

## responsables de sección

### Vida de la Sociedad

Juan Luis Vázquez  
Universidad Autónoma de Madrid  
jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es  
fax: (91) 397 48 89

### Congresos y seminarios

Tomás Chacón  
Universidad de Sevilla  
chacon@numer.us.es  
fax: (95) 455 28 98

### Novedades bibliográficas

Luis Abia  
Universidad de Cantabria  
sema@macc.unican.es  
fax: (942) 20 17 03

### Actividad académica

Vicent Caselles  
Universidad de las Islas Baleares  
dmivca0@PS.unib.es

### Relaciones con la industria

Juan Manuel Viaño  
Universidad de Santiago de Compostela  
viano@zmat.usc.es  
fax: (981) 59 70 54

corresponsales    Almería: Ramón Carreño : ramon@ualm.es    Barcelona: Gerard Gómez : gomez@cerber.mat.ub.es    Bilbao: Eduardo Sáinz de la Maza : eduardo@picasso.lc.ehu.es    Córdoba: Mercedes Marín Beltrán : maimabem@lucano.uco.es    Coruña: José Manuel Rodríguez Seijo : mnrseijo@udc.es    Extremadura: Mariano Rodríguez-Arias : arias@ba.unex.es    Granada: José Miguel Alonso Alonso : jalonso@goliat.ugr.es    Huelva: Manuel Merino Morlesín : morlesin@uhu.es    Islas Baleares: Vicent Casselles : dmivca0@PS.unib.es    Jaén: Javier Muñoz : fax: 953-212400, telef. 953-212409    Madrid (Autónoma): Juan Luis Vázquez : jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es    Madrid (Complutense y Politécnica): Francisco Padiál : jfpadiál@sunma4.mat.ucm.es    Málaga: Francisco Palma Molina : palma@ccuma.uma.es    Oviedo: Javier Valdés García : valdes@pinon.ccu.uniovi.es    Santander: Luis Alberto Fernández Fernández : lafernandez@besaya.unican.es    Santiago de Compostela: Peregrina Quintela : pere@zmat.usc.es    Sevilla: Tomas Chacón : chacon@numer.us.es    Valencia: José M. Mazón : mazon@mac.uv.es    Valladolid: Begoña Cano : becano@mac.cie.uva.es    Vigo: José Durany : durany@dma.uvigo.es    Zaragoza: Francisco Javier Sayas : jsayas@posta.unizar.es

# sumario

Editorial .....	2
Temas:	
<i>Algunos problemas y avances recientes en la controlabilidad     de ecuaciones en derivadas parciales</i> , por Enrique Zuazua .....	3
Congresos .....	48
La sociedad .....	51
Convocatoria del Premio SEMA al Joven Investigador .....	57
Libros .....	60
Resúmenes de tesis .....	62

## edición

Editor jefe

FRANCISCO LISBONA CORTÉS

Dp. Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias

Universidad de Zaragoza

Editores

ANDRÉS RIAGUAS GUEDÁN

Dp. Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias

Universidad de Zaragoza

FCO. JAVIER SAYAS GONZÁLEZ

Dp. Matemática Aplicada

Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

Colabora el Servicio de Publicaciones  
de la Universidad de Zaragoza

---

Dirección editorial: Departamento de Matemática Aplicada, Edificio de Matemáticas.  
primera planta. Campus Universitario, 50009 Zaragoza.

e-mail: [sema@posta.unizar.es](mailto:sema@posta.unizar.es) Fax: 976 76 11 25

## UNIQUE SUUM

Tres años después de que un pequeño de personas alrededor de Francisco Lisbona fuéramos encomendados las labores de preparación del boletín de SEMA (Gloria Aguilar, sustituida después por Andrés Riaguas, más el abajo firmante desde un inicio), quiero aprovechar para agradecer a todos los que han prestado su ayuda en este tiempo en que nos hemos hecho cargo de esta grata tarea. Aunque seguro que se quedan nombres 'en el tintero', me gustaría agradecer con nombres y apellidos a muchos que han hecho esta labor más fácil y llevadera.

Comienzo agradeciendo al profesor Lisbona la confianza que depositó en nosotros y la oportunidad que nos brindó con ello de participar en SEMA y de conocer más de cerca el 'mundillo' de la matemática aplicada española. En unos tiempos en que las universidades españolas son prácticamente compartimentos estancos a efectos de las posibilidades de movilidad y colaboración de los profesores e investigadores más jóvenes, el boletín nos ha permitido tener una idea más clara de qué hay y quién está en cada lugar.

Los miembros de los distintos comités ejecutivos y de los equipos directivos son también acreedores de nuestros agradecimientos, comenzando por el equipo actual. Quiero destacar a cinco personas por el montante de información y colaboraciones enviadas y por la gran amabilidad mostrada: son los profesores (cito alfabéticamente) Tomás Chacón, Ildefonso Díaz, Mariano Gasca, Juan Luis Vázquez y Enrique Zuazua. Con el tercero de ellos tuvimos además el beneficio de la proximidad geográfica que sin duda propició un contacto especialmente directo, ágil y efectivo.

El departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza ha puesto sus medios materiales a nuestra disposición. Cuando ha sido necesario echar mano de quien pasara por el pasillo para preparar los envíos de boletines-anuarios, nunca nos ha faltado la colaboración. Agradecemos al Grupo de Mecánica Espacial de esta misma universidad el uso y abuso de su escáner. El profesor Jesús Carnicer, MacExpert del pasillo de Aplicada, nos ha resuelto más de un problema informático especialmente con el trabajoso asunto de los gráficos. Gracias extensivas que hago a todo al que olvido mencionar.

