S$\vec{e}$MA

BOLETÍN NÚMERO 15

Monográfico "Año Mundial de las Matemáticas"

Julio 2000

sumario

Presentación 3

Informe del Presidente 5

Conferencias 9

- *23 problemas propuestos para los matemáticos del siglo XX,* por D. Hilbert 9
    - ◇ *Presentación,* por A. Delibes 11
    - ◇ *Mathematical Problems,* por D. Hilbert 15
- *¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?,* por J.L. Lions 59
- *Cincuenta años de Matemáticas en el recuerdo,* por A. Valle 73

Educación matemática 89

Becas pre y postdoctorales 95

Navier-Stokes Equations Net 97

Centro de Supercomputación de la UCM 99

Cursos de verano en Cantabria 101

Congresos 107

Libros 115

Resúmenes de Tesis Doctorales 121

Nuevos socios 127

FOTO DE PORTADA

David Hilbert (Königsberg, 1862 – Göttingen, 1943) estudió en el *Gymnasium* de su ciudad natal, donde entabló amistad con Minkowski y con Hurwitz. Sus trabajos en Geometría (destacando el estudio sistemático de los axiomas de la Geometría Euclídea) fueron los más influyentes desde Euclides. También hizo otras notables contribuciones en diversas áreas de las Matemáticas y la Física.

NOTA: En la página 11 aparecen algunos datos biográficos de D. Hilbert.

edición

Dirección editorial: Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Edif. C-2, planta 3, Campus Universitario de Rabanales, 14071 Córdoba.
E-mail: boletin_sema@uco.es, *Fax:* 957 21 86 30

Diseño de portada: Antonio Espinosa López y Antonio Osuna Abad.
Imprime: TIPOGRAFÍA CATÓLICA, S. C. A.; tfo.: 957 297 188; Córdoba.
D. L.: CO-156/2000

Inmersos ya de lleno en el **Año Mundial de las Matemáticas** sale a la luz el presente Boletín, primero que cuenta con **ISSN**. Esperamos que la supresión de barreras lingüísticas en el registro automatizado de datos sobre revistas que supone este *"Número Internacional Normalizado de Publicaciones Seriadas"* resulte de interés para los socios de S$\vec{e}$MA a quienes se dirige el Boletín.

Las múltiples actividades realizadas en el "matemático año 2000", junto con una sugerencia de nuestro amigo Enrique Zuazua, nos han motivado a recordar el famoso discurso que pronunció Hilbert en el Congreso mundial de París de 1900 sobre los *23 problemas abiertos,* para ser investigados en el siglo XX. Junto a la publicación de esta famosa disertación, aparecen en el Boletín otras dos conferencias recientes. Una, impartida por el Profesor Jacques-Louis Lions con el título *"¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?".* Otra del Profesor Antonio Valle, titulada *"Cincuenta años de Matemáticas en el recuerdo."*

La primera fue pronunciada en el Congreso de los Diputados con ocasión de la **"Jornada Matemática"** celebrada el día 21 de Enero de 2000. Todas las intervenciones de la jornada han sido recopiladas en un volumen editado por el Departamento de Publicaciones del Congreso de los Diputados. Agradecemos a D. José Luis Ruiz Navarro, Letrado de las Cortes Generales, la autorización para reproducir aquí la conferencia impartida por el Profesor Lions. También agradecemos al Profesor Ildefonso Díaz las gestiones efectuadas con tal fin. La publicación aquí de dicha conferencia está obviamente justificada por el importante papel jugado por el Profesor Lions en el desarrollo y divulgación de la Matemática Aplicada en España, entre otros muchos países. Podemos decir que la mayoría de los socios de S$\vec{e}$MA son, directa o indirectamente, discípulos del Profesor Lions. La otra conferencia aquí reproducida fue pronunciada por D. Antonio Valle en Málaga, el 28 de Marzo de 2000, en el *Acto de Inauguración Andaluza del Año Mundial de las Matemáticas.* De todos es bien conocida la labor desarrollada por el Profesor Valle, primer Presidente de S$\vec{e}$MA, quien recordemos inició la publicación del Boletín en Málaga, hace ya ocho años.

La sección de *Educación Matemática* está dedicada a la reunión de Decanos y Directores de Departamentos de Matemáticas que tuvo lugar en Santiago de Compostela (los días 18 y 19 de Febrero de 2000). Concretamente aparecen los comentarios que, sobre dicha reunión, ha preparado nuestro Presidente Enrique Fernández-Cara. Le siguen los anuncios de becas pre y postdoctorales en el marco del Proyecto Europeo *"Homogenization and Multiple Scales"*, del nuevo "web site" denominado *"Navier-Stokes equations Net"*, de la inauguración del *Centro de Supercomputación* de la UCM y la Convocatoria de *Cursos de verano* en Cantabria. Finalmente, se completa el contenido del Boletín con las reseñas habituales sobre *congresos*, *libros*, *resúmenes de Tesis Doctorales* leídas recientemente y relación de *nuevos socios*.

Grupo Editor
boletin_sema@uco.es

Estimado socio de S$\vec{e}$MA:

Felizmente, tenemos un nuevo número del Boletín, editado por este magnífico equipo de la Universidad de Córdoba. Con esta ocasión, deseo dirigirme a ti para informarte de varios acontecimientos recientes, hacerte saber varias novedades y darte a conocer algunas de las opiniones que he podido captar.

1 - Ante todo, quiero volver a mencionar que, muy probablemente, se avecinan tiempos llenos de acontecimientos importantes para las Matemáticas en nuestro país. Los eventos de 2000 (que aún no han terminado y, por el contrario, auguran un activo otoño), van a servir de estímulo y punto de arranque para muchas otras manifestaciones científicas en la próxima década. En un buen número de ellas, aun conservando plenamente nuestra identidad, nos vamos a ver en la necesidad de coordinar nuestros esfuerzos con otras Sociedades Matemáticas, en especial con la Real Sociedad Matemática Española (R.S.M.E.). Esto nos ha llevado a varios socios a pensar en perfeccionar, si es posible, algunos aspectos de nuestros Estatutos y, en particular, aquéllos relacionados con la elección de Presidente. Encontrarás información detallada sobre este tema en las convocatorias de Asamblea Extraordinaria y Ordinaria que acompañan a este Boletín.

En la práctica, si la propuesta de modificación es aceptada en la Asamblea Extraordinaria del próximo mes de septiembre, tendremos un plazo de hasta tres meses para proceder a elegir nuevo Presidente. Arbitraremos las medidas oportunas para hacer esta elección lo más participativa posible, sin por ello renunciar a la operatividad.

2 - Creo que ya se puede decir que la conmemoración del Año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, está dando sus frutos. Se ha celebrado ya una buena cantidad de reuniones, mesas redondas, congresos, ciclos de conferencias, etc. y, como he dicho más arriba, está previsto que todavía haya mucho más antes de fin de año. Entre otras manifestaciones, me gustaría mencionar algunas en las que, de una u otra forma, nuestra Sociedad ha tenido o tiene alguna participación: La Jornada Matemática del Congreso de Diputados en enero, la Semana de las Matemáticas de Sevilla en abril, el Congreso de la Fundación Areces y la Reunión Científica del Comité IMU en Madrid en mayo, el Congreso NoLineal 2000 en Almagro y las Jornadas Matemáticas del Estrecho de Gibraltar en Cádiz en junio, el Waves 2000 en Santiago de Compostela y el 3ECM en Barcelona en julio, el Congreso ECCOMAS 2000 en Barcelona en septiembre, etc.

Con carácter general, quiero agradecer a todos los socios que han participado o están participando en la organización de estos eventos su dedicación y trabajo. Afortunadamente, tenemos entre nosotros un buen número de colegas que hace posible una realidad muy esperanzadora.

Por otra parte, con ocasión del Año 2000, he tenido la oportunidad de reunirme con frecuencia con colegas representantes de otras Sociedades. La experiencia de trabajar en colaboración con ellos ha sido en términos generales muy satisfactoria y estoy convencido de que tendrá efectos positivos para todos.

3 - He asistido a varios debates los últimos meses, algunos de ellos en el seno de las reuniones y congresos que preceden. Me gustaría aprovechar la ocasión para mencionar explícitamente, por su importancia y por lo que nos puede afectar, algunos de los problemas y preocupaciones de los que se ha hablado en estos debates.

a) El analfabetismo matemático, mal endémico de nuestra sociedad,

b) La creciente preocupación sobre las tendencias de la Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,

c) Las distintas preocupaciones sobre la Enseñanza Universitaria recogidas en las Jornadas de Santiago de Compostela (en relación con ellas, he preparado unos comentarios que aparecen en la sección de Educación Matemática),

d) La necesidad de incentivar la motivación por las aplicaciones de las Matemáticas,

e) La necesidad de superar barreras para poder confluir con otros científicos, como por ejemplo aquéllas motivadas por el uso de distintos lenguajes,

f) La necesidad de reforzar el papel de las Sociedades Matemáticas.

4 - Hemos procedido a remodelar nuestro WEB. La nueva dirección es

http://www.uca.sema/

Aunque todavía no han adoptado su formato definitivo, las páginas están siendo mantenidas por nuestro compañero R RODRIGUEZ GALVAN, de la Universidad de Cádiz. Quiero aprovechar para agradecerle desde aquí su trabajo. También quiero aprovechar para mostrar mi agradecimiento a JM SANCHEZ POXON, quien se había encargado con anterioridad de esta tarea.

5 - En los próximos días, serán fallados el Segundo Premio S$\vec{e}$MA al Joven Investigador y el Premio S$\vec{e}$MA 2000 a la Divulgación Científica en Matemática Aplicada. De todo ello, informaremos oportunamente por diversos conductos, entre otros correo electrónico y Hoja WEB.

6 - La organización del CEDYA de septiembre del 2001 en Salamanca ha avanzado considerablemente, gracias a los esfuerzos del correspondiente Comité Organizador y, en especial, a L FERRAGUT. Tras múltiples contactos con el Comité Ejecutivo y después de un largo intercambio de opiniones, hemos acordado casi de forma definitiva un Comité Científico, una lista de Conferenciantes Invitados, una lista de Minisimposia (asignados a especialistas de alto nivel) y muchos aspectos más de carácter general.

Desde aquí, mi agradecimiento a L FERRAGUT y a los otros miembros del Comité Organizador por la labor que están llevando a cabo y también a todas las personas contactadas por su aceptación. Estoy convencido de que el formato conseguido será de general interés y que la celebración de este Congreso constituirá un gran acontecimiento para nuestra Sociedad.

Y nada más de momento. Espero que nos veamos en Laredo el mes de septiembre, en donde, como queda dicho más arriba, deberemos tomar algunas decisiones importantes para el futuro de nuestra Sociedad.

Un fuerte abrazo,

E. Fernandez-Cara
Presidente de S$\vec{e}$MA
Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Aptdo. 1160; 41080 SEVILLA (SPAIN)
Tel (34) 9 54 55 79 92
Fax (34) 9 54 55 28 98
e-mail: `cara@numer.us.es`

23 problemas propuestos para los matemáticos del siglo XX

• *Presentación*

por Alicia Delibes

(páginas 11 - 14)

• *Mathematical Problems*

Lecture delivered before the

International Congress of Mathematicians

at Paris in 1900

by David Hilbert

(páginas 15 - 55)

David Hilbert nació el año 1862 en la ciudad alemana de Königsberg, en ella asistió a las clases de su *Gymnasium* y comenzó sus estudios universitarios. Marchó, después, a Heidelberg, donde, de la mano de Ferdinand Lindemann, presentó la tesis que le hizo, a edad de 22 años, merecedor del título de doctor.

Tras cortas estancias en Leipzig y París volvió a su ciudad natal en cuya Universidad ejerció durante nueve años la docencia.

Contaba 32 años de edad cuando recibió la propuesta por parte del que fuera el gran artífice de la reforma de la enseñanza de las matemáticas en las universidades alemanas, Felix Klein, para ocupar la cátedra que Heinrich Weber había dejado vacante en la Universidad de Gotinga.

Klein y Hilbert trabajaron juntos durante varios años. De la estrecha colaboración entre ambos matemáticos surgió una producción que no había tenido precedentes.

El problema que el quinto postulado de Euclides había planteado a los geómetras desde el siglo I a. C. había culminado con la aparición, a principios del siglo XIX, de las Geometrías de Gauss, Riemann, Bolyai o Lobatschewski, geometrías lógicamente perfectas que prescindían del postulado de las paralelas.

El fruto de las investigaciones de Hilbert en este campo vio la luz cuando, en 1899, se publicó la primera edición de la que se iba a convertir en la obra más influyente para el pensamiento matemático del siglo XX, los *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la Geometría).* Hilbert expuso en esta obra una construcción abstracta y formal en la que las geometrías no euclídeas tenían cabida.

Satisfecho del éxito de su método axiomático trató de extenderlo al terreno de la aritmética y a todos los campos de la matemática.

Así cuando el 8 de agosto de 1900, tomó Hilbert la palabra en el II Congreso Internacional de Matemáticas que se celebraba en París, un sugerente silencio indicó la gran expectación con la que su intervención era recibida. Las palabras que entonces acompañaron a la enumeración de los 23 problemas que debían suponer el reto del siglo XX se hicieron míticas:

“Este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemáticas no existe Ignorabimus”.

El formalismo matemático que lideró Hilbert encontró en el primer tercio de siglo serios opositores, desde los británicos llamados “logicistas” representados por Bertrand Russell hasta los “intuicionistas” que encabezaba el neerlandés Luitzen Egbertus Brouwer.

En esas primeras décadas del siglo XX, la escuela matemática alemana tuvo unos años de intensa producción científica que fue bruscamente frenada por la llegada del nazismo. Mientras tanto, en Francia, la Primera Guerra Mundial había hecho que una gran parte de la juventud abandonara la investigación matemática, lo que dejó muy debilitada su escuela.

Hacia los años treinta un grupo de jóvenes franceses comenzó a reunirse bajo el nombre de un general de la guerra franco prusiana, Nicolás Bourbaki. Su deseo era levantar la escuela matemática francesa y su objetivo inmediato elaborar unos textos más acordes con las últimas tendencias matemáticas y que sustituyeran a los ya anticuados que se utilizaban en sus universidades francesas.

Henri Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné y A. Weil constituyeron el núcleo duro del grupo Bourbaki. Reconocieron como maestros a los franceses Henri Poincaré y Elie Cartan y a los alemanes R. Dedekind y D. Hilbert.

En 1939, se publicó el primer tomo de los *Éléments de Mathematique* (intencionadamente los bourbakistas omitieron la “s” del plural para indicar que esta ciencia es “una”) que vino introducida por un “modo de empleo” no exento de coquetería:

“Il prend les mathématiques à leur début, et donne des démostrations complètes. Sa lecture ne supposera donc, en principe, aucune connaisance mathématiques particulière, mais seulment une certaine habitude de raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction”

El lenguaje unificador de esta gran obra sintetizadora fue la teoría de conjuntos y el arma fundamental es el método axiomático tomado de la geometría y extendido a toda la construcción matemática.

La escuela alemana, que comienza a reconstruirse a partir de 1950, fijó su mirada en el bourbakismo francés.

De esta forma cuando, terminada la Segunda Guerra Mundial, se planteó la reforma de las universidades, la elaboración de los programas de matemáticas se hizo siguiendo las tendencias francesas que dominaban en Europa.

La reforma de la enseñanza media no se haría esperar. Entre los matemáticos empieza a surgir la idea de que una preparación más acorde con las nuevas tendencias debía introducirse en la enseñanza secundaria.

Matemáticos del mundo entero se dieron cita en diversos seminarios y congresos que tuvieron lugar en distintas partes de Europa y América y en los que se discutió sobre los aspectos de la matemática llamada moderna que debían incluirse en los programas de la enseñanza secundaria.

Al inicio de los años sesenta se emprendió con notable entusiasmo la reforma de los programas de matemáticas contenidos en los planes de estudio de casi todos los países occidentales.

Las cautelas de los matemáticos no fueron compartidas por pedagogos y psicólogos de la educación que, quizás fascinados por el formalismo lingüístico de la nueva matemática, creyeron que ese método, en el que bastaba con ser ordenado y seguir las reglas del juego para obtener grandes conclusiones, se adaptaría maravillosamente al desarrollo mental del niño y supondría un adelanto inapreciable a la hora de enfrentarse al estudio de las matemáticas superiores.

El fracaso pronto se hizo notar y ya en 1973 el matemático Morris Kline con su libro *Why Johny can't add: The failure of the New Math* dio el golpe de gracia a esta moda pedagógica. A partir de entonces empezó a crecer la opinión de que los niños que habían pasado por la experiencia tenían menos habilidades matemáticas que los educados tradicionalmente.

Gracias al sentido común de algunos profesionales, tachados entonces de inmovilistas y nostálgicos, no se llegó al trágico final anunciado por Morris Kline y muchos Juanitos aprendieron a sumar.

Pero este, ya por todos reconocido fracaso del estudio de la Matemática Moderna en la enseñanza secundaria, parece haber dejado a los matemáticos de primera fila con una sensación de frustración tal que les ha llevado a abandonar el campo de la formación matemática de los adolescentes y dejarlo en manos de los teóricos de la educación cuya ignorancia matemática, en algunos caso absoluta, les lleva a ser incapaces de toda contricción.

Cuando en 1992 la Unión Matemática Internacional decidió conmemorar aquella legendaria intervención de Hilbert en París, y decretó que el año 2000 sería el Año Mundial de las matemáticas, lo hizo también movida por la preocupación, latente en los medios matemáticos, de la falta de interés que su disciplina despierta en la sociedad. Y cuando, en 1997, decide la UNESCO apoyar esta celebración lo hace consciente de la preocupación que se vive en los medios educativos por la enseñanza de las matemáticas.

A los matemáticos de primera fila corresponderá la tarea de hacer el balance científico de su disciplina. Pero a todos los que se dedican profesionalmente a la enseñanza de las matemáticas alcanza la responsabilidad tanto de preparar al futuro científico como de fomentar el interés y el conocimiento de la ciencia que ha tenido una importancia capital en la historia de nuestra civilización.

Alicia Delibes
`a.delibes@educ.mec.es`

A continuación se incluye el contenido del famoso discurso que pronunció David Hilbert en el Congreso mundial de París de 1900, extraído de la siguiente dirección de *Internet*:

`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html`

Mathematical Problems

Lecture delivered before the

International Congress of Mathematicians

at Paris in 1900

D. Hilbert[1]

Who of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries? What particular goals will there be toward which the leading mathematical spirits of coming generations will strive? What new methods and new facts in the wide and rich field of mathematical thought will the new centuries disclose? History teaches the continuity of the development of science. We know that every age has its own problems, which the following age either solves or casts aside as profitless and replaces by new ones. If we would obtain an idea of the probable development of mathematical knowledge in the immediate future, we must let the unsettled questions pass before our minds and look over the problems which the science of today sets and whose solution we expect from the future. To such a review of problems the present day, lying at the meeting of the centuries, seems to me well adapted. For the close of a great epoch not only invites us to look back into the past but also directs our thoughts to the unknown future. The deep significance of certain problems for the advance of mathematical science in general and the important role which they play in the work of the individual investigator are not to be denied. As long as a branch of science offers an abundance of problems, so long is it alive; a lack of problems foreshadows extinction or the cessation of independent development. Just as every human undertaking pursues certain objects, so also mathematical research requires its problems. It is by the solution of problems that the investigator tests the temper of his steel; he finds new methods and new outlooks, and gains a wider and freer horizon. It is difficult and often impossible to judge the value of a problem correctly in advance; for the final award depends upon the gain which science obtains from the problem. Nevertheless we can ask whether there are general criteria which mark a good mathematical problem. An old French mathematician said: "A mathematical theory is not to be considered complete until you have made it so clear that you can explain it to the first man whom you meet on the street." This clearness and ease of comprehension, here insisted on for a mathematical theory, I should still more demand for a mathematical problem if it is to be perfect; for what is clear and easily comprehended attracts, the complicated repels us. Moreover a mathematical problem should be difficult in order to entice us, yet not completely inaccessible, lest it mock at our efforts. It should be to us a guide post on the mazy paths to hidden truths, and ultimately a reminder of our pleasure in the successful solution. The mathematicians of past centuries were accustomed to devote themselves to the solution of difficult particular problems with passionate zeal. They knew the value of difficult problems. I remind you only of the "problem of the line of quickest descent," proposed by John Bernoulli. Experience teaches, explains Bernoulli in the public announcement of this problem, that lofty minds are led to strive for the advance of science by nothing more than by laying before them difficult and at the same time useful problems, and he therefore hopes to earn the thanks of the mathematical world by following the example of men like Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani and others and laying before the distinguished analysts of his time a problem by which, as a touchstone, they may test the value of their methods and measure their strength. The calculus of variations owes its origin to this problem of Bernoulli and to similar problems. Fermat had asserted, as is well known, that the diophantine equation

$$x^n + y^n = z^n$$

(x, y and z integers) is unsolvable–except in certain self evident cases. The attempt to prove this impossibility offers a striking example of the inspiring effect which such a very special and apparently unimportant problem may have upon science. For Kummer, incited by Fermat's problem, was led to the introduction of ideal numbers and to the discovery of the law of the unique decomposition of the numbers of a circular field into ideal prime factors–a law which today, in its generalization to any algebraic field by Dedekind and Kronecker, stands at the center of the modern theory of numbers and whose significance extends far beyond the boundaries of number theory into the realm of algebra and the theory of functions. To speak of a very different region of research, I remind you of the problem of three bodies. The fruitful methods and the far-reaching principles which Poincaré has brought into celestial mechanics and which are today recognized and applied in practical astronomy are due to the circumstance that he undertook to treat anew that difficult problem and to approach nearer a solution. The two last mentioned problems–that of

Fermat and the problem of the three bodies–seem to us almost like opposite poles–the former a free invention of pure reason, belonging to the region of abstract number theory, the latter forced upon us by astronomy and necessary to an understanding of the simplest fundamental phenomena of nature. But it often happens also that the same special problem finds application in the most unlike branches of mathematical knowledge. So, for example, the problem of the shortest line plays a chief and historically important part in the foundations of geometry, in the theory of curved lines and surfaces, in mechanics and in the calculus of variations. And how convincingly has F. Klein, in his work on the icosahedron, pictured the significance which attaches to the problem of the regular polyhedra in elementary geometry, in group theory, in the theory of equations and in that of linear differential equations. In order to throw light on the importance of certain problems, I may also refer to Weierstrass, who spoke of it as his happy fortune that he found at the outset of his scientific career a problem so important as Jacobi's problem of inversion on which to work. Having now recalled to mind the general importance of problems in mathematics, let us turn to the question from what sources this science derives its problems. Surely the first and oldest problems in every branch of mathematics spring from experience and are suggested by the world of external phenomena. Even the rules of calculation with integers must have been discovered in this fashion in a lower stage of human civilization, just as the child of today learns the application of these laws by empirical methods. The same is true of the first problems of geometry, the problems bequeathed us by antiquity, such as the duplication of the cube, the squaring of the circle; also the oldest problems in the theory of the solution of numerical equations, in the theory of curves and the differential and integral calculus, in the calculus of variations, the theory of Fourier series and the theory of potential–to say nothing of the further abundance of problems properly belonging to mechanics, astronomy and physics. But, in the further development of a branch of mathematics, the human mind, encouraged by the success of its solutions, becomes conscious of its independence. It evolves from itself alone, often without appreciable influence from without, by means of logical combination, generalization, specialization, by separating and collecting ideas in fortunate ways, new and fruitful problems, and appears then itself as the real questioner. Thus arose the problem of prime numbers and the other problems of number theory, Galois's theory of equations, the theory of algebraic invariants, the theory of abelian and automorphic functions; indeed almost all the nicer questions of modern arithmetic and function theory arise in this way. In the meantime, while the creative power of pure reason is at work, the outer world again comes into play, forces upon us new questions from actual experience, opens up new branches of mathematics, and while we seek to conquer these new fields of knowledge for the realm of pure thought, we often find the answers to old unsolved problems and thus at the same time advance most successfully the old theories. And it seems to me that the numerous and surprising analogies and that apparently prearranged harmony which the mathematician so often perceives in the questions, methods and ideas of the various branches of his science, have their origin in this ever-recurring interplay between thought and experience. It remains to discuss briefly what general requirements may be justly laid down for the solution of a mathematical problem. I should say first of all, this: that it shall be possible to establish the correctness of the solution by means of a finite number of steps based upon a finite number of hypotheses which are implied in the statement of the problem and which must always be exactly formulated. This requirement of logical deduction by means of a finite number of processes is simply the requirement of rigor in reasoning. Indeed the requirement of rigor, which has become proverbial in mathematics, corresponds to a universal philosophical necessity of our understanding; and, on the other hand, only by satisfying this requirement do the thought content and the suggestiveness of the problem attain their full effect. A new problem, especially when it comes from the world of outer experience, is like a young twig, which thrives and bears fruit only when it is grafted carefully and in accordance with strict horticultural rules upon the old stem, the established achievements of our mathematical science. Besides it is an error to believe that rigor in the proof is the enemy of simplicity. On the contrary we find it confirmed by numerous examples that the rigorous method is at the same time the simpler and the more easily comprehended. The very effort for rigor forces us to find out simpler methods of proof. It also frequently leads the way to methods which are more capable of development than the old methods of less rigor. Thus the theory of algebraic curves experienced a considerable simplification and attained greater unity by means of the more rigorous function-theoretical methods and the consistent introduction of transcendental devices. Further, the proof that the power series permits the application of the four elementary arithmetical operations as well as the term by term differentiation and integration, and the recognition of the utility of the power series depending upon this proof contributed materially to the simplification of all analysis, particularly of the theory of elimination and the theory of differential equations, and also of the existence proofs demanded in those theories. But the most striking example for my statement is the calculus of variations. The treatment of the first and second variations of definite integrals required in part extremely complicated calculations, and the processes applied by the old mathematicians had not the needful rigor. Weierstrass showed us the way to a new and sure foundation of the calculus of variations. By the examples of the simple and double integral I will show briefly, at the close of my lecture, how this way leads at once to a surprising simplification of the calculus of variations. For in the demonstration of the necessary and sufficient criteria for the occurrence of a maximum and minimum, the calculation of the second variation and in part, indeed, the wearisome reasoning connected with the first variation may be completely dispensed with–to say nothing of the advance which is involved in the removal of the restriction to variations for which the differential coefficients of the function vary but slightly. While insisting on rigor in the proof as a requirement for a perfect solution of a problem, I should like, on the other hand, to oppose the opinion that only the concepts of analysis, or even those of arithmetic alone, are susceptible of a fully rigorous treatment. This opinion, occasionally advocated by eminent men, I consider entirely erroneous. Such a one-sided interpretation of the requirement of rigor would soon lead to the ignoring of all concepts arising from geometry, mechanics and physics, to a stoppage of the flow of new material from the outside world, and finally, indeed, as a last consequence, to the rejection of the ideas of the continuum and of the irrational number. But what an important nerve, vital to mathematical science, would be cut by the extirpation of geometry and mathematical physics! On the contrary I think that wherever, from the side of the theory of knowledge or in geometry, or from the theories of natural or physical science, mathematical ideas come up, the problem arises for mathematical science to investigate the principles underlying these ideas and so to establish them upon a simple and complete system of axioms, that the exactness of the new ideas and their applicability to deduction shall be in no respect inferior to those of the old arithmetical concepts. To new concepts correspond, necessarily, new signs. These we choose in such a way that they remind us of the phenomena which were the occasion for the formation of the new concepts. So the geometrical figures are signs or mnemonic symbols of space intuition and are used as such by all mathematicians. Who does not always use along with the double inequality $a > b > c$ the picture of three points following one another on a straight line as the geometrical picture of the idea "between"? Who does not make use of drawings of segments and rectangles enclosed in one another, when it is required to prove with perfect rigor a difficult theorem on the continuity of functions or the existence of points of condensation? Who could dispense with the figure of the triangle, the circle with its center, or with the cross of three perpendicular axes? Or who would give up the representation of the vector field, or the picture of a family of curves or surfaces with its envelope which plays so important a part in differential geometry, in the theory of differential equations, in the foundation of the calculus of variations and in other purely mathematical sciences? The arithmetical symbols are written diagrams and the geometrical figures are graphic formulas; and no mathematician could spare these graphic formulas, any more than in calculation the insertion and removal of parentheses or the use of other analytical signs. The use of geometrical signs as a means of strict proof presupposes the exact knowledge and complete mastery of the axioms which underlie those figures; and in order that these geometrical figures may be incorporated in the general treasure of mathematical signs, there is necessary a rigorous axiomatic investigation of their conceptual content. Just as in adding two numbers, one must place the digits under each other in the right order, so that only the rules of calculation, *i.e.*, the axioms of arithmetic, determine the correct use of the digits, so the use of geometrical signs is determined by the axioms of geometrical concepts and their combinations. The agreement between geometrical and arithmetical thought is shown also in that we do not habitually follow the chain of reasoning back to the axioms in arithmetical, any more than in geometrical discussions. On the contrary we apply, especially in first attacking a problem, a rapid, unconscious, not absolutely sure combination, trusting to a certain arithmetical feeling for the behavior of the arithmetical symbols, which we could dispense with as little in arithmetic as with the geometrical imagination in geometry. As an example of an arithmetical theory operating rigorously with geometrical ideas and signs, I may mention Minkowski's work, *Die Geometrie der Zahlen.*[2] Some remarks upon the difficulties which mathematical problems may offer, and the means of surmounting them, may be in place here. If we do not succeed in solving a mathematical problem, the reason frequently consists in our failure to recognize the more general standpoint from which the problem before us appears only as a single link in a chain of related problems. After finding this standpoint, not only is this problem frequently more accessible to our investigation, but at the same time we come into possession of a method which is applicable also to related problems. The introduction of complex paths of integration by Cauchy and of the notion of the IDEALS in number theory by Kummer may serve as examples.

