáticas rica en valores humanos, una Educación Matemática que debe ser aliada y no rival de la educación humanística. Se trata de los siguientes valores: el sometimiento a la verdad y a la realidad, la aceptación gozosa de esta verdad (sea quien sea el que la haya encontrado y contradiga o no nuestras expectativas previas), la co-participación con otros en la contemplación y belleza de la verdad, el sentimiento de humildad ante la multitud de verdades aún por descubrir, la cercanía intelectual tanto a los investigadores actuales como a los antecesores lejanos, la aceptación de consensos en las definiciones y postulados, la libertad creativa y el espíritu de aventura que nos brindan los distintos caminos de búsqueda (pese al sometimiento a la realidad final), etc. No obstante, de Guzmán señaló algunos elementos de nuestro sistema educativo actual, que no permiten conseguir estos "grandes beneficios" de la Educación Matemática. Sobre todo, la insuficiente formación del profesorado, el escaso tiempo dedicado a las Matemáticas y la gran heterogeneidad de los alumnos (principalmente, los cercanos a los 16 años).

Luis Balbuena y María Jesús Luelmo, dado su contacto diario con alumnos de Secundaria, insistieron con más detalle en los inconvenientes del actual sistema educativo. El primero, sintetiza en una acertada frase el espíritu de la LOGSE: *hay que enseñar Matemáticas consiguiendo que los alumnos aprendan a hacer Matemáticas;* lo que no se limita al conocimiento de algoritmos de cálculo y fórmulas de aplicación inmediata, sino que incluye el estímulo por el razonamiento e investigación matemática, el uso de la imaginación y la intuición, el ensayo y error mediante la elaboración de conjeturas y discusión de resultados, el trabajo en equipo y manejo de bibliografía, la acumulación de estrategias de resolución de problemas, etc. Pero, tras esta síntesis de objetivos, Balbuena pregunta: *¿y todo eso con tres horas a la semana?* Además, comenta la inadecuación de los libros de texto, la enorme dificultad a la hora de atender una gran diversidad de alumnos, el escaso estímulo de la familia y el entorno y la incidencia (aun no plenamente desarrollada) del ordenador como herramienta de aprendizaje. María Jesús Luelmo, tras indicar los grandes cambios que la LOGSE ha introducido en la vida cotidiana de los Centros de Secundaria (nuevo alumnado, nuevas materias, nuevos enfoques de materias clásicas, nuevas evaluaciones y tareas, etc.), junto con los cambios sociales habidos en España (como descenso demográfico, inmigración, cambio de valores y ambiente familiar, etc.), considera las dificultades y retos de la educación matemática en Secundaria. Frente a la conveniente unificación de los dos ciclos de la ESO (impartiéndose generalmente en el mismo Centro y por el mismo tipo de profesorado) y la permanencia en ese sistema de enseñanza hasta una edad no temprana, falta usar adecuadamente los instrumentos que la LOGSE proporciona para abordar la diversidad del alumnado así como desarrollar las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas. Para ello se requiere la publicación de modelos de calidad, la dotación de material manipulativo, informático y audiovisual, así como el aumento de horas lectivas. Luelmo también considera la necesidad de potenciar la Formación Profesional, de cambiar los criterios de acceso a la Universidad y de disponer de estudios serios que ayuden a conocer los resultados de la enseñanza ofrecida en España (similares al famoso *Informe Cokcroft* del Reino Unido).

María Victoria Sánchez considera la reforma de la Educación Matemática surgida con objeto de dotar a todos los ciudadanos de los recursos matemáticos necesarios para desenvolverse en la sociedad actual, tecnológicamente avanzada; lo que incluye la capacidad de razonar lógicamente, resolver problemas no rutinarios, comunicar ideas matemáticas, etc. Así, por ejemplo, se ha pasado de los cálculos complejos realizados con papel y lápiz al cálculo mental y la estimación que determine la adecuación o no del resultado obtenido con una calculadora. Se han introducido contenidos nuevos como la Probabilidad y la Estadística, fundamentales en la recogida de información y organización de datos. Se insiste más en el proceso de resolución de problemas que en su resultado concreto. Pero, sobre todo, se está cambiando en la forma de enseñar estas nuevas Matemáticas y en la consecuente formación del profesorado. A este respecto, Sánchez señala el escaso impacto del "Certificado de Aptitud Pedagógica" y la desconexión entre los múltiples (y a veces desanimadores) cursos organizados para docentes de Primaria y Secundaria. Para mejorar esta situación, propone por un lado potenciar la investigación realizada dentro de la Didáctica de las Matemáticas, considerada como campo científico. Por otro lado, propone la realización de "verdaderos programas de formación" para profesores de Matemáticas, articulados a través de la práctica, planteando situaciones/tareas en las que se pueda compartir, discutir y negociar significados y, a partir de lo sucedido, reflexionar sobre el proceso seguido.

Finalmente, en la mesa redonda sobre la enseñanza de las Matemáticas en España, intervino Sebastià Xambó, quien argumentó la necesidad de potenciar en la Universidad tanto la docencia como la investigación (y, a su vez, tanto la investigación en Matemática Pura como en Matemática Aplicada). Esta necesidad está en concordancia con el segundo punto de la declaración de Río de Janeiro, que promulga que *la Matemática es una de las principales claves para el desarrollo,* lo que resulta evidente cuando revisamos la Historia de la Ciencia y la Técnica. El desarrollo de España dentro de este “mundo digital” al que nos dirigimos (ya distribuido en la red en el denominado “ciberespacio”, que hay que “colonizar”), así como la preparación de los ciudadanos para la sociedad de la información y del conocimiento exige, según Xambó, promover la innovación en la docencia (usando las nuevas tecnologías) y en la investigación (introduciendo elementos de iniciación a la investigación en los mismos estudios de licenciatura).

Como conclusión, estos cinco componentes de la mesa redonda, tras haber discutido internamente las ponencias presentadas por cada uno, decidieron unánimemente resaltar como prioritarios los tres puntos siguientes:

1. La necesidad de cambios profundos en nuestra Educación Matemática en lo que respecta a los niveles obligatorios, con especial atención al tiempo de dedicación a la Matemática y a la diversidad de intereses de los alumnos.
2. La necesidad de efectuar importantes transformaciones en la preparación del profesorado de Primaria y Secundaria en lo que respecta a la formación relacionada con la Matemática y su didáctica a fin de que nuestro sistema educativo pueda hacer frente con competencia a los cambios necesarios. Para ello será preciso estimular la investigación en Educación Matemática.
3. La necesidad de establecer un amplio diálogo de la comunidad matemática con los diferentes agentes sociales a fin de llegar a acuerdos explícitos sobre las competencias básicas necesarias a la ciudadanía y sobre los modos de hacer posible que sean alcanzadas. Para ello será necesario que se cree un organismo adecuado o una comisión especial que apoye y estimule tal diálogo. Dicho organismo debería identificar asimismo los problemas que afectan a nuestra universidad en lo que se refiere a la docencia en el nivel superior y promover las medidas oportunas para su solución.

2.3 Algunos principios *“de cajón de matemático”*

Los libros de Puig Adam añaden a los conceptos matemáticos interesantes ejemplos de aplicación a la Física y la Ingeniería. Las exposiciones de Claudi Alsina son amenas y sugerentes. Ambos matemáticos saben “hacer llegar” sus conocimientos, pudiéndolos “adornar” pedagógicamente. Sus respectivos “decálogos” indican la forma de “envolver” y “presentar” el “contenido matemático” que debe enseñarse a los alumnos. Pero considero que tales decálogos adquieren su pleno significado cuando se ven ejemplificados en el buen hacer de Puig Adam y de Alsina. De forma análoga, soy consciente de la buena voluntad de los cinco componentes de la mesa redonda antes mencionada. Precisamente, su voluntad de obtener una enseñanza de las Matemáticas útil, actualizada, atractiva y de alto nivel, justifica el contenido de las tres conclusiones a que llegan unánimemente.

Sin embargo, pienso que si nos quedamos exclusivamente con las intenciones sugerentes y el carácter utópico de los veinte puntos anteriores, aislados de su correcta aplicación a la Enseñanza de las Matemáticas, o si sacamos de contexto las conclusiones de la mesa redonda, aprovechando la parte `difusa` de la expresión de sus términos, entonces corremos el riesgo de proponer una didáctica llena de "adornos estériles", entregando al alumno una "bella envoltura" pero "vacía de contenido". Podemos convertir la Pedagogía de las Matemáticas en una especie de "mitin político" donde prometemos formar "grandes mentalidades matemáticas" sin necesidad de entretenernos en operaciones ni cálculos.

Podemos aprender mucho de la forma de *enseñar Matemáticas* de Puig Adam, Alsina, de Guzmán, etcétera, al igual que podemos aprender de los famosos libros de Poincaré [37, 38, 39, 40], Polya [41, 42], Lakatos [31], Hadamard [28], Courant y Robbins [15], etcétera, tan útiles como guías de la *investigación Matemática*. Pero debemos desconfiar de las metodologías que radicalizan las correspondientes propuestas pedagógicas, *"equivocando y confundiendo la enseñanza, la investigación y las Matemáticas"*, [de]formando alumnos que no saben lo que es un logaritmo ni una función trigonométrica y que se asustan cuando tienen que operar con raíces o exponentes. Como hay ciertas tendencias recientes que parecen ir en este sentido, me atrevo a comentar algunos aspectos bastante "triviales" y elementales que sin embargo, en el estado actual, pueden suponer "principios" básicos para la enseñanza de las Matemáticas. En cualquier caso, mis comentarios siguen una línea bastante más prosaica y pragmática que los decálogos y las conclusiones de la mesa redonda anteriormente citados (por lo que no pretendo establecer ningún tipo de relación o parangón con los mismos).

2.3.1 *Principio 1:* No puede empezarse la casa por el tejado

Elfriede Wenzelburger [51] indica cómo aprovechar los recursos visuales que proporcionan calculadoras y ordenadores para enseñar una Matemática "experimental", que permita al alumno aprender mediante ensayo y error (evitando el aspecto de "edificio cerrado" que presenta una Matemática meramente "deductiva"). De esta forma, Wenzelburger propone enseñar temas de investigación reciente como la *Matemática Discreta*, los *Subconjuntos Difusos*, la *Geometría Fractal*, los *Procesos Caóticos* y la *Teoría de Catástrofes*. Eugenio Hernández también propone en [29] el estudio de "temas actualizados" en las clases de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria como: Programación Lineal (en 2 y 3 variables), Aritmética Modular (usada en Informática para la detección de errores en códigos), temas básicos de Inferencia Estadística, Análisis Numérico, Teoría de Grafos, etc.

Pero es evidente, por ejemplo, que estudiar Programación Lineal exige previamente conocer las ecuaciones de rectas y las inecuaciones lineales; que la resolución numérica de ecuaciones exige el estudio de la continuidad y derivación de funciones; que el ajuste de datos experimentales (en particular, la recta de regresión) requiere la minimización de funciones, etc. El "edificio matemático" exige comenzar por los cimientos y no por el tejado. Cuando sea posible, la introducción de temas avanzados es un buen aliciente; si estos temas se pueden introducir de forma gráfica y atractiva, tanto mejor. Pero la base necesaria es suficientemente amplia como para cubrir la mayoría de contenidos de Secundaria y Bachillerato.

Es obvio que la aparición de las calculadoras desterró las "tablas de logaritmos" y que los asistentes matemáticos provistos de cálculo simbólico permiten no tener que insistir en los distintos casos y subcasos de cálculo de primitivas, por ejemplo. Pero es igual de obvio que los alumnos que vayan a cursar una carrera de Ciencias o una Ingeniería deben saber que $\log_2 8 = 3$ ó que $(-2)^{-2} = 1/4$ ó que $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x + C$ sin necesidad de calculadora ni ordenador. Por eso se deben seguir estudiando bastantes temas de planes de estudio anteriores, con leves modificaciones. Los cambios frecuentes de temario (adaptados al avance de la Informática y a la investigación actual) son efectivamente necesarios en la Enseñanza Universitaria (sobre todo, en los últimos cursos). Lo que no tiene sentido es efectuar un cambio drástico de contenidos en la Enseñanza Secundaria, como quedó patente con la denominada *Matemática moderna*. Además, debemos tener presente la experiencia de métodos fallidos en otros países, de forma que el Ministerio de Educación y Cultura español no tenga que llegar a efectuar una inversión similar a la anunciada por David Blunkett [16].

Lo anterior no significa que haya que considerar los temarios de Secundaria como algo estático, fijo e inamovible, ni que haya que enseñarlos como algo cerrado e intocable. Al estudiar las distintas extensiones del concepto de número (natural, entero, racional, real, complejo) puede hablarse de la evolución histórica correspondiente. Al estudiar ecuaciones de rectas, cónicas, etc. puede hablarse del notable cambio introducido por Descartes, pasando de la Geometría Sintética a la Geometría Analítica. Al deducir la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado, puede comentarse la imposibilidad de obtener fórmulas similares a partir de grado cinco y la existencia de métodos numéricos de resolución de ecuaciones (sin tener que estudiarlos a fondo). Al estudiar el Teorema de Pitágoras, puede comentarse la compleja resolución del "último Teorema de Fermat" [4] y la todavía abierta "conjetura de Goldbach" (¿es todo número par suma de dos números primos?). Hay muchas ocasiones que permiten comentar la gran ramificación, especialización y desarrollo actual de las Matemáticas. Por otro lado, la "comprensión" de un concepto (aunque elemental y antiguo) por primera vez por cada alumno, puede considerarse un "redescubrimiento" del mismo por su parte.