FRANCISCO JAVIER SAYAS

---

ALGUNOS PROBLEMAS Y AVANCES RECIENTES  
EN LA CONTROLABILIDAD DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES

ENRIQUE ZUAZUA<sup>1</sup>

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

28040 MADRID.

zuazua@eucmax.sim.ucm.es

**Resumen**

Presentamos algunos resultados recientes relacionados con la controlabilidad de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Analizamos diversas nociones de controlabilidad y cómo estas se adaptan a los diferentes tipos de modelos. Estudiamos tanto la ecuación de ondas como la del calor pues se trata de sistemas modelos en el caso conservativo e irreversible respectivamente. Describiremos las técnicas que se han desarrollado para abordar problemas de controlabilidad en uno y otro caso. Presentamos asimismo algunos resultados recientes sobre la controlabilidad del sistema de la termoelasticidad.

## 1 Introducción

En este trabajo presentamos algunos resultados recientes sobre la controlabilidad de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). El problema de la controlabilidad puede ser formulado del siguiente modo: Consideremos una ecuación o sistema de evolución en el que parte de los datos (el control) están a nuestra disposición (por ejemplo, alguna de las condiciones de contorno, el segundo miembro de la ecuación, etc). Dado un intervalo de tiempo  $(0, T)$  y dos valores  $u^0$  y  $v^0$  en el espacio de estados en el que la ecuación evoluciona ¿podemos encontrar un control de modo que la solución  $u$  con dato inicial  $u^0$  alcance el estado  $v^0$  en el instante  $t = T$ ?. Tal y como hemos formulado la cuestión, se trata de un problema de *controlabilidad exacta*. Sin embargo la condición

---

<sup>1</sup>Subvencionado por el proyecto PB93-1203 de la DGICYT (España) y CHRX-CT94-0471 de la U.E.

de control  $u(T) = v^0$  puede ser relajada de diferentes formas, dando lugar a diversas nociones o grados de controlabilidad de un sistema.

Muchos problemas, de naturaleza muy diversa, pueden ser enmarcados en este amplio contexto. Por otra parte, la resolubilidad del problema dependerá en gran medida de diversos aspectos del sistema considerado: linealidad o no-linealidad del sistema, irreversibilidad, estructura del conjunto de controles admisibles, etc.

La controlabilidad de EDP ha sido objeto de un estudio intenso durante la última década. Pero el tema viene de mucho antes. En 1978, D. L. Russell [R1] realizó un artículo recopilatorio en el que se proporcionaba una buena perspectiva de los resultados más relevantes que hasta ese momento habían sido obtenidos en ese campo. En ese trabajo se describían asimismo los diversos métodos que se habían desarrollado para abordar problemas de controlabilidad. Estos, frecuentemente, estaban inspirados y relacionados con otras áreas de las EDP: multiplicadores, problemas de momentos, series de Fourier no-armónicas, etc.

Más recientemente J.-L. Lions introdujo el método conocido como HUM (Hilbert Uniqueness Method) (véanse [L1] y [L2], por ejemplo). Este fue el inicio de una fructífera década en este campo.

Sería imposible mencionar en un sólo artículo todos los resultados interesantes que se han probado en este contexto. Esta es la primera razón para haber decidido concentrar nuestra atención en la ecuación de ondas y la del calor. Pero hay otra aún más importante; se trata de prototipos de sistemas conservativos e irreversibles respectivamente y en su estudio encontramos ya buena parte de las dificultades que los problemas de controlabilidad presentan. Describiremos la importancia de la noción de reversibilidad (en tiempo) a la hora de abordar problemas de controlabilidad a través de la comparación de estos dos modelos. Presentaremos asimismo las diversas técnicas que han sido desarrolladas para abordar estos dos tipos de modelos. En ambos casos analizaremos también brevemente algunos modelos semilineales.

Estudiaremos asimismo el sistema de la termoelasticidad tridimensional. Se trata de uno de los sistemas más simples que combina el carácter hiperbólico y parabólico de la ecuación de ondas y de la del calor respectivamente. En una primera aproximación al problema cabe pensar que basta con superponer lo que conocemos sobre la ecuación de ondas y del calor para resolver los problemas de controlabilidad del sistema de la termoelasticidad. Pero esto está lejos de ser cierto. En efecto, las técnicas disponibles en la literatura para la ecuación

de ondas y del calor son tan distintas que es difícil combinarlas para abordar el sistema de la termoelasticidad. Veremos que las técnicas de desacoplamiento pueden ayudarnos a resolver estos problemas.

Tal y como hemos mencionado anteriormente, este artículo está lejos de ser completo. Incluso en lo que respecta a estos tres modelos (ecuación de ondas, del calor y sistema de la termoelasticidad) nuestra lista de referencias es incompleta. Confiamos en que los autores que habiendo trabajado en este área no vean sus trabajos reproducidos en nuestra bibliografía sepan disculpar la omisión. A partir de las bibliografías de los libros y otros artículos recopilatorios que aparecen en la nuestra se puede obtener una lista de referencias mucho más completa.

No hemos abordado aquí otros temas interesantes tales como la controlabilidad de placas, de las ecuaciones de Schrödinger y KdV, el sistema de la elasticidad tridimensional, las ecuaciones de Maxwell, etc. Asimismo no hemos abordado otros temas importantes tales como la simulación numérica en problemas de controlabilidad, la estabilizabilidad, las redes de estructuras flexibles, las conexiones con la teoría de la controlabilidad en dimensión finita, el control óptimo, etc. En nuestra bibliografía hemos incluido algunas referencias relativas a estos temas.

## 2 La ecuación de ondas lineal

### 2.1 Formulación del problema

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^2$ .

Sea  $\omega$  un subconjunto abierto no vacío de  $\Omega$ . Sea  $T > 0$  y consideremos la ecuación de ondas lineal con control en el cilindro  $Q = \Omega \times (0, T)$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

En (1),  $1_\omega$  representa la función característica del conjunto  $\omega$ ,  $u = u(x, t)$  es el estado y  $f = f(x, t)$  el control. En la medida en que  $f$  está multiplicada por  $1_\omega$ , la acción del control sobre el sistema se concentra en  $\omega$ .

Cuando  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(Q)$  el sistema (1) tiene una única solución  $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ .

El problema de la controlabilidad consiste en describir la estructura del conjunto de estados alcanzables  $\{(u(T), u_t(T))\}$  cuando  $f$  varía en un conjunto de controles dado, por ejemplo, en  $L^2(Q)$ .