This way for finding general methods is certainly the most practicable and the most certain; for he who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain. In dealing with mathematical problems, specialization plays, as I believe, a still more important part than generalization. Perhaps in most cases where we seek in vain the answer to a question, the cause of the failure lies in the fact that problems simpler and easier than the one in hand have been either not at all or incompletely solved. All depends, then, on finding out these easier problems, and on solving them by means of devices as perfect as possible and of concepts capable of generalization. This rule is one of the most important levers for overcoming mathematical difficulties and it seems to me that it is used almost always, though perhaps unconsciously. Occasionally it happens that we seek the solution under insufficient hypotheses or in an incorrect sense, and for this reason do not succeed. The problem then arises: to show the impossibility of the solution under the given hypotheses, or in the sense contemplated. Such proofs of impossibility were effected by the ancients, for instance when they showed that the ratio of the hypotenuse to the side of an isosceles right triangle is irrational. In later mathematics, the question as to the impossibility of certain solutions plays a preeminent part, and we perceive in this way that old and difficult problems, such as the proof of the axiom of parallels, the squaring of the circle, or the solution of equations of the fifth degree by radicals have finally found fully satisfactory and rigorous solutions, although in another sense than that originally intended. It is probably this important fact along with other philosophical reasons that gives rise to the conviction (which every mathematician shares, but which no one has as yet supported by a proof) that every definite mathematical problem must necessarily be susceptible of an exact settlement, either in the form of an actual answer to the question asked, or by the proof of the impossibility of its solution and therewith the necessary failure of all attempts. Take any definite unsolved problem, such as the question as to the irrationality of the Euler-Mascheroni constant C, or the existence of an infinite number of prime numbers of the form $2^n + 1$. However unapproachable these problems may seem to us and however helpless we stand before them, we have, nevertheless, the firm conviction that their solution must follow by a finite number of purely logical processes. Is this axiom of the solvability of every problem a peculiarity characteristic of mathematical thought alone, or is it possibly a general law inherent in the nature of the mind, that all questions which it asks must be answerable? For in other sciences also one meets old problems which have been settled in a manner most satisfactory and most useful to science by the proof of their impossibility. I instance the problem of perpetual motion. After seeking in vain for the construction of a perpetual motion machine, the relations were investigated which must subsist between the forces of nature if such a machine is to be impossible;[3] and this inverted question led to the discovery of the law of the conservation of energy, which, again, explained the impossibility of perpetual motion in the sense originally intended. This conviction of the solvability of every mathematical problem is a powerful incentive to the worker. We hear within us the perpetual call: There is the problem. Seek its solution. You can find it by pure reason, for in mathematics there is no *ignorabimus*. The supply of problems in mathematics is inexhaustible, and as soon as one problem is solved numerous others come forth in its place. Permit me in the following, tentatively as it were, to mention particular definite problems, drawn from various branches of mathematics, from the discussion of which an advancement of science may be expected. Let us look at the principles of analysis and geometry. The most suggestive and notable achievements of the last century in this field are, as it seems to me, the arithmetical formulation of the concept of the continuum in the works of Cauchy, Bolzano and Cantor, and the discovery of non-euclidean geometry by Gauss, Bolyai, and Lobachevsky. I therefore first direct your attention to some problems belonging to these fields.

1 Cantor's problem of the cardinal number of the continuum

Two systems, *i. e*, two assemblages of ordinary real numbers or points, are said to be (according to Cantor) equivalent or of equal *cardinal number*, if they can be brought into a relation to one another such that to every number of the one assemblage corresponds one and only one definite number of the other. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving. This is the theorem: Every system of infinitely many real numbers, *i. e.*, every assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,... or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line; as regards *equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum.* From this theorem it would follow at once that the continuum has the next cardinal number beyond that of the countable assemblage; the proof of this theorem would, therefore, form a new bridge between the countable assemblage and the continuum. Let me mention another very remarkable statement of Cantor's which stands in the closest connection with the theorem mentioned and which, perhaps, offers the key to its proof. Any system of real numbers is said to be ordered, if for every two numbers of the system it is determined which one is the earlier and which the later, and if at the same time this determination is of such a kind that, if a is before b and b is before c, then a always comes before c. The natural arrangement of numbers of a system is defined to be that in which the smaller precedes the larger. But there are, as is easily seen infinitely many other ways in which the numbers of a system may be arranged. If we think of a definite arrangement of numbers and select from them a particular system of these numbers, a so-called partial system or assemblage, this partial system will also prove to be ordered. Now Cantor considers a particular kind of ordered assemblage which he designates as a well ordered assemblage and which is characterized in this way, that not only in the assemblage itself but also in every partial assemblage there exists a first number. The system of integers 1, 2, 3, ... in their natural order is evidently a well ordered assemblage. On the other hand the system of all real numbers, *i. e.*, the continuum in its natural order, is evidently not well ordered. For, if we think of the points of a segment of a straight line, with its initial point excluded, as our partial assemblage, it will have no first element. The question now arises whether the totality of all numbers may not be arranged in another manner so that every partial assemblage may have a first element, *i. e.*, whether the continuum cannot be considered as a well ordered assemblage – a question which Cantor thinks must be answered in the affirmative. It appears to me most desirable to obtain a direct proof of this remarkable statement of Cantor's, perhaps by actually giving an arrangement of numbers such that in every partial system a first number can be pointed out.

2 The compatibility of the arithmetical axioms

When we are engaged in investigating the foundations of a science, we must set up a system of axioms which contains an exact and complete description of the relations subsisting between the elementary ideas of that science. The axioms so set up are at the same time the definitions of those elementary ideas; and no statement within the realm of the science whose foundation we are testing is held to be correct unless it can be derived from those axioms by means of a finite number of logical steps. Upon closer consideration the question arises: *Whether, in any way, certain statements of single axioms depend upon one another, and whether the axioms may not therefore contain certain parts in common, which must be isolated if one wishes to arrive at a system of axioms that shall be altogether independent of one another.* But above all I wish to designate the following as the most important among the numerous questions which can be asked with regard to the axioms: *To prove that they are not contradictory, that is, that a definite number of logical steps based upon them can never lead to contradictory results.* In geometry, the proof of the compatibility of the axioms can be effected by constructing a suitable field of numbers, such that analogous relations between the numbers of this field correspond to the geometrical axioms. Any contradiction in the deductions from the geometrical axioms must thereupon be recognizable in the arithmetic of this field of numbers. In this way the desired proof for the compatibility of the geometrical axioms is made to depend upon the theorem of the compatibility of the arithmetical axioms. On the other hand a direct method is needed for the proof of the compatibility of the arithmetical axioms. The axioms of arithmetic are essentially nothing else than the known rules of calculation, with the addition of the axiom of continuity. I recently collected them[4] and in so doing replaced the axiom of continuity by two simpler axioms, namely, the well-known axiom of Archimedes, and a new axiom essentially as follows: that numbers form a system of things which is capable of no further extension, as long as all the other axioms hold (axiom of completeness). I am convinced that it must be possible to find a direct proof for the compatibility of the arithmetical axioms, by means of a careful study and suitable modification of the known methods of reasoning in the theory of irrational numbers. To show the significance of the problem from another point of view, I add the following observation: If contradictory attributes be assigned to a concept, I say, that *mathematically the concept does not exist.* So, for example, a real number whose square is -l does not exist mathematically. But if it can be proved that the attributes assigned to the concept can never lead to a contradiction by the application of a finite number of logical processes, I say that the mathematical existence of the concept (for example, of a number or a function which satisfies certain conditions) is thereby proved. In the case before us, where we are concerned with the axioms of real numbers in arithmetic, the proof of the compatibility of the axioms is at the same time the proof of the mathematical existence of the complete system of real numbers or of the continuum. Indeed, when the proof for the compatibility of the axioms shall be fully accomplished, the doubts which have been expressed occasionally as to the existence of the complete system of real numbers will become totally groundless. The totality of real numbers, *i. e.*, the continuum according to the point of view just indicated, is not the totality of all possible series in decimal fractions, or of all possible laws according to which the elements of a fundamental sequence may proceed. It is rather a system of things whose mutual relations are governed by the axioms set up and for which all propositions, and only those, are true which can be derived from the axioms by a finite number of logical processes. In my opinion, the concept of the continuum is strictly logically tenable in this sense only. It seems to me, indeed, that this corresponds best also to what experience and intuition tell us. The concept of the continuum or even that of the system of all functions exists, then, in exactly the same sense as the system of integral, rational numbers, for example, or as Cantor's higher classes of numbers and cardinal numbers. For I am convinced that the existence of the latter, just as that of the continuum, can be proved in the sense I have described; unlike the system of all cardinal numbers or of *all* Cantor s alephs, for which, as may be shown, a system of axioms, compatible in my sense, cannot be set up. Either of these systems is, therefore, according to my terminology, mathematically non-existent. From the field of the foundations of geometry I should like to mention the following problem:

3 The equality of two volumes of two tetrahedra of equal bases and equal altitudes

In two letters to Gerling, Gauss[5] expresses his regret that certain theorems of solid geometry depend upon the method of exhaustion, *i. e.*, in modern phraseology, upon the axiom of continuity (or upon the axiom of Archimedes). Gauss mentions in particular the theorem of Euclid, that triangular pyramids of equal altitudes are to each other as their bases. Now the analogous problem in the plane has been solved.[6] Gerling also succeeded in proving the equality of volume of symmetrical polyhedra by dividing them into congruent parts. Nevertheless, it seems to me probable that a general proof of this kind for the theorem of Euclid just mentioned is impossible, and it should be our task to give a rigorous proof of its impossibility. This would be obtained, as soon as we succeeded in *specifying two tetrahedra of equal bases and equal altitudes which can in no way be split up into congruent tetrahedra, and which cannot* *be combined with congruent tetrahedra to form two polyhedra which themselves could be split up into congruent tetrahedra.*[7]

4 Problem of the straight line as the shortest distance between two points

Another problem relating to the foundations of geometry is this: If from among the axioms necessary to establish ordinary euclidean geometry, we exclude the axiom of parallels, or assume it as not satisfied, but retain all other axioms, we obtain, as is well known, the geometry of Lobachevsky (hyperbolic geometry). We may therefore say that this is a geometry standing next to euclidean geometry. If we require further that that axiom be not satisfied whereby, of three points of a straight line, one and only one lies between the other two, we obtain Riemann's (elliptic) geometry, so that this geometry appears to be the next after Lobachevsky's. If we wish to carry out a similar investigation with respect to the axiom of Archimedes, we must look upon this as not satisfied, and we arrive thereby at the non-archimedean geometries which have been investigated by Veronese and myself. The more general question now arises: Whether from other suggestive standpoints geometries may not be devised which, with equal right, stand next to euclidean geometry. Here I should like to direct your attention to a theorem which has, indeed, been employed by many authors as a definition of a straight line, viz., that the straight line is the shortest distance between two points. The essential content of this statement reduces to the theorem of Euclid that in a triangle the sum of two sides is always greater than the third side–a theorem which, as is easily seen, deals sole]y with elementary concepts, *i. e.*, with such as are derived directly from the axioms, and is therefore more accessible to logical investigation. Euclid proved this theorem, with the help of the theorem of the exterior angle, on the basis of the congruence theorems. Now it is readily shown that this theorem of Euclid cannot be proved solely on the basis of those congruence theorems which relate to the application of segments and angles, but that one of the theorems on the congruence of triangles is necessary. We are asking, then, for a geometry in which all the axioms of ordinary euclidean geometry hold, and in particular all the congruence axioms except the one of the congruence of triangles (or all except the theorem of the equality of the base angles in the isosceles triangle), and in which, besides, the proposition that in every triangle the sum of two sides is greater than the third is assumed as a particular axiom. One finds that such a geometry really exists and is no other than that which Minkowski constructed in his book, *Geometrie der Zahlen*,[8] and made the basis of his arithmetical investigations. Minkowski's is therefore also a geometry standing next to the ordinary euclidean geometry; it is essentially characterized by the following stipulations:

1. The points which are at equal distances from a fixed point O lie on a convex closed surface of the ordinary euclidean space with O as a center.

2. Two segments are said to be equal when one can be carried into the other by a translation of the ordinary euclidean space. In Minkowski's geometry the axiom of parallels also holds. By studying the theorem of the straight line as the shortest distance between two points, I arrived[9] at a geometry in which the parallel axiom does not hold, while all other axioms of Minkowski's geometry are satisfied. The theorem of the straight line as the shortest distance between two points and the essentially equivalent theorem of Euclid about the sides of a triangle, play an important part not only in number theory but also in the theory of surfaces and in the calculus of variations. For this reason, and because I believe that the thorough investigation of the conditions for the validity of this theorem will throw a new light upon the idea of distance, as well as upon other elementary ideas, *e. g.*, upon the idea of the plane, and the possibility of its definition by means of the idea of the straight line, *the construction and systematic treatment of the geometries here possible seem to me desirable.*

5 Lie's concept of a continuous group of transformations without the assumption of the differentiability of the functions defining the group

It is well known that Lie, with the aid of the concept of continuous groups of transformations, has set up a system of geometrical axioms and, from the standpoint of his theory of groups, has proved that this system of axioms suffices for geometry. But since Lie assumes, in the very foundation of his theory, that the functions defining his group can be differentiated, it remains undecided in Lie's development, whether the assumption of the differentiability in connection with the question as to the axioms of geometry is actually unavoidable, or whether it may not appear rather as a consequence of the group concept and the other geometrical axioms. This consideration, as well as certain other problems in connection with the arithmetical axioms, brings before us the more general question: *How far Lie's concept of continuous groups of transformations is approachable in our investigations without the assumption of the differentiability of the functions.* Lie defines a finite continuous group of transformations as a system of transformations

$$x_i\prime = f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r)(i = 1, ..., n)$$

having the property that any two arbitrarily chosen transformations of the system, as

$$x_i\prime = f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r)$$

$$x_i\prime\prime = f_i(x_1\prime, ..., x_n\prime; b_1, ..., b_r)$$

applied successively result in a transformation which also belongs to the system, and which is therefore expressible in the form

$$x_i\prime\prime = f_i\{f_1(x, a), ..., f_n(x, a); b_1, ..., b_r\} = f_i(x_1, ..., x_n; c_1, ..., c_r)$$

where $c_1, \dots, c_r$ are certain functions of $a_1, \dots, a_r$ and $b_1, \dots, b_r$. The group property thus finds its full expression in a system of functional equations and of itself imposes no additional restrictions upon the functions $f_1, \dots, f_n$; $c_1, \dots, c_r$. Yet Lie's further treatment of these functional equations, viz., the derivation of the well-known fundamental differential equations, assumes necessarily the continuity and differentiability of the functions defining the group. As regards continuity: this postulate will certainly be retained for the present – if only with a view to the geometrical and arithmetical applications, in which the continuity of the functions in question appears as a consequence of the axiom of continuity. On the other hand the differentiability of the functions defining the group contains a postulate which, in the geometrical axioms, can be expressed only in a rather forced and complicated manner. Hence there arises the question whether, through the introduction of suitable new variables and parameters, the group can always be transformed into one whose defining functions are differentiable; or whether, at least with the help of certain simple assumptions, a transformation is possible into groups admitting Lie's methods. A reduction to analytic groups is, according to a theorem announced by Lie[10] but first proved by Schur,[11] always possible when the group is transitive and the existence of the first and certain second derivatives of the functions defining the group is assumed. For infinite groups the investigation of the corresponding question is, I believe, also of interest. Moreover we are thus led to the wide and interesting field of functional equations which have been heretofore investigated usually only under the assumption of the differentiability of the functions involved. In particular the functional equations treated by Abel[12] with so much ingenuity, the difference equations, and other equations occurring in the literature of mathematics, do not directly involve anything which necessitates the requirement of the differentiability of the accompanying functions. In the search for certain existence proofs in the calculus of variations I came directly upon the problem: To prove the differentiability of the function under consideration from the existence of a difference equation. In all these cases, then, the problem arises: *In how far are the assertions which we can make in the case of differentiable functions true under proper modifications without this assumption?* It may be further remarked that H. Minkowski in his above-mentioned *Geometrie der Zahlen* starts with the functional equation

$$f(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \leq f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, ..., y_n)$$

and from this actually succeeds in proving the existence of certain differential quotients for the function in question. On the other hand I wish to emphasize the fact that there certainly exist analytical functional equations whose sole solutions are non-differentiable functions. For example a uniform continuous non-differentiable function φ(x) can be constructed which represents the only solution of the two functional equations

$$\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) = f(x),$$

$$\varphi(x + \beta) - \varphi(x) = 0$$

where α and β are two real numbers, and $f(x)$ denotes, for all the real values of x, a regular analytic uniform function. Such functions are obtained in the simplest manner by means of trigonometrical series by a process similar to that used by Borel (according to a recent announcement of Picard)[13] for the construction of a doubly periodic, non-analytic solution of a certain analytic partial differential equation.

6 Mathematical treatment of the axioms of physics

The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: *To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.* As to the axioms of the theory of probabilities,[14] it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in mathematical physics, and in particular in the kinetic theory of gases. Important investigations by physicists on the foundations of mechanics are at hand; I refer to the writings of Mach,[15] Hertz,[16] Boltzmann[17] and Volkmann.[18] It is therefore very desirable that the discussion of the foundations of mechanics be taken up by mathematicians also. Thus Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes, there merely indicated, which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua. Conversely one might try to derive the laws of the motion of rigid bodies by a limiting process from a system of axioms depending upon the idea of continuously varying conditions of a material filling all space continuously, these conditions being defined by parameters. For the question as to the equivalence of different systems of axioms is always of great theoretical interest. If geometry is to serve as a model for the treatment of physical axioms, we shall try first by a small number of axioms to include as large a class as possible of physical phenomena, and then by adjoining new axioms to arrive gradually at the more special theories. At the same time Lie's a principle of subdivision can perhaps be derived from profound theory of infinite transformation groups. The mathematician will have also to take account not only of those theories coming near to reality, but also, as in geometry, of all logically possible theories. He must be always alert to obtain a complete survey of all conclusions derivable from the system of axioms assumed. Further, the mathematician has the duty to test exactly in each instance whether the new axioms are compatible with the previous ones. The physicist, as his theories develop, often finds himself forced by the results of his experiments to make new hypotheses, while he depends, with respect to the compatibility of the new hypotheses with the old axioms, solely upon these experiments or upon a certain physical intuition, a practice which in the rigorously logical building up of a theory is not admissible. The desired proof of the compatibility of all assumptions seems to me also of importance, because the effort to obtain such proof always forces us most effectually to an exact formulation of the axioms.

So far we have considered only questions concerning the foundations of the mathematical sciences. Indeed, the study of the foundations of a science is always particularly attractive, and the testing of these foundations will always be among the foremost problems of the investigator. Weierstrass once said, "The final object always to be kept in mind is to arrive at a correct understanding of the foundations of the science. ... But to make any progress in the sciences the study of particular problems is, of course, indispensable." In fact, a thorough understanding of its special theories is necessary to the successful treatment of the foundations of the science. Only that architect is in the position to lay a sure foundation for a structure who knows its purpose thoroughly and in detail. So we turn now to the special problems of the separate branches of mathematics and consider first arithmetic and algebra.

7 Irrationality and transcendence of certain numbers

Hermite's arithmetical theorems on the exponential function and their extension by Lindemann are certain of the admiration of all generations of mathematicians. Thus the task at once presents itself to penetrate further along the path here entered, as A. Hurwitz has already done in two interesting papers,[19] "Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen." I should like, therefore, to sketch a class of problems which, in my opinion, should be attacked as here next in order. That certain special transcendental functions, important in analysis, take algebraic values for certain algebraic arguments, seems to us particularly remarkable and worthy of thorough investigation. Indeed, we expect transcendental functions to assume, in general, transcendental values for even algebraic arguments; and, although it is well known that there exist integral transcendental functions which even have rational values for all algebraic arguments, we shall still con sider it highly probable that the exponential function $e^{i\pi z}$, for example, which evidently has algebraic values for all rational arguments z, will on the other hand always take transcendental values for irrational algebraic values of the argument z. We can also give this statement a geometrical form, as follows: *If, in an isosceles* *triangle, the ratio of the base angle to the angle at the vertex be algebraic but not rational, the ratio between base and side is always transcendental.* In spite of the simplicity of this statement and of its similarity to the problems solved by Hermite and Lindemann, I consider the proof of this theorem very difficult; as also the proof that *The expression* α^β*, for an algebraic base* α*and an irrational algebraic exponent , e. g., the number 2 or* $e^\pi = i^{-2i}$*, always represents a transcendental or at least an irrational number.* It is certain that the solution of these and similar problems must lead us to entirely new methods and to a new insight into the nature of special irrational and transcendental numbers.

8 Problems of prime numbers

Essential progress in the theory of the distribution of prime numbers has lately been made by Hadamard, de la Vallée-Poussin, Von Mangoldt and others. For the complete solution, however, of the problems set us by Riemann's paper "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse," it still remains to prove the correctness of an exceedingly important statement of Riemann, viz., *that the zero points of the function* $\zeta(s)$ *defined by the series*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

all have the real part 1/2, except the well-known negative integral real zeros. As soon as this proof has been successfully established, the next problem would consist in testing more exactly Riemann's infinite series for the number of primes below a given number and, especially, *to decide whether the difference between the number of primes below a number x and the integral logarithm of x does in fact become infinite of an order not greater than 1/2 in x.*[20] Further, we should determine whether the occasional condensation of prime numbers which has been noticed in counting primes is really due to those terms of Riemann's formula which depend upon the first complex zeros of the function ζ(s). After an exhaustive discussion of Riemann's prime number formula, perhaps we may sometime be in a position to attempt the rigorous solution of Goldbach's problem,[21] viz., whether every integer is expressible as the sum of two positive prime numbers; and further to attack the well-known question, whether there are an infinite number of pairs of prime numbers with the difference 2, or even the more general problem, whether the linear diophantine equation

$$ax + by + c = 0$$

(with given integral coefficients each prime to the others) is always solvable in prime numbers x and y. But the following problem seems to me of no less interest and perhaps of still wider range: *To apply the results obtained for the distribution of rational prime numbers to the theory of the distribution of ideal primes in a given number-field k–a problem which looks toward the study of the function k(s) belonging to the field and defined by the series*

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(j)^s},$$

where the sum extends over all ideals j of the given realm k, and n(j) denotes the norm of the ideal j. I may mention three more special problems in number theory: one on the laws of reciprocity, one on diophantine equations, and a third from the realm of quadratic forms.