En definitiva, no creo que las Matemáticas que se deben enseñar en Secundaria estén sujetas a las "necesidades de la Sociedad Postmoderna" [11] (como no creo que la enseñanza de la Literatura Española se deba restringir a Cela, Hierro, Gala, ... omitiendo a Cervantes, Lope de Vega, Calderón de la Barca, Quevedo, Góngora, ... ni creo que la enseñanza de la Historia de España se deba limitar al período de la actual democracia, aunque los jóvenes actuales no tengan nada que ver con Franco ni sus antecesores). Aun manteniendo un temario "conservador" y sin necesidad de cambios drásticos, se pueden añadir pinceladas de actualidad, de creación y de indagación, que muestren la evolución de las Matemáticas y el interés de su investigación. Una buena muestra de ello son los libros de texto para B.U.P. escritos por Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador y editados por *ANAYA*. Aun siguiendo el "temario oficial", la introducción amena de cada capítulo y las "revistas" adjuntas (con notas biográficas, históricas, problemas abiertos, etc.) hacen que se trate de libros mucho más sugerentes que los existentes pocos años antes de su edición (en los que apenas se veía una gráfica). Pero no llegan a ser libros "postmodernos" o "novísimos" donde sólo se hable de situaciones actuales susceptibles tal vez de cierta matematización, mediante problemas cuyo enunciado y posibles soluciones haya que debatir en grupo sin necesidad de consensuar el resultado final. Más aún, el interés por las Matemáticas (efectuando conjeturas, probando hipótesis, consiguiendo demostraciones, etc.) puede despertarse incluso con conceptos elementales y pocas herramientas contemporáneas, como muestra el interesante libro de Hans Rademacher y Otto Toeplitz [45].

2.3.2 *Principio 2:* **El todo es más que la suma de sus partes**

Una argumentación análoga a la anterior, sobre los inconvenientes de "particularizar las Matemáticas a nuestro tiempo" es aplicable a la posible "particularización de las Matemáticas a nuestro entorno". Hay propuestas muy acertadas sobre la aplicación de las Matemáticas a "problemas de la vida cotidiana" (por ejemplo, [13, 14]). Es lógico que en las Escuelas e Institutos los profesores usen ejemplos "cercanos" a los alumnos y realicen prácticas en su propio entorno. Pero eso puede hacerse con una mera "adaptación" de los programas, sin necesidad de "trastocarlos". No creo que deba ser diferente el temario de 4° de ESO de León al de Murcia, por ejemplo. Ni creo necesario que cada Centro de Primaria o Secundaria confeccione la tercera fase del "desarrollo curricular" y cada profesor la cuarta fase. La situación sería diferente si estuviéramos hablando de Proyectos de Investigación a desarrollar en las Universidades. Ahí si tiene sentido primar los que vayan directamente aplicados a solventar problemas locales.

No particularizar la enseñanza de las Matemáticas ni a cierto espacio ni a cierto tiempo supone no limitarla a un solo aspecto tomado de las siguientes características:

- Las Matemáticas usan conceptos generales y abstractos, que se pueden aplicar a cualquier caso particular. Llama la atención, por ejemplo, la denominación de materias como la "Bioestadística", la "Psicoestadística", etc. cuyo contenido son las técnicas usuales de la Estadística, aunque aplicadas a ejemplos tomados de la Biología, la Psicología, etc.
- Las Matemáticas usan métodos lógicos que permiten ir extendiendo sus resultados sin necesidad de anular los anteriores (al contrario de lo que ocurre en las Ciencias Experimentales, donde hay nuevas teorías que desechan totalmente a las anteriores; ya que aquí se admite el margen de error encubierto en la frase *"la excepción confirma la regla"*, mientras que en Matemáticas *"la excepción —el contraejemplo— anula la regla"*).

De forma análoga, en el desarrollo y enseñanza de las Matemáticas, podemos considerar diversos aspectos, debiendo en la medida de lo posible usarlos todos y no limitarnos a uno solo de ellos:

- El planteamiento de problemas curiosos y la incertidumbre ante conjeturas y problemas abiertos, suele despertar gran interés; habiendo abundante y conocida bibliografía sobre las denominadas "Matemáticas recreativas" (destacan sobre todo las obras de Martin Gardner, como [21, 22, 23, 24], pero también resultan interesantes otras, tanto de autores españoles —por ejemplo [5, 26, 27, 32]— como extranjeros —vgr. [9, 25, 34, 36, 47]—).
- Las representaciones gráficas y geométricas en general, y el uso de gráficas de alta resolución y animaciones mediante ordenador en particular, fomentan la intuición y la "representación mental" de conceptos matemáticos.
- La deducción lógica y las técnicas de demostración proporcionan una objetividad y veracidad a las Matemáticas que las caracteriza frente a todas

las demás disciplinas (sujetas al error experimental o a la subjetividad humana).

- Las técnicas de resolución de problemas indican métodos que pueden guiarnos en la investigación en cualquier rama de las Matemáticas y fomentan un espíritu crítico y abierto frente a otro tipo de dificultades.

El atractivo de cualquiera de estas características puede mover a desarrollar métodos pedagógicos centrados en una sola de ellas (como antiguamente el "abuso" de automatismos y ejercicios repetitivos, más recientemente el "abuso" de la *Teoría de Conjuntos* en la *Matemática moderna*, o actualmente el "abuso" frecuente de las *Matemáticas recreativas* o de la *resolución de problemas*). En lugar de estas particularizaciones, debemos aplicar la conocida máxima de la *Teoría de Sistemas* que da título a esta sección. Debemos mostrar "el todo" que forman las Matemáticas, que es bastante más que cada apartado por sí solo. Hay otro motivo adicional que justifica el uso de todo un abanico de metodologías: "en la variedad está el gusto". El atractivo de la formalización, la demostración, la intuición, etc. puede variar de un alumno a otro. Está probado que incluso el rendimiento en el aprendizaje obtenido mediante los distintos canales de información (visual, auditivo, táctil, etc.) varía con la persona [50].

2.3.3 *Principio 3:* Nadie aprende por cuenta ajena; el que algo quiere, algo le cuesta

Como he comentado antes, los libros de texto profusamente ilustrados, los materiales didácticos manipulables, los recursos audiovisuales, las representaciones gráficas y animaciones en ordenador, el variado software sobre "asistentes matemáticos", la enorme cantidad de información que brinda "internet" y, en definitiva, todas las herramientas que ofrecen las nuevas tecnologías, suponen un gran apoyo en la labor educativa. Respecto a estos "materiales de apoyo" en la Enseñanza Primaria y Secundaria resulta interesante la lectura de dos artículos recientes de Antonio Fernández-Aliseda et al. [18, 19].

Sin embargo, llama la atención el hecho de que las últimas generaciones de alumnos, aun disponiendo en buena medida de estos medios, muestran un nivel de conocimientos inferior al que tenían las generaciones anteriores (excepción hecha de los idiomas extranjeros, donde la renovación de la enseñanza sí ha producido unos efectos altamente positivos). Basta comparar los "exámenes" recientes con los antiguos de una misma o equivalente asignatura para certificarlo. Hay quien argumenta que los alumnos actuales poseen una desenvoltura y un tipo de conocimientos que no queda reflejado en los fríos y rígidos exámenes usuales. Pero eso es discutible, al menos dentro de las Matemáticas, donde siempre se ha considerado, además de los ejercicios mecánicos de ejecución de reglas de cálculo, la resolución ingeniosa de problemas más complicados y el planteamiento matemático de problemas reales aplicados.

Cualquiera sea la diferencia de nivel de conocimientos y aptitudes entre el pasado reciente y el presente, hay un hecho cierto: la mera presencia de mejores medios y métodos de enseñanza no garantiza el aprendizaje de las Matemáticas. La única garantía del conocimiento de un concepto matemático es su *"interiorización",* que necesita generalmente de su uso reiterado, comprensión razonada, "visualización mental", memorización, aplicación, etcétera. Y para conseguir esos objetivos hay dos factores fundamentales que últimamente están "casi en desuso": la dedicación de tiempo suficiente al estudio y la memorización. Todo el mundo admite que un ciclista, por ejemplo, además de una bicicleta moderna y ligera, necesita un severo entrenamiento para conseguir buenos resultados. De igual forma, además del buen apoyo que suponen los nuevos medios de enseñanza de las Matemáticas, el alumno necesita una dedicación y estudio para su aprendizaje. Y lo primero no puede suplir a lo segundo.

En la mesa redonda antes citada se habla reiteradamente del escaso tiempo dedicado a las Matemáticas en los programas de ESO y Bachillerato (y de profesorado de Enseñanza Primaria). Yo creo que también debe ampliarse el tiempo dedicado por el propio alumno (ya sea de forma individual o en grupo) al estudio y práctica de las Matemáticas. Esto se garantizaba antiguamente con la diversidad de exámenes que necesariamente había que ir superando para avanzar de curso. Las evaluaciones actuales son más "relajadas". Tienen la ventaja de medir valores y capacidades que pueden no detectarse en los tradicionales y puntuales exámenes. Es un hecho positivo que el alumno vea valorado su trabajo en equipo, su exploración bibliográfica, su progreso en ciertos temas, su actitud correcta ante la asignatura, ... y que no se someta exclusivamente al temido resultado de una prueba puntual. Pero lo que no tiene sentido es que el conocimiento matemático *"se le suponga"* como el valor en el servicio militar, sin más comprobaciones ni trabajos, por su mera presencia ante avanzados métodos de enseñanza. Si se le da esa posibilidad, cualquier alumno (que no tenga otro tipo de condicionantes) se verá arrastrado por la inercia de la comodidad y hará cualquier cosa que de forma inmediata le resulte placentera antes que ponerse a estudiar Matemáticas.

Si se pueden pasar las asignaturas sin apenas esfuerzo y se pueden pasar los cursos sin aprobar las asignaturas, entonces podemos crear en los alumnos la idea de que "tienen derecho a conseguirlo todo sin que se les exija nada a cambio". Si ninguna asignatura requiere un esfuerzo ni capacidad especial, porque todas se exponen como un "bonito programa de televisión" que sólo hay que mirar, entonces el alumno (y sus padres) puede creerse perfectamente capacitado para conseguir cualquier título y desarrollar cualquier profesión. Estas situaciones están algo exageradas, pero no son falsas del todo. Últimamente conozco bastantes casos de alumnos sin una vocación definida a la hora de elegir una carrera universitaria. En cambio me da la impresión de que hace años, cuando en los distintos cursos se iban exigiendo niveles considerables, cada cual veía más claramente qué metas podía conseguir y cuáles no, lo que ayudaba realmente a definir "vocaciones verdaderas".

2.3.4 *Principio 4:* La virtud está en el término medio

Varias opiniones de las ya expresadas, junto con otras ideas afines, pueden englobarse bajo el principio aristotélico según el cual *"la virtud está en el término medio"*. En efecto, ya he propugnado la conveniencia de adoptar una postura equilibrada respecto a la presentación de una Matemática actual frente al estudio de temas que podemos considerar "históricos" (o, en otros términos, de una Matemática "estándar" estática frente a una Matemática que evoluciona y se desarrolla). Lo mismo que se debe buscar un equilibrio entre la generalidad y abstracción de las Matemáticas, por un lado, y su aplicación a temas concretos y locales, por otro. De forma análoga, no debemos desviarnos excesivamente hacia un extremo, en cada una de las siguientes parejas de características "dicotómicas": métodos tradicionales y uso de nuevas tecnologías; rigor y presentación "recreativa"; formalización y divulgación; intuición y demostración; visión "pasajera" y memorización; teoría y problemas; libro de texto (o apuntes previamente elaborados) y búsqueda bibliográfica; ejercicios (repetitivos) y problemas variados (para plantear y resolver usando estrategias); examen tradicional y trabajos en grupo (con investigación, búsqueda bibliográfica, exposición de temas, ...); exigencia excesiva de conocimientos y calificación de "notable general"; etcétera.

Los distintos temas ofrecen peculiaridades que aconsejan ir cambiando entre ambos extremos. De esta forma pueden ofrecerse "botones de muestra" de las distintas características y métodos; lo que resulta bastante más correcto que inclinar siempre la balanza hacia el mismo lado. Así, por ejemplo, se pueden ver las técnicas de demostración mediante razonamientos asequibles, usando en cambio ideas intuitivas cuando estas puedan sustituir largas y tediosas demostraciones. Es obvio que se requiere de un tiempo suficientemente amplio para ir desarrollando todos estos aspectos.