Podemos distinguir los siguientes grados de controlabilidad:

- (a) **Controlabilidad aproximada.** El sistema (1) se dice aproximadamente controlable en el tiempo  $T$  cuando el conjunto de estados alcanzables

$$R(T; (u^0, u^1)) = \{(u(T), u_t(T)) : f \in L^2(Q)\}$$

es denso en  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  para cada  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

- (b) **Controlabilidad exacta.** El sistema (1) se dice exactamente controlable en tiempo  $T$  si  $R(T; (u^0, u^1)) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  para todo  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

- (c) **Controlabilidad a cero.** Se dice que el sistema (1) es controlable a cero en tiempo  $T$  si  $(0, 0) \in R(T; (u^0, u^1))$  para todo  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

### Observación 2.1

- (a) En la medida en que estamos analizando la ecuación de ondas, para que se cumpla cualquiera de las propiedades arriba indicadas es preciso que el tiempo  $T$  de control sea suficientemente grande.
- (b) Como el sistema (1) es lineal y reversible en tiempo el control a cero y la controlabilidad exacta son nociones equivalentes.
- (c) Obviamente, si el sistema es exactamente controlable también lo es de forma aproximada. En este último caso, para todo  $(u^0, u^1), (v^0, v^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  y  $\varepsilon > 0$  existe un control  $f_\varepsilon \in L^2(Q)$  tal que la solución de (1) satisface

$$\|(u(T), u_t(T)) - (v^0, v^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Cuando el sistema es aproximadamente controlable pero no lo es exactamente, para algunos datos iniciales y finales  $\|f_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \rightarrow \infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- (d) La descripción del espacio de los datos controlables cuando el sistema es aproximada pero no exactamente controlable es un problema interesante y difícil. En [Le1] se pueden encontrar algunos resultados generales obtenidos mediante una versión cuantitativa del Teorema de Cauchy-Kowaleski. En [Mi] y [Al] pueden encontrarse algunos resultados parciales correspondientes al caso de la geometría cilíndrica que permite utilizar desarrollos en series de Fourier.

- (e) Hemos formulado el problema de control en  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  con controles en  $L^2(Q)$ . Se pueden formular problemas semejantes en otros espacios funcionales distintos.
- (f) La noción de control a cero es especialmente relevante pues  $(0, 0)$  es un estado de equilibrio del sistema (1). De forma más precisa, si la solución de (1) alcanza el estado  $(0, 0)$  en tiempo  $t = T$  y no se controla el sistema para  $t \geq T$ , la solución permanece en este estado indefinidamente. ■

Gran parte de la literatura sobre el control de la ecuación de ondas versa sobre el problema del **control frontera** en el que (1) se sustituye por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en } Q \\ u = v & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En este caso el control  $v$  actúa en el sistema a través de la condición de contorno de Dirichlet.

Los problemas de control que hemos mencionado para el sistema (1) se denominan **problemas de controlabilidad interna**, en contraposición al control frontera.

En este artículo consideraremos únicamente los problemas de control interno para evitar las dificultades derivadas de la existencia de soluciones para sistemas con condiciones de contorno no homogéneas.

## 2.2 Control Aproximado

Es fácil comprobar que la controlabilidad aproximada es equivalente a una propiedad de continuación única para el sistema adjunto

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta \varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x), \varphi_t(x, T) = \varphi^1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

En efecto, el sistema (1) es aproximadamente controlable si y sólo si se cumple lo siguiente:

$$\varphi \equiv 0 \text{ en } \omega \times (0, T) \Rightarrow (\varphi^0, \varphi^1) \equiv (0, 0) \quad (4)$$

Utilizando el Teorema de Unicidad de Holmgren es fácil comprobar que (4) se cumple si  $T$  es suficientemente grande. De forma más precisa, (4) se verifica si

$$T > 2\delta(\Omega; \omega) \quad (5)$$



con

$$\delta(\Omega; \omega) = \sup_{x \in \Omega} \delta(x; \omega) \tag{6}$$

siendo  $\delta(x; \omega)$  el ínfimo de las longitudes de las curvas que, contenidas en  $\Omega$ , unen  $x$  y  $\omega$ .

La propiedad (4) se cumple como consecuencia del siguiente resultado local de continuación única para la ecuación de ondas que se deriva inmediatamente del Teorema de Holmgren: Si  $\varphi$  satisface la ecuación de ondas y además

$$\varphi = 0 \text{ en } B_\delta \times (0, T)$$

entonces

$$\varphi = 0 \text{ en } \bigsqcup_{0 \leq r < T/2} \{B_{\delta+r} \times (r, T-r)\},$$

donde  $B_\delta$  denota la bola de radio  $\delta$  y centro el origen de  $\mathbb{R}^n$ .

Cuando  $\Omega$  tiene una geometría compleja el tiempo mínimo de unicidad (5) puede ser muy grande pero la estimación (5) es óptima (véase [C]).

Existen al menos dos pruebas distintas de que (4) implica la controlabilidad aproximada:

- (a) La aplicación del Teorema de Hahn-Banach;
- (b) El método variacional desarrollado en [L3].

En este artículo presentamos la segunda que puede ser fácilmente adaptada a otras situaciones.

En primer lugar observamos que, como el sistema (1) es lineal, basta considerar el caso  $u^0 \equiv u^1 \equiv 0$ . Entonces, dado  $(v^0, v^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  y  $\varepsilon > 0$  buscamos  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (1) satisfaga (2).

Por ello introducimos el siguiente funcional  $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dx dt + \varepsilon \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - \langle (\varphi^0, \varphi^1), (v^1, -v^0) \rangle \tag{7}$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la dualidad entre  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  y su dual  $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

El funcional  $J_\varepsilon$  es continuo y convexo en el espacio de Hilbert  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . Por otra parte, cuando la propiedad de continuación única (4) se cumple es fácil comprobar que también es coercivo. De modo más preciso, se tiene

$$\lim_{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1)}{\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}} \geq \varepsilon. \tag{8}$$

En [FPZ1] pueden encontrarse los detalles de la demostración en el contexto de la ecuación del calor.