9 Proof of the most general law of reciprocity in any number field

For any field of numbers the law of reciprocity is to be proved for the residues of the l-th power, when l denotes an odd prime, and further when l is a power of 2 or a power of an odd prime. The law, as well as the means essential to its proof, will, I believe, result by suitably generalizing the theory of the field of the l-th roots of unity,[22] developed by me, and my theory of relative quadratic fields.[23]

10 Determination of the solvability of a diophantine equation

Given a diophantine equation with any number of unknown quantities and with rational integral numerical coefficients: *to devise a process according to which it can be determined by a finite number of operations whether the equation is solvable in rational integers.*

11 Quadratic forms with any algebraic numerical coefficients

Our present knowledge of the theory of quadratic number fields[24] puts us in a position *to attack successfully the theory of quadratic forms with any number of variables and with any algebraic numerical coefficients.* This leads in particular to the interesting problem: to solve a given quadratic equation with algebraic numerical coefficients in any number of variables by integral or fractional numbers belonging to the algebraic realm of rationality determined by the coefficients. The following important problem may form a transition to algebra and the theory of functions:

12 Extension of Kroneker's theorem on abelian fields to any algebraic realm of rationality

The theorem that every abelian number field arises from the realm of rational numbers by the composition of fields of roots of unity is due to Kronecker. This fundamental theorem in the theory of integral equations contains two statements, namely: First. It answers the question as to the number and existence of those equations which have a given degree, a given abelian group and a given discriminant with respect to the realm of rational numbers. Second. It states that the roots of such equations form a realm of algebraic numbers which coincides with the realm obtained by assigning to the argument z in the exponential function $e^{i\pi z}$ all rational numerical values in succession. The first statement is concerned with the question of the determination of certain algebraic numbers by their groups and their branching. This question corresponds, therefore, to the known problem of the determination of algebraic functions corresponding to given Riemann surfaces. The second statement furnishes the required numbers by transcendental means, namely, by the exponential function $e^{i\pi z}$. Since the realm of the imaginary quadratic number fields is the simplest after the realm of rational numbers, the problem arises, to extend Kronecker's theorem to this case. Kronecker himself has made the assertion that the abelian equations in the realm of a quadratic field are given by the equations of transformation of elliptic functions with singular moduli, so that the elliptic function assumes here the same role as the exponential function in the former case. The proof of Kronecker's conjecture has not yet been furnished; but I believe that it must be obtainable without very great difficulty on the basis of the theory of complex multiplication developed by H. Weber[25] with the help of the purely arithmetical theorems on class fields which I have established. Finally, the extension of Kronecker's theorem to the case that, *in place of the realm of rational numbers or of the imaginary quadratic field, any algebraic field whatever is laid down as realm of rationality*, seems to me of the greatest importance. I regard this problem as one of the most profound and far reaching in the theory of numbers and of functions. The problem is found to be accessible from many standpoints. I regard as the most important key to the arithmetical part of this problem the general law of reciprocity for residues of I-th powers within any given number field. As to the function-theoretical part of the problem, the investigator in this attractive region will be guided by the remarkable analogies which are noticeable between the theory of algebraic functions of one variable and the theory of algebraic numbers. Hensel[26] has proposed and investigated the analogue in the theory of algebraic numbers to the development in power series of an algebraic function; and Landsberg[27] has treated the analogue of the Riemann-Roch theorem. The analogy between the deficiency of a Riemann surface and that of the class number of a field of numbers is also evident. Consider a Riemann surface of deficiency $p = 1$ (to touch on the simplest case only) and on the other hand a number field of class $h = 2$. To the proof of the existence of an integral everywhere finite on the Riemann surface, corresponds the proof of the existence of an integer a in the number field such that the number $\sqrt{a}$represents a quadratic field, relatively unbranched with respect to the fundamental field. In the theory of algebraic functions, the method of boundary values (*Randwerthaufgabe*) serves, as is well known, for the proof of Riemann's existence theorem. In the theory of number fields also, the proof of the existence of just this number a offers the greatest difficulty. This proof succeeds with indispensable assistance from the theorem that in the number field there are always prime ideals corresponding to given residual properties. This latter fact is therefore the analogue in number theory to the problem of boundary values. The equation of Abel's theorem in the theory of algebraic functions expresses, as is well known, the necessary and sufficient condition that the points in question on the Riemann surface are the zero points of an algebraic function belonging to the surface. The exact analogue of Abel's theorem, in the theory of the number field of class $h = 2$, is the equation of the law of quadratic reciprocity[28]

$$\left(\begin{array}{c} a \\ j \end{array} \right) = +1$$

which declares that the ideal j is then and only then a principal ideal of the number field when the quadratic residue of the number a with respect to the ideal j is positive. It will be seen that in the problem just sketched the three fundamental branches of mathematics, number theory, algebra and function theory, come into closest touch with one another, and I am certain that the theory of analytical functions of several variables in particular would be notably enriched if one should succeed in finding and discussing those functions which play the part for any algebraic number field corresponding to that of the exponential function in the field of rational numbers and of the elliptic modular functions in the imaginary quadratic number field. Passing to algebra, I shall mention a problem from the theory of equations and one to which the theory of algebraic invariants has led me.

13 Impossibility of the solution of the general equation of the 7-th degree by means of functions of only two arguments

Nomography[29] deals with the problem: to solve equations by means of drawings of families of curves depending on an arbitrary parameter. It is seen at once that every root of an equation whose coefficients depend upon only two parameters, that is, every function of two independent variables, can be represented in manifold ways according to the principle lying at the foundation of nomography. Further, a large class of functions of three or more variables can evidently be represented by this principle alone without the use of variable elements, namely all those which can be generated by forming first a function of two arguments, then equating each of these arguments to a function of two arguments, next replacing each of those arguments in their turn by a function of two arguments, and so on, regarding as admissible any finite number of insertions of functions of two arguments. So, for example, every rational function of any number of arguments belongs to this class of functions constructed by nomographic tables; for it can be generated by the processes of addition, subtraction, multiplication and division and each of these processes produces a function of only two arguments. One sees easily that the roots of all equations which are solvable by radicals in the natural realm of rationality belong to this class of functions; for here the extraction of roots is adjoined to the four arithmetical operations and this, indeed, presents a function of one argument only. Likewise the general equations of the 5-th and 6-th degrees are solvable by suitable nomographic tables; for, by means of Tschirnhausen transformations, which require only extraction of roots, they can be reduced to a form where the coefficients depend upon two parameters only. Now it is probable that the root of the equation of the seventh degree is a function of its coefficients which does not belong to this class of functions capable of nomographic construction, i. e., that it cannot be constructed by a finite number of insertions of functions of two arguments.

In order to prove this, the proof would be necessary *that the equation of the seventh degree $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ is not solvable with the help of any continuous functions of only two arguments.* I may be allowed to add that I have satisfied myself by a rigorous process that there exist analytical functions of three arguments x, y, z which cannot be obtained by a finite chain of functions of only two arguments. By employing auxiliary movable elements, nomography succeeds in constructing functions of more than two arguments, as d'Ocagne has recently proved in the case of the equation of the 7-th degree.[30]

14 Proof of the finiteness of certain complete systems of functions

In the theory of algebraic invariants, questions as to the finiteness of complete systems of forms deserve, as it seems to me, particular interest. L. Mauer[31] has lately succeeded in extending the theorems on finiteness in invariant theory proved by P. Gordan and myself, to the case where, instead of the general projective group, any subgroup is chosen as the basis for the definition of invariants. An important step in this direction had been taken al ready by A. Hurwitz,[32] who, by an ingenious process, succeeded in effecting the proof, in its entire generality, of the finiteness of the system of orthogonal invariants of an arbitrary ground form. The study of the question as to the finiteness of invariants has led me to a simple problem which includes that question as a particular case and whose solution probably requires a decidedly more minutely detailed study of the theory of elimination and of Kronecker's algebraic modular systems than has yet been made. Let a number m of integral rational functions X_l, X_2, ... , X_m, of the n variables x_l, x_2, ... , x_n be given,

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} X_1 & = & f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ X_2 & = & f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ & & \quad ... \\ X_m & = & f_m(x_1, x_2, ..., x_n), \end{array} \right.$$

Every rational integral combination of X_l, ... , X_m must evidently always become, after substitution of the above expressions, a rational integral function of x_l, ... , x_n. Nevertheless, there may well be rational fractional functions of X_l, ... , X_m which, by the operation of the substitution S, become integral functions in x_l, ... , x_n. Every such rational function of X_l, ... , X_m, which becomes integral in x_l, ... , x_n after the application of the substitution S, I propose to call a *relatively integral* function of X_l, ... , X_m. Every integral function of $X_l, \dots, X_m$ is evidently also relatively integral; further the sum, difference and product of relative integral functions are themselves relatively integral. The resulting problem is now to decide whether it is always possible to *find a finite system of relatively integral function* $X_l, \dots, X_m$ *by which every other relatively integral function of* $X_l, \dots, X_m$ *may be expressed rationally and integrally.* We can formulate the problem still more simply if we introduce the idea of a finite field of integrality. By a finite field of integrality I mean a system of functions from which a finite number of functions can be chosen, in terms of which all other functions of the system are rationally and integrally expressible. Our problem amounts, then, to this: to show that all relatively integral functions of any given domain of rationality always constitute a finite field of integrality. It naturally occurs to us also to refine the problem by restrictions drawn from number theory, by assuming the coefficients of the given functions $f_l, \dots, f_m$ to be integers and including among the relatively integral functions of $X_l, \dots, X_m$ only such rational functions of these arguments as become, by the application of the substitutions S, rational integral functions of $x_l, \dots, x_n$ with rational integral coefficients. The following is a simple particular case of this refined problem: Let m integral rational functions $X_l, \dots, X_m$ of one variable x with integral rational coefficients, and a prime number p be given. Consider the system of those integral rational functions of x which can be expressed in the form

$$G(X_l, ..., X_m)/p^h,$$

where G is a rational integral function of the arguments $Xl, ..., Xm$ and p^h is any power of the prime number p. Earlier investigations of mine[33] show immediately that all such expressions for a fixed exponent h form a finite domain of integrality. But the question here is whether the same is true for all exponents h, *i. e.*, whether a finite number of such expressions can be chosen by means of which for every exponent h every other expression of that form is integrally and rationally expressible. From the boundary region between algebra and geometry, I will mention two problems. The one concerns enumerative geometry and the other the topology of algebraic curves and surfaces.

15 Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus

The problem consists in this: *To establish rigorously and with an exact determination of the limits of their validity those geometrical numbers which Schubert*[34] *especially has determined on the basis of the so-called principle of special position, or conservation of number, by means of the enumerative calculus developed by him.* Although the algebra of today guarantees, in principle, the possibility of carrying out the processes of elimination, yet for the proof of the theorems of enumerative geometry decidedly more is requisite, namely, the actual carrying out of the process of elimination in the case of equations of special form in such a way that the degree of the final equations and the multiplicity of their solutions may be foreseen.

16 Problem of the topology of algebraic curves and surfaces

The maximum number of closed and separate branches which a plane algebraic curve of the n-th order can have has been determined by Harnack.[35] There arises the further question as to the relative position of the branches in the plane. As to curves of the 6-th order, I have satisfied myself–by a complicated process, it is true–that of the eleven branches which they can have according to Harnack, by no means all can lie external to one another, but that one branch must exist in whose interior one branch and in whose exterior nine branches lie, or inversely. *A thorough investigation of the relative position of the separate branches when their number is the maximum seems to me to be of very great interest, and not less so the corresponding investigation as to the number, form, and position of the sheets of an algebraic surface in space.* Till now, indeed, it is not even known what is the maxi mum number of sheets which a surface of the 4-th order in three dimensional space can really have.[36] In connection with this purely algebraic problem, I wish to bring forward a question which, it seems to me, may be attacked by the same method of continuous variation of coefficients, and whose answer is of corresponding value for the topology of families of curves defined by differential equations. This is the question as to the maximum number and position of Poincaré's boundary cycles (cycles limites) for a differential equation of the first order and degree of the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$

where X and Y are rational integral functions of the n-th degree in x and y. Written homogeneously, this is

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

where X, Y, and Z are rational integral homogeneous functions of the n-th degree in x, y, z, and the latter are to be determined as functions of the parameter t.

17 Expression of definite forms by squares

A rational integral function or form in any number of variables with real coefficient such that it becomes negative for no real values of these variables, is said to be definite. The system of all definite forms is invariant with respect to the operations of addition and multiplication, but the quotient of two definite forms–in case it should be an integral function of the variables–is also a definite form. The square of any form is evidently always a definite form. But since, as I have shown,[37] not every definite form can be compounded by addition from squares of forms, the question arises–which I have answered affirmatively for ternary forms[38]–whether every definite form may not be expressed as a quotient of sums of squares of forms. At the same time it is desirable, for certain questions as to the possibility of certain geometrical constructions, to know whether the coefficients of the forms to be used in the expression may always be taken from the realm of rationality given by the coefficients of the form represented.[39] I mention one more geometrical problem:

18 Building up of space from congruent polyhedra

If we enquire for those groups of motions in the plane for which a fundamental region exists, we obtain various answers, according as the plane considered is Riemann's (elliptic), Euclid's, or Lobachevsky's (hyperbolic). In the case of the elliptic plane there is a finite number of essentially different kinds of fundamental regions, and a finite number of congruent regions suffices for a complete covering of the whole plane; the group consists indeed of a finite number of motions only. In the case of the hyperbolic plane there is an infinite number of essentially different kinds of fundamental regions, namely, the well-known Poincaré polygons. For the complete covering of the plane an infinite number of congruent regions is necessary. The case of Euclid's plane stands between these; for in this case there is only a finite number of essentially different kinds of groups of motions with fundamental regions, but for a complete covering of the whole plane an infinite number of congruent regions is necessary. Exactly the corresponding facts are found in space of three dimensions. The fact of the finiteness of the groups of motions in elliptic space is an immediate consequence of a fundamental theorem of C. Jordan,[40] whereby the number of essentially different kinds of finite groups of linear substitutions in n variables does not surpass a certain finite limit dependent upon n. The groups of motions with fundamental regions in hyperbolic space have been investigated by Fricke and Klein in the lectures on the theory of automorphic functions,[41] and finally Fedorov,[42] Schoenflies[43] and lately Rohn[44] have given the proof that there are, in euclidean space, only a finite number of essentially different kinds of groups of motions with a fundamental region. Now, while the results and methods of proof applicable to elliptic and hyperbolic space hold directly for n-dimensional space also, the generalization of the theorem for euclidean space seems to offer decided difficulties. The investigation of the following question is therefore desirable: *Is there in n-dimensional euclidean space also only a finite number of essentially different kinds of groups of motions with a fundamental region?* A fundamental region of each group of motions, together with the congruent regions arising from the group, evidently fills up space completely. The question arises: *whether polyhedra also exist which do not appear as fundamental regions of groups of motions, by means of which nevertheless by a suitable juxtaposition of congruent copies a complete filling up of all space is possible.* I point out the following question, related to the preceding one, and important to number theory and perhaps sometimes useful to physics and chemistry: How can one arrange most densely in space an infinite number of equal solids of given form, *e. g.*, spheres with given radii or regular tetrahedra with given edges (or in prescribed position), that is, how can one so fit them together that the ratio of the filled to the unfilled space may be as great as possible?

If we look over the development of the theory of functions in the last century, we notice above all the fundamental importance of that class of functions which we now designate as analytic functions–a class of functions which will probably stand permanently in the center of mathematical interest. There are many different standpoints from which we might choose, out of the totality of all conceivable functions, extensive classes worthy of a particularly thorough investigation. Consider, for example, *the class of functions characterized by ordinary or partial algebraic differential equations.* It should be observed that this class does not contain the functions that arise in number theory and whose investigation is of the greatest importance. For example, the before-mentioned function $\zeta(s)$ satisfies no algebraic differential equation, as is easily seen with the help of the well-known relation between $\zeta(s)$ and $\zeta(1-s)$, if one refers to the theorem proved by Hölder,[45] that the function $\Gamma(x)$ satisfies no algebraic differential equation. Again, the function of the two variables s and l defined by the infinite series

$$\zeta\left(s,x\right)=x+\frac{x^{2}}{2^{s}}+\frac{x^{3}}{3^{s}}+\frac{x^{4}}{4^{s}}+\cdots,$$

which stands in close relation with the function $\zeta(s)$, probably satisfies no algebraic partial differential equation. In the investigation of this question the functional equation

$$x\frac{\partial\zeta\left(s,x\right)}{\partial x}=\zeta\left(s-1,x\right)$$

will have to be used. If, on the other hand, we are lead by arithmetical or geometrical reasons to consider the class of all those functions which are continuous and indefinitely differentiable, we should be obliged in its investigation to dispense with that pliant instrument, the power series, and with the circumstance that the function is fully determined by the assignment of values in any region, however small. While, therefore, the former limitation of the field of functions was too narrow, the latter seems to me too wide. The idea of the analytic function on the other hand includes the whole wealth of functions most important to science whether they have their origin in number theory, in the theory of differential equations or of algebraic functional equations,whether they arise in geometry or in mathematical physics; and, therefore, in the entire realm of functions, the analytic function justly holds undisputed supremacy.

19 Are the solutions of regular problems in the calculus of variations always necessarily analytic?

One of the most remarkable facts in the elements of the theory of analytic functions appears to me to be this: That there exist partial differential equations whose integrals are all of necessity analytic functions of the independent variables, that is, in short, equations susceptible of none but analytic solutions. The best known partial differential equations of this kind are the potential equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

and certain linear differential equations investigated by Picard;[46] also the equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

the partial differential equation of minimal surfaces, and others. Most of these partial differential equations have the common characteristic of being the lagrangian differential equations of certain problems of variation, viz., of such problems of variation

$$\int\int F(p,q,z;x,y)dxdy = \text{ minimum}$$

$$\left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

as satisfy, for all values of the arguments which fall within the range of discussion, the inequality

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0,$$

F itself being an analytic function. We shall call this sort of problem a regular variation problem. It is chiefly the regular variation problems that play a role in geometry, in mechanics, and in mathematical physics; and the question naturally arises, whether all solutions of regular variation problems must necessarily be analytic functions. In other words, *does every lagrangian partial differential equation of a regular variation problem have the property of admitting analytic integrals exclusively?* And is this the case even when the function is constrained to assume, as, *e. g.*, in Dirichlet's problem on the potential function, boundary values which are continuous, but not analytic? I may add that there exist surfaces of constant *negative* gaussian curvature which are representable by functions that are continuous and possess indeed all the derivatives, and yet are not analytic; while on the other hand it is probable that every surface whose gaussian curvature is constant and positive is necessarily an analytic surface. And we know that the surfaces of positive constant curvature are most closely related to this regular variation problem: To pass through a closed curve in space a surface of minimal area which shall inclose, in connection with a fixed surface through the same closed curve, a volume of given magnitude.

20 The general problem of boundary values

An important problem closely connected with the foregoing is the question concerning the existence of solutions of partial differential equations when the values on the boundary of the region are prescribed. This problem is solved in the main by the keen methods of H. A. Schwarz, C. Neumann, and Poincaré for the differential equation of the potential. These methods, however, seem to be generally not capable of direct extension to the case where along the boundary there are prescribed either the differential coefficients or any relations between these and the values of the function. Nor can they be extended immediately to the case where the inquiry is not for potential surfaces but, say, for surfaces of least area, or surfaces of constant positive gaussian curvature, which are to pass through a prescribed twisted curve or to stretch over a given ring surface. It is my conviction that it will be possible to prove these existence theorems by means of a general principle whose nature is indicated by Dirichlet's principle. This general principle will then perhaps enable us to approach the question: *Has not every regular variation problem a solution, provided certain assumptions regarding the given boundary conditions are satisfied (say that the functions concerned in these boundary conditions are continuous and have in sections one or more derivatives), and provided also if need be that the notion of a solution shall be suitably extended?*[47]

21 Proof of the existence of linear differential equations having a prescribed monodromic group

In the theory of linear differential equations with one independent variable z, I wish to indicate an important problem one which very likely Riemann himself may have had in mind. This problem is as follows: *To show that there always exists a linear differential equation of the Fuchsian class, with given singular points and monodromic group.* The problem requires the production of n functions of the variable z, regular throughout the complex z-plane except at the given singular points; at these points the functions may become infinite of only finite order, and when z describes circuits about these points the functions shall undergo the prescribed linear substitutions. The existence of such differential equations has been shown to be probable by counting the constants, but the rigorous proof has been obtained up to this time only in the particular case where the fundamental equations of the given substitutions have roots all of absolute magnitude unity. L. Schlesinger has given this proof,[48] based upon Poincaré's theory of the Fuchsian ζ-functions. The theory of linear differential equations would evidently have a more finished appearance if the problem here sketched could be disposed of by some perfectly general method.

22 Uniformization of analytic relations by means of automorphic functions

As Poincaré was the first to prove, it is always possible to reduce any algebraic relation between two variables to uniformity by the use of automorphic functions of one variable. That is, if any algebraic equation in two variables be given, there can always be found for these variables two such single valued automorphic functions of a single variable that their substitution renders the given algebraic equation an identity. The generalization of this fundamental theorem to any analytic non-algebraic relations whatever between two variables has likewise been attempted with success by Poincaré,[49] though by a way entirely different from that which served him in the special problem first mentioned. From Poincaré's proof of the possibility of reducing to uniformity an arbitrary analytic relation between two variables, however, it does not become apparent whether the resolving functions can be determined to meet certain additional conditions. Namely, it is not shown whether the two single valued functions of the one new variable can be so chosen that, while this variable traverses the regular domain of those functions, the totality of all regular points of the given analytic field are actually reached and represented. On the contrary it seems to be the case, from Poincaré's investigations, that there are beside the branch points certain others, in general infinitely many other discrete exceptional points of the analytic field, that can be reached only by making the new variable approach certain limiting points of the functions. *In view of the fundamental importance of Poincaré's formulation of the question it seems to me that an elucidation and resolution of this difficulty is extremely desirable.* In conjunction with this problem comes up the problem of reducing to uniformity an algebraic or any other analytic relation among three or more complex variables–a problem which is known to be solvable in many particular cases. Toward the solution of this the recent investigations of Picard on algebraic functions of two variables are to be regarded as welcome and important preliminary studies.

23 Further development of the methods of the calculus of variations

So far, I have generally mentioned problems as definite and special as possible, in the opinion that it is just such definite and special problems that attract us the most and from which the most lasting influence is often exerted upon science. Nevertheless, I should like to close with a general problem, namely with the indication of a branch of mathematics repeatedly mentioned in this lecture–which, in spite of the considerable advancement lately given it by Weierstrass, does not receive the general appreciation which, in my opinion, is its due–I mean the calculus of variations.[50] The lack of interest in this is perhaps due in part to the need of reliable modern text books. So much the more praiseworthy is it that A. Kneser in a very recently published work has treated the calculus of variations from the modern points of view and with regard to the modern demand for rigor.[51] The calculus of variations is, in the widest sense, the theory of the variation of functions, and as such appears as a necessary extension of the differential and integral calculus. In this sense, Poincaré's investigations on the problem of three bodies, for example, form a chapter in the calculus of variations, in so far as Poincaré derives from known orbits by the principle of variation new orbits of similar character. I add here a short justification of the general remarks upon the calculus of variations made at the beginning of my lecture. The simplest problem in the calculus of variations proper is known to consist in finding a function y of a variable x such that the definite integral

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)dx, \qquad y_x = \frac{dx}{dy}$$

assumes a minimum value as compared with the values it takes when y is replaced by other functions of x with the same initial and final values. The vanishing of the first variation in the usual sense

$$\delta J = 0$$

gives for the desired function y the well-known differential equation

$$\frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0$$

$$\left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x}, \qquad F_y = \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

In order to investigate more closely the necessary and sufficient criteria for the occurrence of the required minimum, we consider the integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p)F_p\}\, dx$$

$$\left[F = F(p, y, x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right]$$

Now we inquire how p is to be chosen as function of x, y in order that the value of this integral J^* shall be independent of the path of integration, i. e., of the choice of the function y of the variable x. The integral J^* has the form

$$J^* = \int_a^b \{Ay_x - B\}\, dx,$$

where A and B do not contain y, and the vanishing of the first variation

$$\delta J^* = 0$$

in the sense which the new question requires gives the equation

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

i. e., we obtain for the function p of the two variables x, y the partial differential equation of the first order

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0$$

The ordinary differential equation of the second order (l) and the partial differential equation (1*) stand in the closest relation to each other. This relation becomes immediately clear to us by the following simple transformation

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \int_a^b \{F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p) F_y + (y_x - p)\delta F_p\} dx \\ &= \delta J + \int_a^b \{F_y \delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\delta F_p\} dx \\ &= \delta J + \int_a^b (y_x - p)\delta F_p dx. \end{aligned}$$