2.3.5 *Principio 5:* Todos somos iguales ante la ley, pero todos somos "distintos dos a dos"

Es una suerte que, incluso por ley, todo español pueda recibir una formación y educación. La ampliación de la edad de escolarización obligatoria hasta los 16 años, supone un avance más en ese sentido. Pero el sistema educativo debe garantizar el aprovechamiento de todos esos años para una auténtica formación, acorde a la diversidad de aptitudes e intereses, que proporcione valores personales, que favorezca la madurez y desarrollo y que prepare a los alumnos para su posterior incorporación a la vida social. Algunos de los problemas antes tratados indican que esos objetivos no se cumplen plenamente en la actualidad. A saber: la atención a la diversidad del alumnado, el paso de curso sin haber superado los conocimientos correspondientes, con la consiguiente falta de base en casos que es necesaria, la frecuente falta de vocación al decidirse a estudiar una carrera y la desviación a carreras no elegidas en los primeros lugares por falta de nota en Selectividad (eso sin considerar problemas de otra índole como el aumento de la violencia, la falta de respeto a los demás, etcétera).

Respecto a la forma de abordar estos problemas, muestro nuevamente mi acuerdo con J. L. Andrés Yebra [3], pensando que debe haber suficientes "modalidades" e "itinerarios" de Bachillerato que aseguren la formación básica necesaria para continuar estudios superiores, tanto en Ciencia y Tecnología como en otras ramas del saber. Lo mismo que debe haber suficientes opciones de Bachillerato y Formación Profesional para cubrir la enorme variedad de intereses y vocaciones que de hecho existe, debida a la necesaria y conveniente diferencia entre cada dos personas. Pero, además de contar con tal abanico de posibles caminos, creo que habría que delimitar claramente cuáles son llanos (permitiendo dar grandes saltos) y cuáles son como escaleras (que deben subirse peldaño a peldaño). Hay materias que pueden impartirse mediante asignaturas totalmente independientes. Hay otras con escasa incidencia entre sus distintos apartados. Pero en Matemáticas, es evidente el encadenamiento entre unas partes y otras. Pienso que esto se debería tener muy en cuenta a la hora de permitir que un alumno "promocione", pasando de curso, aunque no haya superado ciertas asignaturas. No tiene las mismas repercusiones el "perdonarle" un suspenso en Religión que en Matemáticas. En la misma línea, creo que deberían establecerse claras "incompatibilidades" entre asignaturas (no pudiendo aprobar "Matemáticas II" sin tener aprobadas las "Matemáticas I", por ejemplo), de forma que al cursarlas se pueda contar con un mínimo conocimiento de los requisitos previos. Tales "incompatibilidades" deben afectar también al paso de ESO a Bachillerato y de éste a la Universidad, de forma que las opciones a tomar estén suficientemente restringidas a los conocimientos previos. La implantación de estos criterios exigiría una información clara y exhaustiva a los alumnos, que les permitiera estar bien orientados respecto a las distintas salidas profesionales y sus requisitos. También exigiría contar con especialistas en los más variados campos para abarcar un amplio abanico de materias (algunas de las cuales tal vez deberían impartirse en asignaturas cuatrimestrales en vez de anuales).[1]

En definitiva, el alumno tiene derecho a poder elegir libre y conscientemente, en todo momento, entre diversos caminos; pero el acceso a la mayoría de esos caminos debe estar condicionado a haber efectuado los pasos previos convenientes y necesarios. En Matemáticas, los requerimientos previos son evidentes para alumnos que quieran optar por carreras Científicas o Tecnológicas (pudiendo obviarse para asignaturas más divulgativas de Matemáticas, propias para alumnos que opten a carreras de Humanidades). De esta forma, el itinerario seguido supone una guía respecto a su vocación, el acceso a las distintas carreras universitarias está más delimitado (influyendo menos, por tanto, la nota de Selectividad) y los planteamientos escolares son más acordes con la situación que vivirá el alumno tras terminar sus estudios, en la que la consecución de cierta meta le exigirá una serie de esfuerzos previos.

3 *Conclusión:* La complejidad de definir y enseñar las Matemáticas

La celebración del *Año Mundial de las Matemáticas* ofrece la oportunidad de resaltar la "grandiosidad" de las Matemáticas, aunque se trate de algo indescriptible y difícilmente asimilable en su totalidad. Además de estudiar el contenido de sus diversas ramas, sus aplicaciones, su historia, ... la mejor manera de comprender las Matemáticas consiste en la investigación, la formulación de conjeturas, la búsqueda de contraejemplos, el descubrimiento y demostración de nuevos resultados, ... Y si resulta difícil abordar todas estas facetas, mucho más difícil resulta transmitirlas y enseñarlas (máxime cuando se dispone de poco tiempo y los alumnos centran su interés y atención en otras direcciones).

Comencé indicando la necesidad de definir y aclarar aspectos concretos como *probabilidad* o *conjunto difuso*, para no equivocar su sentido y aplicación. También he indicado la conveniencia de establecer una estructura sólida sobre la que cimentar la *Educación Matemática*. Pero, para concluir, señalo las limitaciones de este riguroso afán (que no debemos abandonar por eso), siendo

[1]La LOGSE contempla en cierta medida estos criterios, pero de forma bastante parcial e insuficiente (sobre todo a la hora de su aplicación real).

imposible delimitar tanto la(s) Matemática(s) en su totalidad como la enorme problemática de la Educación. Si Kurt Gödel comprobó la imposibilidad de demostrar lógicamente todos los teoremas sobre Aritmética partiendo de un sistema axiomático, mucho más inmediato es comprobar tanto la imposibilidad de abarcar la gran variedad de contenidos e intereses dentro de las Matemáticas como la imposibilidad de controlar los múltiples factores que inciden en la Educación en general (y en la Educación Matemática en particular).

Por eso concluyo esbozando `difusamente` varias de las consideraciones anteriores, englobadas bajo una imagen alegórica de "la Matemática", en forma de "gran Señora".

3.1 ¡El bello cuerpo de "La Matemática" ...

Tal "gran Señora" que represente a *"la Matemática"* es necesariamente bella y sutilmente omnipresente (siendo conocida e importante en todas las culturas relevantes, de todos los períodos históricos). Para apreciar su etérea realidad, se requiere cierto reposo, abstracción y dedicación; por lo que resulta huidiza para muchos inquietos jóvenes educados en la veloz era de la imagen de alta definición y rápida consecución de medios.

Ha crecido en plena Naturaleza, nutriéndose de principios *Físicos* bajo el consejo de grandes pensadores.[2] Una vez adquirida su madurez, aun continuando en contacto con la Naturaleza, ha obtenido un desarrollo propio y característico. La sustenta el esqueleto de sus fundamentos, sobre el que ágiles músculos le proporcionan variadas aplicaciones. La *Lógica* y precisión infalible dirige sus movimientos, desde el cerebro, mediante el sistema nervioso (últimamente en contacto con potentes ordenadores). Grandes teoremas constituyen su piel, que se renueva con el tiempo, pero manteniendo siempre un aspecto simétrico, esculturalmente precioso. Sus dos hermosas piernas, *Álgebra* y *Topología*, sirven de pilares en los que se apoya la *Geometría* de sus formas. Examinada con mayor detalle se observan las delicadas estructuras del *Análisis Matemático*. Una aproximación más ligera muestra el *Análisis Numérico* y una estimación de sus facciones enseña la *Estadística Matemática*. Además, en sus últimos crecimientos, cada una de estas facetas se ha fortalecido y dividido en múltiples apartados.

Hay quienes admiran únicamente su pureza, la perfección de su figura (superior a la de la Gioconda) y el rigor y exactitud de sus movimientos. Estos celosos amantes de la *Matemática Pura* desprecian su contacto con

[2] Junto al importante paralelismo entre *Matemáticas* y *Física*, no debemos olvidar la relación de las *Matemáticas* con otras disciplinas como la *Biología* [33, 35], las *Ciencias Sociales* [12], etc.

otras disciplinas, quitando validez a la *Matemática Aplicada*, desechando las toscas estimaciones de la *Estadística* y abandonando todo lo que sea inexacto o aproximado. En su extrema precisión, podemos decir que "prefieren un reloj analógico que no ande a otro que se atrase un minuto al día, ya que el primero marca la hora exacta dos veces al día mientras que el segundo lo hace aproximadamente una vez cada dos años". Por el contrario, hay quienes aprecian tanto las habilidades de la *Matemática Aplicada*, su utilidad en tan variadas materias de las Ciencias Naturales y Sociales, su enorme potencial cuando se alía a la Informática, ... que quieren verla siempre actuando, sin aceptar sus ratos de ocio y desarrollo personal. Pero la Matemática también necesita crecer en su interior, alimentándose de nuevas teorías, e incluso pasar por periodos de sueño reparador (reestructurando sus cualidades) antes de despertar con renovadas energías y dedicarse a sus tareas aplicadas.[3]

3.2 ... puede ser esbozado ...

Esta excelsa Matemática, con sus múltiples aspectos y cualidades, no puede ser vista en su totalidad. Por eso, para representarla y mostrarla, estamos obligados a hacerlo de forma parcial y algo subjetiva. Para enseñarla a los alumnos deberíamos tener las cualidades de un buen pintor impresionista, que con gruesas pinceladas es capaz de esbozar claramente la figura completa. Pero la experiencia muestra la dificultad de ejecutar tal pintura impresionista de la Matemática.

Tradicionalmente se enseñaban con insistencia (y a veces de forma exclusiva) los automatismos de sus articulaciones mecánicas: las reglas fijas que permiten efectuar operaciones y cálculos, resolver ciertas ecuaciones, ... Los alumnos que se limitan a ver estos aspectos encuentran solamente un esqueleto parcial de la Matemática, desprovisto de su bella envoltura y de sus interesantes y vivas acciones. Muchos de ellos han despreciado tan repelente figura, intentando alejarse lo más posible de ella.

Posteriormente, un movimiento pedagógico encontró *"Moderna"* (o *"New"*) a la *Matemática* cuando descubrió sus células y genes. Se pensó entonces que enseñando tales células (descritas en terminología de la *Teoría de Conjuntos*), presentes tanto en huesos como en músculos, tendones, piel y demás partes de la Matemática, los alumnos podrían construir todas estas partes, percibiendo una Matemática total, bien fundamentada y a la vez viva y activa. Pero la

[3]Respecto a la aplicabilidad de las Matemáticas Puras resulta muy ilustrativo el discurso de Puig Adam titulado *"Apología de la Inutilidad"* [43], que aparece por ejemplo en la página web de Miguel de Guzmán:
http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/ppuigadam/ppa001245.html

apreciación de tan sutiles células no estaba al alcance de la vista de muchos que, no solamente quedaron ajenos a los músculos y piel, sino que incluso dejaron de ver el estático esqueleto que antes era tan evidente.

Ahora, descartado el razonamiento profundo como lupa que nos aproxime a sus células internas, se intenta aprovechar la Informática como lupa que permita apreciar los aspectos externos y más "visibles" de la Matemática. O se intenta aprovechar el aspecto lúdico de la Matemática, observándola solamente cuando juguetea con problemas divertidos de forma ingeniosa. También hay quien, desde unas tendencias super-progresistas, observa borrosamente una *Matemática "Modernísima"* (o *"New New"* o *"Fuzzy"*), que supone una versión demasiado distorsionada de la verdadera Matemática. Siempre que no se tenga constancia de sus diversos elementos (esqueleto, músculos, nervios, piel, etcétera), podemos ofrecer una fantasmagórica imagen de la Matemática, apreciable como un ente fantástico e ilusorio, que se desvanece rápidamente y que se aleja de su firme y real presencia.

Pienso que, siendo tan complicado esbozar la totalidad de sus múltiples cualidades, deberemos restringir nuestro objetivo. Creo que habrá que esforzarse en mostrar solo una pequeña parte de su magnífico cuerpo (dependiendo de la edad e interés del observador), pero procurando percibir todos sus aspectos. Estudiando en profundidad cualquier parte de la Matemática, se apreciará la firmeza de las estructuras [óseas] en que se sostiene, la versatilidad de sus potentes [musculares] aplicaciones prácticas, el aprovechamiento [digestivo] de los métodos que históricamente la han desarrollado [nutriéndose de los aspectos válidos y desechando los inservibles], la vitalidad de las ideas que circulan [sanguíneamente] en su interior, la oxigenación [pulmonar] de sus siempre revisables contenidos, la simetría y estética [facial] de sus resultados, etcétera. Cuando se llega a tocar cualquier parte de la Matemática, se siente mucho más que un mero "contacto material". El descubrimiento de su delicada textura provoca reacciones positivas tanto mentales (capacidad de razonamiento, expresión precisa, metodología rigurosa, ...) como sentimentales (reto por llegar a una meta alcanzable, intriga por buscar nuevos aspectos tal vez no alcanzables, entusiasmo por haberlos encontrado, ...). Lo cual genera el anhelo de seguir descubriendo sus bellas formas. Incluso sabiendo que nunca llegaremos a verla totalmente, podemos intentar imaginarnos lo que aun desconocemos, sabedores de que todo su "cuerpo" está formado por los mismos elementos que la parte que hemos conseguido asir.

3.3 . . . pero no merece ser caricaturizado!