Estas propiedades garantizan que  $J_\varepsilon$  tienen un único minimizador que denotamos mediante  $(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\varphi}^1)$ :

$$(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\varphi}^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\varphi}^1) = \min_{(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1). \quad (9)$$

Entonces si  $\widehat{\varphi}$  es la solución de (3) con dato  $(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\varphi}^1)$  se tiene

$$\left| \int_\omega \int_0^T \varphi \widehat{\varphi} dxdt - \langle (\varphi^0, \varphi^1), (v^1, -v^0) \rangle \right| \leq \varepsilon \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \quad (10)$$

para todo  $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ .

Por otra parte, si tomamos  $f = \widehat{\varphi}$  en (1), multiplicando en (3) por  $u$ , integrando por partes y teniendo en cuenta que  $u^0 \equiv u^1 \equiv 0$ , tenemos

$$\int_0^T \int_\omega \widehat{\varphi} \varphi dxdt - \langle (\varphi^0, \varphi^1), (u_t(T), -u(T)) \rangle = 0. \quad (11)$$

Combinando (10) y (11) se deduce

$$|\langle (\varphi^0, \varphi^1), (u_t(T) - v^1, v^0 - u(T)) \rangle| \leq \varepsilon \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \quad (12)$$

para todo  $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  y esto es equivalente a (2).

**Observación 2.2** El control obtenido minimizando  $J_\varepsilon$  es el de norma mínima en  $L^2$  de entre todos los admisibles. El conjunto de controles admisibles es el siguiente:

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ f \in L^2(Q) : \| (u(T) - v^0, u_t(T) - v^1) \|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \right\}.$$

La minimización de  $J_\varepsilon$  se introdujo en [L3] como problema dual en el sentido de Fenchel y Rockafellar del de hallar el control de norma mínima en  $\mathcal{U}_{ad}$ . ■

El resultado de continuación única (4) nos permite probar un resultado de controlabilidad más fuerte. En efecto, además de (2), se puede garantizar que la solución verifique de forma exacta un número finito de restricciones. En efecto, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.1** *Sea  $\omega$  un abierto no vacío de  $\Omega$ . Supongamos que  $T > 2\delta(\Omega; \omega)$ . Sea  $E$  un subespacio de dimensión finita de  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  y denotemos mediante  $\pi_E$  la correspondiente proyección ortogonal.*

*Entonces, para cada  $(u^0, u^1), (v^0, v^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (1) satisface*

$$\|(u(T) - v^0, u_t(T) - v^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \varepsilon; \pi_E(u(T), u_t(T)) = \pi_E(v^0, v^1). \quad (13)$$

Este resultado puede probarse de dos formas distintas:

- (a) Mediante una pequeña variación del funcional  $J_E$  a minimizar (en la sección 3 damos los detalles en el caso de la ecuación del calor).
- (b) Como consecuencia directa de la controlabilidad aproximada y del resultado siguiente de Análisis Funcional (véase [LiZ1] para una demostración del mismo):

**Teorema 2.2** Sean  $V$  y  $H$  dos espacios de Hilbert y  $L : V \rightarrow H$  un operador lineal acotado con rango denso. Sea  $E$  un espacio de dimensión finita de  $H$  y  $\pi_E$  la proyección ortogonal correspondiente.

Entonces, dado  $e_0 \in E$ , cuando  $v$  varía en el conjunto de elementos tales que  $\pi_E Lv = e_0$ ,  $Lv$  describe un conjunto denso en  $e_0 + E^\perp$ .

Los resultados anteriores también se verifican para ecuaciones de ondas con coeficientes analíticos. En efecto, nuevamente, el problema de control puede reducirse a una cuestión de continuación única y esta última puede probarse mediante el Teorema de Holmgren.

Sin embargo, el problema no está totalmente resuelto en el marco de ecuaciones de ondas con potenciales acotados  $a \in L^\infty(Q)$  de la forma

$$u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u = f1_\omega \text{ en } Q.$$

Una vez más el problema se puede reducir a probar la propiedad de continuación única (4) para el sistema adjunto:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta \varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x), \varphi_t(x, T) = \varphi^1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

A este respecto se conoce lo siguiente:

- (a) Cuando  $a = a(x)$ , D. Tataru [T2] probó un resultado profundo que muestra que (4) se verifica con la misma estimación sobre el tiempo de unicidad ( $T > 2\delta(\Omega; \omega)$ ) para potenciales acotados e independientes del tiempo. La demostración de Tataru es de naturaleza local y usa las desigualdades de Carleman de modo esencial.

- (b) Cuando  $a = a(t)$ , (4) se cumple para todo  $T > 2\delta(\Omega; \omega)$ . En [H] se da una prueba simple utilizando el desarrollo de las soluciones en armónicos esféricos. Esto reduce el problema a una familia uniparamétrica de problemas unidimensionales en las variables radio y tiempo. En una dimensión espacial la continuación única es fácil de probar. Para ello basta invertir el papel de las variables y considerar la ecuación de ondas como una ecuación de evolución en la variable radial, mientras que  $t$  juega el papel de la variable espacial. En [Z5] se dan otras aplicaciones de este tipo de argumentos.
- (c) Cuando  $a = a(x, t)$ , se sabe que la propiedad de continuación única no se cumple en la clase de coeficientes  $C^\infty$ . En efecto, en este caso no se tiene unicidad local (véase S. Alinhac y M. S. Baouendi[AB]).
- (d) Cuando  $\omega$  es un entorno de la frontera  $\partial\Omega$ , la continuación única se cumple para todo potencial acotado  $a = a(t, x)$ . En [Ru] se prueba este resultado mediante desigualdades de Carleman de naturaleza no local.

### 2.3 Controlabilidad exacta

Como hemos dicho anteriormente, como la ecuación de ondas es lineal y reversible con respecto al tiempo, la controlabilidad exacta y la controlabilidad a cero son nociones equivalentes. Por tanto, a lo largo de esta sección y sin pérdida de generalidad supondremos que  $v^0 \equiv v^1 \equiv 0$ .