We derive from this, namely, the following facts: If we construct any *simple* family of integral curves of the ordinary differential equation (l) of the second order and then form an ordinary differential equation of the first order

$$(2) \qquad y_x = p(x, y)$$

which also admits these integral curves as solutions, then the function $p(x, y)$ is always an integral of the partial differential equation (1*) of the first order; and conversely, if $p(x, y)$ denotes any solution of the partial differential equation (1*) of the first order, all the non-singular integrals of the ordinary differential equation (2) of the first order are at the same time integrals of the differential equation (l) of the second order, or in short if $y_x = p(x, y)$ is an integral equation of the first order of the differential equation (l) of the second order, p(x, y) represents an integral of the partial differential equation (1*) and conversely; the integral curves of the ordinary differential equation of the second order are therefore, at the same time, the characteristics of the partial differential equation (1*) of the first order. In the present case we may find the same result by means of a simple calculation; for this gives us the differential equations (1) and (1*) in question in the form

$$(1) \qquad y_{xx} F_{yxyx} + y_x F_{yxy} + y_{xx} F_{yxx} + F_y = 0,$$

$$(1^*) \qquad (p_x + p_{xx}) F_{pp} + p F_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

where the lower indices indicate the partial derivatives with respect to x, y, p, y_x. The correctness of the affirmed relation is clear from this. The close relation derived before and just proved between the ordinary differential equation (1) of the second order and the partial differential equation (1*) of the first order, is, as it seems to me, of fundamental significance for the calculus of variations. For, from the fact that the integral J^* is independent of the path of integration it follows that

$$\int_a^b \{F(p) + (y-p)F_p(p)\}dx = \int_a^b F(\overline{y}_x)dx,$$

if we think of the left hand integral as taken along any path y and the right hand integral along an integral curve $\overline{y}$of the differential equation

$$\overline{y}_x = p(x, \overline{y}),$$

With the help of equation (3) we arrive at Weierstrass's formula

$$\int_a^b F(y_x)dx - \int_a^b F(\overline{y}_x)dx = \int_a^b E(y_x, p)dx,$$

where E designates Weierstrass's expression, depending upony_x, p, y, x,

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p)F_p(p),$$

Since, therefore, the solution depends only on finding an integral $p(x, y)$ which is single valued and continuous in a certain neighborhood of the integral curve $\overline{y}$, which we are considering, the developments just indicated lead immediately–without the introduction of the second variation, but only by the application of the polar process to the differential equation (1)–to the expression of Jacobi's condition and to the answer to the question: How far this condition of Jacobi's in conjunction with Weierstrass's condition $E > 0$ is necessary and sufficient for the occurrence of a minimum. The developments indicated may be transferred without necessitating further calculation to the case of two or more required functions, and also to the case of a double or a multiple integral. So, for example, in the case of a double integral

$$J = \int F(z_x, z_y, z; x, y)d\omega, \quad \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

to be extended over a given region ω, the vanishing of the first variation (to be understood in the usual sense)

$$\delta J = 0$$

gives the well-known differential equation of the second order

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF_{z_y}}{dy} - F_z = 0,$$

$$\left[F_{z_x} = \frac{dF}{dz}, F_z = \frac{\partial F}{\partial z_y}, F_z = \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

for the required function z of x and y. On the other hand we consider the integral

$$J^* = \int \{F + (z_x - p)F_p + (z_y - q)F_q\} d\omega,$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y),\ F_p = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial p},\ F_q = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial q}\right]$$

and inquire, *how p and q are to be taken as functions of x, y and z in order that the value of this integral may be independent of the choice of the surface passing through the given closed twisted curve, i. e., of the choice of the function z of the variables x and y.* The integral J^* has the form

$$J^* = \int \{Az_x + Bz_y - C\} d\omega$$

and the vanishing of the first variation

$$\delta J = 0$$

in the sense which the new formulation of the question demands, gives the equation

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

i. e., we find for the functions p and q of the three variables x, y and z the differential equation of the first order

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial x} = 0,$$

If we add to this differential equation the partial differential equation

$$(I^*) \qquad p_y - qp_x = q_x + pq_z$$

resulting from the equations

$$z_x = p(x, y, z),$$

$$z_y = q(x, y, z)$$

the partial differential equation (I) for the function z of the two variables x and y and the simultaneous system of the two partial differential equations of the first order (I*) for the two functions p and q of the three variables x, y, and z stand toward one another in a relation exactly analogous to that in which the differential equations (1) and (1*) stood in the case of the simple integral. It follows from the fact that the integral J^* is independent of the choice of the surface of integration z that

$$\int \{F(p,q) + (z_x - p)F_p(p,q) + (z_y - q)F_q(p,q)\}d\omega = \int F(\overline{z}_x, \overline{z}_y)d\omega,$$

if we think of the right hand integral as taken over an integral surface z of the partial differential equations

$$\overline{z}_x = p(x,y,\overline{z}), \overline{z}_y = q(x,y,\overline{z});$$

and with the help of this formula we arrive at once at the formula

$$\int F(z_x, z_y)d\omega - \int F(\overline{z}_x, \overline{z}_y)d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q)d\omega,$$

$$[E(z_x, z_y, p, q) =$$

$$F(z_x, z_y) - F(p,q) - (z_x - p)F_p(p,q) - (z_y - q)F_q(p,q)F_p(p,q)]\,,$$

which plays the same role for the variation of double integrals as the previously given formula (4) for simple integrals. With the help of this formula we can now answer the question how far Jacobi's condition in conjunction with Weierstrass's condition $E > 0$ is necessary and sufficient for the occurrence of a minimum. Connected with these developments is the modified form in which A. Kneser,[52] beginning from other points of view, has presented Weierstrass's theory. While Weierstrass employed integral curves of equation (1) which pass through a fixed point in order to derive sufficient conditions for the extreme values, Kneser on the other hand makes use of any simple family of such curves and constructs for every such family a solution, characteristic for that family, of that partial differential equation which is to be considered as a generalization of the Jacobi-Hamilton equation.

The problems mentioned are merely samples of problems, yet they will suffice to show how rich, how manifold and how extensive the mathematical science of today is, and the question is urged upon us whether mathematics is doomed to the fate of those other sciences that have split up into separate branches, whose representatives scarcely understand one another and whose connection becomes ever more loose. I do not believe this nor wish it. Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts. For with all the variety of mathematical knowledge, we are still clearly conscious of the similarity of the logical devices, the relationship of the ideas in mathematics as a whole and the numerous analogies in its different departments. We also notice that, the farther a mathematical theory is developed, the more harmoniously and uniformly does its construction proceed, and unsuspected relations are disclosed between hitherto separate branches of the science. So it happens that, with the extension of mathematics, its organic character is not lost but only manifests itself the more clearly. But, we ask, with the extension of mathematical knowledge will it not finally become impossible for the single investigator to embrace all departments of this knowledge? In answer let me point out how thoroughly it is ingrained in mathematical science that every real advance goes hand in hand with the invention of sharper tools and simpler methods which at the same time assist in understanding earlier theories and cast aside older more complicated developments. It is therefore possible for the individual investigator, when he makes these sharper tools and simpler methods his own, to find his way more easily in the various branches of mathematics than is possible in any other science. The organic unity of mathematics is inherent in the nature of this science, for mathematics is the foundation of all exact knowledge of natural phenomena. That it may completely fulfil this high mission, may the new century bring it gifted masters and many zealous and enthusiastic disciples!

Notes

[1] Dr. Mary Winton Newson translated this address into English with the author's permission for *Bulletin of the American Mathematical Society* 8 (1902), 437-479. A reprint of appears in *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, edited by Felix Brouder, American Mathematical Society, 1976. The original address "Mathematische Probleme" appeared in *Göttinger Nachrichten*, 1900, pp. 253-297, and in *Archiv der Mathematik und Physik*, (3) 1 (1901), 44-63 and 213-237. [A fuller title of the journal *Göttinger Nachrichten is Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen.*] The French translation by M. L. Laugel "*Sur les problèmes futurs des mathématiques*" appeared in *Compte Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens*, pp. 58-114, Gauthier-Villars, Paris, 1902. This HTML version of Newson's translation was prepared for the web by D. Joyce with only minor modifications, mainly, more complete references.

[2] H. Minkowski: *Die Geometrie der Zahlen.* Teubner, Leipzig, 1896.

[3] See Helmholtz, *Ueber die Wechselwirkung der Natnrkräefte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik.* Vortrag gehalten Köigsberg, 1854.

[4] P. Gordon: "Über homogene Functionen," *Jahresbericht der Deutchen Mathematiker-Vereinigung* 8 (1900), p. 180.

[5] Gauss *Werke*, vol. 8, pp. 241 and 244.

[6] Cf., beside earlier literature, Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899, ch. 4. [Translated as *Foundations of Geometry* by Townsend, Open Court, Chicago, 1902.]

[7] Since this was written M. Dehn has succeeded in proving this impossibility. See his note: "Ueber raumgleishe Polyeder," in *Gött. Nachrichten*, 1900, pp. 345-354, and a paper [then] soon to appear in *Math. Annalen* ["Ueber den Rauminhalt," 55 (1902), 465-478].

[8] H. Minkowski: *Die Geometrie der Zahlen.* Teubner, Leipzig, 1896.

[9] D. Hilbert. "Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte," *Math. Annalen*, 46 (1895), 91-96.

[10] S. Lie and F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. 3, Teubner, Leipzig, 1893, §§ 82 and 144.

[11] F. Schur: "Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuierliche Transformationgruppe darstellenden Functionen, " *Math. Annalen* 41 (1893), 509-538.

[12] Abel: *Werke*, vol. 1, pp. 1, 61, 389.

[13] É. Picard: "Quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique," Conférences faites à Clark University, *Revue générale des Sciences*, 1900, p. 22.

[14] Cf. G. Bohlmann, "Ueber Versicherungsmathematik," from the collection: F. Klein and E. Riecke, *Ueber angewandte Mathematik und Physik*, Teubner, Leipzig, 1900.

[15] E. Mach: *Die Mechanik in ihrer Entwickelnng*, Brockhaus, Leipzig, 4th edition, 1901.

[16] H. Hertz: *Die Prinzipien der Mechanik*, Leipzig, 1894.

[17] L. Boltzmann: *Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, Leipzig, 1897.

[18] P. Volkmann: *Einführung in das Studium der theoretischen Physik*, Teubner, Leipzig, 1900.

[19] A. Hurwitz: *Math. Annalen* 22 (1883), 211-229, and 32 (1888), 583-588.

[20] Cf. an article by H. von Koch, which is soon to appear in *Math. Annalen* ["Ueber die Riemann'sche Primzahlfunction," 55 (1902), 441-464].

[21] Cf. M.-P. Stackel: "Über Goldbach's empirisches Theorem," *Gött. Nachrichten*, 1896, and Landau, *ibid.*, 1900.

[22] D. Hilbert: *Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung*, "Ueber die Theorie der algebraischen Zahlkörper," 4 (1897), Part V (pp. 175-546).

[23] D. Hilbert: "Ueber die Theorie des relativquadratischen Zalhkörpers," *Math. Annalen* 51 (1899), 1-127, and *Gött. Nachrichten*, 1898.

[24] D. Hilbert, "Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlenkörper," *Math. Annalen*, 45(1884); "Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper," *Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 6 (1897), 88-94, and *Math. Annalen*, 51 (1899); "Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper," *Gött. Nachrichten*, 1898, pp. 370-399; *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899, Chap. VIII, § 83 [Translation by Townsend, Chicago, 1902]. Cf. also the dissertation of G. Ruckle, Göttingen, 1901.

[25] H. Weber: *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen.* Vieweg, Braunschweig, 1891.

[26] K. Hensel: "Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zalen," *Jahresber. d . Deutschen Math.-Vereinigung* 6 (1897), 83-88, and an article soon to appear in *Math. Annalen* [55, (1902), 301]: "Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen."

[27] G. Landsberg: "Ueber das Analogon des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Zalen," *Math. Annalen* 50 (1898), 577-582.

[28] Cf. Hilbert, "Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper," *Gött. Nachrichten*, 1898, pp. 370-399.

[29] M. d'Ocagne, *Traité de Nomographie*, Gauyhier-Villars, Paris, 1899.

[30] M. d'Ocagne: "Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré." *Comptes rendus Paris*, 131 (1900), 522-524.

[31] Cf. L. Murer: *Sitzungsber. d. K. Acad. d. Wiss. zu München*, 1899, and an article about to appear in *Math. Annalen.*

[32] A. Hurwitz: "Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration," *Gött. Nachrichten*, 1897, pp. 71-90.

[33] D. Hilbert: "Ueber die Theorie der algebraischen Formen," *Math. Annalen*, 36 (1890), 473-534.

[34] H. Schubert: *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1879.

[35] Harnack: "Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven," *Math. Annalen*, 10 (1876), 189-198.

[36] Cf. K. Rohn, "Flächen vierter Ordnung," *Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft*, Leipzig, 1886.

[37] D. Hilbert: "Ueber die Darstellung definiter Formen als Summen von Formenquadraten," *Math. Annalen*, 32 (1888), 342-350.

[38] D. Hilbert: "Über ternäre definite Formen," *Acta Mathematica*, 17 (1893), 169-198.

[39] Cf. Hilbert *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899, Chap. 7 and in particular §38.

[40] C. Jordan: "Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique," *[Crelle's] Journal für die Reine und Angew. Math.* 84 (1879), and *Atti d. Reale Acad. di Napoli*, 1880.

[41] R. Fricke and F. Klein: *Vorlesungen über die Theoire der automorphen Functionen*, Teubner, Leipzig, 1897. Cf. especially Abschnitt I, Chapters 2 and 3.

[42] E. Fedorov: *Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren*, l890.

[43] A. Schoenflies: *Krystallsysteme und Krystallstruktur*, Teubner, Leipzig, 1891.

[44] K. Rohn: "Einige Sätze über regelmässige Punktgruppen," *Math. Annalen*, 53 (1900), 440-449.

[45] Hölder: "Uber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen," *Math. Annalen*, 28 (1887), 1-13.

[46] Picard: *Jour. de l'Ecole Polytech.*, 1890.

[47] Cf. D. Hilbert: "Über das Dirichlet'sche Princip," *Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung*, 8 (1900), 184-188.

[48] L. Schlesinger: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, vol. 2, part 2, No. 366.

[49] H. Poincaré: "Sur un théorème de la théorie générale des fonctions," *BuII. de la Soc. Math. de France*, 11 (1883),112-125.

[50] Text-books: Moigno and Lindelöf, *Leçons du calcul des variations*, Mallet-Bachelier, Paris, 1861, and A. Kneser, Lehrbuch der Variations-rechnung, Vieweg, Braunschweig, 1900.

[51] As an indication of the contents of this work, it may here be noted that for the simplest problems Kneser derives sufficient conditions of the extreme even for the case that one limit of integration is variable, and employs the envelope of a family of curves satisfying the differential equations of the problem to prove the necessity of Jacobi's conditions of the extreme. Moreover, it should be noticed that Kneser applies Weierstrass's theory also to the inquiry for the extreme of such quantities as are defined by differential equations.

[52] Cf. Kneser's above-mentioned textbook,§§ 14, 16, 19 and 20.

Jacques-Louis Lions

¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?

(páginas 59 - 70)

Conferencia dictada en el Congreso de los Diputados
con ocasión de la **"Jornada Matemática"**
celebrada el día 21 de Enero de 2000

¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?

Jacques-Louis Lions
Collège de France

"El Universo está descrito en lenguaje matématico", nos decía Galileo en 1614. Con el tiempo se suscita un interrogante aún más ambicioso: ¿Podrán ser descritos, comprendidos y regulados los mundos del inanimado y del ser vivo gracias a los lenguajes matemáticos e informáticos?

Una cuestión de esta naturaleza, en algún sentido incluso más extendida, aparece ya en el siglo VIII, ¡sin referencia ninguna a la Informática!, en la obra enciclopédica árabe, *El corpus de Jabir*, en la que figura como director Jabir ibn Hayyan. En ella, la teoría denominada "del balance" tiene como objeto reducir todos los datos del conocimiento humano a un sistema de cantidades y medidas. Todo entra en ese propósito: "la inteligencia, el alma del mundo, la naturaleza, la forma, las esferas, los astros, las cuatro cantidades naturales, el animal, el vegetal, el mineral y por último el balance de las letras, que es el más perfecto de todos".

Es claro que el objetivo de comprender lo inanimado y el ser vivo hace intervenir a todas las ciencias y conocimientos.

Mi exposición no tratará más que sobre algunas consideraciones acerca de lo que las Matemáticas y la Informática pueden aportar a esa cuestión. Incluso bajo una limitación de esa naturaleza, el objetivo sigue poseyendo una ambición inmensa.

Doce siglos después de Jabir, cuatro siglos después de Galileo, el *Año mundial de las Matemáticas* ofrece la ocasión de una reflexión *colectiva.*

Lo abordaremos con la humildad que precisan objetivos de la amplitud y complejidad como el que nos proponemos. No debemos olvidar a D'Alembert cuando nos recordaba que "la naturaleza no está obligada a ajustarse a nuestras impresiones".

Fruto de varios siglos de trabajos, las Matemáticas y la Informática han desarrollado un "método universal para el estudio de los sistemas". Poco importa que se trate del sistema del planeta Tierra, del sistema consituido por un avión, por un automóvil, del conjunto del transporte aéreo, marítimo o terrestre, o del sistema del cuerpo humano.

Este método universal, basado en una "trilogía universal", consta de tres grandes partes (J.L. Lions: *El planeta Tierra. El papel de las matemáticas y de los superordenadores*, 1990; una versión revisada y actualizada está siendo preparada, en las presentes fechas, en colaboración con J. I. Díaz):

1. La modelización matemática.
2. El análisis y la simulación.
3. El control, o intervención, sobre los sistemas.

Intentaré comentar esos tres aspectos sin entrar en detalles técnicos apoyándome tan sólo en algunos ejemplos. Presentaré también algunas perspectivas para el futuro.

Modelización matemática

La experiencia asocia la palabra modelo a la representación esquemática de la realidad con el fin de su comprensión.

Intentando comprender los distindos aspectos del flujo de un fluido portando partículas en suspensión, Leonardo da Vinci construyó diferentes maquetas que no eran más que "modelos reducidos" en los que se podía observar a través de ventanales. Construyó diversos modelos mecánicos. Todo le parecía fácil una vez conocidos los efectos de las escalas, es decir, las leyes matemáticas que relacionaban entre sí las cantidades físicas.

Gracias al desarrollo científico y técnico se llega a disponer, en el siglo XIX, de un gran número de modelos mecánicos que "representaban" otros modelos mecánicos.

Escuchemos a William Thomsom (Lord Kelvin) en sus *Lectures on molecular dynamics and the wave theory of light* de 1884:

> Mi objetivo es mostrar cómo se puede construir, en cada una de las categorías de fenómenos físicos que vamos a considerar, y cualesquiera que sean estos fenómenos, un modelo mecánico que satisfaga las condiciones requeridas... Si vamos a considerar las vibraciones de la luz se requiere un modelo de la acción que se manifieste con esos efectos. Experimentamos la necesidad de asociar a ese modelo nuestra comprensión del conjunto. Me parece que el verdadero sentido de la pregunta ¿entendemos o no tal tema de la Física? es el siguiente: ¿podemos construir un modelo mecánico asociado?

James Clerk Maxwell, uno de los más notables "modelizadores matemáticos" de todos los tiempos, se valió de modelos mecánicos para escribir las célebres ecuaciones que llevan su nombre: ecuaciones en derivadas parciales *lineales* que describen los comportamientos de los campos eléctricos y magnéticos.

Paralelamente al progreso de la técnica, el *modelo eléctrico* sucedió al modelo mecánico. Vito Volterra escribía en su trabajo *Sul la temperature nell'interno delle montagne* de 1912:

> il procedimiento che io propongo di applicare in questo caso non è analitico, ma un processo diro cosi fisico, il quale non è utile solo nel problema speciale qui trattato, ma in un gran numero di questioni riferentisi alle funzioni armoniche, alle funzioni di variabile complessa, ed anche all risoluzione di equazioni algebriche. Sappiamo che su di una superficie conducttrice omogenea, percorsa da una corrente stazionaria, il potenziale elettrico è una funzione armonica. Lo studio diro cosi aritmetico delle funzioni armoniche puo farsi facendo lo studio fisico delle distribuzione delle corrente.

Para estudiar la distribución de la temperatura en el interior de las montañas, Vito Volterra utilizó dos modelos matemáticos de sendos fenómenos físicos diferentes: *a)* un modelo matemático de propagación del calor basado en las ecuaciones propuestas por el barón Joseph Fourier en 1822, y *b)* un modelo matemático de campos eléctricos basado en las ecuaciones de Maxwell. Después de algunas simplificaciones, cada uno de los modelos matemáticos conduce al mismo *problema matemático*: encontrar una función armónica, definida sobre un dominio acotado del plano, verificando un cierto número de condiciones sobre el borde del dominio (denominadas "condiciones de contorno").

Dado que dos situaciones físicas diferentes conducían a un mismo problema, se podía utilizar uno de los fenómenos para estudiar el otro y calcular los valores deseados. La elección era evidente en aquel caso: el modelo eléctrico permitía calcular las temperaturas pretendidas sin más que materializar físicamente el modelo eléctrico correspondiente. Siempre en el artículo citado, Vito Volterra indicaba los principios que permitían la adecuada materialización. Era el origen del cálculo de todo tipo de fenómenos por las *máquinas analógicas reo-eléctricas* (materializando físicamente los modelos eléctricos). Las numerosas aplicaciones de este modo de cálculo (llamado "analógico") continuarían hasta finales de los años cincuenta, especialmente en el ámbito aeronáutico.

Se comenzaba a definir con precisión el concepto de modelo matemático: un conjunto de ecuaciones, de relaciones y de restricciones que, en principio (¡y si el modelo es adecuado!), contiene toda la información buscada.

¿Cómo es posible que un modelo matemático pueda contener, en principio, *toda la información sobre un sistema dado*?

Hay dos razones fundamentales para ello: *a)* las notaciones y las catalogaciones que permiten la concisión y la descripción ordenada de la información, y *b)* la universalidad de las leyes matemáticas.

Las notaciones y las catalogaciones

Leibniz les concedía la mayor importancia por contener el máximo de información en fórmulas sencillas y contundentes. Fue así como se llegó al cálculo de áreas y superficies que se expresan mediante símbolos de integrales inalterados desde Leibniz.

Lo mismo sucede con los índices, que nos permiten catalogar y orientarnos en las bibliotecas clásicas (también incluso ese asunto evoluciona rápidamente con Internet). Leibniz, en su *Discurso tocante al método de la certeza y el arte de inventar para acabar las disputas y para lograr un tiempo de grandes progresos*, escribe:

> Algunas veces estoy obligado a comparar nuestros conocimientos a una gran botica... sin orden y sin inventario... Hay una infinidad de bellas ideas y observaciones útiles que se encuetran en los autores, pero aún hay muchos más que se encuentran dispersos entre los hombres en la práctica de cada profesión. Y si... lo más esencial de todo eso fuese recogido y clasificado por orden con varios índices... nos asombraríamos de nuestras propias riquezas... Se requerirían unos Repertorios Universales tanto Alfabéticos como Sistemáticos...

Más adelante Leibniz evoca en ese marco a la medicina, el derecho, la industria, el comercio...

Babbage dio un paso, modesto pero más concreto en esa dirección, introduciendo, en 1840, la notación mecánica para reorientarse entre las obras necesarias para la construcción de la máquina analítica cuando redactaba su *Tratado de economía de máquinas y de manufacturas.*

Todas esas nociones cristalizaron en la segunda mitad de los años cuarenta en el hipertexto, técnica que permite acceder, a partir de una palabra, a otras apariciones de esa misma palabra en el texto. Por tanto, a partir de un texto cualquiera se pueden construir las relaciones de una palabra con sus otras apariciones, las relaciones de una palabra, al reemplazarla, con sus sinónimos, etc. Y así hasta el infinito, pues esas relaciones no están limitadas a un sólo texto ni a una sóla máquina. Por la red de telecomunicaciones se puede tener acceso (gratuitamente o no, lo que es otro tema que no ha hecho más que comenzar...) a todas las bases de datos del mundo, a todos los textos del mundo (si es que han sido informatizados). Es la *Web* en la que se necesita la ayuda de navegantes y agentes, programas que buscan para sus usuarios las *relaciones entre las relaciones.*

La universalidad de las leyes matemáticas

Tal y como acabamos de mencionar, las mismas ecuaciones (Maxwell) describen los comportamientos de todos los campos eléctricos y magnéticos, las mismas ecuaciones (Fourier) describen los fenómenos de propagación del calor; todo ello gracias a las herramientas que Leibniz puso en marcha.

Demos otro ejemplo: en 1746 la Academia de Ciencias de Berlín puso a concurso la cuestión siguiente: "determinar el orden y la ley que debería seguir el viento si la tierra estuviese rodeada por todos los lados por el océano, de manera que se pueda predecir en cada instante la velocidad y la dirección del viento en cada lugar".

El premio fue otorgado a Jean Le Rond d'Alembert por su *Mémoire sur la cause générale des vents.*

Después de simplificaciones importantes, la mayor parte de ellas sugeridas por la Academia de Berlín, d'Alembert obtenía un modelo matemático de las situación. A esos efectos utilizó como herramientas las ecuaciones en derivadas parciales (derivadas direccionales de funciones de varias variables), herramientas que él mismo había introducido años antes para el estudio y resolución de la vibración de una cuerda.

Basó su análisis sobre las ecuaciones del movimiento de los fluidos perfectos, ecuaciones universales que Euler acababa de obtener.

Pero las ecuaciones de Euler son no lineales. Si se dispone de dos soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante o de las ecuaciones que establecieron y estudiaron posteriormente Fourier (para el calor) y Maxwell (para la Electricidad y el Magnetismo), su suma es también solución. Nada similar se tiene para las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Por tanto, no es posible representar "la" solución en forma de suma de soluciones "simples" a la hora de atender, tanto a los cálculos impracticables en los que una consideración similar hay que desechar, como a lo poco que se conozca de la superficie del globo terrestre, en una palabra, como lo denominan los geómetras, a los pocos *datos* de los que se dispone para resolver un problema tal. En definitiva, no cuesta ninguna dificultad darse cuenta de que las investigaciones más profundas sobre esta materia sólo proporcionarán resultados imprecisos e imperfectos. Más aún: "una teoría completa sobre el campo al que nos referimos es quizás la obra de varios siglos".

"Cálculos impracticables, escasez de datos", d'Alembert enunciaba así dos de las dificultades que necesitan aún "varios siglos" de esfuerzos. D'Alembert habría debido añadir "la nolinealidad del mundo", obra que por otra parte deberá ciertamente perseguirse aún a lo largo de todo el siglo XXI.

¿Cómo obtener verdaderamente, de manera concreta y explícita, esta información? Es la potencia del análisis matemático y de la simulación, objeto de la segunda parte de esta exposición.

El análisis y la simulación

"Extraer" la información de un modelo matemático no lineal no es tarea fácil. ¡Por esto el mundo de la naturaleza es tan complejo!

En 1256, Alfonso X el Sabio, a refugio en el Alcázar de Segovia de una violenta tormenta exclamó: "Si el Señor Todopoderoso me hubiese consultado durante la creación del mundo le hubiese recomendado algo más sencillo".

Las relaciones entre los diversos subsistemas, denominadas retro-alimentaciones o *feedbacks*, son muy abundantes: la temperatura de los océanos y de la atmósfera están evidentemente relacionadas (por cierto que de forma no lineal), vegetación y humedad están correlacionadas, etc.

Todos esos aspectos pueden ser modelizados cada vez más satisfactoriamente. Pero por medio de modelos no lineales.

Nadie mejor que Leonardo da Vinci supo representar los remolinos y turbulencias de los flujos de fluidos, las velocidades del flujo según las circunstancias de la geometría, de los obstáculos, fenómenos visiblemente no lineales en los que argumentos análogos a la sencilla y vigorosa regla de tres dejan de ser aplicables.