No me merecen confianza los métodos pedagógicos que se empeñan en abarcar mucho apretando poco, ya que ofrecen necesariamente una visión caricaturizada de la Matemática. El fracaso comprobado de la *Matemática moderna* (abusando de la noción de conjunto) y el fracaso predecible de la *Matemática "novísima"* (abusando de la noción de conjunto difuso y la discusión/resolución de problemas), pueden ilustrarse con caricaturas análogas que abusen de cualquier noción concreta de las Matemáticas. Por ejemplo, podríamos hablar de la *Matemática "geométrica"* propiciada por la era de la imagen, que mostrara solamente los aspectos representables gráficamente, abandonando las fórmulas y razonamientos no visuales. O de la *Matemática "estadístico-probabilística"* propiciada por la era de la información y las comunicaciones, en la que todos los teoremas fueran establecidos en base a resultados de encuestas hechas a un enorme número de "internautas" o de experimentos aleatorios repetidos en múltiples ordenadores seleccionados (también aleatoriamente) entre los conectados a "internet" y donde, atendiendo a los principios democráticos, los temarios de las asignaturas no fueran fijados por los profesores sino por la mayoría de los alumnos.

Tales caricaturas serían aún más desproporcionadas si mezclaran la enseñanza de las Matemáticas con las tendencias sociales postmodernas. Podríamos así hablar de la *Matemática "feminista-coeducada"* en la que se resaltaran las cualidades de "las proposiciones" ligeras frente a "los teoremas" duros y se obligara a igualar el número de alumnos con el de alumnas, el de profesores con el de profesoras, . . . Podríamos considerar análogamente la *Matemática "política"* en la que, formando grupos [no abelianos] de discusión, se tratara de demostrar que la idea propia es siempre mayor que las ideas de los demás grupos, . . .

Es evidente que ninguna de estas o similares caricaturas está a la altura que merece(n) *la(s) Matemática(s).*

Direcciones "web"

Se incluyen a continuación algunas direcciones de *Internet* relacionadas con la **Educación Matemática** y la **Matemática Difusa** (la mayoría de ellas dan acceso a bastantes otros enlaces de interés):

http://dulcinea.uc3m.es/ceamm Comité Español "Año Mundial de las Matemáticas 2000".

http://www.emis.de [también en **http://emis.uc3m.es**] EMS (European Mathematical Society).

http://decsai.ugr.es/eusflat/eusflat.html EUSFLAT (European Society for Fuzzy Logic and Technology).

http://www.fespm.es.org FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas).

http://www.fuzzytech.com FuzzyTECH (Fuzzy Logic Software and Technological Applications).

http://www.ifmi.com IFMI (International Fuzzy Mathematics Institute).

http://www.abo.fi/∼rfuller/ifsa.html IFSA (International Fuzzy Systems Association).

http://www.mathunion.org IMU (International Mathematical Union).

http://www.nctm.org NCTM (National Council of Teachers of Mathematics).

http://rsme.uned.es RSME (Real Sociedad Matemática Española).

http://thales.cica.es Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

http://www.ugr.es/∼seiem SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática).

http://www.uca.es/sema S$\vec{e}$MA (Sociedad Española de Matemática Aplicada).

http://www.smpm.es Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo".

http://www.intercom.es/cita/Sociedad_Puig_Adam Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas.

http://wmy2000.math.jussieu.fr "World Mathematical Year 2000"

Bibliografía

[1] C. Alsina i Català, Utopías, renovaciones y clases de Matemáticas. *Epsilon* 42 (1998) 561-564.

[2] C. Alsina i Català, Carta a don Pedro Puig Adam (1900-1960). *SUMA* 34 (2000) 5-7.

[3] J. L. Andrés Yebra, Sobre las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* 14 (1999) 95-97.

[4] J. Beato Sirvent, El último Teorema de Fermat. Diario de una conquista. *Epsilon* 43-44 (1999) 97-120.

[5] M. Bernabé Flores, *Curiosidades Matemáticas* (Alianza, Madrid, 1989).

[6] M. Black, *Inducción y probabilidad* (Cátedra, Madrid, 1979).

[7] *Boletín Informativo de la S.A.E.M. "Thales"* 6 (1999) 8.

[8] *Boletín Informativo de la S.A.E.M. "Thales"* 7 (1999) 15-16.

[9] B. Bolt, *Divertimentos matemáticos* (Labor, Barcelona, 1987).

[10] É. Borel, *Las probabilidades y la vida* (Oikos–tau, Barcelona, 1971).

[11] M. A. Bosch Saldaña y A. Frías Zorrilla, La resolución de problemas en Matemáticas desde las necesidades de la sociedad postmoderna. *Epsilon* 45 (1999) 249-256.

[12] R. Carnap et al., *Matemáticas en las Ciencias del Comportamiento* (Alianza, Madrid, 1974).

[13] COMAP, *Las matemáticas en la vida cotidiana* (Addison-Wesley/UAM, Madrid, 1999).

[14] F. Corbalán Yuste, *La matemática aplicada a la vida cotidiana* (Graó, Barcelona, 1995).

[15] R. Courant y H. Robbins, *¿Qué es la Matemática?* (Aguilar, Madrid, 1979).

[16] A. Delibes Liniers, La Matemática Difusa. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* 14 (1999) 87-94.

[17] J. I. Díaz Díaz, J. L. Fernández Pérez, A. Martinón Cejas y T. Riera Madurell, Eds., *Jornada matemática* (Publicaciones del Congreso de los Diputados, Madrid, 2000).

[18] A. Fernández-Aliseda Redondo, J. A. Hans Martín y J. Muñoz Santoja, Para enseñar Matemáticas, ¿A qué recurro?. *Andalucía Educativa* 20 (2000); páginas 11-16 del suplemento sobre el *Año Mundial de las Matemáticas.*

[19] A. Fernández-Aliseda Redondo, J. A. Hans Martín, J. Muñoz Santoja, J. Blanco García y J. M. Aldana García, Bricolaje Matemático: Una alternativa en la búsqueda de recursos didácticos. *Epsilon* 46-47 (2000) 61-70.

[20] T.L. Fine, *Theories of Probability: An Examination of Foundations* (Academic Press, New York, 1973).

[21] M. Gardner, *Carnaval matemático* (Alianza, Madrid, 1981).

[22] M. Gardner, *Nuevos pasatiempos matemáticos* (Alianza, Madrid, 1982).

[23] M. Gardner, *Inspiración ¡ajá!* (Labor, Barcelona, 1983).

[24] M. Gardner, *Paradojas ¡ajá!* (Labor, Barcelona, 1986).

[25] E. Ya. Guik, *Juegos matemáticos recreativos* (Mir, Moscú, 1989).

[26] M. de Guzmán Ozámiz, *Aventuras matemáticas* (Labor, Barcelona, 1985).

[27] M. de Guzmán Ozámiz, *Cuentos con cuentas* (Labor, Barcelona, 1987).

[28] J. Hadamard, *Ensayo sobre la invención en el campo matemático* (Espasa–Calpe, Madrid).

[29] E. Hernández, Ayer y hoy, *Cuadernos de Pedagogía* 288 (2000) 60-63.

[30] A. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, Berlin, 1933). Traducción al inglés: *Foundations of the Theory of Probability* (Chelsea, Nueva York, 1950).

[31] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático* (Alianza Editorial, Madrid, 1978).

[32] M. Mataix, *Esbozos biográficos y pasatiempos matemáticos* (Marcombo, Barcelona, 1991).

[33] J. Maynard Smith, *Ideas Matemáticas en Biología* (C.E.C.S.A., México, 1977).

[34] E. P. Northrop, *Paradojas matemáticas* (Limusa, México, 1991).

[35] J. M. Pacheco Castelao, Matemáticas y Biología, *Epsilon* 40 (1998) 101-118.

[36] Y. I. Perelman, *Matemáticas Recreativas* (Martínez Roca, Barcelona, 1968).

[37] H. Poincaré, *La Ciencia y la hipótesis* (Espasa-Calpe, Madrid, 1963).

[38] H. Poincaré, *Ciencia y método* (Espasa-Calpe, Madrid, 1963).

[39] H. Poincaré, *Últimos pensamientos* (Espasa-Calpe, Madrid, 1963).

[40] H. Poincaré, *El valor de la Ciencia* (Espasa-Calpe, Madrid, 1963).

[41] G. Polya, *Matemáticas y razonamiento plausible* (Tecnos, Madrid, 1966).

[42] G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas* (Trillas, México, 1990).

[43] P. Puig Adam, *Apología de la Inutilidad* (Escuela Especial de Ingenieros Industriales, Madrid, 1945).

[44] P. Puig Adam, *La Matemática y su enseñanza actual* (Publicaciones de la Revista de Enseñanza Media —Ministerio de Educación Nacional—, Madrid, 1960).

[45] H. Rademacher y O. Toeplitz, *Números y Figuras* (Alianza Editorial, Madrid, 1970).

[46] J. Sales Rufí, Pedro Puig Adam, maestro, *SUMA* 34 (2000) 9-20.

[47] R. M. Smullyan, *¿Cómo se llama este libro?* (Cátedra, Madrid, 1978).

[48] F. Udina, Que n'és, de difícil, la probabilitat!, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 15 (2000) 81-87.

[49] X. Valls y L. Bibiloni, Los viejos maestros nunca mueren: Puig Adam, in memoriam, *Cuadernos de Pedagogía* 288 (2000) 55-59.

[50] F. Vester, *Pensar, aprender y olvidar* (Plaza & Janés, Barcelona, 1976).

[51] E. Wenzelburger, Nuevas tendencias en la matemática y su enseñanza, *SUMA* 13 (1993) 4-9.

[52] R. R. Yager, S. Ovchinnikov, R. M. Tong and H. T. Nguyen, Eds., *Selected Papers by L.A. Zadeh* (John Wiley & Sons, New York, 1987).

[53] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inf. and Control* 8 (1965) 338-353.

[54] L. A. Zadeh, The concept of linguistic variable and its applications to Approximate Reasoning, *Inf. Sci.* 8 (1975) 199-249 (part I), 301-357 (part II), 9 (1976) 43-80 (part III).

[55] L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28.

[56] L. A. Zadeh, The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 199-227.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 16 (2000), 119–126.

RESUMEN DEL CURSO DE MATEMÁTICAS

La enseñanza de las Matemáticas a debate:

a) La motivación de la enseñanza a través de las aplicaciones

b) La enseñanza de las Matemáticas en Europa

POR
ENRIQUE FERNÁNDEZ CARA
e-mail: cara@numer.us.es
Director del curso,
Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla,
Ex-Presidente de la Sociedad Española de Matemática Aplicada.

El Escorial, Cursos de Formación del Profesorado, 10-14 de julio de 2000.

1. INTRODUCCION

Ante todo, deseo mostrar mi agradecimiento a todas las personas que hicieron posible este curso y, muy en especial, al Secretario del mismo, Joaquín Hernández Gómez, Catedrático del IES S. Juan Bautista (Madrid) y Profesor Asociado de la Universidad Complutense, por los esfuerzos realizados.

Los objetivos que se pretendieron alcanzar en este curso fueron principalmente dos:

a) Por una parte, analizar de qué modo y en qué dosis es/sería posible motivar la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria a través de las aplicaciones.

b) Por otra parte, comparar con los métodos y costumbres que tienen lugar en otros países europeos.

En este año, declarado por la UNESCO Año Mundial de las Matemáticas, nos pareció indicado analizar la problemática ligada a la Educación Matemática desde todos los puntos de vista posibles. Este espíritu guió la confección del programa de este curso y la elección de los conferenciantes y participantes en las Mesas Redondas.

El curso fue diseñado en base a siete conferencias relacionadas con las aplicaciones de las Matemáticas: "Matemáticas y medios de comunicación", "El Arte Mudéjar como motivador del estudio de la Geometría", "Fractales y sus aplicaciones elementales" "Códigos detectores y correctores de errores", "Aplicaciones elementales ligadas a ecuaciones diferenciales y aspectos históricos", etc.

También se incluyeron una conferencia sobre "Problemas y soluciones de la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva europea", otras dos en el contexto de un Aula Informática sobre temas afines y tres Mesas Redondas, con los siguientes títulos:

"La actitud del profesorado hacia las aplicaciones de las Matemáticas. ¿Por qué somos tan escépticos? ¿Qué mecanismos permitirían transmitir a la vez la afición por las Matemáticas y por sus aplicaciones?"

"La enseñanza de las Matemáticas en otros países europeos"

"¿De qué aplicaciones de las Matemáticas se puede hablar en Bachillerato? ¿Qué se hace en otros países europeos?"

2. PROGRAMA DEL CURSO

El programa del curso fue el siguiente:

LUNES 10 DE JULIO:

12:00 Lección Inaugural

Enrique Fernández Cara

17:00 Aula Informática

a) "Tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria"

Dolores Rodríguez Soalleiro CPR de Leganés (Madrid)

b) "Algunas aplicaciones del cálculo computacional a la enseñanza de las Matemáticas"

Roberto Rodríguez del Río Profesor de IES (Madrid) Profesor Asociado de la Universidad Complutense

MARTES 11 DE JULIO:

10:00 "Problemas y soluciones de la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva europea"

Richard Cabassut Profesor del Liceo Internacional de Estrasburgo Profesor de la Universidad Louis Pasteur (Estrasburgo)

12:00 "Matemáticas y medios de comunicación"

Fernando Corbalán Yuste Catedrático IES (Zaragoza)

17:00 MESA REDONDA:

"La actitud del profesorado hacia las aplicaciones de las Matemáticas. ¿Por qué somos tan escépticos? ¿Qué mecanismos permitirían transmitir a la vez la afición por las Matemáticas y por sus aplicaciones?"