Si en lugar del funcional  $J_\varepsilon$  de la sección 2.2 consideramos

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1) = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dx dt + \varepsilon \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ & + \langle (\varphi(0), \varphi_t(0)), (u^1, -u^0) \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

es fácil comprobar que la propiedad de continuación única (4) permite probar que  $\tilde{J}_\varepsilon$  satisface (8). El mínimo de  $\tilde{J}_\varepsilon$  proporciona un control tal que la solución de (1) satisface

$$\|(u(T), u_t(T))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (15)$$

El problema de la controlabilidad exacta consiste en analizar si podemos tomar  $\varepsilon = 0$  en (15) o, más concretamente, si el control  $f_\varepsilon$  permanece acotado en  $L^2(Q)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La propiedad de continuación única (4) no permite responder a esta cuestión. Para garantizar que los controles  $f_\varepsilon$  permanecen acotados hemos de probar

que los minimizadores de  $\tilde{J}_\varepsilon$  están uniformemente acotados. Para probar la acotación de los minimizadores para todo  $(u^0, u^1)$  en  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  necesitamos la *desigualdad de observabilidad*

$$\|(\varphi(0), \varphi_t(0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt \quad (16)$$

para toda solución de (3).

Esta desigualdad permite estimar de forma continua la energía total de la solución en función de la energía concentrada en la región de control  $\omega \times (0, T)$ .

Como la energía de  $\|(\varphi(t), \varphi_t(t))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2$  de las soluciones de (3) se conserva a lo largo del tiempo (16) es equivalente a

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt. \quad (17)$$

**Observación 2.3** Cuando el sistema a controlar es irreversible en tiempo, también lo es el sistema adjunto correspondiente. En esos casos la desigualdad correspondiente a (16) es de naturaleza distinta a la correspondiente a (17). Por ejemplo, tal y como veremos en la sección 3, el análogo a (16) se cumple para el sistema adjunto a la ecuación del calor, mientras que la desigualdad correspondiente a (17) no. ■

Cuando se cumple (16) el funcional  $\tilde{J}_\varepsilon$  puede ser minimizado directamente para  $\varepsilon = 0$ , i.e. el funcional

$$\tilde{J}(\varphi^0, \varphi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt + \langle (\varphi(0), \varphi_t(0)), (u^1, -u^0) \rangle. \quad (18)$$

admite un único mínimo en  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . En efecto, en este caso se prueba lo siguiente: Cuando la desigualdad de observabilidad (16) se cumple, el funcional  $\tilde{J}$  tiene un único minimizador  $(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1)$  en  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  para todo  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . El control  $f = \hat{\varphi}$  con  $\hat{\varphi}$  solución de (3) con datos  $(\hat{\varphi}^0, \hat{\varphi}^1)$  es tal que la solución de (1) verifica

$$u(T) \equiv u_t(T) \equiv 0. \quad (19)$$

**Observación 2.4** El control obtenido minimizando  $\tilde{J}$  es de norma  $L^2$  mínima en el conjunto de controles admisibles (véase [L1,2]). ■

Veamos ahora lo que se conoce acerca de la desigualdad (16):

- (a) La primera desigualdad del tipo (16) fue probada por L.F. Ho [Ho] mediante técnicas de multiplicadores análogas a las introducidas por C. Morawetz [M]. En [Ho] se probó que si se consideran subconjuntos de la frontera de  $\Omega$  de la forma

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \partial\Omega : (x - x^0) \cdot n(x) > 0\}$$

para algún  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  (mediante  $n(x)$  denotamos el vector normal exterior unitario a  $\Omega$  en  $x \in \partial\Omega$  y por  $\cdot$  el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ ) y si  $T > 0$  es suficientemente grande la siguiente desigualdad de observabilidad frontera se verifica:

$$\|(\varphi(0), \varphi_t(0))\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\Gamma dt \quad (20)$$

para todo  $(\varphi^0, \varphi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Esta es la desigualdad de observabilidad que se requiere para resolver el problema de controlabilidad frontera mencionado en la sección 2.1.

Más adelante la desigualdad (20) se probó para todo  $T > T(x^0) = 2 \|x - x^0\|_{L^\infty(\Omega)}$  en [L1,2]. Se trata del tiempo óptimo de observabilidad que se puede obtener mediante multiplicadores.

Mediante el método descrito en el volumen 1 de [L2] se puede probar que (20) implica (16) cuando  $\omega$  es un entorno de  $\Gamma(x^0)$  en  $\Omega$ , i.e. si  $\omega = \Omega \cap \Theta$ , donde  $\Theta$  es un entorno de  $\Gamma(x^0)$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $T > T(x^0)$ .

- (b) C. Bardos, G. Lebeau, y J. Rauch, [BLR] probaron que en la clase de dominios  $C^\infty$ , la desigualdad de observabilidad (16) se cumple si y sólo si  $(\omega, T)$  satisfacen la siguiente condición de *control geométrico* en  $\Omega$ : Cada rayo de la óptica geométrica que se propaga en  $\Omega$  y se refleja en su frontera alcanza  $\omega$  en un tiempo menor que  $T$ .

Este resultado se probó mediante técnicas de Análisis microlocal y tiene las siguientes ventajas frente a los probados mediante técnicas de multiplicadores:

- 1.- Caracteriza el conjunto de todas las regiones  $\omega$  y tiempos  $T$  para los que se tiene controlabilidad exacta. A este respecto cabe señalar que los subconjuntos de la frontera  $\Gamma(x^0)$  que se obtienen mediante técnicas de multiplicadores son siempre subconjuntos grandes de  $\partial\Omega$ . Por ejemplo, cuando  $\Omega$  es una bola de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma(x^0)$  es un subconjunto conexo de la frontera

que contiene siempre más que la mitad de la frontera. Por otra parte, la estimación  $T(x^0)$  que se obtiene para el tiempo de control mediante multiplicadores no es óptima en general.