Intentar comprender y después cuantificar esas situaciones es uno de los hilos directores de la ciencia y de la tecnología, de manera constante en la actualidad y probablemente de igual modo durante muchos decenios del próximo milenio.

¿Cómo abordar esas dificultades? En primer lugar, gracias a los progresos de los métodos del Análisis Matemático que han permitido ver rigurosamente lo que faltaba aún para que los modelos fueran completos permitiendo preparar el camino para que el uso de los ordenadores fuese posible. Por ejemplo, los métodos matemáticos derivados del Cálculo de Variaciones (¡métodos en los que se trata de optimizar las cosas!) son utilizados *cotidianamente* en los centros de previsión meteorológica (previsiones, dicho sea de paso, que no han cesado de mejorar).

Tras esto, las dificultades encontradas por d'Alembert han podido ser superadas gracias a los *superordenadores*.

Se trata de una larga historia. Comienza en 1640 con Blaise Pascal quien empleó en sus investigaciones para la puesta a punto de una calculadora "todo el conocimiento que mi inclinación y el trabajo de mis primeros estudios me han permitido adquirir en matemáticas", como él mismo escribía en 1645. La historia sigue con Leibniz y con Charles Babbage entre 1820 y 1840. Una contribución teórica fundamental fue aportada por el matemático Alan Turing, quien, en 1936, describía una máquina ideal, virtual, capaz de ejecutar (en principio) todo tipo de cálculo. En alguna manera, un resultado de existencia, que intervendría, en los años cuarenta, a la realización de los trabajos de los físicos sobre los transistores y a las contribuciones decisivas de John von Neumann sobre la lógica y las aplicaciones.

La aventura continúa. Simplificando al máximo, podríamos imaginar que un técnico hábil podía ejecutar algunas decenas de operaciones aritméticas por minuto con la máquina de Pascal (la Pascalina). John von Neumann se fascinaba, en 1944, por la perspectiva de algunos centenares de operaciones por segundo. En la actualidad, estamos en miles de miles de operaciones (lo que se llama el *Tera Flop*). Se divisa la centena de Tera Flops y se vislumbra el millar de Tera Flops (el *Peta Flop*)... Gracias a los progresos combinados de la Física y de la Informática.

Es así como se establecen los escenarios posibles de la evolución climática del planeta Tierra, herramientas indispensables para la toma de decisiones lo más racionales posibles en lo que concierne a la *Transición hacia el Desarrollo Sostenible*.

Aún no he evocado la modelización matemática en las *Ciencias de la vida*. Las modelizaciones en el dominio demográfico son antiguas y se remontan a T. R. Malthus. Las simulaciones basadas sobre sistemas de ecuaciones son corrientemente utilizadas para las prótesis, ya sea de huesos o de la circulación sanguínea. Y cómo no citar aquí el análisis del genoma, pese a que requiera técnicas matemáticas diferentes. Volveremos sobre todo eso más adelante.

Ante de pasar al control de los sistemas quisiera llamar la atención sobre un punto que concierne al rigor: me refiero al rigor matemático, por supuesto.

Conviene ser precisos: una vez representado (modelizado) un fenómeno mediante ecuaciones matemáticas los métodos matemáticos dan acceso a las informaciones obtenidas *rigurosamente*, sin contestación posible, una vez que la demostración ha sido validada por otros matemáticos.

Si las ecuaciones modelizan un fenómeno matemático la causa es comprendida, el teorema demostrado, la conjetura es resuelta (como la reciente resolución de la conjetura de Fermat por Wiles).

Pero cuando las ecuaciones modelizan fenómenos de las ciencias de la naturaleza o las ciencias de la vida un resultado rigurosamente establecido puede no corresponder a la realidad si los modelos no se corresponden con el fenómeno estudiado más que *de manera aproximada*. Es evidente que, por ejemplo, el sistema de los océanos del planeta Tierra *no puede* ser modelizado hasta sus mínimos detalles. Los resultados deducidos *rigurosamente* a partir de los modelos no pueden dar más que a lo sumo una *aproximación* del fenómeno real.

A veces se utiliza una expresión un poco vulgar pero gráfica: PIPO ("Poubelle *In* Poubelle *Out*") pretendiendo indicar con esto que las consecuencias correctamente deducidas de un modelo falso no pueden ser más que falsas.

La simulación debe ser validada. Si los resultados numéricos de la simulación no concuerdan convincentemente con los resultados de medidas experimentales hay que reconsiderar el modelo, lo que a veces implica revisar la teoría. Es por medio de ese va y viene incesante como avanzan las ciencias y la tecnología. La tan citada aceleración es fruto simplemente de la potencia de los métodos matemáticos y de los ordenadores.

Éstas son, a grandes líneas, algunas ideas para el análisis y comprensión de los fenómenos que gracias a los ordenadores llega a plasmarse en resultados cuantitativos.

¿Qué consecuencias se derivan a la hora de la acción? El papel de las Matemáticas y de la Informática en la acción corresponde a la *Teoría de Control* que será el objeto de la tercera parte de esta exposición.

El control o intervención sobre los sistemas

Controlar un sistema es actuar sobre él de manera que se comporte según nuestros deseos. Tomaré como ejemplo el de la misión Apollo. El 25 de mayo de 1961, en el mensaje al Congreso sobre las necesidades nacionales urgentes, John Fitzgerald Kennedy declaró: "Nuestra nación debe consagrarse a la realización, antes del fin del decenio, del envío del hombre a la Luna y su regreso a Tierra efectuado con toda seguridad". Se iniciaba así la misión Apollo encargada a la NASA.

Una sonda lanzada a la Luna debe seguir una trayectoria calculada, optimizada, denominada "nominal". Los cálculos son efectuados por métodos de Cálculo de Variaciones en el que Euler y Lagrange habían puesto las bases. Esos métodos conducen a un cálculo *off line* (independiente de la ejecución de la misión, de la conducción del sistema). Pero ínfimas variaciones del impulso de los motores conllevan desviaciones de la trayectoria de la sonda previamente calculada. Otros impulsos calculados (las variables de control) permiten corregir esas desviaciones y reconducen la trayectoria real hacia la trayectoria nominal. Eso no tiene sentido más que cuando, por una parte, se sabe dónde se está (no se puede controlar lo que no se puede medir) y, por otra, se tienen los medios de decidir la corrección *en tiempo real*. ¡Se precisa la decisión adecuada en el instante adecuado!

R. Kalman introdujo en 1960 el "filtro" que lleva su nombre dando en tiempo real la solución de sistemas lineales con criterios cuadráticos (se intenta minimizar, por ejemplo, el cuadrado de la distancia del estado a un estado optimal). Ésta se calcula *off line* por la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de J. Riccati, introducidas en 1700, y se ejecuta *on line* (en tiempo real) por "aplicación" de la solución así calculada en el estado medido del sistema.

¿Por qué un *filtro*? Porque este método "elimina los ruidos" y permite corregir las pequeñas variaciones entre la trayectoria nominal y la trayectoria obsevada.

La linealidad requerida por el método conlleva una restricción severa. No cesaremos de recordarlo: la naturaleza es no lineal. La misión Apollo no es ninguna excepción.

Bajo la hipótesis de no separarnos demasiado de la trayectoria nominal se podría linealizar en cada instante, al menos formalmente (mediante la consideración de las ecuaciones diferenciales tangentes). Eso es exactamente lo que hace la NASA (según se indica en el trabajo de 1981 de S. F. Schmidt: *The*

Kalman Filter: its Recognition and Development for Aerospace Applications). Y lo hace con el éxito de la misión, éxito que por supuesto hace intervenir otras ideas y otras técnicas.

La intervención en este marco de las ecuaciones de Riccati merece que nos detengamos un instante. El conde Riccati había estudiado los trabajos de Leibniz y Euler sobre las ecuaciones diferenciales. Personaje con fortuna, poeta a ratos (muy mediocre por lo demás), había rehusado las invitaciones de Euler, especialmente para ir a trabajar a Berlín. Toda su carrera se desarrolló en Venecia donde era consultado frecuentemente por las autoridades para estudiar las medidas a tomar para evitar el encenagamiento de la ciudad. Se ocupaba del medio ambiente, como diríamos en nuestros tiempos. En el campo de las ecuaciones diferenciales obtuvo la forma general de las ecuaciones que se pueden resolver analíticamente por simples transformaciones y estudió, de manera primordial, las ecuaciones con una nolinealidad cuadrática (y con una estructura particular) que hoy día llevan su nombre. Con el transcurso de los siglos, sus resultados se han convertido en un mero ejercicio para los estudiantes de la materia.

Examinemos ahora otros métodos sobre nuevos ejemplos.

La cuestión más general que uno puede imaginar en el marco del control es la del control del clima, cuestión que requiere una gran audacia. Siempre se podrá decir que el control del clima ya ha comenzado. Dictar normas obligatorias sobre las emisiones atmosféricas de gases de efecto invernadero es efectivamente una decisión de tipo "control" pero sin búsqueda de la optimalidad. En ese caso el criterio es el de mantener al planeta Tierra en un estado aceptable. En ese marco se toman las decisiones que se juzgan "razonables" y que se confía en no tener que lamentarse. Son las políticas denominadas "de precaución" y la teoría de los controles "sin lamentos" o "del menor lamento".

Una vez más la cuestión no era nueva. John von Neumann lo mencionaba en un artículo de 1955, *Can we survive technology:*

> Modificar la cantidad de energía solar va, por supuesto, más allá de las posibilidades humanas. Pero lo que cuenta realmente no es la cantidad que llega a la Tierra sino la fracción que es retenida por ella [...]. De hecho, la cantidad absorbida por la Tierra sólida, el océano o la atmósfera parece estar sometida a influencias delicadas. A decir verdad, ninguna de ellas ha sido hasta ahora significativamente controlada por la voluntad humana aunque hay muchas indicaciones sobre la posibilidad de su control.

Pero John von Neumann se apresura a añadir, después de haber descrito algunas de las acciones posibles (por ejemplo, el cambio del albedo de los glaciares polares mediante el esparcimiento de polvos negros):

> Es claro que lo que se podría hacer no es indicativo de lo que debería hacerse: provocar una nueva era glacial para incomodar a otros, o una nueva era tropical para el placer de todos no es necesariamente un programa racional...

La gestión de los embalses, depósitos fluviales y *polders* suministra algunos ejemplos en los que la modelización, simulación y control juegan un papel esencial. Quizás, la dificultad pincipal resida en este caso en la elección de los criterios a optimizar. En el caso de los embalses o de las esclusas, las variables de control son la mayor o menor apertura de los vanos o de las esclusas, así como los instantes de apertura y cierre. El sistema contiene como principales componentes, por una parte, la hidrodinámica (modelizado ahora, en general, por las ecuaciones de las aguas poco profundas, modelizadas por Saint Venant en la primera mitad de siglo XIX) y, por otra, de la meteorología local sobre los vientos, las lluvias, la presión atmosférica y, por último, en ciertos casos (*polders*, laguna de Venecia...) el "subsistema" de las mareas.

Algunos ejemplos de la puesta en marcha de este tipo de control son: la apertura de las esclusas de Nieuw Statenzijl, la apertura de las esclusas sobre el Támesis para la prevención de inundaciones en la región de Londres, gestión optimizada de la energía hidráulica por EDF (Electricité de France), etc.

Existen algunos estudios en curso sobre el sistema, muy complejo, de la laguna de Venecia (Proyecto Venecia Nueva).

He intentado mostrar, a partir de ejemplos históricos y de situaciones actuales, la potencia de la trilogía "Modelización matemática, Análisis y Simulación, y Control"

Un dicho francés afirma lo siguiente: el estúpido habla del pasado, el sabio de presente y el idiota de futuro...

Sin embargo quisiera esbozar ahora algunas perspectivas futuras.

Esas perspectivas no podrán atender a los métodos e ideas en la investigación fundamental pues por su propia esencia son imprevisibles.

Así, los resultados fundamentales obtenidos en Química supramolecular hacen quizás abordable la creación de nuevas moléculas (y por supuesto de agentes físico-químicos), tan útiles en la ciencias de materiales como para los medicamentos, por medio del control matemático.

Los progresos de la biología molecular pueden conducir a resultados de ese tipo. Todo ello por medio de cálculos sobre numerosas ecuaciones de Schrödinger acopladas entre sí, fuera del alcance en el momento actual pero quizás no en una decena de años.

Se sabe ya cómo modelizar la circulación sanguínea sobre partes del corazón o de una u otra arteria. ¿Acaso es impensable conseguir de aquí a una decena de años una simulación cada vez más realista de la circulación global?

Desde hace ya algunos años, las herramientas de simulación de intervenciones quirúrgicas (corazón, hígado) son utilizadas para la formación inicial de los futuros cirujanos, de igual manera que los recursos de simulación son utilizados de manera habitual para la formación de pilotos.

Qué decir tiene que la ambición última de esta modelización es el cerebro humano. No haré a ese respecto ningún pronóstico, observando solamente cómo la imitación de la naturaleza (lo que se llama la "ingeniería reversa") es un método cada vez más útil que ha aportado sus frutos como las redes neuronales y los algoritmos genéticos.

"Espesad todos los sueños, tenéis la realidad", nos dice Victor Hugo.

He intentado mostraros que las Matemáticas y la Informática pueden sustentar la ambición de describir, comprender y regular los mundos de lo inanimado y del ser viviente, transformando, poco a poco, los "sueños" en "realidad".

Antonio Valle

Cincuenta años de Matemáticas
en el recuerdo

(páginas 73 - 88)

Conferencia impartida en Málaga
en el *Acto de Inauguración Andaluza*
del Año Mundial de las Matemáticas,
el 28 de Marzo de 2000

Cincuenta años de Matemáticas en el recuerdo

Antonio Valle
Universidad de Málaga

e-mail: valle@anamat.cie.uma.es

Agradezco profundamente la intención que ha movido a los organizadores a designarme para abrir esta Jornada, así como los inmerecidos elogios de la presentación, pero todo ello no hace sino acrecentar la responsabilidad de iniciarla, especialmente por el carácter que tiene de pórtico oficial de las actividades de muy variado tipo que con motivo del *2000, Año Mundial de las Matemáticas* ya han tenido lugar o se van a realizar en toda Andalucía en los próximos meses y que deberían propiciar, entre otras cosas, un mejor conocimiento y una mayor unión entre los miembros de la comunidad matemática de nuestra región.

De los mayores, salvo pocas excepciones entre las que no me cuento, sólo pueden esperarse recuerdos y vivencias que, además naturalmente de los años, es lo único en que abundamos. De ahí la razón del título elegido, a la vista del cual considero no obstante normal que cualquier persona, sobre todo si es ajena a nuestro medio, se pueda preguntar: ¿cómo habrá conseguido sobrevivir a semejante pesadilla?

Empezaré mencionando al gran matemático francés *J.L. Lions* uno de los creadores de la moderna Matemática Aplicada, no por razones subjetivas aunque para mí tan importantes como haber sido su primer discípulo español o, muchos años después, su padrino en la investidura como Doctor Honoris Causa por la Universidad de Málaga y sobre todo por la amistad con la que me honra desde hace mucho tiempo, sino por el hecho de haber lanzado la idea—durante su periodo como Presidente de la Unión Matemática Internacional—de proclamar el año 2000 como *Año Mundial de las Matemáticas.* Pocos saben que ya en 1987, en gran parte a instancias suyas, tuvieron lugar en la Escuela Politécnica de París, unas Jornadas bajo el título *Mathématiques à venir. Quels mathématiciens pour l'an 2000?* con participación masiva de matemáticos y de científicos de otros dominios. En su, como siempre, brillante y al mismo tiempo amena intervención en el Acto celebrado el pasado 21 de enero en el Congreso de los Diputados, él, que joven de espíritu había previsto una disertación de tipo prospectivo, recordaba con ironía un dicho francés: *el necio habla del pasado, el* *juicioso del presente y el idiota del futuro;* así que, si hemos de concederle algún crédito a la cita, me temo no quedar hoy muy bien parado.

De todas formas, 50 años, algunos más si se incluye en el cómputo la fase final del Bachillerato, es un periodo tan excepcionalmente dilatado en la vida activa de una persona, que puede resultar significativo incluso en el desarrollo y evolución de una ciencia y yo quiero creer que no es completamente estúpido ni inútil, recorrer—por supuesto con unos cuantos grandes trazos, no se alarmen mis amables oyentes—un camino que tal vez a algunos, pocos, les haga revivir etapas de su vida y a la mayoría, mucho más joven, conocer detalles quizás sorprendentes de una transformación en profundidad como la que ha experimentado la Matemática en España en el último medio siglo. Lo intentaré, en el tono con el que se cuenta una pequeña historia, porque no sabría hacer ni tendría cabida en los límites de este Acto, algo de mayores pretensiones. Aunque obviamente no se pueda despersonalizar una experiencia personal, nada es más ajeno a mi deseo que cualquier afán de protagonismo.

Érase una vez a finales de los años 40 del siglo XX, un largo, larguísimo *Bachillerato* de 7 años, tras el cual había que realizar en la universidad correspondiente que, en el caso de Málaga era la Universidad matriz de Granada, el llamado *Examen de Estado.* Era un paso realmente importante para los jóvenes, que se asumía con naturalidad no exenta de preocupación. Con los blandos parámetros actuales, se trataba de una hazaña no muy inferior a los viajes de Marco Polo, incluida la materialidad del desplazamiento, porque de Málaga a Granada no se tardaba precisamente una hora.

No me es dado sin embargo recordar que ocurrieran ni la centésima parte de los dramas y calamidades de los que ahora somos puntualmente informados cada vez que se aproxima una convocatoria de la actual Selectividad que, como es sabido, por el momento sólo supera un 90% largo de los estudiantes. Desde el punto de vista de la formación, en especial de la científica, eran años difíciles por la escasez de profesorado competente. En las capitales andaluzas, con la posible excepción de Sevilla y Granada sedes de las dos universidades tradicionales, eran contadas las personas que podían colmar aquel vacío. Concretamente en Málaga, salvo en el *Instituto de Enseñanza Media* y en las *Escuelas de Comercio y Peritos Industriales,* centros con niveles muy apreciables, sólo algunos muy pocos profesores más, estaban en condiciones de contribuir a una adecuada preparación de los estudiantes en esa fase final de sus estudios secundarios. Colaboraban muchas veces en la enseñanza privada y con su profesionalidad y competencia, pese a circunstancias frecuentemente adversas, lograron inculcar a muchas generaciones de estudiantes, lo que es indispensable para la formación de un espíritu científico: hábito de razonamiento, distinguiendo lo fundamental de lo accesorio, y capacidad de expresarse con claridad y concisión; supieron en definitiva transmitir un entusiamo y una afición que prendió en muchos de nosotros. Creo que este año sería marco muy adecuado para que, al menos localmente, donde haya quien pueda todavía aportar algún testimonio de estas personas, se les dedique un recuerdo más pormenorizado. Bien lo merecen, porque es de estricta justicia el reconocimiento de su labor.

Permítanme centrar ahora la atención, en las entonces llamadas *Escuelas Especiales de Ingenieros,* con sede exclusiva en Madrid, con la única excepción de Industriales de la que existían otras dos en Barcelona y Bilbao respectivamente. Eran un poderoso señuelo para muchos de los que podían iniciar una carrera, quizás más que guiados por una auténtica vocación, seducidos por razón del prestigio social de que gozaban. Inspiradas en el modelo francés de las Grandes Escuelas, constituían verdaderos y singulares feudos. No existía entre ellas ninguna relación, ni tampoco—hasta mucho después—con el Ministerio de Educación, ya que cada una dependía orgánicamente del ministerio más afín al ramo, así la de Caminos, Canales y Puertos del de Obras Públicas, la de Navales del de Marina, las de Industriales del de Industria, la de Telecomunicación, una de las últimas creadas, del de Gobernación, etc. Prototipo de intereses corporativos, designaban libremente a su profesorado mediante concursos internos, frecuentemente dentro del cuerpo de ingenieros correspondiente y establecían un sistema de pruebas para el acceso a ellas, de los tipos más variopintos exigiéndose, generalmente, conocimientos de cultura general, idiomas, dibujos lineal y a mano alzada y, por supuesto, la resolución de problemas de matemáticas de los más variados dominios y también de mecánica. Los ejercicios estaban a veces distribuidos en grupos distintos y entonces podían aprobarse por separado, pero en otros casos se tenían que realizar pruebas eliminatorias sucesivas, de las cuales las que se hubiesen superado habían de repetirse en posteriores convocatorias, si no se conseguía llegar hasta el final. Se aceptaba como periodo mínimo para el ingreso, el de 3 años. Su dureza, dada su heterogeneidad y el hecho de que la superación de las pruebas gravitara sobre problemas sorpresa o de “feliz idea”, no tiene parangón ni remoto con ningún sistema posterior de evaluación en la enseñanza superior. Quizás lo más criticable de aquel tipo de pruebas, fuera la gran influencia que la suerte podía tener en el resultado.

Estos exámenes habían generado unas entidades singulares, las llamadas

Academias Preparatorias que tuvieron su periodo áureo entre 1945 y 1960 aproximadamente. En principio, podría pensarse que poca o ninguna relación tendrían estos centros con la Matemática, pero la realidad era muy distinta. Ciertamente no hubieran podido formar matemáticos, ni creo que en ningún momento se lo plantearan, pero la naturaleza de sus actividades y la colaboración de matemáticos en ellas, a veces ilustres profesores de Institutos o de Universidad—piénsese que me refiero a una época de verdadera penuria económica incluso para el profesor funcionario, anterior al sistema de regímenes de dedicación y sin complementos de ninguna clase—les daba un tono científico nada desdeñable. Las clases tenían como eje la resolución de problemas análogos a los propuestos en los exámenes de ingreso de la correspondiente Escuela. Aunque en teoría, las de cada profesor debían ajustarse a determinados textos, en la práctica una exposición metódica no solía ser muy prolongada y estaba sometida a las veleidades de la correspondiente Escuela. Bastaba una filtración según la cual, por poner un ejemplo, un profesor de Cristalografía de una determinada Escuela iba a formar parte de los Tribunales que habían de evaluar aquel año los exámenes de ingreso, para que en las Academias afectadas, profesores y estudiantes se sumergiesen en la búsqueda de información sobre poliedros—no sólo regulares convexos y estrellados—sino arquimedianos equiángulos y equifaciales y de los nuevos cuerpos que pudiesen resultar a partir de los anteriores, mediante truncamiento y biselamiento, siguiendo el patrón de los cristales minerales naturales. A veces tocaba la lotería y la Academia afortunada se anotaba un importante tanto que trascendía enseguida al medio estudiantil, con los efectos que, para aquella, pueden suponerse.

Ordinariamente, las enseñanzas estaban separadas en dos grandes apartados, Geometría métrica y descriptiva, Trigonometría plana y esférica, Geometría analítica y proyectiva e incluso algo de Geometría diferencial clásica de curvas y superficies por un lado, Cálculo diferencial e integral, algo de Ecuaciones diferenciales, aplicaciones del Análisis a la Teoría de ecuaciones y Cálculo de probabilidades por otro. Sería erróneo pensar que no fuesen necesarias grandes dosis de ingenio y profundidad mental para la resolución de los problemas, a veces muy llamativos e interesantes, que se proponían: cálculo de límites, sumación de series, desarrollos en serie, integrales, construcciones de figuras geométricas conociendo algunos de sus elementos, lugares geométricos, resolución de problemas con regla y compás, construcciones de proyectividades, dibujo de curvas en forma implícita, paramétrica o coordenadas polares y un largo etc. Un brillante matemático e ingeniero de la época *J. Gallego*

Díaz, escribió un libro titulado *Curso de Matemáticas en forma de problemas* algunos resueltos con métodos elegantísimos, que ilustra claramente el espíritu de aquellas enseñanzas; del título mencionado lo único discutible es la palabra curso.

Existían libros clásicos, de difícil lectura para un paladar matemático de hoy, a veces de carácter enciclopédico. Numerosísimas promociones de estudiantes utilizaron por ejemplo el *Traité de Géometrie* de *Rouché et Comberousse* editado en 1935 por Gauthier-Villars que, dadas las dificultades de importación, no era fácil de conseguir. Más accesibles resultaban los libros de *Rey Pastor, Análisis Algebraico, Teoría de funciones y Lecciones de Algebra,* o el *Cálculo Diferencial e Integral* y la *Geometría* de *Puig Adam.* Otros libros tenían un cierto aire misterioso porque se habían descubierto en ellos problemas similares a algunos propuestos en los exámenes de ingreso y por eso existía, entre los estudiantes, una gran demanda. Por citar algún ejemplo, la *Geometría Proyectiva* de *Alonso Misol* o un librito del danés *Julius Petersen,* traducido por Gallego Díaz antes mencionado, escrito nada menos que en 1879, sobre *Métodos para la resolución de construcciones geométricas,* o, en algunas Escuelas, ciertas aritméticas comerciales clásicas.

En una de las más acreditadas Academias preparatorias para la Escuela de Caminos, cabría destacar dos nombres. Un malagueño joven profesor de Geometría Métrica y Trigonometría, verdaderamente hábil dibujando en el encerado—prueben si no lo han hecho nunca con la circunferencia de Euler o de los 9 puntos de un triángulo que él trazaba perfectamente entre las ovaciones de los estudiantes—se trataba de alguien muy querido para algunos de los presentes: *Gonzalo Sánchez Vázquez,* años después catedrático del Instituto Fernando de Herrera de Sevilla en el que permaneció ya ininterrumpidamente, colaborando en los difíciles momentos iniciales con la Sección de Matemáticas de la Universidad Hispalense y, además, creador y animador de la Asociación Thales de profesores de matemáticas y de la Coordinadora Nacional de dichas asociaciones. Otro nombre en el mismo centro, de edad sensiblemente superior al anterior, con una vastísima cultura matemática y una pasmosa habilidad de cálculo: *Inocencio Aldanondo,* posteriormente—durante un breve periodo—primer catedrático de Análisis Matemático de la Universidad granadina.