COORDINA: Joaquín Hernández Gómez

PARTICIPAN:

Fernando Corbalán Yuste, Alicia Delibes Liniers, Enrique Fernández Cara, Manuel Morán Cabré y Florencio Villarroya Bullido

MIERCOLES 12 DE JULIO:

10:00 "El Arte Mudéjar como motivador del estudio de la Geometría"

Florencio Villarroya Bullido Catedrático IES (Zaragoza) Profesor Asociado en la Universidad de Zaragoza

12:00 "Fractales y sus aplicaciones elementales"

Manuel Morán Cabré Profesor Titular de la Universidad Complutense

17:00 MESA REDONDA:

"La enseñanza de las Matemáticas en otros países europeos"

COORDINA: Florencio Villarroya Bullido

PARTICIPAN:

Richard Cabassut, Genevieve González (Liceo Francés de Madrid), Albrecht Hess (Colegio Alemán de Madrid), Dolores Rodríguez Soalleiro, Luigi Simonelli (Liceo Italiano de Madrid)

JUEVES 13 DE JULIO:

10:00 "Sobre el sentido de la Inferencia Estadística"

Víctor Hernández Morales Profesor Titular de la Universidad Nacional de Educación a Distancia

12:00 "Sistemas de votación y el Teorema de Arrow"

Eugenio Hernández Rodríguez Profesor Titular de la Universidad Autónoma de Madrid

17:00 MESA REDONDA:

"¿De qué aplicaciones de las Matemáticas se puede hablar en Bachillerato? ¿Qué se hace en otros países europeos?"

COORDINA: Joaquín Hernández Gómez

PARTICIPAN:

Manuel Delgado Delgado, Alicia Delibes Liniers, Víctor Hernández Morales, Eugenio Hernández Rodríguez, Enrique Fernández Cara

VIERNES 14 DE JULIO:

10:00 "Aplicaciones elementales ligadas a ecuaciones diferenciales y aspectos históricos"

Manuel Delgado Delgado Profesor Titular de la Universidad de Sevilla

12:00 "Códigos detectores y correctores de errores"

Adolfo Quirós Gracián Profesor Titular de la Universidad Autónoma de Madrid

3. RESUMENES DE LAS CONFERENCIAS

A continuación, se presentan resúmenes de las conferencias impartidas, con la intención de ilustrar con más detalle el ambiente conseguido.

A) LECCION INAUGURAL, por Enrique Fernández Cara.

Hemos tratado de diseñar un curso en el que, principalmente, se pueda responder a dos preguntas:

a) ¿Pueden efectivamente las aplicaciones de las Matemáticas, al menos aquéllas que necesitan un nivel elemental de Matemáticas, servir como motivación en la enseñanza secundaria?

b) ¿Qué se hace a tal respecto en otros países europeos?

Esperamos que, al hilo de estas dos cuestiones, surjan muchas otras, quizá más interesantes. Puede que ésta sea una buena ocasión para reflexionar sobre este tema y otros afines.

De momento, me atrevo a plantear una, que podría abrir un primer debate. Tengo la impresión de que, para la participación en este curso, ha sido más difícil de lo habitual convencer a Profesores de Instituto. Me gustaría poner esa cuestión sobre la mesa y que nos preguntáramos si hay todavía una cierta actitud negativa hacia la Matemática Aplicada y si eso es positivo para la calidad de la enseñanza.

Para terminar, voy a intentar reflejar mi propio punto de vista (espero que ayude a comprender algunas de las decisiones de tipo organizativo que hemos tomado).

Yo soy un defensor de las aplicaciones de las Matemáticas. Mi formación me ha empujado a ello. Tras la Licenciatura, me desplacé a Paris, el curso 1979/80, para hacer estudios de Doctorado. Allí me enteré de muchas cosas y aprendí que, en un país desarrollado, es fundamental dar importancia principal a la educación matemática. Algo que me llamó mucho la atención fue el buen concepto que la sociedad, el hombre de la calle, tiene allí del profesional de las Matemáticas. Estoy convencido de que ésta es una asignatura pendiente en nuestro país que espero que actividades como ésta contribuyan a superar.

B - Aula Informática

a) “Tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria”, por Dolores Rodríguez Soalleiro.

En esta conferencia, se pretende poner de manifiesto los cambios metodológicos que la introducción en el aula de las Tecnologías de la Información está suponiendo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

Se mostrarán unos ejemplos de aplicación, haciendo un breve recorrido por programas informáticos, tanto de propósito general como de EAO, Internet y calculadoras gráficas y con cálculo simbólico.

b) “Algunas aplicaciones del cálculo computacional a la enseñanza de las Matemáticas”, por Roberto Rodríguez del Río.

Se presentará algún problema de Matemáticas que pueda ser resuelto con el programa de Cálculo Computacional "MatLab". Se comentarán algunas de las capacidades del citado programa, en particular algunas herramientas interactivas que pueden ser aplicadas en la Enseñanza de las Matemáticas en niveles como el Bachillerato.

C - "Problemas y soluciones de la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva europea", por Richard Cabassut.

Se describirán las características más importantes de los sistemas educativos alemán y francés en lo que se refiere a la Enseñanza de las Matemáticas. Se realizará un análisis comparativo de los contenidos, opciones, etc. en ambos países. También, se tratarán de identificar los principales problemas y dificultades y se propondrán soluciones.

D - "Matemáticas y medios de comunicación", por Fernando Corbalán Yuste.

La importancia de los medios de comunicación en nuestra sociedad es innegable y creciente. Abordaremos las relaciones de los mismos con las Matemáticas (más estrechas de lo que parece), basadas en el hecho de que las Matemáticas constituyen un medio de comunicación, un lenguaje, con unas características especiales, que estudiaremos.

Analizaremos los medios desde un punto de vista matemático y propondremos alternativas para la introducción de los mismos en la clase de Matemáticas, como un instrumento de conexión de la realidad con el aprendizaje.

E - "El Arte Mudéjar como motivador del estudio de la Geometría", por Florencio Villarroya Bullido.

Es sabido que, en el arte islámico, la representación de figuras humanas o incluso vegetales está prohibida, por tanto es prácticamente inexistente. En la peninsula ibérica, durante 700 años, convivieron más o menos pacíficamente tres religiones y sus manifestaciones culturales. Fruto de esa convivencia es el arte mudéjar. Arte realizado por artesanos y artistas musulmanes, pero para señores o autoridades cristianas.

El mudéjar es el único arte genuinamente español, de acuerdo con Menéndez Pelayo. En las todavía existentes iglesias mudéjares, datadas entre los siglos XIII y XVI, especialmente en Aragón, se da una de las más ricas decoraciones, desde el punto de vista geométrico del arte, no solo del mudéjar, sino del arte a secas.

Después de una presentación de esos motivos geométricos en esas decoraciones, analizaremos los elementos geométricos que permiten su desarrollo: motivos mínimos, que pueden ser construiddos con regla y compás; trataremos de identificar la "geometría" que subyace en dichas construcciones que, por supuesto, debió ser cultivada en los reinos musulmanes de la península ibérica, en especial en el reino de Zaragoza, a partir del siglo X.

F - "Fractales y sus aplicaciones elementales", por Manuel Morán Cabré.

Los objetos fractales se caracterizan por exhibir complejidad geométrica cuando son examinados a diferentes escalas. Al propio tiempo, existe una coherencia en su complejidad que los hace matemáticamente analizables y estéticamente bellos.

A menudo, los objetos fractales se presentan como la respuesta geométrica óptima para el desempeño de una función física o biológica, por lo que son muy abundantes en la naturaleza. Ello permite ilustrar de forma interdisciplinar las numerosas aplicaciones de la geometría fractal, revelando sus ricas conexiones con el mundo de la física, química, biología, geología, astrofísica, dinámica caótica, etc.

G - "Sobre el sentido de la Inferencia Estadística", por Víctor Hernández Morales.

Se quiere mostrar el sentido que tienen las afirmaciones de la Inferencia Estadística mediante el examen de dos métodos que aparecen en los programas de Enseñanza Secundaria: los intervalos de confianza y los contrastes de hípótesis.

Se examinarán detalladamente las hipótesis que los sustentan y se mostrará qué clase de conclusiones es válido extraer y cuál es su alcance. Este examen dará pie para reflexionar acerca de las diferencias entre la Estadística y el resto de las Matemáticas.

H - "Sistemas de votación y el Teorema de Arrow", por Eugenio Hernández Rodríguez.

Las sociedades democráticas están basadas en tomas de decisiones conjuntas por medio de votaciones. Las votaciones se usan continuamente: para elegir Congresistas y Senadores y para tomar decisiones en el Pleno de un Ayuntamiento y en los Consejos Escolares de los Centros Educativos.

Es sorprendente que distintos métodos de votación puedan producir resultados diferentes. Se pueden producir situaciones tan paradójicas como la que sucedió en la elecciones catalanas de octubre de 1999: El PSC obtuvo más votos que CiU, pero este último partido consiguió más escaños en el Parlamento regional.

El problema fundamental de la elección social es buscar la solución a la siguiente pregunta: ¿Cómo elige un grupo de individuos, cada uno con opiniones posiblemente diferentes, un resultado de entre una lista de posibilidades?

Las Matemáticas permiten demostrar que todo sistema de votación tiene fallos inherentes: encontrar el método justo es imposible.

El reparto de escaños en un Parlamento, que debería ser proporcional al número de votos obtenidos por cada partido, es uno de los juegos preferidos de algunos políticos. Las Matemáticas sirven para examinar las ventajas e inconvenientes de los métodos tradicionales (de Hamilton, de D'Hont y de St. Lagüe) así como las paradojas que ocasionalmente producen.

I - "Aplicaciones elementales ligadas a ecuaciones diferenciales y aspectos históricos", por Manuel Delgado Delgado.

Los fenómenos que se presentan en la Naturaleza son fenómenos complejos cuya comprensión, siquiera parcial, requiere varias etapas. Es necesario crear un modelo simplificado del mismo que involucre las principales variables que afectan el fenómeno. Debemos establecer las relaciones matemáticas existentes entre ellas, muchas veces en forma de igualdades, basándonos en nuestro conocimiento científico del fenómeno. Hay que resolver los modelos matemáticos resultantes, lo que suele impulsar el propio desarrollo de las Matemáticas e incluso propiciar la creación de nuevas herramientas científicas. Entonces, se pueden sacar consecuencias que, comprobadas, dan validez o limitan el modelo.

En esta charla, se presentarán varios de estos modelos sencillos, con indicaciones sobre su génesis e intentando recalcar su carácter multidisciplinar. Estos modelos serán resueltos, intentando que el aparato matemático empleado no se encuentre alejado de los conocimientos impartidos en la Enseñanza Secundaria y se aplicará dicha información para sacar nuevos conocimientos o limitar la validez de los mismos.

J - "Códigos detectores y correctores de errores", por Adolfo Quirós Gracián.

En la moderna sociedad de la información se transmiten diariamente numerosos datos, de cuya veracidad debemos estar seguros. Los datos pueden alterarse por la acción voluntaria de terceras personas, pero es más común que se produzcan errores por fallos en los instrumentos de lectura, transmisión o reproducción. Para protegerse, se puede añadir a los datos una cierta redundancia que nos permita corregir, o al menos detectar, los errores. Este es el sentido que tiene la letra del NIF.

Empezaremos por explicar como funcionan algunos códigos detectores de errores de uso cotidiano: los de las cuentas bancarias y las tarjetas de crédito; el ISBN; el NIF; el código de barras; ... Todos ellos están basados en propiedades de divisibilidad, fácilmente expresables en términos de ecuaciones lineales en congruencias.

El código de barras es en realidad una combinación de dos códigos, uno decimal y otro binario. Esta combinación permitiría (aunque parece que no se hace en la práctica) utilizar este código no sólo para detectar, sino también para corregir errores.

Ser capaz de corregir los errores no es un mero alarde de habilidad, sino que hay muchas situaciones en las que no basta con detectar los errores. Esto es lo que sucede con un CD, que suena bien incluso si está sucio porque el lector es capaz de corregir errores. Pero sería inadmisible que simplemente los detectara y nos avisara pitando como hacen los lectores de códigos de barras. Veremos que, utilizando esencialmente álgebra lineal en congruencias, se pueden diseñar códigos correctores de errores del estilo de los utilizados en los CD.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 16 (2000), 127–128.

Acerca de las Matemáticas en las Escuelas Técnicas

Paz Morillo y Carlos Gete-Alonso
Dpto. de Matemática Aplicada IV
Universidad Politécnica de Cataluña

e-mail: `paz@mat.upc.es, cgete@mat.upc.es`

Existe un debate permanente sobre la función que deben desempeñar las matemáticas en la ingeniería. La polémica surgió con el desarrollo industrial y el nuevo papel que el ingeniero cumple en la sociedad. Al aumentar las necesidades en este campo, aumentan las escuelas de ingeniería y se plantean interrogantes como: ¿Qué tipo de matemáticas se han de enseñar?, ¿Quién ha de impartir las asignaturas de matemáticas?, ¿Con qué nivel de abstracción y rigor se han de presentar las matemáticas a un ingeniero?, etc. También debe tenerse presente que el desarrollo tecnológico conlleva un aumento de materias relacionadas, que dentro de los estudios de ingeniería ejercen una considerable presión sobre las materias básicas.