- 2.- Los métodos de [BLR] se aplican en una amplia clase de ecuaciones de ondas con coeficientes variables regulares e independientes del tiempo. Sin embargo, el método de multiplicadores exige condiciones estructurales sobre los coeficientes para proporcionar desigualdades de observabilidad (véase [MM]).

Algunas de las ventajas que el método de multiplicadores presenta son las siguientes:

- 1.- Se puede aplicar cuando el dominio es de clase  $C^2$  o incluso cuando tiene singularidades (véase por ejemplo P. Grisvard [Gr]). Sin embargo, el método microlocal ha sido considerablemente simplificado por N. Burq [Bu] usando las medidas de defecto microlocales introducidas por P. Gerard [Ge] en el contexto de la homogeneización de ondas en las ecuaciones cinéticas. En [Bu] se probó que la condición geométrica es suficiente para garantizar la controlabilidad exacta en dominios de clase  $C^3$  y coeficientes de clase  $C^2$ .
  - 2.- La técnica de multiplicadores puede aplicarse a otros sistemas y ecuaciones para obtener resultados subóptimos: ecuaciones de placas y de Schrödinger, ecuaciones de KdV, sistema de Maxwell y de la elasticidad, etc. (Véanse las monografías de J.-L. Lions [L1,2] y de V. Komornik [K] para una introducción a estas técnicas).  
Conviene también mencionar los trabajos de D. Tataru [T1]. En ellos, usando las desigualdades de Carleman, se prueban desigualdades de observabilidad para ecuaciones más generales que las que se pueden abordar mediante técnicas microlocales (puesto que se necesita menos regularidad de los coeficientes y del dominio) y para una clase de conjuntos de control más amplia que la que se obtiene por multiplicadores.
- (c) Una cuestión importante y que interviene en particular cuando se estudian problemas semilineales es la dependencia de las constantes de observabilidad con respecto a los coeficientes de la ecuación.

Consideremos en primer lugar la ecuación adjunta

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, t) = \varphi^0(x), \varphi_t(x, T) = \varphi^1(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (21)$$

con un potencial acotado  $a \in L^\infty(Q)$ .

Supongamos que el subconjunto  $\omega$  y el tiempo  $T > 0$  son tales que se tiene la desigualdad de observabilidad, i.e. tales que existe  $C = C(a)$  de modo que

$$\|(\varphi(0), \varphi_t(0))\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C(a) \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dx dt \quad (22)$$

para toda solución de (21).

Esto ocurre por ejemplo cuando  $\omega$  es un entorno de la frontera  $\partial\Omega$  y  $T > \text{diam}(\Omega \setminus \omega)$  (véase [Z4]). Sin embargo, la prueba de (22) utiliza argumentos de compacidad para absorber términos de orden inferior. Esto hace que no se obtengan cotas explícitas. En una dimensión espacial en [Z5] se prueba que (22) se verifica con

$$C(a) = O\left(\exp\left(C \|a\|_\infty^{1/2}\right)\right) \text{ cuando } \|a\|_\infty \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Esta estimación es óptima y es razonable esperar que se verifique también en varias dimensiones espaciales. ■

Hemos descrito el método HUM y algunas técnicas que permiten probar desigualdades de observabilidad. Sin embargo existen otros métodos que permiten abordar problemas de controlabilidad: Problemas de momentos, series de Fourier no armónicas, soluciones fundamentales, etc. No los presentaremos aquí. El lector interesado puede consultar el artículo recapitulativo de D. L. Russell [R1].

## 2.4 La ecuación de ondas semilineal

Consideramos la ecuación de ondas semilineal

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + h(u) = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (24)$$

donde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente Lipschitz y

$$|h(s_1) - h(s_2)| \leq C(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2|, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} \quad (25)$$



con

$$1 < p \leq \frac{n}{n-2} \text{ si } n \geq 3; 1 < p < \infty \text{ si } n = 1, 2. \quad (26)$$

Bajo las hipótesis (25)-(26) el sistema (24) está localmente bien puesto: Existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(Q)$  tal que

$$\|(u^0, u^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \leq \delta \quad (27)$$

el sistema (24) admite una única solución  $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Si la no-linealidad  $h$  satisface además una condición de "buen signo", por ejemplo,

$$H(s) \geq -C |s|^2 \text{ cuando } |s| \rightarrow \infty, \quad (28)$$

para algún  $C > 0$  con  $H(s) = \int_0^s h(z) dz$ , entonces el sistema (24) está globalmente bien puesto y admite una única solución  $u$  en la clase anterior para cualquier dato inicial  $(u^0, u^1)$  y segundo miembro  $f$ .

El problema de la controlabilidad aproximada y del control frontera puede ser formulado como en el contexto de la ecuación de ondas lineal. A este respecto cabe mencionar que, en el contexto no-lineal, la equivalencia entre la controlabilidad exacta y la controlabilidad a cero no se verifica.

Con respecto a la controlabilidad exacta se sabe lo siguiente: Si  $\omega$  es un entorno de la frontera  $\Gamma$ ,  $T > \text{diam}(\Omega \setminus \omega)$  y  $h$  es globalmente Lipschitz, entonces el sistema (24) es exactamente controlable.

Este resultado puede probarse de dos formas: Un argumento de punto fijo basado en el Teorema de Schauder (véase [Z4]) y una versión global del Teorema de la Función Inversa (véase [LT1]).

Se conoce muy poco acerca de la controlabilidad exacta de (24) cuando  $h$  crece superlinealmente en el infinito. Lo siguiente fue demostrado en [Z6]:

**Teorema 2.3** *Supongamos que  $n = 1$  y  $\Omega = (0, l)$ . Sea  $\omega = (a, b)$  un subintervalo de  $\Omega$ . Supongamos asimismo que  $T > 2 \max(a, l - b)$  y que*

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|h(s)|}{|s| \log^2 |s|} = 0. \quad (29)$$

*Entonces, el sistema (24) es exactamente controlable.*

### Observación 2.5

(a) El tiempo de control  $T > 2 \max(a, l - b)$  es óptimo.