A mediados de los años 50, en las tres Secciones de Matemáticas tradicionales, las únicas entonces existentes—Madrid, Zaragoza y Barcelona—estaba ya en vigor un plan de estudios para la Licenciatura con un primer curso de carácter selectivo, constituido por 3 asignaturas: Análisis Matemático, Geometría Métrica y Descriptiva y Física General. Los Análisis y las Geometrías eran obligatorios también en los cuatro cursos restantes, así como otras dos Físicas, Mecánica y Termología en segundo, Optica y Electricidad en tercero, más una Mecánica Teórica en cuarto, aún común con la Sección de Físicas, vestigio de un pasado no muy lejano en el que las Licenciaturas en Ciencias podían diferenciarse entre sí, menos que actualmente dos especialidades de cualquiera de ellas. Las restantes asignaturas obligatorias, eran una Astronomía General en segundo y el Cálculo de Probabilidades y Estadística en tercero. A partir de cuarto había varias opciones, la mayoritaria dirigida a la enseñanza, con asignaturas tales como Metodología y Didáctica, Historia de las Matemáticas y Problemas clásicos de la Matemática que podían ser muy atractivas. La minoritaria para los pocos que nos sentíamos más proclives a consolidar nuestra formación, en la que por primera vez, con esos nombres, aparecían cursos de Álgebra, Geometría Algebraica y Topología. Las dos opciones restantes eran las de Estadística y la de Astronomía, Geodesia y Topografía respectivamente.

En la Universidad Complutense, era catedrático de Análisis I, *D. José Barinaga y Mata* ya relativamente próximo a la jubilación y quizás con el ánimo un tanto quebrantado por ciertas dificultades que le habían afectado en los duros años de la inmediata posguerra. Era un hombre de gran inteligencia y el terror de los estudiantes por los variados e ingeniosos problemas que proponía: preciosos y enrevesados ejercicios de aritmética, restos potenciales, congruencias, cumulantes y fracciones continuas, determinantes, límites, sumación de series, etc. eran menú habitual, ¿quién de aquella época no los recuerda? Los que fuimos alumnos suyos seríamos capaces de encontrar, entre viejos papeles, algunos de aquellos enunciados y seguramente se nos seguirían resistiendo. La Geometría I estaba a cargo de *D. Pedro Pineda Gutiérrez,* un gaditano afincado en Madrid, que siempre conservó su acento y con él, la ironía y el gracejo de la tierra de origen. Una parte del examen final, de toda la asignatura por supuesto, era oral y consistía en resolver en el encerado, un ejercicio de Perspectiva Caballera o Axonométrica. Algo impensable en nuestros días, no sólo porque esas materias parezcan a muchos obsoletas, de hecho el estudio de la Geometría euclidea fue desaconsejado en 1957 por cualificados areópagos, sino porque ¡ay de quien intentara someter a un estudiante a un suplicio digno del más refinado Torquemada! ¿Será definitiva la desaparición de esta Geometría? Es llamativo que una personalidad científica como el *Prof. A.P. Calderón,* en una conferencia pronunciada en 1986 en el marco de una reunión sobre Educación Matemática en Argentina su país de origen, cite el libro de Rouché-Comberousse precisamente como un contraste de la capacidad para enfrentarse realmente con un problema, en este caso de Geometría, más efectivo que el almacenamiento mental de un gran número de teoremas, enunciados o demostraciones.

Del segundo curso de Análisis, siempre vital en la formación del Licenciado, era Catedrático *D. Ricardo Sanjuán Llosá* de gran agudeza mental, pero ya entonces con graves problemas de salud que le dificultaban la labor docente ordinaria en gran parte desarrollada por *D. Antonio Rodríguez Sanjuán* profesor adjunto y prestigioso catedrático de Instituto. D. Ricardo atendía sin embargo, a sus discípulos de Doctorado a veces a horas y en condiciones insólitas, sobre todo lo cual existe un rico anecdotario. Tradicionalmente dedicado a las Ecuaciones Diferenciales, el tercer curso de Análisis, por estar vacante la cátedra, se reducía a un programa básico sobre Métodos Elementales de Integración y tenía poca influencia formativa. Las cosas sólo comenzaron a cambiar en el curso 58-59 con la incorporación efectiva a la cátedra, del *Prof. A. Dou* lo que permitió que, ya a punto de licenciarnos, tuviéramos la oportunidad, quienes la buscamos, de oir por primera vez un teorema de existencia de soluciones y reflexionar sobre su profundo significado. Los cursos de cuarto y quinto Funciones de Variable Compleja y Medida e Integración respectivamente, ausente durante muchos años el Titular de la Cátedra, era el *Dr. Fuentes Mira* quien los impartía con programas muy completos y nivel muy digno, de forma que consiguió despertar, pese a la mala preparación que se arrastraba, el interés por el Análisis. Es oportuno recordar con especial afecto al mencionado profesor, con el que me unió una ininterrumpida y sincera amistad—si se me permite el inciso personal—porque finalizó su vida académica como catedrático de la Universidad granadina donde dejó la semilla que fructificó produciendo el actual, numeroso y extraordinario plantel de profesores e investigadores encuadrados mayoritariamente en aquel Departamento de Análisis Matemático y, en menor medida, también en el de Matemática Aplicada.

Por lo que a la Geometría, la otra columna vertebral de la Licenciatura, se refiere, era en el tercer curso cuando el estudiante comenzaba a percibir lo que supone el rigor y la disciplina mental en la construcción matemática. Sobre una síntesis muy bien lograda entre la Geometría Proyectiva al modo de Poncelet con el punto de vista más formal de Staudt, *D. Pedro Abellanas* fallecido el pasado año, impartía un curso muy completo. Sus dotes pedagógicas y su claridad expositiva eran proverbiales y también su nivel de exigencia. Colaboraba con él en las tareas docentes, otro gran profesor *D. Luis Esteban Carrasco,* actualmente jubilado de su cátedra de la Universidad de Granada, en la que realizó asimismo una importante labor. En el curso 57-58 empezaron a llegar los libros de Artin, Lang y otros, de los que D. Pedro incorporó a su programa, a partir de entonces, algunos enfoques. Y este hecho debe destacarse, porque seguramente fue decisivo en la etapa preliminar de la evolución de la Matemática en España, hacia lo que se dió en llamar Matemática Moderna que nos llegaba con retraso, sorprendiendo a quienes se habían formado en un marco exclusivamente clásico. En los cursos cuarto y quinto, *D. Germán Ancochea,* mente ágil donde las haya y atractiva personalidad, junto a un curso para todos de Geometría Diferencial clásica, completaba la formación de quienes habíamos elegido la opción de Matemática Pura, en sendas asignaturas de Álgebra y Geometría Algebraica. En algunos casos no existían aún versiones inglesas de libros básicos para el estudio de estas disciplinas y es así como, por ejemplo, hubimos de leer como pudimos en la versión alemana original, el *Moderne Algebra* de *Van der Waerden.* El ejemplar que nos cedió el Prof. Ancochea, es uno de los primeros que circuló en España, lo conservo como una reliquia y, en breve, quedará depositado en la Universidad de Málaga. No fue ni mucho menos el único caso, libros como el *Behnke-Sommer* o el *Hurwitz-Courant* para la variable compleja o el *Blaschke* en Geometría Diferencial, nos forzaron a dedicarles muchas horas por la dificultad idiomática adicional. Estábamos aun muy lejos de instalarnos en la cultura de lo cómodo, lo indoloro y lo super-divertido. A pesar de ello, entonces como ahora con un mínimo de aptitud e interés, lo que en términos actuales es tan distinto de elegir una carrera netamente vocacional en quinta o sexta opción, el esfuerzo resultaba compensador y las cosas acababan por entrar... eso sí, templadas, porque ya sabemos que, según autorizado parecer: *esas—las Mates—no entran ni frías ni calientes.*

El primer y para muchos único contacto con la Estadística y el Cálculo de Probabilidades se producía en tercer curso y era *D. Sixto Ríos García* el catedrático de la materia. Sus numerosos discípulos desempeñan las plazas de Estadística de la mayoría de las universidades españolas. Propuesto recientemente, Dr. Honoris Causa por la Universidad de Sevilla, será pronto investido solemnemente. Del mítico *D. Julio Rey Pastor,* libros aparte, como residía entonces en Argentina, sólo hubo alguna ocasión puntual de verlo, nunca de oírlo.

No podría olvidar, y aquí sí que no es posible despersonalizar el relato, la que pudo haber sido mi primera experiencia docente universitaria, inmediatamente después de acabada la Licenciatura con su entonces indispensable Reválida, en calidad de encargado de Grupo del curso Selectivo, ya común a todos los alumnos de Ciencias e Ingeniería. La obsesión por el rigor tan propia del novicio, ignorando la capacidad de absorción del destinatario, me hizo pasar el mes de septiembre anterior pensando la forma más adecuada de introducir los conceptos básicos de las primeras lecciones. En particular me preocupaba el punto de partida: los números naturales. La teoría de conjuntos, los axiomas de Peano—sobre los que H. Poincaré afirmaba con humor: *un método muy apropiado para dar una idea del número uno a quienes jamás hayan oido hablar de él*—desfilaban por mi imaginación y todo me parecía insuficiente. Llegado el momento del estreno, por decisión de última hora fue el catedrático que tutelaba la agrupación y no yo quien impartió la primera clase que comenzó diciendo, los números naturales son 1, 2, 3,... en sintonía con la conocida frase de Kronecker que los proclamaba obra del buen Dios. Naturalmente no hubo el menor gesto de extrañeza por parte de los estudiantes.

Se simultaneaban las primeras actividades docentes, en el mejor de los casos como adjunto interino con nombramiento por 4 años, prorrogables otros 4 si se había obtenido el título de doctor, con los cursos monográficos de Doctorado. Eran muy escasos los que realmente se impartían, entre ellos los de Geometría Algebraica al modo de *Zariski,* a quien hubo incluso ocasión de oír en Madrid, lo que entonces en la primera universidad del país era un acontecimiento. Más inefable fue una conferencia de *S. Lefschetz* un matemático e ingeniero ruso que había perdido las manos en un accidente, a pesar de lo cual, mediante una prótesis, escribía perfectamente en el encerado. Explicó con toda parsimonia los distintos tipos de puntos críticos elementales y su comportamiento respecto de la estabilidad de cuya formulación matemática jamás habíamos oido hablar, para un sistema diferencial autónomo de dos ecuaciones y esta, hoy obligada primera lección, en ese apartado, de cualquier curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, nos resultó completamente novedosa.

Por su impacto en el reducido grupo de doctorandos en Análisis, hay que resaltar el impartido en el curso 60-61 por el *Prof. A. Dou* en el que por primera vez se expuso en España el concepto de Distribución encuadrado en la Teoría general de Espacios vectoriales topológicos, explicado en el Instituto Jorge Juan del C.S.I.C. Este concepto, en última instancia, potente generalización de las funciones diferenciables clásicas, verdadero punto de partida para un estudio actual de las ecuaciones diferenciales, había sido, sobre diversos precedentes, sistematizado por el matemático francés *L. Schwartz.* En un libro autobiográfico que esta insigne y, en aspectos extra-científicos, polémica personalidad publicó en 1997 *Un mathematicien aux prises avec le siècle,* dice: *el invento de las distribuciones tuvo lugar en París a principios de 1944 ... el descubrimiento se produjo en una sola noche. Es un fenómeno bastante frecuente que he vivido numerosas veces en mi vida y que muchos matemáticos conocen. Es bien evidente que tal proceso no es concebible si no se imaginan numerosas reflexiones anteriores que habiendo resultado infructuosas, quedaron sin embargo almacenadas en el cerebro.* Afortunadamente parece que las S.S. no lo consideraron subversivo.

Mencionar el *Instituto Jorge Juan del C.S.I.C.,* es referirse—al margen naturalmente de la labor personal—al único reducto de investigación que, junto a los Seminarios Matemáticos coordinados de Zaragoza y Barcelona, existía hacia 1960 en España. Dirigido durante largos años por *D. Pedro Abellanas* con medios verdaderamente precarios, sólo su tesón y el esfuerzo de muy pocos colaboradores permitió mantener una actividad, tal vez modesta, pero continuada a la que no se puede regatear un gran mérito. Formaba parte de ella, la publicación de la *Revista Hispano-Americana de Matemáticas* y la *Gaceta Matemática* ésta última más orientada a los estudiantes. De allí salieron iniciativas tales como las becas de iniciación a la investigación que, en Matemáticas, logró que pudiesen ser disfrutadas por alumnos de quinto curso o la celebración de las *Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles* que tanto contribuyeron al cambio que se operó, en años sucesivos, en el panorama matemático español.

A principios de los 60 era aún difícil conseguir los medios indispensables, generalmente en forma de becas, para realizar una estancia investigadora fuera de España. Fui de los primeros afortunados. Al margen del impacto personal que puede producir una estancia de 7 meses—la mayor parte del curso 61-62—en un país por tantas razones excepcional como Italia, fue una experiencia interesante el periodo transcurrido en el *Istituto di Alta Matematica* del C.N.R. en Roma. No atravesaba un momento óptimo la Matemática italiana a pesar de su sólida tradición. Para alguien formado ya en esquemas más abstractos, llamaba la atención encontrarse con una Geometría bastante etérea, como alguna vez he dicho, próxima a las Bellas Artes, con constantes apelaciones a la intuición. Como contraste con lo que ocurría en España, era en los últimos cursos de la Licenciatura donde los estudiantes oían hablar por primera vez de las estructuras algebraicas que aquí ya se explicaban en primero. En Análisis, aunque con orientación clásica, la formación era por el contrario mucho más completa que la conseguida en nuestra época de estudiantes, gracias en medida importante, a dos destacados analistas *G. Fichera* y *L. de Vito.* La asistencia a breves Escuelas de Verano sobre una temática concreta, generalmente organizadas en emplazamientos de excepcional belleza, ofrecía la posibilidad de ir rellenando huecos e ir completando la propia formación. Por desgracia el hecho de encontrarse habitualmente aislado por no haber más participantes españoles, dificultaba rentabilizar de modo óptimo la experiencia.

El París de mediados de los 60, deslumbraba, también desde el punto de vista científico. Conocer en su ambiente a grandes figuras de la Matemática contemporánea como *J. Leray, H. Cartan, L. Schwartz, J.L. Lions, B. Malgrange, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz* y tantos más franceses o visitantes, los seminarios y conferencias en el *Instituto H. Poincaré,* en el *Collège de France* o en centros del *C.N.R.S.,* hacían comprender que se asistía al alumbramiento de nuevas teorías y que, en la medida de la propia capacidad, se participaba en una vida científica activa, brillante y por supuesto enormemente competitiva. En 1965 por ejemplo, el *Prof. Lions* impartió en el *Instituto Blaise Pascal,* un curso de Análisis Numérico sobre aproximaciones y discretizaciones de espacios de Sobolev, para la resolución efectiva de problemas de contorno relativos a Ecuaciones en Derivadas Parciales, que puede estimarse el punto de partida del posterior rapidísimo desarrollo de los Métodos de Elementos Finitos en su versión matemática, gracias a la irrupción de los ordenadores que en este dominio como en ningún otro de la Matemática, ha subvertido el panorama tradicional. Pocos años después, aprobado por el Gobierno francés el llamado Plan Calcul, se creó el *Institut de Recherche en Informatique et en Automatique* con su anexo matemático el LABORIA encargado de estimular y desarrollar las nuevas tendencias que habían surgido en el Análisis Numérico, como consecuencia del desarrollo informático. Años después se convirtió en el INRIA con sede central en las proximidades de Versalles, en el que muchos matemáticos españoles ya consagrados, han realizado estancias de trabajo.

En España por los años a los que nos venimos refiriendo, se habían empezado a crear nuevas Secciones de Matemáticas, la primera de ellas, cuarta por tanto en el conjunto del país, fue la de Santiago de Compostela hacia 1960 y en Andalucía la primera, sexta en España, la de Granada en 1963. Al mismo tiempo se dotaban algunas cátedras de las que, hasta entonces, en Matemáticas podría haber unas cuarenta en todo el país. Piénsese además que en la Universidad como en los Institutos sólo existía el cuerpo de Catedráticos Numerarios, y se tendrá una idea más aproximada tanto de las disponibilidades de profesorado como de las contadas oportunidades para los principiantes.

Era indispensable preparar las terribles *oposiciones* de antaño, con 6 ejercicios más las tristemente célebres *trincas* en los dos primeros. Su realización exigía, además de los conocimientos científicos y la labor investigadora pertinentes, un exhaustivo dominio de los programas que se presentaban y, desde luego, nervios muy templados. Así tras este duro proceso en lo que me concierne, me vine a encontrar en Febrero del 67 tomando posesión de la cátedra de Análisis Matemático II y III de la Universidad Compostelana. No existía aún la estructura departamental universitaria que empezó a ser operativa poco después en su primera versión, la de *D. Manuel Lora Tamayo.* Había ya dos grupos incipientes aglutinados en torno a las dos cátedras cubiertas de Geometría Diferencial y Geometría Proyectiva y Álgebra. Por lo que respecta al Análisis, una mesa, una silla, treinta libros y afortunadamente, la colaboración eficaz de algunos catedráticos de Instituto, experiencia común con ligeras variantes a varios queridos colegas. En el ámbito andaluz los Profesores *Guiraum, Esteban Carrasco y Fuentes Mira* en Granada o *Castro Brzezicki* en Sevilla—segunda Sección de la región creada en 1967—podrían dar o haber dado, testimonio de ello.

Al margen una vez más de los sentimientos personales, en el aspecto profesional hubo que hacerlo todo. Fue una experiencia dura pero ilusionante. La sobrecarga de trabajo docente increible con óptica actual; no creo que muchos profesores universitarios hayan llegado a impartir, contemporáneamente, 6 asignaturas más curso de Doctorado. Queríamos que las nuevas generaciones no encontraran las carencias que nosotros habíamos padecido y no regateábamos ni dosificábamos nuestra disponibilidad para lograrlo. Hubo que tutelar el arranque del Centro de Cálculo y participar en los problemas que planteaba la integración en la Universidad de las antiguas Escuelas de Magisterio, Comercio y Peritos de todo el distrito universitario que, en Galicia, coincidía con la región. Viniendo de Madrid, donde la situación empezaba a mejorar sensiblemente, aquel cúmulo de responsabilidades, resultaba increíble.

Muchos años después, dos importantes Departamentos de aquella Universidad, el de Análisis Matemático y el de Matemática Aplicada con sus ramificaciones en las otras dos universidades gallegas de A Coruña y Vigo, en la de Oviedo y en la de Cantabria, nacieron del esfuerzo de aquellos años y se desarrollaron gracias al dinamismo y al gran nivel científico de quienes tomaron el relevo. En Sevilla a principios del curso 73-74, la situación era ya distinta, no en vano habían transcurrido varios difíciles años y no faltaron momentos en los que se llegó a temer por el futuro de la Sección de Matemáticas. Una vez más, fue providencial la colaboración de un selecto grupo de profesores de Instituto. En Análisis Matemático había un equipo prometedor que después ha superado con creces todas las previsiones, dirigido por el *Prof. A. de Castro* desgraciadamente fallecido, iniciador y alma de aquella Sección. Se constituyó el mencionado curso, el Departamento de Ecuaciones Funcionales con un volumen importante pero más razonable de trabajo que el descrito en Santiago de Compostela, lo que unido a la disponibilidad de recursos que empezaba a ser apreciable, permitió establecer contactos asiduos con investigadores y Centros de otros países y singularmente con Francia. Los problemas en la Universidad, empezaban a cambiar de nivel. Por cierto que, en este orden de cosas, nunca se ponderará bastante la activa e inteligente ayuda de los *Servicios Científicos de la Embajada* de dicho país, para favorecer tales contactos. Hoy, un numeroso, acreditado y magnífico Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico heredero de aquél, se ha convertido en uno de los más destacados del panorama matemático español. De Sevilla han surgido además brillantes equipos que realizan una espléndida labor en otras dos universidades andaluzas Córdoba y Cádiz, ésta última con una prometedora Sección de Matemáticas de nueva creación.

Hay que decir que entre los años 73 y 84, se produjo en Sevilla un crecimiento similar, cualitativo y cuantitativo, de todos los Departamentos de Matemáticas que después ha proseguido sin interrupción convirtiendo a la Facultad de Matemáticas y a las Escuelas Técnicas que los albergan, en centros de gran vitalidad y pujanza. Un proceso paralelo tuvo lugar en la Sección matemática granadina consolidada desde hace muchos años, y con una influencia notable en la puesta en marcha de las universidades de su antiguo distrito universitario.

También la de Málaga, la tercera de Andalucía, creada en el curso 76-77, tras los siempre difíciles años iniciales, desde 1984 hasta la fecha no ha cesado de afirmarse y puede constatarse que todos los Departamentos de Matemáticas de esta universidad han incorporado y lo siguen haciendo un profesorado joven y brillante. En el orden investigador se ha producido una eclosión de Grupos cada vez más cualificados, en contacto con otros Centros de investigación de Andalucía, del resto de España y de otros países. Confieso que me produce especial satisfacción, que la línea de investigación más dinámica del Grupo a cuya puesta en marcha contribuí, se haya centrado en un dominio de trabajo tan insólito entre matemáticos, y por eso lo cito, como la *Simulación Numérica en Oceanografía* con particular énfasis en nuestro entorno: estrecho de Gibraltar y mar de Alborán, así como en el estudio matemático de los fenómenos de interacción océano-atmósfera, originando trabajos que están encontrando un eco creciente y un importante respaldo en los medios científicos competentes.

Por completar esta necesariamente breve y superficial panorámica de la investigación matemática en nuestra Comunidad, hay que hacer constar que también las Universidades de las otras tres provincias hermanas contribuyen decididamente al aumento de su importancia, Almería con la cuarta Sección de Matemáticas de la región, posee un importante elenco de grupos de investigación competitivos, lo que también ocurre en Jaén y Huelva.

Es muy significativo y prometedor el hecho, de que además de la de Sevilla, las universidades de Jaén y Almería estén en la actualidad regidas por matemáticos.

En los dos ejes de la actividad de los matemáticos que son la enseñanza y la investigación, la transformación a lo largo de 50 años ha sido efectivamente espectacular, apuntando además de forma más o menos decidida una tercera posibilidad, la incorporación de matemáticos al mundo de la Empresa y de la Industria, toda una prometedora alternativa para los futuros licenciados.

La mayoría de los presentes son o hemos sido profesionales de la enseñanza y conocemos a fondo la evolución no siempre negativa de la relación profesor-alumno y el ambiente que hoy se respira en los centros de cualquier nivel, parece pues ocioso insistir sobre este tema que en la sesión de la tarde tendrá posiblemente mejor ubicación. No soy muy optimista al respecto, pero sin que ello signifique olvidar el significativo número de buenos estudiantes, más o menos brillantes, pero responsables con cuyo trato me he enriquecido, ni desconocer el hecho de que siempre habrá alumnos por los que valdrá la pena luchar para abrirles camino. Las modernas técnicas educativas potenciarán tal vez la educación a distancia, lo que, en algunos casos, supondrá un paso importante sobre todo si ésta (la distancia) es suficientemente grande. Desapareció prácticamente en este periodo la figura del *maestro* entendida al modo clásico y ridiculizada por algunos *iluminados*, ¿será acaso sustituida por la del maestro virtual?

En la investigación por el contrario, el panorama es por fortuna radicalmente distinto. El aumento de recursos materiales y la consolidación de los Departamentos, Secciones o Facultades de Matemáticas, han motivado un crecimiento espectacular de la producción matemática en España que ha pasado a ser el noveno país con un 4% aproximadamente de la producción mundial, algo impensable no hace más de 15 ó 20 años. Debe reconocerse, que algunas iniciativas—como en Andalucía pudo ser en su momento la homologación de los Grupos de investigación dotándolos de medios pero también de un status flexible y cómodo, mérito básicamente del entonces Consejero *Pascual Acosta* y sus colaboradores—han contribuido sin duda a acelerar este desarrollo. También impulsan ese auge, en la medida de sus posibilidades, las asociaciones matemáticas de distinto tipo; por citar tres de características distintas e implantación importante en Andalucía, la *Thales,* la renovada *Real Sociedad Matemática Española* y la *Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA.*

La Matemática es—como todos sabemos—una ciencia viva inspirada en los fenómenos del mundo real que luego abandona para proceder a una formalización de sus propiedades intrínsecas. Por otra parte, siempre han existido dos actitudes ante ella, la de quienes se han preocupado básicamente por el rigor lógico en su construcción y por desarrollar y perfeccionar las estructuras en que se hace y la de quienes, sin desconocer por supuesto la ineludible necesidad de ese rigor, se sienten más motivados por aplicar sus conocimientos a la resolución aunque sea en una aproximación académica de los problemas reales que plantea la vida cotidiana con la complejidad creciente que imponen las nuevas tecnologías. No tiene sentido enfrentar estos dos tipos de mentalidad, porque probablemente ambas coexisten aunque en distinta medida, en todo matemático y es tan cierto que se han gestado teorías que, independientemente de su aplicabilidad, enaltecen la agudeza y la capacidad de la razón humana como que, utilizándolas, se han conseguido resultados espectaculares en la resolución de difíciles problemas en una gama cada vez más amplia de aplicaciones, de la Astronáutica a la Climatología, de la Biomedicina a la Economía, de la Mecánica de medios contínuos a la Física de plasmas, de la Arquitectura o la Arqueología a la Oceanografía o al Medio Ambiente etc. que, con seguridad tenderán a aumentar en los años venideros, gracias a la potencia de los medios de cálculo y que no pueden ni deben estimarse como Matemática de segundo nivel.