Durante estas últimas décadas se han llevado a cabo diferentes estudios y se han desarrollado experiencias concretas, pero el problema sigue abierto.

En la actualidad este debate ha cobrado nuevas fuerzas y la causa puede hallarse en los cambios experimentados en la sociedad durante los últimos tiempos: cambios en los procesos de creación, transmisión, almacenamiento y tratamiento de la información; cambios en la estructura del mundo laboral, en los perfiles profesionales, en los conocimientos de los trabajadores; cambios en la estructura del saber científico, tecnológico y social....

Por otra parte, el problema se plantea con urgencia en nuestra sociedad debido a la reforma de las enseñanzas medias. El alumnado que el curso 00/01 accede a la universidad procede, mayoritariamente, del nuevo plan de estudios (ESO, Bachillerato) y posee una formación diferente al alumnado proveniente de COU y de la antigua FP. Se plantean, desde la Universidad, dos posibles alternativas no excluyentes y que ya han sido planteadas en otras ocasiones : a) Modificar los programas de las asignaturas de matemáticas de las Escuelas de ingeniería para adaptarlas a esta nueva situación. b) Proponer modificaciones en los programas de matemáticas de Secundaria. En todo caso será necesario contar con los profesores y con las autoridades educativas responsables de esta etapa educativa.

A continuación vamos a exponer ideas generales sobre el papel que las matemáticas deben tener en las Escuelas Técnicas.

El primer objetivo en la formación matemática de un futuro ingeniero debe ser proporcionar los conceptos y métodos matemáticos necesarios para la comprensión de las demás asignaturas de la carrera, así como las herramientas matemáticas más utilizadas en el ejercicio de la profesión. Detectar las necesidades matemáticas de las diferentes asignaturas de cada carrera técnica permitiría definir los contenidos mínimos, tanto conceptuales como procedimentales, así como el grado de profundidad con que deberían enseñarse.

Otro aspecto importante es relacionar los contenidos matemáticos que se imparten con sus distintas aplicaciones a ingeniería, mostrando de esta forma cómo la abstracción es uno de los aspectos fundamentales en la formación. Contextualizar los contenidos matemáticos en diferentes entornos tecnológicos buscando referencias y/o ejemplos de aplicación práctica relacionados con las diferentes titulaciones, permitirían dar más significatividad a las matemáticas.

Además, las matemáticas también juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevos conocimientos y, por consiguiente, de nuevo se hace patente su utilidad, ya que en la actividad profesional de un ingeniero además de saber usar las tecnologías existentes para resolver los problemas que se le planteen, debe en muchos casos crear nuevas tecnologías. Este hecho determina, también, los programas de matemáticas en las Escuelas Técnicas. No podemos olvidar el carácter formativo de los métodos y contenidos matemáticos.

Por consiguiente, urge abrir un debate que no sólo responda a las preguntas generales planteadas en un principio sino que concrete este nuevo enfoque de enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Técnicas. Las nuevas tecnologías nos han de servir también para diseñar una nueva forma de enseñar. El objetivo final será diseñar programas de matemáticas para ingenieros. Estos programas podrían contener una parte común a todas las titulaciones y una parte diversificada específica de cada carrera. Para la parte común se deberían consensuar los contenidos y las metodologías más adecuadas e, incluso, proponer materiales concretos que la desarrollen.

Nos gustaría que este breve artículo sirviera para poner en contacto a todas aquellas personas interesadas en estos temas y poder trabajar conjuntamente.

Centro Internacional de Matemática

`http://www.cim.pt`

I. Description and Aims

The *Centro Internacional de Matemática* – CIM is a non-profit-making, privately-run scientific association dedicated to furthering research in mathematics. At present, the associates of the CIM include fifteen Portuguese Universities, the University of Macau, the Applied Mathematical Centre of the Technical University of Lisbon, the Algebra Centre of the University of Lisbon, the Centre of Linear Structures and Combinatorics of the University of Lisbon, the Mathematical Research and Applications Centre of the University of Évora, the University of Coimbra Mathematical Centre, the University of Oporto Mathematical Centre and the Portuguese Mathematical Society.

The CIM aims to be a meeting-point for Portuguese Mathematicians, and to provide for them the best conditions for international exchanges.

As membership is restricted to collective persons, the CIM is not in competition with other mathematics associations and research centres, but rather has a complementary role to play.

II. Location

The CIM is located in the Astronomical Observatory Complex of the University of Coimbra, in premises provided by the Department of Mathematics of that university. It is ideal for conferences, and is also an attractive place for visiting scientists to work, with a secretarial service available. Indeed, a residential section is currently being prepared in order to accomodate visiting scientists.

It is situated slightly away from the bustle of the city, but it is adequately served by public transport to the city centre and the university.

III. Events organized in 1999 and in 2000

- Debate on University Teaching of Mathematics in Portugal
- Workshop on Geometric and Combinatorial Methods in the Selfadjoint Spectral Sum Problem
- Thematic Term on Theoretical and Computational Fluid Dynamics
- Summer School on Singularities in Algebraic Geometry and String Theory
- Summer School on Differential Geometry
- Workshop on Statistical Modelling - Extreme Values and Additive Laws
- Macau 2000 - Mathematics and its Role in Civilization
- Second Debate on Mathematical Research in Portugal
- Thematic Term on Dynamics, Bifurcation and Biology
- Mathematical Aspects of Evolving Interfaces
- Workshop on Partially Known Matrices and Operators

IV. Events for the four year period 2001-2004

The events for the four year term 2001-2004 will consist on the usual workshops and summer schools on all areas of Mathematics together with a Thematic Term centred on a specif topic for each year, according to the following schedule:

- 2001 – Mathematics and Computation
- 2002 – Mathematics and Biology
- 2003 – Mathematics and Engineering
- 2004 – Mathematics and Environment

Further information about the structure, organization, publications and events of CIM can be found in the following address: http://www.cim.pt

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o *16 (2000), 131–137.*

Los cursos de Verano de la Universidad de Cantabria en el Año Mundial de las Matemáticas

Dirección
de los Cursos de Verano
de la Universidad de Cantabria

La Universidad de Cantabria ha querido sumarse al esfuerzo general por la difusión de las matemáticas en nuestra sociedad durante este año 2.000 y, entre otras muchas actividades, ha incluido en sus Cursos de Verano, una serie de seminarios o cursos con contenidos matemáticos o muy relacionados con ellos. La Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) ha colaborado en la organización de varios de estos encuentros. A través de la inclusión de esta crónica en el boletín, la Dirección de los Cursos de Verano de la Universidad de Cantabria quiere ofrecer una panorámica de las distintas actividades que se han llevado a cabo en este marco, desde el punto de vista de sus correspondientes directores.

1 El problema de la formación inicial de profesores de matemáticas. Directores: Tomás Recio y María José González (Universidad de Cantabria).

El sistema educativo establecido por la LOGSE ha supuesto cambios profundos en el papel del profesor en las etapas Primaria y Secundaria. Es un reto para la formación inicial de profesores el adaptarse a dichos cambios ya que actualmente, en el caso de las matemáticas, podemos apreciar una profunda brecha entre la formación recibida y las posteriores exigencias necesarias para ejercer la profesión de profesor de matemáticas: observamos que en las Diplomaturas de Magisterio los contenidos psicológicos y pedagógicos dominan una formación generalista que, prácticamente, excluye a las matemáticas, mientras que en las Licenciaturas de Matemáticas no hay, salvo excepciones, asignaturas directamente relacionadas con la formación de docentes. Esta situación nos ha llevado a plantear, en primer lugar, una pregunta esencial que es representativa del primer tema que hemos abordado en el curso: ¿qué tipo de conocimiento precisa un profesor de matemáticas?. Hemos dado respuesta a esta cuestión presentando una caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, formado a partir de una relación compleja en la que se integran el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento curricular y el conocimiento didáctico del contenido matemático. Una vez clarificadas las competencias exigibles al profesor de matemáticas hemos abordado los desajustes existentes entre la formación necesaria y la oferta institucional en el ámbito de la universidad, analizando el desarrollo de las asignaturas relacionadas con la formación inicial de profesores de matemáticas desde la perspectiva de los profesores que las imparten. Hemos presentado así la problemática del formador de profesores, centrando el interés en la metodología que se considera más adecuada para cada contenido matemático concreto. Finalmente hemos constatado el espectacular avance de la investigación educativa en matemáticas en los últimos años, dentro de la cual la formación de profesores de matemáticas se ha constituido como un campo de investigación con entidad propia. Así hemos presentado las últimas líneas de investigación en este campo mediante ejemplificaciones que los propios investigadores, ponentes de este curso, vienen materializando en la práctica a través de propuestas metodológicas innovadoras. En este ámbito las prácticas de enseñanza realizadas por los alumnos han sido un foco principal de interés y están canalizando un grupo de metodologías de enseñanza centradas en la adquisición de competencias profesionales a partir de la reflexión sobre problemas prácticos profesionales.

2 Summer School on Orthogonal Polynomials and Special Functions. Directores: Francisco Marcellán (Universidad Carlos III, Madrid) y Walter Van Assche (Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica).

A este curso de verano, la primera actividad del SIAM Activity Group on Orthogonal Polynomials and Special Functions que se celebra en Europa desde su creación hace 11 años, asistieron 55 matemáticos, en su mayor parte (34) españoles así como investigadores de una decena de otros países. Contó con el patrocinio de las Universidades de Cantabria y Carlos III de Madrid así como de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y de nuestra Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) que financiaron la participación como becarios de jóvenes investigadores. La participación de SIAM se conformó a través del Comité organizador formado por los co-directores (Director de Programa y Vicepresidente del SIAG) y los Dres. Renato Alvarez Nodarse (Universidad de Sevilla) y Rafael Yáñez (Universidad de Granada) como editores del Newsletter de SIAG.

El tema central de los 5 seminarios invitados fue la teoría de polinomios ortogonales desde diferentes perspectivas tanto en teóricas como de sus aplicaciones. El Dr. Antonio Durán (Universidad de Sevilla) impartió una introducción a polinomios ortogonales matriciales, que han conocido un importante impulso en los últimos años debido a problemas de modelización de filtros de múltiples entradas y salidas. El Dr. Kenneth McLaughlin (University of Arizona) expuso las conexiones entre problemas de Riemann-Hilbert y las propiedades asintóticas de polinomios ortogonales. El Dr. Jurgen Prestin (Medical University Lubeck, Alemania) presentó resultados recientes en el uso de ondículas polinomiales en teoría de señal. La utilización de la teoría espectral de operadores en el tratamiento de problemas indeterminados de momentos y aproximación racional fue abordada por el Dr. Erik Koelink (TU Delft, Holanda) así como su aplicación a funciones especiales asociadas a matrices de Jacobi doblemente infinitas. Finalmente, el Dr. Jasper Stokman (Korteweg de Vries Institute, Amsterdam, Holanda) presentó una introducción a la teoría de polinomios ortogonales en varias variables y su conexión con la teoría de representación de álgebras de Hecke afines. Todos los seminarios fueron documentados con notas que aparecerán en un volumen de la editorial Nova Science Publishers.

Los asistentes al curso, en su mayoría estudiantes de tercer ciclo y doctores recientes, pudieron obtener, de esta manera, una aproximación básica a las líneas de mayor impacto en la teoría de polinomios ortogonales y funciones especiales a cargo de investigadores líderes en los temas señalados anteriormente.

El seminario de Laredo tendrá su continuidad en la serie que se celebrará en Alemania (2001), Holanda (2002) y Portugal (2003) en el marco del programa de actividades de SIAG

3 Propagación de Ondas: Modelización, Análisis y Simulación.

Director: Enrique Zuazua (Universidad Complutense, Madrid).

Este curso estuvo primordialmente destinado a jóvenes investigadores interesados en fenómenos relacionados con la propagación de ondas en un sentido amplio, y con una formación de, esencialmente, Matemático, Físico o Ingeniero. Sin embargo, por la actualidad de los temas abordados y por el nivel de competencia de los conferenciantes, el Curso estaba concebido también para ser de utilidad a profesionales consagrados en el tema y campos afines. El Curso giró en torno a los fenómenos de propagación de ondas, pretendiéndose presentar una panorámica de problemas del mundo de las Ciencias Aplicadas y la Ingeniería en los que dichos fenómenos intervienen. Como conferenciantes en el Curso contamos con Alfredo Bermúdez (Universidad de Santiago de Compostela), Miguel Escobedo (UPV-EHU), Patrick Gerard (Universidad de Paris-Sur, Orsay), Günter Leugering (Universidad de Darmstadt, Alemania) y Luis Vázquez (UCM) además del propio Director del Curso. De este modo se constituyó un grupo de expertos de reconocido prestigio de amplio espectro pero que a la vez, en su conjunto, proporcionaban una unidad y armonía temática. Los temas que se abordaron en el curso estuvieron esencialmente destinados a la simulación numérica y el análisis del comportamiento de ecuaciones de ondas no lineales y leyes de conservación. Se presentaron también nuevos resultados sobre la localización de ondas en medios heterogéneos mediante técnicas de medidas de defecto y de Wigner. Se analizaron asimismo métodos numéricos eficientes para la simulación de fenómenos de acoplamiento fluido-estructura, basados en el método de elementos finitos y para las vibraciones de multi-estructuras a través del método de descomposición de dominios. Finalmente, el curso contó también con un ciclo de conferencias sobre los avances matemáticos recientes en el control de vibraciones.