- (b) La condición (29) sobre el crecimiento de la no-linealidad  $h$  puede parecer muy restrictiva. Sin embargo es óptima. En efecto, si  $h(s) = -s \log^p(1 + |s|)$  con  $p > 2$ , las soluciones de (24) pueden explotar y entonces, a causa de la velocidad finita de propagación, el sistema (24) no es exactamente controlable salvo en el caso trivial  $\omega = \Omega$  (véase [Z6]).

La controlabilidad exacta en el caso en que la no-linealidad presenta un crecimiento crítico

$$|h(s)| \sim C |s| \log^2 |s| \text{ as } |s| \rightarrow \infty$$

con  $C > 0$  grande es un problema abierto.

- (c) La prueba de este resultado se realiza mediante el método de punto fijo desarrollado en [Z4] y la desigualdad de observabilidad (22) con la cota explícita (23) juega un papel fundamental.
- (d) El método de demostración del Teorema 2.3 puede aplicarse también en varias dimensiones espaciales. Sin embargo no se sabe si la desigualdad de observabilidad (22) se verifica con constantes explícitas del orden de  $\exp(C \|a\|^{1/2})$  en varias dimensiones por lo que no se puede concluir la controlabilidad exacta en la clase de no-linealidades (29).
- (e) La prueba del Teorema 2.3 no permite tener en cuenta si la no-linealidad  $h$  tiene el "buen signo" (véase (28)) o no. ■

Cuando la no-linealidad no verifica las condiciones de los resultados anteriores, combinando la controlabilidad exacta del sistema linealizado y el Teorema de la Función Inversa se puede probar un resultado local:

**Teorema 2.4** Sean  $\Omega, \omega$  y  $T$  tales que la controlabilidad exacta del sistema lineal (1) se verifica. Supongamos que  $h$  es de clase  $C^1$ , que  $h(0) = 0$  y que se verifican las condiciones de crecimiento (25)-(26). Entonces, existe  $\delta > 0$  tal que para cualesquiera  $(u^0, u^1), (v^0, v^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  con

$$\|(u^0, u^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + \|(v^0, v^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \delta \quad (30)$$

existe un control  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (24) satisface

$$u(x, T) = v^0(x), u_t(x, T) = v^1(x) \text{ en } \Omega. \quad (31)$$

**Observación 2.6** Obsérvese que el tiempo de control de los datos pequeños que satisfacen (30) es el de la ecuación de ondas lineal. Esto es debido a que, como hemos mencionado anteriormente, el resultado se prueba mediante el Teorema de la Función Inversa linealizando en torno al equilibrio  $u \equiv 0$ . ■

Cuando la no-linealidad no satisface una condición de “buen signo” como (28) el resultado es óptimo. En efecto, en la clase de no-linealidades que crecen de forma superlineal en el infinito las soluciones pueden explotar y esto impide la controlabilidad exacta a causa de la velocidad finita de propagación. Sin embargo, cuando la no-linealidad satisface una condición del tipo (28) el resultado de controlabilidad local puede ser combinado con resultados de estabilización.

Consideremos por ejemplo el caso modelo de una no-linealidad homogénea:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1} u = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (32)$$

con  $1 < p \leq n/(n-2)$  cuando  $n \geq 3$  y  $1 < p < \infty$  cuando  $n = 1, 2$ .

Se tiene lo siguiente:

**Teorema 2.5** *Sea  $\omega$  un entorno de  $\partial\Omega$  en  $\Omega$ . Entonces, si  $p$  verifica las condiciones anteriores, para cada  $(u^0, u^1), (v^0, v^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , si tomamos  $T$  suficientemente grande del orden de*

$$T = O\left(\log\left(\|(u^0, u^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + \|(v^0, v^1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}\right)\right) \quad (33)$$

para datos grandes, existe  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (32) verifica

$$u(x, T) = v^0(x), u_t(x, T) = v^1(x) \text{ en } \Omega. \quad (34)$$

La controlabilidad exacta de (32) en un tiempo uniforme es un problema abierto.

La demostración del Teorema 2.5 combina el resultado local del Teorema 2.4 y el que las soluciones del siguiente sistema, localmente disipado en  $\omega$ , decaen uniformemente cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1} u + 1_\omega u_t = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (35)$$

La energía de (35) viene dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|u_t(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2] dx + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(x, t)|^{p+1} dx. \quad (36)$$

Se tiene

$$\frac{dE}{dt}(t) = - \int_{\omega} |u_t(x,t)|^2 dx \leq 0. \quad (37)$$

Por tanto, la energía de las soluciones decrece cuando el tiempo crece. Se tiene en particular:

**Teorema 2.6** *Cuando  $\omega$  es un entorno de la frontera y  $1 < p, (n-2)p \leq n$  existen  $C, \alpha > 0$  tales que*

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t} E(0), \forall t > 0, \quad (38)$$

para toda solución de (35).

Es fácil comprobar que el Teorema 2.5 es consecuencia de los Teoremas 2.4 y 2.6.

El resultado de estabilización del Teorema 2.6 fue probado en [Z1] mediante técnicas de multiplicadores. Como mencionamos anteriormente se trata de técnicas habituales en el estudio de problemas de control pero también en la teoría de la estabilizabilidad (véanse [K] y [La] para una introducción a este tema).

La propiedad de decaimiento (38) es la misma que se cumple para la ecuación de ondas lineal con disipación. En particular, las constantes  $C$  y  $\alpha$  de (38) no dependen de los datos iniciales. La obtención de (38) requiere condiciones estructurales sobre la no-linealidad que se verifican para pequeñas variantes de la no-linealidad homogénea de (35). Se pueden obtener resultados para no-linealidades mucho más generales si se relaja la condición de decaimiento (38) a la siguiente: Para todo  $R > 0$  existen  $C(R)$  y  $\alpha(R)$  tales que (38) se verifica para todo dato inicial de energía  $E(0) \leq R$ .

Este último tipo de resultados se puede obtener con facilidad a partir del decaimiento uniforme de las soluciones del sistema linealizado y de argumentos de compacidad. Sin embargo, en este contexto no se excluye que la tasa de decaimiento tienda a cero cuando  $E(0) \rightarrow \infty$  y por lo tanto no se pueden obtener estimaciones explícitas del tipo (33) sobre el tiempo de control.