Ya en 1927, a la muerte de *Karl Runge* primer titular en Alemania de una cátedra de Matemáticas Aplicadas, decía en su panegírico fúnebre Richard Courant: *Las matemáticas han sido impelidas por la preocupación de una crítica de los fundamentos a atenuar sus lazos con otras ciencias y a cultivar una suerte de especialización y de alejamiento de las realidades que, hasta el presente, muchos profanos consideran como típica de matemáticos* y añade *Runge fue de los primeros en encontrar insoportable dicha situación. Cuando Felix Klein logró hacerle nombrar profesor de Matemáticas Aplicadas en Göttingen, dió un paso decisivo para devolver a las aplicaciones el lugar que en nuestra ciencia le corresponden. Desde entonces, es, precisamente bajo la influencia de Runge,* *como el desarrollo general de las matemáticas ha superado este estadio de "teoría extraña a las realidades"; las ideas y métodos de Runge en este sentido, han mentalizado a la generación matemática más joven en que, felizmente, tal separación no es ya necesaria para la Ciencia.*

Superados los posibles antagonismos, las aplicaciones, al ser más asimilables por el gran público, pueden allanar el camino e incluso constituir la vía privilegiada para el establecimiento de un diálogo entre la Comunidad matemática y la Sociedad, para la cual las Matemáticas siempre difíciles de enseñar y de aprender son paradigma de impopularidad. Se trata del objetivo prioritario marcado por el *Comité Español* para el *2000 Año de las Matemáticas.* Apasionante cuestión esta de las atormentadas relaciones entre Matemáticas y Sociedad. No creo que podamos, a fuer de sinceros, considerarnos exentos de culpa al respecto. Recuerden la feroz diatriba contra un sentido excesivamente elitista de la Matemática y de su desapego de la realidad contenida en unas palabras de *Grothendieck.* A. Grothendieck berlinés nacido en 1928, nacionalizado francés, gran matemático contemporáneo, renovador de la Geometría Algebraica, medalla Field en 1966, en una polémica intervención a principios de 1972, no exenta de connotaciones políticas en el sentir de muchos, clamaba contra el exceso de especialización en los siguientes términos: *En 1971 he comenzado a preguntarme para que podían servir mis trabajos que habían llegado a tal nivel de hermetismo que sólo podían ser comprendidos por ocho o diez especialistas del mundo entero ... ¿para qué puede servir una Ciencia si está completamente alejada de lo que debiera ser su objeto, a saber un servicio a la Humanidad?* Y efectivamente, fruto de este drástico planteamiento, al que por supuesto cabrían múltiples acotaciones, fue su apartamiento temporal de la investigación. Es innegable, pese a todas las reservas legítimas, que las palabras anteriores brindan materia para la reflexión.

Como no se puede apreciar lo que se ignora, creo que sólo un cierto conocimiento de la evolución del pensamiento matemático que es, no se olvide, una parte muy considerable del pensamiento científico y, en términos generales, de la cultura humana, ni más ni menos que el que se exige en cualquier otro campo del saber para calificar de culta a una persona, podría llevar a la Sociedad al convencimiento—en palabras del *Prof. Fernández Pérez* Presidente del Comité Nacional—de que *las Matemáticas son hermosas, elegantes, útiles e importantes.*

Muchas gracias por su paciencia y amable atención.

Enrique Fernández-Cara

Comentarios sobre la reunión de Decanos y Directores de Departamentos de Matemáticas

(páginas 91 - 94)

Reunión celebrada en
Santiago de Compostela,
los días 18 y 19 de Febrero de 2000

Comentarios sobre la reunión de Decanos y Directores de Departamentos de Matemáticas

Santiago de Compostela, 18 y 19 de Febrero de 2000

1. Introducción

En una reunión del Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas celebrada en 1999, surgió la idea de organizar un encuentro de los Decanos y Directores de Departamentos de Matemáticas, para tratar algunos temas relacionados con las Matemáticas en nuestro país que exigen soluciones urgentes.

Tras un ofrecimiento de E MACIAS, Decano de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, la reunión fue convocada para los días 18 y 19 de Febrero de 2000. En ella estuvieron presentes, entre otros, representantes de la inmensa mayoría de las Universidades españolas donde se imparte la Licenciatura de Matemáticas.

Del desarrollo de esta reunión se ha elaborado un informe, coordinado por E MACIAS, que ya ha sido repartido entre los asistentes. El objetivo de estas páginas es el de resumir y comentar algunos aspectos y también algunas conclusiones a las que pareció haberse llegado.

En cualquier caso, el desarrollo de las jornadas dejó patente la conveniencia de realizar una segunda reunión. Está prevista para noviembre de 2000, en la Universidad de Barcelona.

2. Resumen del programa

En las jornadas, se presentaron, entre otras, las ponencias siguientes:

Algunos problemas de las Facultades de Matemáticas en España,
por JM SANZ SERNA, Rector de la Universidad de Valladolid.

Consideraciones sobre los Planes de estudios,
por C RODRIGUEZ, Vicerrector de Ordenación Académica y Titulaciones de la Universidad de Santiago de Compostela.

Informe sobre los Planes de Estudios de Matemáticas,
por T RECIO, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cantabria.

El programa de excelencia en la Universidad de Barcelona, por J ELIAS, Decano de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

Análisis y perspectivas de los estudios de Matemáticas,

por J BRUNA, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Bachillerato y acceso a la Universidad,

por F VILLARROYA, representante de la F.E.S.P.M.

3. Comentarios

El guión de la conferencia inaugural en gran medida sirvió de agenda para las discusiones de los dos días. Las conclusiones recogidas en el informe que se menciona más arriba son, esencialmente, las siguientes:

Nivel profesional

La comunidad matemática universitaria se considera bien preparada y con un alto potencial profesional.

Pero, por otra parte, esa comunidad es consciente de graves desajustes, sobre todo a nivel docente (de hecho, parece deducirse que la reunión de Decanos y Directores estuvo motivada fundamentalmente por esta percepción).

No obstante, la impresión general percibida es de optimismo y de confianza en nuestra capacidad y nuestras actitudes para tratar de corregir y mejorar la situación actual.

Problemas detectados

Son los siguientes:

1. El reto de comunicar:

Se ha prestado muy poca atención a la necesidad de comunicar a la sociedad la importancia del trabajo del matemático, el perfil de la profesión y la idea de que las Matemáticas son útiles, valiosas y relevantes.

Tampoco se ha informado bien a los estudiantes de la importancia real de las Matemáticas, lo que les puede hacer, a su vez, incapaces de transmitirla.

2. Estudios universitarios:

Las Licenciaturas de Matemáticas no están siendo capaces de atraer a suficientes alumnos de calidad. Parece que esto se debe, por un lado, a la falta de atractivo de las titulaciones y, por otro, al hecho de que las carreras no están realmente bien diseñadas para formar de acuerdo con las opciones profesionales.

3. Planes de Estudios:

Se detecta con carácter general que están demasiado especializados, poco conectados con otros saberes científicos, con una carga docente presencial excesiva, sin tiempo para el trabajo personal, con escasa orientación profesional y faltos de prácticas.

En la confección de los Planes de Estudios, ha tenido un importante efecto la compartimentación en áreas de conocimiento y Departamentos que ha supuesto una sobrecarga de materias y una evidente especialización.

4. Enseñanza secundaria:

Se observa falta de coordinación entre los estudios de Bachillerato y la enseñanza universitaria en Matemáticas.

El nivel de conocimientos de los alumnos que acceden a las Facultades no es el que se supone en los Planes de Estudios de las Universidades. Es preciso adaptar los estudios a esta realidad.

En este ámbito, se hizo patente una reivindicación explícita de los asistentes: Reclamar la importancia formativa de nuestra área y la necesidad de ampliar el tiempo dedicado a su enseñanza en los estudios no universitarios.

5. La profesión de matemático:

Se constata que un reto pendiente consiste en explicar a la sociedad que existe una profesión de matemático, con un perfil definido, con amplias conexiones interdisciplinares y fuertemente demandada, aunque no siempre de manera explícita.

6. El papel de las Sociedades Matemáticas.

Estas deben desempeñar un papel central a la hora de lograr una buena comunicación con la sociedad. Esto supone, además, en una sociedad cada vez más compleja, la colaboración con otros profesionales.

Acciones a emprender

Se propusieron las siguientes acciones:

1. Adaptar los Planes de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas a los conocimientos iniciales de los alumnos. Al mismo tiempo, reclamar más tiempo de docencia de Matemáticas en la enseñanza secundaria. Descargar los Planes de Estudios de materias, horas presenciales y especialización.

2. Hacer la carrera más atractiva y relevante. Comunicar mejor las posibilidades, retos y atractivos de las Matemáticas. Adaptar los Planes de Estudios a las salidas profesionales reales, incluyendo la docencia. Atraer a

más estudiantes motivados y de calidad, compitiendo con otras titulaciones (Ingeniería, Informática).

3. Los cambios que son ahora necesarios exigen no un trabajo individual, sino una acción colectiva, responsable y generosa en distintos niveles: Departamentos, Facultades y Sociedades profesionales.

(En este apartado, he respetado la redacción del informe).

Enrique Fernández-Cara
cara@numer.us.es

ANUNCIO DE BECAS PRE Y POSTDOCTORALES
EN EL MARCO DEL PROYECTO EUROPEO
"Homogenization and Multiple Scales"
(HMS2000), RTN1-1999-00040.

As part of the current Research Training Networks (RTN) programme of the European Union, the European Commission will provide four years of funding starting in the Summer of 2000 for a collaborative research network dedicated to the Mathematical study of multiple scale phenomena. The main fields of applied mathematics and Modelling which are concerned are:

- quasiconvexity,
- homogenization of partial differential equations
- relaxation techniques for optimal design
- associated numerical computations and applications.

The Network will link the following European institutions:

- the Ecole Polytechnique (Centre de Mathmatiques,
  UMR 7640 of the CNRS) as coordinator
- the University of Heidelberg (Germany),
- the Technical University of Denmark (Lyngby, Denmark),
- the Universidad Complutense of Madrid (Spain),
- the Universit degli Studi di Pisa (Italy)
- Institutute of Mathematics of the Academiei Romane (Bucarest, Romania)

The network has 218 months of fellowships that can be grouped for 3, 4, 6 or 9 month fellowships, to be used by eligible individuals (according to the rules of RTN program, see below) in one of the participating countries. It is expected that the recipients will receive two successive fellowships which will cover a theoretical aspect then an applied aspect of the program.

For each recipient, a personalized program will be defined at the onset of the training period, with the goal of widening (into areas which are new to them) as well as deepening the expertise of the candidate. The training program will be outlined by the scientific committee of the Network and the receiving teams in collaboration with the candidates. Applications from women and minorities are particularly welcome.

The rules of the RTN program state that network posts are open only to nationals of a European Union country and Associated States different from that in which the post is to be held. Applicants should also be under 36 years of age (though military service and maternity/paternity leave can be taken into consideration), and should not have been resident in the country where they propose to work for more than 18 months in the two years before the start of the post.

Pre- and post-doctoral salaries at each institution will be paid in accordance with the local regulations for these positions. Extra funding will be available for the selected scientists to spend time in network institutes other than their host and to attend workshops funded by the grant.

These Network positions start nominally after the Network contract signature (sometime in the Summer of 2000), and may be held for any period until June 2004. Applications, which must contain a curriculum vitae, a list of publications and the research program that the applicant intends to develop, can already be submitted. They should be sent directly to the local coordinators at the institutions of interest (addresses below) with a copy to the network coordinator. More general inquiries can also be addressed to the network coordinator:

Alain Damlamian
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France
mailto:damlamian@polytechnique.fr

PARA MAS INFORMACION LOS INTERESADOS PUEDEN TAMBIEN DIRIGIRSE A:

E. Zuazua
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense
28040 Madrid
zuazua@eucmax.sim.ucm.es

Se ha creado recientemente un nuevo “web site” (denominado “Navier-Stokes equations Net”) con la intención de que sea un foro para centralizar la información que circula por Internet relativa a los aspectos matemáticos, físicos, propios de la Ingeniería y computacionales de las ecuaciones de Navier-Stokes y temas afines:

http://wwwlma.univ-bpclermont.fr/NSenet/

Se espera así crear una valiosa base de datos para que todos los interesados puedan estar informados sobre los logros más recientes y, al mismo tiempo, consigan conectarse ente sí.

Este “web site” ha sido creado por Didier Bresch y Pascale Lefort, en colaboración con el Profesor Giovanni Paolo Galdi.

Pueden hallarse, entre otras, las secciones siguientes:

“People”, “Books”, “Conferences”, “Journals”, “Lecture Notes”, “Papers”, “Article and Book Reviews”, “Ph. D. Thesis Summaries”, “Numerical Packages”, “Links”, ...

Te puedes suscribir e integrar en la lista de personas interesadas consultando la sección “mailing list”.

Por favor, no dudes en contactar con

NSemaster@ucfma.univ-bpclermont.fr

para enviar Notas de cursos sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, comentarios sobre libros y artículos, referencias, anuncios de conferencias, descripciones de problemas abiertos, etc.

INAUGURACION DEL CENTRO DE SUPERCOMPUTACION COMPLUTENSE (CSC)

El pasado 4 de Noviembre, el Rector de la Universidad Complutense (UCM), Rafael Puyol, inauguró el Centro de Supercomputación Complutense (CSC) que ha sido financiado con los fondos FEDER. Históricamente el CSC se encuadra en la tradición informática de la Universidad Complutense donde comenzaron las primeras actuaciones informáticas a nivel nacional con el Profesor Santesmases, y uno de cuyos frutos fue el Centro de Cálculo que ahora cumple 30 años así como la ya consolidada Facultad de Informática.

El equipamiento actual del CSC consiste en una máquina Origin 2000 con 32 procesadores R10000 a 250 MHz y 4 MB de caché, 8 GB de memoria, 100 GB de disco y subsistema gráfico Onyx2 Infinite Reality con gafas CrystalEyes para visión estéreo, además de dos estaciones de trabajo: una Octane Solid Impact y una O2 Studio para tratamiento multimedia. Se encuentra también en vías de instalación un sistema de proyección 3D basado en gafas pasivas (polarizadas) que permitirá realizar presentaciones 3D a una audiencia de una veintena de personas, o ser usado como sistema semi-inmersivo de realidad virtual. Los proyectos futuros en cuanto a inversiones para el CSC se concretan en el aumento de la potencia de cálculo, así como en mejorar y ampliar las instalaciones de visualización y realidad virtual.

La supercomputación ofrece un puente de colaboración entre el mundo académico y el industrial a la vez que su uso crece rápidamente en conjunción con la teoria tradicional y los experimentos clásicos. En este contexto, el CSC representa un apoyo fundamental a los proyectos de investigación de la Universidad Complutense que van desde la Informática misma a las aplicaciones y desarrollos en Física, Química, Biología, Geología y Farmacia, apostando de manera especial por las nuevas áreas de Multimedia y Telemedicina. Por otra parte, el Centro de Supercomputación constituye un instrumento de Investigación y Desarrollo de la Universidad Complutense y ha de consolidarse como tal con actuaciones en el desarrollo de software y transferencia de tecnología de algoritmos y software para aplicaciones académicas, comerciales e industriales. El CSC nace con vocación de establecer colaboraciones de la

UCM con la Industria y, en particular, con las empresas que necesitan tiempo de computación y asesoramiento asociado a recursos informáticos de altas prestaciones, como son la minería de datos, la visualización en 3 dimensiones y los entornos de realidad virtual.

Luis Vázquez Martínez

Director del Centro de Supercomputación Complutense

http://www.csc.ucm.es

XVI CURSOS DE VERANO

UNIVERIDAD DE CANTABRIA

Dentro del marco de los Cursos de Verano de la Universidad de Cantabria, se han programado para este año 2000 algunos cursos monográficos que podrían ser de interés para algunos miembros de nuestra sociedad. Para más información sobre los programas, profesores, matrícula y alojamiento consultar nuestra página web (www.unican.es/cursosverano). También disponemos de un número de teléfono donde podeis pedir información: 942 20 09 73, Fax 942 20 09 75.

Laredo

CURSO 1.2:

Título: El Problema de la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.

Directores: Tomás Recio Muñiz y María José González López

Fechas: del 3 al 7 de julio

Duración: 20 horas

CURSO 4.1:

Título: Summer School on Orthogonal Polynomials and Special Functions

Directores: Francisco Marcellán Espñol y Walter Van Assche

Fechas: del 24 al 28 de julio

Duración: 20 horas

CURSO 10.3:

Título: Propagación de Ondas: Modelización, Análisis y Simulación

Director: Enrique Zuazua Iriondo

Fechas: del 4 al 8 de septiembre

Duración: 20 horas

CURSO 12.1:

Título: IX Escuela de Otoño Hispano-Francesa sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería

Directores: Michel Bernadou y Eduardo casas Rentería

Fechas: del 18 al 22 de septiembre

Duración: 26 horas

Santander

CURSO 1.8.1:

Título: Introducción al Lenguaje Java y su Utilización en Internet

Director: Ángel Cobo Ortega

Fechas: del 3 al 7 de julio

Duración: 30 horas

CURSO 1.8.2:

Título: Triangulaciones de Poliedros y Configuraciones de Puntos

Director: Francisco Santos Leal

Fechas: del 3 al 7 de julio

Duración: 20 horas

CURSO 2.8.1:

Título: Una Perspectiva en Gráficos por Computador, GAGD y Realidad Virtual. Pasado, Presente y Futuro.

Directores: Andrés Iglesias Prieto y Jack E. Bresenham

Fechas: del 10 al 14 de julio

Duración: 30 horas

CURSO 3.8.1:

Título: Matlab y Simulink

Directores: Francisco Jesús Velasco González y Emiliano Moyano Pérez

Fechas: del 17 al 21 de julio

Duración: 30 horas

CURSO 5.8.1:

Título: El Método de los Elementos Finitos. Programación y Aplicaciones.

Director: Julián Díaz del Valle

Fechas: del 31 de julio al 4 de agosto

Duración: 20 horas

CURSO 1.8.1:

Título: Xploring Statistical Data

Director: Wolfang Härdle

Fechas: del 31 de julio al 4 de agosto

Duración: 20 horas

XVI Cusos de Verano de Laredo
Universidad de Cantabria-Ayuntamiento de Laredo
4-8 Septiembre, 2000
PROPAGACION DE ONDAS:
MODELIZACION, ANALISIS Y SIMULACION NUMERICA
Director: Enrique ZUAZUA IRIONDO

Alfredo Bermúdez de Castro, Universidad de Santiago de Compostela
Métodos de elementos finitos para la simulación numérica de vibraciones fluido-estructura.
Miguel Escobedo Martínez, Universidad del País Vasco
Leyes de conservación viscosas y su comportamiento asintótico
Patrick Gerard, Université Paris-Sud
Microlocal Measures and Applications
Günter Leugering, Universität Bayreuth
Domain Decomposition and Optimal Control of PDE's in Multi-Domains
Luis Vázquez Martínez, Universidad Complutense.
Una panorámica de los estudios numéricos en ecuaciones de onda no lineales
Enrique Zuazua Iriondo, Universidad Complutense.
Ecuaciones de ondas y control de vibraciones

Este curso está primordialmente destinado a jovenes investigadores interesados en fenómenos relacionados en la propagación de ondas en un sentido amplio y con una formación de Matemático, Físico o Ingeniero Superior. Sin embargo, por la actualidad de los temas abordados y por el nivel de competencia de los conferenciantes, puede ser también de gran utilidad a profesionales consagrados en el tema y campos afines.

Tal y como el título del curso indica, éste versa sobre la propagación de ondas. Se pretende presentar una panorámica de problemas que, en el mundo de las Ciencias Aplicadas y de la Ingeniería, exigen un tratamiento matemático de los mismos, tanto desde un punto de vista analítico como numérico. Por ello se ha buscado la participación de un grupo de expertos de reconocido prestigio en un amplio espectro que, en su conjunto, garantizan una unidad y armonía temática.

El curso consta de seis ciclos de conferencias. En dos de ellos, destinados a la simulación numérica, se analizarán problemas relacionados con la interacción fluido-estructura y las multi-estructuras mediante los métodos de elementos finitos y de descomposición de dominios. Por otra parte, se presentará una panorámica de los ámbitos de la Física Matemática en los que intervienen ecuaciones de ondas y se abordarán algunas cuestiones analíticas y numéricas relacionadas. Asimismo, se presentará el estado del arte en lo referente al comportamiento asintótico para tiempos grandes en el marco de las leyes de conservación viscosas. Se presentarán también las medidas de defecto y de Wigner, dos de los útiles matemáticos más poderosos en el análisis de las propiedades finas de propagación de ondas. Por último se abordarán algunos problemas matemáticos relacionados con el control de vibraciones.

El curso será asimismo un foro de encuentro para los expertos en el campo provenientes de diversas Universidades españolas y extranjeras, y especialmente de la Unión Europea.

Para más información relacionada con el programa, trámites de inscripción, becas, etc., diríjanse a Enrique Zuazua:

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense, 28040 Madrid
Tel.: (34) 91 394 45 30 /44 49, Fax: (34) 394 46 07
e-mail: zuazua@eucmax.sim.ucm.es

PROGRAMA PROVISIONAL

Lunes, 4 de septiembre

9:00 Apertura
9:30-11:30 A. BERMUDEZ
12:00-14:00 P. GERARD

Martes, 5 de septiembre

9:30-11:30 P. GERARD
12:00-13:00 A. BERMUDEZ
13:00-14:00 E. ZUAZUA

Miercoles, 6 de septiembre

9:30-11:30 G. LEUGERING
12:00-14:00 E. ZUAZUA

Jueves, 7 de septiembre

9:30-10:30 L. VAZQUEZ
10:30-11:30 M. ESCOBEDO
12:00-14:00 G. LEUGERING

Viernes, 8 de septiembre

9:30-11:30 M. ESCOBEDO
11:45-13:45 L. VAZQUEZ
13:45 Clausura

Nombre	ICMP2000 XIII International Congress on Mathematical Physics
Lugar	Imperial College, London, UK
Fecha	17-22 July 2000
Organiza	Imperial College of Science, Technology and Medicine, London
Patrocinadores	International Association of Mathematical Physics (IAMP) Imperial College, London King's College, London London Mathematical Society Engineering and Physical Sciences Research Council (EPSRC) Particle Physics and Astronomy Research Council (PPARC) National Science Foundation (NSF), USA International Mathematical Union (IMU) UNESCO EU IOP The Abdus Salam ICTP Fondation Culturelle Daniel Iagolnitzer (FCI) EMS Microsoft Research The Science Museum The British Tourist Authority Several Scientific Publishers
E-mail	icmp2000@ic.ac.uk
Página Web	http://icmp2000.ma.ic.ac.uk/

Nombre	I COLLOQUIUM ON LIE THEORY AND APPLICATIONS **A satellite Activity of the Third European Congress of Mathematics (3ECM)**
Lugar	Vigo, Spain
Fecha	17-22 de Julio del 2000
Organiza	Dpto. Matemática Aplicada de la Universidad de Vigo
Colabora	Universidad de Vigo Xunta de Galicia Ministerio de Educación y Cultura Real Sociedad Matemática Española (RSME) Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) European Mathematical Society (EMS) Springer Verlag
Información	Secretaría del Congreso Dpto. Matemática Aplicada, E.T.S.I. de Telecomunicación Universidad de Vigo 36280 VIGO (Spain) Teléfono: +34 986 812142 +34 986 812445 Fax: +34 986 812116 +34 986 812401
E-mail	clieta@dma.uvigo.es
Página Web	http://www.dma.uvigo.es clieta/index

Nombre	E.C.I.T. 2000 European Conference on Iteration Theory
Lugar	Murcia , Spain
Fecha	4-9 de Septiembre del 2000
Información	Secretaría del Congreso ECIT-2000 Facultad de Matemáticas Campus de Espinardo 30100 Murcia, Spain Teléfono: +34 968 364176 Fax: +34 968 364182
E-mail	balibrea@fcu.um.es

Nombre	ECCOMAS2000 European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering
Incorpora	VI International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS VI)
Lugar	Barcelona, Spain
Fecha	11-14 de Septiembre del 2000
Organiza	Sociedad Española de Métodos Numéricos en la Ingeniería (SEMNI)
Colabora	Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA)
Cooperan	International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Spain
Colaboran	Autoritat Portuaria de Barcelona Commision of European Communities (EC) Comisió Interdepartamental de Recerca i Innovació Tecnològica (CIRIT), (Generalitat de Catalunya) Dirección General de Investigación Científica y Técnica, (Ministerio de Educación y Ciencia, Spain) Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona, Spain Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)
Información	Secretaría del Congreso Sociedad Española de Métodos Numéricos (SEMNI) Edificio C-1, Campus Norte (UPC) C/ Gran Capitán s/n, 08034 - BARCELONA (Spain) Teléfono: +34 93 4016487 Fax: +34 93 4016517
E-mail	eccomacs2000@etseccpb.upc.es
Página Web	http://www.cimne.upc.es/eccomas

Nombre	IX ESCUELA DE OTOÑO HISPANO-FRANCESA SOBRE SIMULACION EN FISICA E INGENIERIA
Lugar	Laredo (Cantabria) , Spain
Fecha	18-22 de Septiembre del 2000
Organiza	Dres. Michel Bernadou, Eduardo Casas Rentería
Cursos (5 horas)	Métodos Numéricos en Mecánica de Fluidos (Dr. Ramón Codina Rovira, Universidad Politécnica de Cataluña) Les Méthodes Ondelettes: de l'Analyse à la Simulation (Prof. Albert Cohen, Université Pierre et Marie Curie) Modelisation Numérique des Structures Élastiques ou Viscoélastiques en Grandes Deformations. (Prof. Patrick Le Tallec, Université Paris Dauphine) Métodos de Elementos de Contorno (Dr. F. Javier Sayas González, Universidad de Zaragoza)
Información	IX Escuela de Otoño Hispano-Francesa Secretaría "Cursos de Verano de Laredo" Plaza de la Universidad C/ Sevilla, 6 39001 Santander, (Cantabria)
E-mail	ehf2000@macc.unican.es

Nombre	XVI CURSOS DE VERANO DE LAREDO Propagación de ondas: Modelización, Análisis y Simulación Numérica
Lugar	Laredo, (Cantabria) SPAIN
Fecha	4-8 September 2000
Organiza	Universidad de Cantabria Ayuntamiento de Laredo
Director	Prof. Enrique Zuazua
Información	Prof. Enrique Zuazua Departamento de Matemática Aplicada Universidad Complutense 28040-Madrid, SPAIN
Teléfono	+34 91 394 45 30 /44 49
Fax	+34 91 394 46 07
E-mail	zuazua@eucmax.sim.ucm.es

Nombre	**INTERNATIONAL CONGRESS ON DIFFERENTIAL GEOMETRY** In Memory of Alfred Gray (1939-1998)
Lugar	Bilbao , Spain
Fecha	18-23 de Septiembre del 2000
Organiza	Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Univertsitatea
Colaboran	Universidad del País Vasco Bilbao Iniciativas Turísticas
Información	Dres. R. Ibáñez y M. Macho-Stadler Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Universidad del Pais Vasco Apartado 644, 48080 Bilbao, Spain Teléfono: +34 94 6015358 +34 94 6015352 +34 94 6012517 Fax: +34 94 6012516
E-mail	Gray@lg.ehu.es
Página Web	http://www.ehu.es/Gray

Nombre	**ISACAE 2000** International Symposium on Applications of Computer Algebra
Lugar	Goa, India
Fecha	3-5 October 2000
Organiza	Prof. R. A. Akerkar, Technomathematics Research Foundation
Información	ISACAE 2000, Prof. R. A. Akerkar Technomathematics Research Foundation (TMRF) C/O TMRF, 204/17, New Shahupuri, Kolhapur 416001, India.
Phone	0091-231-654522
E-mail	tmrf@pn3.vsnl.net.in
Página Web	http://www.tmrf.homepage.com/isaca.html

Nombre	**TiNA 2000** Symposium on Trends in Nonlinear Analysis Theory, Modelling and Computation
Lugar	Heidelberg, Alemania
Fecha	8-12 de Octubre de 2000
Organiza	Universidad de Heidelberg (Alemania)
Información	Organizing Committee Sonderforschungsbereich 359 Im Neuenheimer Feld 294 69120 Heidelberg, Germany
Fax	+49 (0) 6221 54 8652
E-mail	tina2000@iwr.uni-heidelberg.de
Página Web	http://www.iwr.uni-heidelberg.de/tina2000

ACTAS DE LAS V JORNADAS ZARAGOZA-PAU DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
Editores: M. Madaune-Tort, M.C. López de Silanes, G. Sanz y M. San Miguel
Publicaciones del Seminario Matemático GARCÍA GALDEANO
Editado por Universidad de Zaragoza, 1999
592 páginas. ISBN 84-89513-94-5

En este libro se recogen 71 comunicaciones presentadas en las V Jornadas de Matemática Aplicada y Estadística que se celebraron en Jaca (Huesca) durante los días 15 y 16 de septiembre de 1997. Estas comunicaciones cubren un amplio espectro de temas actuales, tales como Análisis Numérico, Aproximación de Superficies, Análisis No Lineal, Estadística y Probabilidad, y fueron presentadas por personas de los Departamentos de Matemática Aplicada y Métodos Estadísticos de la Universidad de Zaragoza y del Laboratoire de Mathématiques Appliquées à l'Industrie de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, además de miembros de otras universidades que colaboran con estos departamentos de forma habitual o esporádica.