4 Triangulaciones de poliedros y configuraciones de puntos.

Director: Francisco Santos (Universidad de Cantabria).

Una de las técnicas más útiles en Geometría Discreta y Computacional es la de descomponer una región del espacio (normalmente un poliedro) en símplices, es decir, triangularlo. Cuando el conjunto de puntos que se permite usar como vértices está fijado a priori decimos que estamos triangulando una configuración de puntos.

Entender la estructura del "espacio" de todas las triangulaciones de un poliedro o de una configuración de puntos es un problema clave en el área, cuya importancia se incrementa por sus muchas conexiones con otros ámbitos tanto de la matemática pura como de las ciencias aplicadas.

Normalmente se desea que las triangulaciones obtenidas tengan buenas propiedades, pero el significado de "buenas propiedades" depende de cada caso. Por ejemplo, por simplicidad puede interesarnos que la triangulación tenga el mínimo número posible de símplices. O, para que una superficie reconstruida se parezca a la original, nos interesa que no haya símplices mucho más grandes que otros o con ángulos muy agudos. Encontrar triangulaciones que satisfagan nuestras necesidades o se acerquen lo más posible a ellas es lo que entendemos por "problemas de optimización", que fueron el contenido principal de este curso.

El curso iba dirigido a alumnos de doctorado e investigadores tanto de matemáticas (especialmente álgebra, geometría, y matemática aplicada), como de ciencias de la computación (teoría de la complejidad, algorítmica) y algunas ingenierías (aquéllas relacionadas con sistemas geográficos, diseño asistido por ordenador, etc). Fue impartido por los profesores Francisco Santos (Univ. de Cantabria), J. de Loera (Univ. of California, Davis) and J. Rambau (ZIB Berlin). Contó con 15 estudiantes, número relativamente alto dado el grado de especialización del curso. Cabe destacar, además que más de la mitad de los alumnos vinieron del extranjero expresamente para asistir al curso.

5 Introducción a la Programación en Lenguaje Java.

Director: Angel Cobo (Universidad de Cantabria).

Cada vez es más frecuente la utilización de las nuevas tecnologías en la Enseñanza en general y de las Matemáticas en particular. El lenguaje Java es el medio más potente y extendido para generar aplicaciones que, con un uso interactivo y a través de la red Internet, facilitan la comprensión y el aprendizaje de conceptos y métodos. El curso se centró en los fundamentos de la programación en lenguaje Java, analizando las principales características de este revolucionario lenguaje de programación, así como mostrando ejemplos de aplicaciones reales. Tras una rápida introducción a los conceptos básicos de la programación orientada a objetos, se enseñaron los pasos necesarios para la inserción de applets Java en las páginas Web, desde el diseño de interfases de usuario y el control de los sucesos hasta la utilización de elementos multimedia como imágenes, animaciones y sonido.

6 IX Escuela de Otoño Hispano-Francesa sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería.

Directores: Eduardo Casas (Universidad de Cantabria) y Michel Bernadou (INRIA).

Como es bien conocido en nuestro ámbito, estas Escuelas se vienen desarrollando cada dos años desde 1982 y en ellas se produce la colaboración entre matemáticos e ingenieros de ambos países en el ámbito de la Matemática Aplicada y el Análisis Numérico. Su objetivo fundamental es iniciar a las personas con interés por la simulación numérica (especialmente jóvenes licenciados) en algunas líneas de investigación que se desarrollan actualmente. En la edición de este año, con una participación que superó las 80 personas, se impartieron cuatro cursos monográficos de 5 horas cada uno: Patrick Le Tallec (École Polytechnique) habló sobre la modelización numérica de estructuras que sufren grandes deformaciones, Francisco J. Sayas (Universidad de Zaragoza) nos introdujo en los métodos de elementos de contorno, mientras Albert Cohen (Université Pierre et Marie Curie) ofreció una interesante y documentada panorámica sobre "ondelettes" y Ramón Codina (Universidad Politécnica de Cataluña) presentó los métodos de elementos finitos en problemas de mecánica de fluidos, partiendo de los aspectos más elementales hasta llegar a las técnicas más actuales. Además se impartieron cinco conferencias de 45 minutos a cargo de los profesores José Luis Cruz (Universidad de Córdoba), Luis Ferragut (Universidad de Salamanca), Claude Le Bris (École Nationale des Ponts et Chaussées), Salim Meddahi (Universidad de Oviedo) y Carlos Parés (Universidad de Málaga).

Dentro de las actividades de la Escuela se procedió además a la entrega del Tercer Premio SEMA al Joven Investigador, concedido por unanimidad, a nuestra compañera María Paz Calvo Cabrero, Profesora Titular de la Universidad de Valladolid. Durante el acto, la galardonada presentó algunos de los resultados más recientes de sus investigaciones. Asimismo, se celebró en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria un acto con motivo de la entrega del premio SEMA sobre Divulgación de la Matemática Aplicada, concedido a D. Enrique Zuazua, catedrático de la Universidad Complutense, por su trabajo "Ondas continuas y discretas". En dicho acto el profesor Zuazua disertó sobre problemas actuales de la enseñanza, la investigación, y el ejercicio profesional de las matemáticas en España, así como sobre el contenido del artículo premiado.

7 Matlab y Simulink.

Directores: Emiliano Moyano y Francisco J. Velasco (Universidad de Cantabria).

Este curso iba dirigido a alumnos de ciencias e ingeniería, preferentemente Industriales y Telecomunicación. El objetivo era que los asistentes adquirieran un conocimiento básico del funcionamiento de dicho software, así como mostrar algunas de las muchas aplicaciones, tanto desde el punto de vista de la Matemática Aplicada, Análisis Numérico y Optimización, como de aplicaciones técnicas tales como Sistemas de Control, Procesado Digital de Imágenes o Filtrado de Señales.

La asistencia fue de 62 personas, lo cual parece confirmar la demanda que existe dentro de este ambiente, de información sobre este entorno Matlab-Simulink, que actualmente puede considerarse un standard en algunas de las disciplinas consideradas.

Nombre	Short Course on Finite Volume Upwind and Centred Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Applications: Compressible Gas Dynamics and Free-Surface Shallow Flows
Lugar	Hotel Avenida Palace, Barcelona, Spain
Fecha	April 2-6, 2001
Organiza	Numeritek Limited, UK
Lecturer	Prof. E. F. Toro, OBE
Información	On request by e-mail (see below)
E-mail	course@numeritek.com
Página Web	http://www.numeritek.com

Nombre	**ICCS 2001** The 2001 International Conference on Computational Science
Lugar	San Francisco, California, USA
Fecha	May 28 - 30, 2001
Organiza	Organizing Committee
Sponsors	American Mathematical Society, USA Fujitsu European Center for Information Technology, UK (to be confirmed) International Business Machines, USA Sun Microsystems, USA California State University at Chico, USA University of Reading, UK
Información	ICCS 2001 Department of Computer Science University of Reading Reading RG6 6AY United Kingdom Teléfono: 44-118-931-6722 and 44-118-987-5123 ext. 7645 Fax: 44-118-975-1994
E-mail	iccs2001@csres.cs.rdg.ac.uk
Páginas Web	http://www.ucalgary.ca/iccs/ http://www.hpcc.rdg.ac.uk/iccs/

Nombre	**MPD6** 6th International Conference on Mathematical Population Dynamics
Lugar	Marrackech, Morocco
Fecha	3-8 June, 2001
Información	MPD6 Scientific Secretary Department of Mathematics Chalmers University of Technology and University of Göteborg S-412 96 Göteborg, Sweden Phone: 46 31 772 35 30 Fax: 46 31 772 35 08
e-mail	mpd6@math.chalmers.se
Página Web	http://www.math.chalmers.se/ ziad/popdyn/Mpd6

Nombre	**MATHTOOLS'2001** Third International Conference 'Tools for Mathematical Modelling'
Lugar	Saint-Petersburg, Russia
Fecha	June-18-23, 2001
Organiza	Department of Mathematics and Laboratory of Nonlinear Analysis, St. Petersburg Technical University Editorial Board of 'Differential Equations and Control Processes' , Institute of International Education Programs Russian State Pedagogical University
Información	Lydia Linchuk, MATHTOOLS'2001 Dept. of Mathematics State Technical University Polytechnicheskaya st., 29, St. Petersburg 195251, Russia Fax: 78125343314, 78125527770
e-mail	mt2001@osipenko.stu.neva.ru ershov@eug.usr.abu.spb.ru http://www.neva.ru/journal

Nombre	Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems: Theory and Applications
Lugar	Rolduc (Netherlands) & Gaeta (Italy)
Fecha	June 18-22, 2001 in Rolduc, September 24-28, 2001 in Gaeta
Organiza	Organizing Committee
Contactos	J. Bemelmans Bemelmans@rwth-aachen.de
	B. Brighi, A.Brillard@univ-mulhouse.fr
	A. Brillard, A.Brillard@univ-mulhouse.fr
	M. Chipot, chipot@amath.unizh.ch
	F. Conrad, Francis.Conrad@antares.iecn.u-nancy.fr
	I. Shafrir, shafrir@math.technion.ac.il
	V. Valente, valente@iac.rm.cnr.it
	G. Vergara - Caffarelli, vergara@dmmm.uniromal.it
E-mail	rolduc@amath.unich.ch gaeta@amath.unich.ch
Página Web	http://www.math.unizh.ch/rolducgaeta

Nombre	**ISSAC2001** International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation
Lugar	Ontario, Cánada
Fecha	July 22-25, 2001
Organiza	Ontario Research Center for Computer Algebra (ORCCA) University of Western Ontario
Información	
E-mail	issac2001@orcca.on.ca
Página Web	http://www.orcca.on.ca

Nombre	**EQUADIFF 10** Czechoslovak International Conference on Differential Equations and Their Applications
Lugar	Prague, Czech Republic
Fecha	August 27-31, 2001
Organiza	Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic
Colaboran	Chalmers University in Prague (Faculty of Mathematics and Physics) Union of the Czech Mathematicians and Physicists Masaryk University in Brno (Faculty of Science) Komensky University in Bratislava (Faculty of Mathematics and Physics) Union of Slovak Mathematicians and Physicists
Información	EQUADIFF, Mathematical Institute Zitna 25, CZ-115 67 Praha 1 Czech Republic Teléfono: (420 2) 22090734 Fax: (420 2) 22211638
E-mail	equadiff@math.cas.cz
Página Web	http://www.math.cas.cz

Nombre	**XVII CEDYA / VII CMA** XVII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones VII Congreso de Matemática Aplicada
Lugar	Salamanca, Spain
Fecha	24-28 de septiembre de 2001
Organiza	Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Salamanca Sociedad Española de Matemática Aplicada, SEMA
Patrocinadores	Ministerio de Ciencia y Tecnología Junta de Castilla y León
Información	Secretaría del Congreso Departamento Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias Universidad de Salamanca Plaza de la Merced s/n 37008 Salamanca (Spain) Tfno. 923 294400 ext. 1537, 1552 Fax. 923 294514
e-mail	cedya2001@gugu.usal.es
Página Web	http://matapli.usal.es/cedya2001

Juan M. Viaño *Lecciones de Métodos Numéricos.*
Ediciones Tórculo. Santiago de Compostela.
Volumen 1.- *Introducción general y análisis de errores.*
1995. 162 páginas. ISBN: 84-605-88967-52-7.
Volumen 2.- *Resolución de ecuaciones numéricas.*
1997. 186 páginas. ISBN: 84-89641-57-9
Volumen 3.- (coautora: **Margarita Burguera**) *Interpolación.*
2000. 193 páginas. ISBN: 84-8408-117-6

Coincidiendo con la revisión de los planes de estudios en las facultades y escuelas técnicas, nuestro compañero Juan M. Viaño, Catedrático de Matemática Aplicada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, con amplia experiencia en la enseñanza de métodos numéricos, ha comenzado a redactar con formato de publicación sus notas de clase, con el objetivo de servir de ayuda tanto a los alumnos que cursan estas materias como a los profesores que las imparten. Hasta el momento se han editado los 3 volúmenes que se reseñan. La edición, aunque cuidada, resulta asequible para su adquisición por los alumnos.