MESH GENERATION
Pascal Jean FREY and Paul Louis GEORGE
Hermes Science Publishing, Oxford, Paris
814 pages, 23 chapters

The aim of this book is to provide a comprehensive survey of the different algorithms and data structures useful for triangulation and meshing construction. In addition, several aspects will also be described, for instance mesh modification tools, mesh evaluation criteria, mesh optimization, including even adaptive mesh construction as well as parallel meshing techniques.

CONVEX ANALYSIS AND NONLINEAR OPTIMIZATION

J.M. Borwein and A.S. Lewis
Springer, New York, 2000
288 pp. ISBN 0-387-98940-4

Contents: Background.- Inequality constraints.- Fenchel duality.- Convex analysis.- Special cases.- Nonsmooth optimization.- The Karush-Kuhn-Tucker Theorem.- Fixed points.- Postscript: infinite versus finite dimensions.

This book is a concise account of convex analysis, its applications and extensions, for a broad audience. Blurring as it does the distinctions between mathematical optimization and modern analysis, the elegant language of convexity and duality is indispensable both in computational optimization and for understanding variational properties of functions and multifunctions.

Primarily aimed at first-year graduate students, the text consists of short, self-contained sections, each followed by an extensive set of exercises, many of which are guided. The book is thus appropriate either as a class text or for self study.

QUASIDIFFERENTIABILITY AND RELATED TOPICS

Edited by Vladimir Demyanov and Alexander Rubinov
Nonconvex optimization and its applications. Volume 43
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000
400 pp. ISBN 0-7923-6284-5

This book, mostly review chapters, is a collection of recent results in different aspects of nonsmooth analysis related to, connected with or inspired by quasidifferential calculus. Some applications to various problems of mechanics and mathematics are discussed; numerical algorithms are described and compared; open problems are presented and studied. The goal of the book is to provide up-to-date information concerning quasidifferentiability and related topics. The state of the art in quasidifferential calculus is examined and evaluated by experts, both researchers and users.

Audience: Specialists in optimization, mathematical programming, convex analysis, nonsmooth analysis, as well as engineers using mathematical tools and optimization techniques, and specialists in mathematical modelling.

LINEAR ESTIMATION

T.Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi

Prentice Hall, NJ, SIAM, PA., 2000

xviii+854 pages. ISBN 0-13-022464-2

This textbook is intended for a graduate-level course and assumes familiarity with basic concepts from matrix theory, linear algebra, and linear system theory. Six appendices at the end of the book provide the reader with enough background and review material in all these areas.

This original work offers the most comprehensive and up-to-date treatment of the important subject of optimal linear estimation, which is encountered in many areas of engineering such as communications, control, and signal processing, and also in several other fields, e.g., econometrics and statistics. The book not only highlights the most significant contributions to this field during the 20th century, including the works of Wiener and Kalman, but it does so in an original and novel manner that paves the way for further developments in the new millennium. This book contains a large collection of problems that complement the text and are an important part of it, in addition to numerous sections that offer interesting historical accounts and insights. The book also includes several results that appear in print for the first time.

The book takes a geometric point of view with:

a) Emphasis on the numerically favored array forms of many algorithms.

b) Emphasis on equivalence and duality concepts for the solution of several related problems in adaptive filtering, estimation, and control.

These features are generally absent in most prior treatments, ostensibly on the grounds that they are too abstract and complicated. It is the authors' hope that these misconceptions will be dispelled by the presentation herein, and that the fundamental simplicity and power of these ideas will be more widely recognized and exploited. Among other things, these features already yielded new insights and new results for linear and nonlinear problems in areas such as adaptive filtering, quadratic control, and estimation, including the recent H_{oo} theories.

APPROXIMATION AND COMPLEXITY IN NUMERICAL OPTIMIZATION. CONTINUOUS AND DISCRETE PROBLEMS

Edited by Panos M. Pardalos

Nonconvex optimization and its applications. Volume 42

Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000

594 pp. ISBN 0-7923-6275-6

There has been much recent progress in approximation algorithms for nonconvex continuous and discrete problems, from both a theoretical and a practical perspective. In discrete (or combinatorial) optimization many approaches have been developed recently that link the discrete universe to the continuous universe through geometric, analytic, and algebraic techniques. Such techniques include global optimization formulations, semidefinite programming, and spectral theory. As a result new approximate algorithms have been discovered and many new computational approaches have been developed. Similarly, for many continuous nonconvex optimization problems, new approximate algorithms have been developed based on semidefinite programming and new randomization techniques. On the other hand, computational complexity, originating from the interactions between computer science and numerical optimization, is one of the major theories that have revolutionized the approach to solving optimization problems and to analyzing their intrinsic difficulty. The main focus of complexity is the study of whether existing algorithms are efficient for the solution of problems, and which problems are likely to be tractable. The quest for developing efficient algorithms leads also to elegant general approaches for solving optimization problems, and reveals surprising connections among problems and their solutions. The two themes of approximation and complexity pervade this book. Audience: Faculty, graduate students, and researchers in mathematical programming, computer sciences and engineering.

METHODS OF SHAPE PRESERVING SPLINE APPROXIMATION
Boris I. Kvasov
World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2000
xvi+338 pp. ISBN 981-02-4010-4

Methods of shape-preserving spline approximation have proved to be of practical value not only in the design of different products such as car bodies, ship hulls, airplane fuselages and wings, etc. but also in the description of geological, physical and even medical phenomena.

This book is a first attempt to present methods of shape-preserving spline approximation in a systematic form. Its primary aim is to describe some of the best techniques for solving the shape-preserving approximation problem, by using a unified approach based on generalized tension splines, and also to provide algorithms of shape-preserving spline approximation with automatic selection of shape control parameters. The book also addresses some of the current research issues such as finite difference methods for the construction of shape-preserving hyperbolic splines and the study of related discrete generalized tension splines. The algorithms of shape-preserving parametrization presented may be used to improve the quality of representation of the shape-preserving spline curves and surfaces.

The emphasis is on efficient numerical algorithms and their computer implementation. Our aim is to provide a mathematical technique which will enable the readers to develop their own software for generating, describing, modifying, and rendering shape-preserving curves and surfaces.

HANDBOOK ON SEMIDEFINITE PROGRAMMING
Henry Wolkowicz, Romesh Saigal, Lieven Vandenberghe (editors)
International Series in Operations Research and Management Science. Volume: 27
Frederick S. Hillier
Kluwer Series, 2000
xxvi+654 pp. ISBN: 07923-7771-0

Semidefinite programming (SDP) has been one of the most exciting and active research areas in optimization during the 1990's. It has attracted researchers with very diverse backgrounds, including experts in convex programming, linear algebra, numerical optimization, combinatorial optimization, control theory, and statistics. This tremendous research activity was spurred by the discovery of important applications in combinatorial optimization and control theory, the development of efficient interior-point algorithms for solving SDP problems, and the depth and elegance of the underlying optimization theory.

The HANDBOOK OF SEMIDEFINITE PROGRAMMING offers an advanced and broad overview of the current state of the field, It contains nineteen chapters written by the leading experts on the subject. The chapters are organized in three parts: Theory, Algorithms, and Applications and Extensions.

Esquemas de Orden Alto sobre Mallas de Shishkin para Problemas de Perturbación Singular

Doctorando: José Luis Gracia Lozano.

Director/es: Francisco J. Lisbona Cortés y Carmelo Clavero Gracia.

Defensa: 30 de junio de 1999, Universidad de Zaragoza.

Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: Los problemas de perturbación singular aparecen en numerosos campos de la Matemática Aplicada. Particularmente, la mecánica de fluidos, la dinámica de gases, la teoría de la elasticidad en el estudio de pandeo de placas o la teoría de semiconductores, son ejemplos que conducen a ecuaciones diferenciales en las que, un proceso de adimensionalización revela la existencia de un pequeño parámetro que afecta a las derivadas de mayor orden.

En los últimos años, un aspecto importante en la integración numérica de problemas de perturbación singular, ha sido el desarrollo de métodos que proporcionen resultados de convergencia uniforme respecto del pequeño parámetro. En esta dirección se han investigado métodos basados en un ajuste especial del operador discreto (exponential fitted methods) y/o una elección apropiada de la malla (mesh fitted methods), cobrando especial importancia un tipo de mallas uniformes a trozos introducidas por G.I. Shishkin. A pesar del interés computacional de los métodos definidos sobre mallas de Shishkin, salvo un método de tipo streamline-diffusion propuesto por M. Stynes y L. Tobiska para problemas de convección-difusión 1D, hasta este momento sólo se dispone de esquemas de primer orden.

En esta memoria se han construido y analizado varios métodos en diferencias definidos sobre mallas de Shishkin uniformemente convergentes de orden mayor que uno. Se han considerado problemas unidimensionales de convección-difusión y de reacción-difusión, así como problemas bidimensionales de convección-difusión en los que aparecen capas límite de tipo regular y parabólico.

Además, se han realizado un elevado número de experiencias numéricas que confirman los resultados teóricos probados sobre el orden de convergencia de los métodos diseñados.

Sobre Detección de Discontinuidades y Aproximación de Funciones No Regulares

Doctorando: María Cruz Parra Lucán.
Director/es: María Cruz López de Silanes Busto.
Defensa: 20 de Septiembre de 1999. Universidad de Zaragoza.
Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: En ciertos campos de la matemática aplicada es necesario aproximar funciones reales, $y = f(x)$, con $x \in \Omega$, un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, que presentan discontinuidades (f o alguna de sus derivadas parciales de primer orden), sobre cada punto de cierto subconjunto de medida nula $\mathcal{F} \subset \overline{\Omega}$. Los métodos usuales de aproximación tienen un efecto regularizante que disimula las discontinuidades y, por ello, se diseñan métodos específicos que tengan en cuenta el conjunto $\mathcal{F}$. Ahora bien, éste es generalmente desconocido por lo que, la aproximación de funciones no regulares, puede considerarse un proceso que consta de dos pasos: en primer lugar *localizar el conjunto* $\mathcal{F}$ y después *aproximar* f *sobre* $\Omega \setminus \overline{\mathcal{F}}$. Con objeto de resolver este problema, se han estudiado en la memoria los dos pasos indicados, dedicando una parte a cada uno de ellos.

En la primera parte, se estudia el problema de la detección de discontinuidades en dimensiones $n = 1$ y 2 (aunque el estudio es generalizable a dimensiones superiores). Bajo hipótesis convenientes, se caracterizan los puntos de discontinuidad de f así como los de sus primeras derivadas parciales (tanto si se dispone de la expresión de f como cuando sólo se dispone de su valor en un determinado número de puntos de $\overline{\Omega}$). Basándose en los resultados obtenidos, se deduce un método de detección que proporciona, como aproximación de $\mathcal{F}$, un conjunto (de medida no nula) $\mathcal{F}^*$ que contiene a $\mathcal{F}$. En la segunda parte se propone un método de aproximación de f que consiste en utilizar un D^m–spline de ajuste de f sobre $\Omega \setminus \overline{\mathcal{F}}^*$ y extender el aproximante obtenido sobre $\Omega \setminus \overline{\widetilde{\mathcal{F}}}$, donde $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un subconjunto de $\mathcal{F}^*$ de medida nula que representa alguna aproximación de $\mathcal{F}$. Entonces, se prueba la convergencia local en $H^m(\Omega \setminus \overline{\mathcal{F}})$, cuando la distancia de Hausdorff del conjunto de puntos de datos a $\overline{\Omega}$ tiende a 0. Debido a la imposibilidad de explicitar en general los D^m–splines sobre $\Omega \setminus \overline{\mathcal{F}}^*$, se discretizan mediante el método de los elementos finitos y se da también en este caso un resultado de convergencia local. Los métodos obtenidos se ilustran con ejemplos numéricos y gráficos.

Control y Perturbaciones Singulares en Algunos Sistemas Parabólicos

Doctorando: Antonio López Montes.
Director/es: Enrique Zuazua Iriondo.
Defensa: 11 de Noviembre de 1999. Universidad Complutense de Madrid.
Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: En esta memoria hemos estudiado como se ve afectada la propiedad de controlabilidad de algunos sistemas cuando se ven sometidos a perturbaciones singulares. En estas circunstancias la aplicación directa de técnicas de control globales, como por ejemplo las desigualdades de Carleman, no permiten probar la controlabilidad uniforme de nuestros sistemas. Hemos probado sin embargo que estrategias de control basadas en la combinación adecuada de dichas técnicas globales, junto con un estudio detallado del espectro, sí que permiten asegurar la uniformidad de la controlabilidad de nuestros sistemas.

En el primer capítulo de la memoria nos planteamos el problema de obtener la controlabilidad a cero de la ecuación del calor como límite de la controlabilidad a cero de la ecuación de ondas disipativa

$$\begin{cases} \epsilon u_{tt} - \triangle u + u_t = f^{\epsilon} 1_{\omega} & \text{en} \quad Q_T = \Omega \times (0,T)\,, \\ u = 0 & \text{en} \quad \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)\,, \\ u\,(x,0) = u^0, \ \ u_t\,(x,0) = u^1 & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\left(u^0, u^1\right) \in H_0^1 \times L^2\,(\Omega)$ y $0 < \epsilon < 1$ es un parámetro pequeño. Probamos que en el caso unidimensional puede construirse una suceción $\{f^{\epsilon}\}$ de controles de (1) de manera que $\{f^{\epsilon}\} \to f$ fuerte en $L^2\,(\omega \times (0,T))$ cuando $\epsilon \to 0$, donde f es tal que conduce a cero la solución de la ecuación límite, i.e. f es un control de la ecuación de calor. En un trabajo posterior, junto con Xu Zhang, extendemos el resultado a dimensiones superiores.

En el segundo capítulo de la memoria estudiamos la controlabilidad a cero para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right) u_t - u_{xx} = 0 & \text{para todo} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T)\,, \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = f^{\epsilon}\,(t) & \text{para todo} \quad t \in (0,T)\,, \\ u\,(x,0) = u^0 & \text{para todo} \quad x \in (0,1)\,, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\rho\,(x) \in W^{2,\infty}\,(I\!R)$ es una función periódica tal que existen dos constantes positivas ρ_m y ρ_M tales que $0 < \rho_m \leq \rho\,(x) \leq \rho_M < +\infty$, $0 < \epsilon < 1$ es un parámetro pequeño y $u^0 \in L^2\,(0,1)$.

De nuevo una adecuada estrategia de control nos permite probar que existe una sucesión $\{f^{\epsilon}\}$ de controles de (2) tal que $\{f^{\epsilon}\} \to f$ fuerte en $L^2\,(0,T)$ cuando $\epsilon \to 0$, siendo f un control de la ecuación límite, i.e. de la ecuación que se obtiene sustituyendo en (2) $\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ por su media.

En el tercer capítulo de la memoria estudiamos el problema de la controlabilidad a cero de la ecuación del calor desde un punto de vista computacional. En concreto consideremos la siguiente ecuación del calor unidimensional en el intervalo $(0,1)$

semidiscretizada en espacio:

$$\left\{\begin{array}{lll} u' - \frac{\left(u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j\right)}{h^2} = 0 & \text{para todo } t > 0, \ j = 1,2,...,N, \\ u_0 = 0, \ u_{N+1} = f^h\left(t\right) & \text{para todo} \quad t > 0, \\ u_j\left(0\right) = u_j^0 & \text{para todo} \quad j = 1,2,...,N. \end{array}\right. \tag{3}$$

En (3) se ha notado como u' a la derivada temporal de u. En este capítulo probamos que es posible construir una sucesión $\left\{f^h\right\}$ de controles del sistema (3) de manera que $\left\{f^h\right\} \to f$ fuerte en $L^2\left(0,T\right)$, cuando $h \to 0$, siendo f un control de la ecuación del calor.

Por último en el cuarto capítulo 4 de la memoria estudiamos diversos aspectos de la controlabilidad de sistemas parabólicos de la forma

$$\left\{\begin{array}{lll} u_t - \Delta u - k\left(-\Delta\right)^\theta u = v1_\omega & \text{para todo} & \left(x,t\right) \in \Omega \times \left(0,T\right), \\ u(0,t) = 0 & \text{para todo} & \left(x,t\right) \in \partial\Omega \times \left(0,T\right), \\ u\left(x,0\right) = u^0 & \text{para todo} & x \in \Omega, \end{array}\right. \tag{4}$$

donde de nuevo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y regular y $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío. Los parámetros θ y k varían en los rangos $[0,1)$ y $[0,+\infty)$ respectivamente. El operador $\left(-\Delta\right)^\theta$ representa por tanto una potencia fraccionaria del operador Laplaciano con condiciones de contorno Dirichlet.

Incluimos un apéndice al final de la memoria donde recogemos algunos problemas abiertos.

Análisis y Resolución Numérica de Algunos Modelos Matemáticos de Frontera Libre en Glaciología

Doctorando: Natividad Calvo Ruibal.
Director/es: José Durany Castrillo y Carlos Vázquez Cendón.
Defensa: 17 de Diciembre de 1999. Universidad de Vigo.
Calificación: Sobresaliente cum Laude.

Resumen: En la Memoria se establecen modelos matemáticos termomecánicos que rigen el comportamiento de grandes masas de hielo y que involucran varios problemas de frontera móvil. En concreto, se realiza la resolución numérica de un modelo de frontera móvil que determina el espesor de un casquete polar. Dicho modelo se basa en una ecuación parabólica no lineal que incluye el deslizamiento basal mediante un término de convección. Como método numérico se propone una combinación de discretizaciones espaciales de elementos finitos con una semidiscretización temporal descentrada siguiendo las características. La no linealidad del término de difusión se resuelve mediante un método de punto fijo y la correspondiente inecuación variacional relativa a la formulación del problema de frontera libre se resuelve con un algoritmo de dualidad. Además, se presenta la resolución numérica de un subproblema térmico de frontera libre en casquetes polares politérmicos. El problema recoge los efectos de difusión vertical y de convección térmica debida al movimiento del hielo. Además, la formulación del proceso mediante un modelo de tipo Stefan en dos fases, permite

considerar la presencia de una capa de hielo en la base del casquete polar que está a la temperatura de fusión. Dicha capa está producida, por una parte, por el flujo de calor geotérmico y, por otra parte, por la reacción térmica que está asociada al término de deformación viscosa. Las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet en la frontera en contacto con la atmósfera y de tipo Signorini para el flujo térmico en la frontera en contacto con la roca; estaúltima formulada mediante una función multívoca de Heaviside. Con el fin de resolver un modelo semiacoplado termomecánico se considera un dominio global de referencia que incluye la masa de hielo y la atmósfera que la rodea y cuya frontera móvil que separa ambas zonas está determinada a cada paso de tiempo por la solución del problema del espesor. Finalmente, desde el punto de vista teórico, se demuestra un teorema de existencia de solución de un subproblema térmico en glaciares politérmicos muy próximo al que se resuelve numéricamente.

Dinámica Orbital Alrededor de Cuerpos Celestes con Forma Irregular

Doctorando: Andrés Riaguas Guedán.
Director/es: Antonio Elipe Sánchez.
Defensa: 20 de diciembre de 1999. Universidad de Zaragoza.
Calificación: Sobresaliente cum Laude (con la mención de doctorado europeo).

Resumen: En esta memoria hemos analizado la dinámica de una partícula en torno a un segmento finito recto. Este objeto ha sido elegido como un modelo simple para representar objetos celestes alargados como son algunos asteroides. Estos objetos celestes son los objetivos de importantes misiones espaciales por parte de las principales agencias del espacio como NEAR de la NASA o, por parte europea, ROSETTA de la ESA. Esta elección de modelo ha estado motivada por la existencia de simetrías y porque el potencial gravitatorio es expresable en forma cerrada, lo que nos ha permitido su manipulación analítica.

Hemos descrito las propiedades cualitativas del espacio de fases a través de las soluciones más relevantes: las estacionarias y lasórbitas periódicas. Todo este estudio dinámico se ha efectuado bajo dos hipótesis, que el segmento se encontrase fijo en el espacio y, lo que resulta de mayor interés práctico, que estuviese rotando en el espacio. Ambos casos tienen cierta similitud con problemas clásicos de la Mecánica celeste. El primero con el problema de los dos centros fijos, y el segundo con el del problema restringido de tres cuerpos.

Para ambas situaciones hemos obtenido familias deórbitas periódicas mediante el método de continuación numérica. Hemos determinado la estabilidad lineal de dichas familias, así como sus bifurcaciones. Para la propagación, hemos propuesto una nueva formulación numérica, lo que permite emplear este método para otro tipo de potenciales, sin necesidad de una nueva resolución de las ecuaciones de movimiento, tal como sucede con el método empleado de series recurrentes de potencias.

Cuando el segmento está rotando en el espacio, a la hora de determinar la

estabilidad de las soluciones estacionarias, nos encontramos con la dificultad que, en ciertas ocasiones, la forma cuadrática correspondiente al hamiltoniano linealizado es indefinida. Para asegurar la estabilidad orbital hemos aplicado el teorema de Arnold. Para ello, hemos tenido que hacer uso intensivo de un manipulador algebraico con objeto de expresar el hamiltoniano en las condiciones del teorema de Arnold que requiere la normalización del hamiltoniano hasta el orden necesario. Ésta la hemos hecho mediante transformaciones de Lie-Deprit en un conjunto de variables complejas.

Los casos resonantes están excluidos en el anterior tratamiento. Sin embargo, hemos podido considerarlos mediante un nuevo método que consiste en la formulación del problema en un conjunto de variables ampliadas de Lissajous, lo que permite la normalización sin encontrar pequeños divisores.

Análisis de la Aproximación Numérica de Problemas Variacionales No Convexos

Doctorando: Ernesto Aranda Ortega.
Director/es: Pablo Pedregal Tercero.
Defensa: 16 de Marzo de 2000. Universidad de Sevilla.
Calificación: Sobresaliente cum Laude (por unanimidad).

Resumen: El objetivo central de este trabajo es el análisis numérico de algunos problemas variacionales relacionados con la elasticidad no lineal, en los que la falta de ciertas propiedades de convexidad deriva en la ausencia de mínimo y en el comportamiento oscilatorio de las sucesiones minimizantes, dando lugar a la aparición de microestructuras.

La aproximación numérica de estas microestructuras se realiza mediante la relajación, en términos de medidas de Young, de este tipo de problemas. Debido a la dificultad que supone tratar con la propiedad de cuasiconvexidad, la alternativa presentada en este trabajo basa el esquema de aproximación en el tratamiento de la envolvente convexa de rango uno, gracias a la cual es posible construir medidas asociadas a problemas homogéneos. Por ello, la primera parte de la memoria está dedicada al estudio de esta envoltura y su aproximación numérica. En la segunda parte se plantea un esquema para la aproximación de problemas no homogéneos, que es llevado a cabo mediante la construcción de una sucesión de medidas de Young discretas que convergen macroscópicamente a la solución del problema relajado y que permiten codificar el comportamiento de las sucesiones minimizantes. Se finaliza con algunos experimentos numéricos que ponen de manifiesto la capacidad de este esquema en la aproximación de microestructuras.

Socios ordinarios

Rodríguez Galván, J. Rafael – Dpto. de Matemáticas – Fac. de Ciencias Económicas y Empresariales – Univ. de Cádiz – Cádiz. rafael.rodriguez@uca.es

Toledo Melero, José Julián – Dpto. de Análisis Matemático – Fac. de Matemáticas – Univ. de Valencia – 46100 Burjassot. toledojj@uv.es

Delibes Liniers, Alicia – Dpto. de Matemática Aplicada – Fac. de Ciencias Químicas – Univ. Complutense de Madrid – 28040 Madrid. delibes@sunma4.mat.ucm.es

Valeiras Reina, Gerardo – Dpto. de Matemática Aplicada I – Fac. de Informática y Estadísitica – Univ. de Sevilla – 41012 Sevilla. geval@cica.es

Prohens Sastre, Rafael – Dpto. de Matemátiques i Informàtica – – Univ. de Les Illes Balears – 07071 Palma de Mallorca. dmirps3@ps.uib.es

DIRECCIÓN PARA
SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Atenderemos gustosamente cualquier tipo de sugerencia o comentario sobre el Boletín de S$\vec{e}$MA. Una forma rápida y conveniente para hacernos llegar tales sugerencias es el correo electrónico. Por eso indicamos una vez más nuestra dirección de "e-mail":

`boletin_sema@uco.es`