Volumen 1.- Se trata de introducir en el análisis numérico y su metodología al alumno que cursa por primera vez esta asignatura, dando una visión elemental de sus conceptos básicos, de su dependencia vital del ordenador, de sus dificultades y de sus aplicaciones. Se tratan con mayor profundidad, aunque siempre a nivel introductorio los errores en el cálculo numérico y la estabilidad de los algoritmos lineales. Estos conceptos se ilustran con numerosos ejemplos elementales. Su contenido está pensado para ser incluido dentro de un primer cuatrimestre de métodos numéricos. **Indice resumido:** *1.- Concepto y método del análisis numérico. 2.- Los errores en el cálculo numérico. 3.- Análisis del error de redondeo en la aritmética de punto flotante. 4.- Estabilidad numérica de un algoritmo iterativo. 5.- Problemas y programas propuestos.*

Volumen 2.- Está dedicado al análisis de los métodos numéricos de aproximación de raíces de ecuaciones no lineales de una variable. Además de las descripción de los métodos, se estudian sus propiedades de convergencia, utilizando las herramientas básicas del análisis de funciones reales, su aplicabilidad, su rapidez y su programación en ordenador. Con este objetivo se incluyen también los seudocódigos de los algoritmos más importantes para facilitar al alumno la programación en un lenguaje-máquina cualquiera. **Indice resumido:** *1.- Preliminares de análisis matemático. 2.- Primeros algoritmos iterativos. 3.- Algoritmos de iteración funcional. Búsqueda de puntos fijos. 4.- Método de Newton-Raphson. 5.- Cálculo de raíces de polinomios. 6.- Problemas y programas.*

Volumen 3.- Se dedica íntegramente a la interpolación, tema clásico de aproximación de funciones cuyo desarrollo tiene una larga historia matemática. El enorme crecimiento de la capacidad de cálculo de los ordenadores actuales necesita, cada vez, más algoritmos eficientes para calcular funciones sencillas (polinomios algebraicos, polinomios trigonométricos, splines, ...) que coincidan en puntos dados con otras más complicadas o desconocidas. Las importantes aplicaciones en las ciencias experimentales y en el diseño gráfico por ordenador demandan con insistencia un conocimiento amplio y claro de esta área de las matemáticas. Además de la teoría clásica de la interpolación polinómica de Lagrange y Hermite se inculye una breve introducción a las fórmulas de derivación numérica y fórmulas de cuadratura para integración. Se incluyen también dos temas de interpolación más recientes y de enorme interés: la interpolación por funciones spline y la interpolación por polinomios trigonométricos. El cálculo del polinomio trigonométrico de interpolación en un tiempo "razonable" necesita el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) basado en la transformada de Fourier discreta e introducido por Cooley y Tuckey en 1965. **Indice resumido:** *1.- Interpolación polinómica de Lagrange. 2.- Interpolación polinómica de Hermite. 3.- Derivación numérica. 4.- Introducción a la integración numérica. 5.- Interpolación por funciones spline. 6.- Interpolación trigonométrica y transformada rápida de Fourier discreta. 7.- Problemas y programas.*

Obra colectiva *Fotografiando las matemáticas*
Carroggio S.A. de Ediciones. 2000.

Se trata de un trabajo colectivo de 50 matemáticos de renombre, españoles, en su gran mayoría, que en otros tantos artículos cortos presentan una panorámica completa de los grandes temas, problemas y retos de la matemática actual. Todos los artículos están escritos en un estilo divulgativo asequible a muchos interesados y se ilustran con una fotografía que evoca algún aspecto del mismo. Si además se añade la gran calidad de la edición, podemos asegurar que se trata de un magnífico libro de gran atractivo para cualquier interesado por las matemáticas en el que encontrará información y entretenimiento. La coordinación científica de esta magnífica iniciativa (que cuenta con el patrocinio de la comisión española de la Unesco) ha estado a cargo de los compañeros José Luis Fernández, Manuel de León, Ferran Marqués y Josep Vidal. La lista de los autores y los títulos de sus artículos, que reproducimos a continuación, es suficientemente para suscitar el interés de su lectura.

J. Volpi: La música de las esferas. V. Miquel Molina: ¿Se puede oír la forma de un tambor?. J. Llibre: Las razones del caos. J. Quer: Evitar malentendidos. J. Cilleruelo: Experimentando. A. Romero: La forma del universo. M. A. Herrero: Tigres y leopardos. C. Alsina: La importancia de llamarse Pi. J. M. Viaño: Divide y vencerás. T. Recio-F. Santos: El espacio es un bien escaso. C. Andradas: ¿Cómo no? Escher. M.-C. Muñoz-Lecanda: Del plano al espacio. J. Girbau: La falacia del mapa. C. Ruíz: ...cerca, lejos..... R. Montgomery: Las siete vidas del gato. R. López de Mántaras: ¿Sueñan los androides con ovejas eléctricas?. J.L. Fernández: La joya de la corona. M. Morán: Una geometría para descifrar el Universo. M.A.F. Sanjuán: El hojaldre caótico. C. Simó: La mala suerte de los dinosaurios. J.L. Vázquez: Pasar sin rozar. J. Serra: La forma de las cosas. M. T. Lozano: Losetas en el microscopio. J. M.R. Parrondo: Golpes de fortuna. A. Córdoba: La complejidad de lo indivisible. M. Epstein: Cristales líquidos. J. Koiller: Células autómatas. I. Peral: Caprichos (el sueño de una tarde de verano). J. A. Gallego: Crear silencio. M. Avellaneda: Imprevisible dentro de un orden. M^a J. Jiménez: La belleza no es casual. F. Aguiló y M^a L. Fiol: ¡Ah! Sí. Lo veo. C.A. Berenstein: La disección perfecta. J.I. Díaz: Carta a Eolo. H. Meinhardt: Patrones evolutivos. I. Colomina: La nueva Osa Mayor. R. Montgomery-C. Simó: La danza de los N cuerpos. J. González-Carmona: Solidez. L. Torner: Ondas solitarias. C. J. Da Costa: Mínima tensión. J.C. Marrero: La línea recta es el cincel. M. de León: Las imágenes de la luz. A. Campillo: El libro del margen estrecho. M.A. Fiol: Relaciones. P. Armas: La angustia de la duda. J. Domingo: El mensaje más valioso es el que nunca llega. J. Porti: ¡Un nudo! -dijo Alicia-. ¡Ah, deja que te ayude a deshacerlo!. S. Douady: Creciendo en orden. R. Pérez: Blanco, negro y simetría. G. Assayag: Acordes y desacuerdos. F. Balibrea: ¿Hacia dónde?.

Pascal J. Frey - Paul-Louis George *Maillages*
Hermes Sciences Publications. Paris. 1999.

La construcción de un mallado es un requisito esencial para cualquier simulación numérica de un problema de ecuaciones en derivadas parciales por el método de elementos finitos. Sin embargo, a diferencia de otros aspectos teóricos y prácticos del método de los elementos finitos, los aspectos directamente ligados a las técnicas de mallado no han sido tratados en profundidad. Este libro viene a cubrir una importante laguna en este campo, más, si cabe, porque aborda tanto cuestiones teórico-matemáticas como prácticas relacionadas con el mallado y está pensado tanto para su consulta en el mundo académico como en el técnico-industrial. En sus 23 capítulos y 840 páginas, se introducen las definiciones e ideas generales, algoritmos y estructuración de datos y una descripción (y análisis profundo) de las diferentes técnicas de mallado (clásicas y avanzadas): métodos algebraicos, métodos de tipo resolución de E.D.P., técnica frontal, tipo Delaunay, etc. Una parte muy importante del tratado se dedica a los mallados tridimensionales (planos y volúmicos) de superficies y sólidos en el espacio. De gran interés resultan también los capítulos dedicados a la optimización de mallados. En resumen, el libro puede ser de interés para estudiantes de segundo o tercer ciclo, doctorandos o investigadores universitarios y en laboratorios de investigación y desarrollo tanto públicos como privados.

Joe F. Thompson-Bharat K. Soni-Nigel P. Weatherill (Editores) *Handbook of grid generation*
CRC Press. Boca Ratón-Florida. 1999.

La construcción de un mallado de elementos finitos es, sin duda alguna, un medio para llegar a un fin: un útil necesario en la simulación numérica de fenómenos y procesos físicos mediante el bien conocido método de elementos finitos. Casi todos los que hemos tratado alguna vez con este problema, estaremos de acuerdo en que la generación de una "malla de elementos finitos" además de un problema científico, tiene "algo de arte". Las matemáticas proporcionan los fundamentos esenciales para la generación, transformación y optimización de un mallado, pero dado que las leyes en estos pasos no son únicas, este "arte" juega un papel importante. Las publicaciones sobre los métodos de generación de mallados son muy poco abundantes. Este tratado contiene una compilación impresionante de los conocimientos teórico-prácticos actuales sobre este tema. En efecto, contiene contribuciones de mas de 50 especialistas mundiales en "la técnica y el arte" de mallar. Su contenido está dividido en 4 grandes partes dedicadas respectivamente a mallados estrucurados, mallados no estrucuturados, mallados de superficies y adaptatividad y control de calidad de los malllados. En ellas se pasa revista a todos los métodos más importantes de malllado (automáticos, Delaunay-VoronoÔ, avance frontal, métodos para generación de mallados de cuadriláteros y hexaedros, etc.) así como a otros temas de gran interés (NURBS, diseño geométrico, formato IGES, optimización de mallados, etc.). A pesar de que la generación de mallados es actualmente un área de gran actividad e innovación el libro contiene material suficientemente maduro, de gran interés como fuente de referencia en los laboratorios de investigación universitaria o industrial.

Call for papers ISSN 1531–3492

HOME PAGE: **http://math.smsu.edu/journal/**
E-MAIL ADDRESS: **shh209f@smsu.edu**

DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS
Series B

A JOURNAL BRIDGING MATHEMATICS AND SCIENCS

Series B of DCDS is an interdisciplinary journal devoted to publishing research articles in mathematics, applied to advance the understanding of specific scientific problems. The journal is focused on the interplay between mathematical analysis and scientific applications (computations).

To be considered by the journal, a paper should be in either of the two categories: (1) papers developing and analyzing physical models and/or using numerical simulations or experiments to reveal or explain some new physical phenomena, where mathematics plays a major role; and (2) papers focused on mathematics with a clear physical motivation and the results must lead to an im- proved understanding of the underlying physical problem.

Manuscript applying standard techniques to slightly new problems or providing mathematical analysis in the absence of significant scientific motivation will not be considered.

To be acceptable by the journal, a paper must be presented in a way that at least 25% of it can be understood by people from a wide range of fields including mathematics, engineering and science.

The journal is centered around dynamics, covering a broad range of applied areas including physical, engineering, financial, biomedical, and life sciences. A more detailed indication is given by the subject interests of the members of the Editorial Board.

DCDS-B is edited by a group of the world-wide leading scientists in diversified fields to guarantee its highest standard and closest link to the scientific and engineering communities. A unique feature of this journal is its **streamlined review process** and **rapid** publication. The **rapid, direct and personal** communication between authors and the editors makes it possible that authors are kept informed at all time of the process.

This publication is typeset using AmSTeX (amsppt) and $\mathcal{AMS}$-LATEX (amsart).

Manuscripts should be in English and submitted in triplicate, together with a postscript file, to a member of the Editorial Board, who is familiar with the topic of the paper, and an e-mail informing the Managing Editor of the action. E-mail addresses of all the Editorial Board members can be found at the journal's home page. All papers will be carefully refereed.

ALL inquiries, including subscription information, should be addressed to the Managing Editor.

(417)836-5377; fax: (417)886-0559; shh209f@smsu.edu;

http://math.smsu.edu/journal.

Publication in this journal is free of charge

Título:	ANÁLISIS Y CONTROL DE ALGUNAS EDP NO LINEALES CON ORIGEN EN MECÁNICA.
Doctorando:	Anna Doubova.
Director/es:	Enrique Fernández Cara y Manuel González Burgos.
Defensa:	28 de septiembre de 2000, Universidad de Sevilla.
Calificación:	Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: Se analiza la controlabilidad de algunas ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de evolución de tipo parabólico o hiperbólico, motivadas por problemas con origen en Mecánica.

La Tesis consta de dos partes. La Parte I está constituida por cuatro Capítulos y en ella se consideran distintos sistemas de tipo parabólico (esencialmente variantes semilineales de la EDP del calor y otras variantes de las EDP de Stokes).

Los resultados obtenidos mejoran otros bien conocidos y sus demostraciones reposan sobre desigualdades globales de tipo Carleman, propiedades de observabilidad para sistemas lineales análogos y técnicas de punto fijo.

En la Parte II hay otros tres Capítulos, donde se analizan sistemas lineales que permiten modelar fluidos con memoria, llamados sistemas de Maxwell y de Jeffreys. En algunos casos se trata de sistemas de carácter hiperbólico.

En particular, en el caso de un sistema de Jeffreys, se consigue por primera vez probar la controlabilidad aproximada con control distribuido de soporte arbitrariamente pequeño.

Socios ordinarios

Castro Barbero, Carlos Manuel
Dpto. de Matemática Aplicada – Fac. de Matemáticas – Univ. complutense de Madrid – 28040 Madrid.
`c_castro@mat.ucm.es`

Bresch, Didier
Laboratoire de Mathématiques Appliquées – – Univ. Blaise Pascal – 63177 Aubière cedex (FRANCE).
`bresch@ucfma.univ-bpclemont.fr`

Socios estudiantes

Toledo Melero, Francisco Javier
Dpto. de Matemáticas – Fac. de Ciencias – Univ. del País Vasco – 48940 Leioa (Vizcaya).
`mtbtomej@lg.ehu.es`