Técnicas semejantes pueden ser utilizadas para el estudio de los atractores en ecuaciones de ondas con disipación localizada ([FZ]).

### 3 La ecuación del calor

#### 3.1 Formulación del problema

Con las mismas notaciones de la sección anterior consideramos la ecuación del calor lineal:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (39)$$

Suponemos que  $u^0 \in L^2(\Omega)$  y que  $f \in L^2(Q)$  de modo que (39) admite una única solución  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .

Sea  $R(T; u^0) = \{u(T) : f \in L^2(Q)\}$ . Los problemas de controlabilidad pueden formularse de la siguiente manera:

- (a) El sistema (39) se dice aproximadamente controlable si  $R(T; u^0)$  es denso en  $L^2(\Omega)$  para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$ .
- (b) El sistema (39) es exactamente controlable si  $R(T; u^0) = L^2(\Omega)$  para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$ .
- (c) El sistema (39) es controlable a cero si  $0 \in R(T; u^0)$  para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$ .

#### Observación 3.1

- (a) Como veremos en la siguiente sección, se tiene controlabilidad aproximada para todo abierto no vacío  $\omega$  y  $T > 0$ .
- (b) Es fácil comprobar que la controlabilidad exacta no se verifica salvo posiblemente en el caso  $\omega = \Omega$ . En efecto, a causa del efecto regularizante de la ecuación del calor (39), las soluciones son regulares en  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  para  $t = T$ . Por tanto  $R(T; u^0)$  está estrictamente contenido en  $L^2(\Omega)$  para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$ .
- (c) La controlabilidad a cero implica que todo el rango del semigrupo generado por la ecuación del calor es también alcanzable. De modo más preciso, denotemos mediante  $S(t)$  el semigrupo generado por (39) sin control, i.e.  $f \equiv 0$ . Entonces, si se tiene la controlabilidad a cero, se tiene que para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$  y  $v^0 \in S(T)[L^2(\Omega)]$  existe un control  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (39) satisface  $u(T) = v^0$ . En otras palabras,  $S(T)[L^2(\Omega)] \subset R(T; u^0)$  para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$ .

Para comprobarlo, dados  $u^0 \in L^2(\Omega)$  y  $v^0 \in S(T)[L^2(\Omega)]$  observamos que existe  $w^0 \in L^2(\Omega)$  tal que  $v^0 = S(T)w^0$ . Definimos  $w = S(T)w^0$ , la

solución de (39) con  $f = 0$  y dato inicial  $w^0$ . Entonces, la solución de (39) puede descomponerse en  $u = w + v$  con

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = f1_\omega & \text{en } Q \\ v = 0 & \text{en } \Sigma \\ v(0) = u^0 - w^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (40)$$

Como el sistema (39) es controlable a cero existe  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución  $v$  de (40) satisface  $v(T) = 0$  lo cual equivale  $u(T) = w(T) = v^0$ .

El conjunto  $S(T) [L^2(\Omega)]$  es denso en  $L^2(\Omega)$  y por tanto la controlabilidad a cero implica la controlabilidad aproximada. Observemos sin embargo que los estados alcanzables que obtenemos por este argumento son regulares a causa del efecto regularizante de la ecuación del calor. ■

### 3.2 Controlabilidad aproximada

El sistema (39) es aproximadamente controlable para cualquier abierto no vacío  $\omega$  de  $\Omega$  y  $T > 0$ . Para comprobarlo basta aplicar el Teorema de Hahn-Banach o utilizar el método variacional desarrollado en la sección 2.2. En ambos casos la controlabilidad aproximada se reduce a la continuación única del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (41)$$

De forma más precisa, la controlabilidad aproximada se verifica si se satisface la siguiente propiedad de continuación única: *Si  $\varphi$  satisface (41) y  $\varphi = 0$  en  $\omega \times (0, T)$ , entonces  $\varphi \equiv 0$ , i.e.  $\varphi^0 \equiv 0$ .*

Esta propiedad de continuación única se cumple, por el Teorema de Holmgren, para todo abierto no vacío  $\omega$  de  $\Omega$  y  $T > 0$ .

Mediante el método variacional de la sección 2.2 el control puede construirse de la siguiente forma. En primer lugar, observamos que basta considerar el caso  $u^0 \equiv 0$ . Entonces, para cada  $v^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  y subespacio de dimensión finita  $E$  de  $L^2(\Omega)$  introducimos el funcional

$$J_\varepsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dx dt + \varepsilon \|(I - \pi_E)\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \varphi^0 v^0 dx \quad (42)$$

donde  $\pi_E$  denota la proyección ortogonal de  $L^2(\Omega)$  en  $E$ .

El funcional  $J_\varepsilon$  es continuo y convexo en  $L^2(\Omega)$ . Por otra parte, en vista de la propiedad de continuación única anterior se puede probar que (véase [Z6])

$$\lim_{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon. \quad (43)$$

Por tanto,  $J_\varepsilon$  admite un único minimizador  $\widehat{\varphi}^0$  en  $L^2(\Omega)$ . El control  $f = \widehat{\varphi}$ , siendo  $\widehat{\varphi}$  la solución de (41) con dato inicial  $\widehat{\varphi}^0$  es tal que la solución  $u$  de (39) con  $u^0 = 0$  satisface

$$\|u(T) - u^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \quad \pi_E(u(T)) = \pi_E(v^0). \quad (44)$$

Una ligera variación del funcional  $J_\varepsilon$  permite construir controles *bang-bang*. En efecto, si en lugar del funcional de (42) consideramos

$$\widehat{J}_\varepsilon(\varphi^0) = \frac{1}{2} \left( \int_0^T \int_\omega |\varphi| \, dxdt \right)^2 + \varepsilon \| (I - \pi_E)\varphi^0 \|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega v^0 \varphi^0 \, dx \quad (45)$$

se siguen manteniendo las propiedades de continuidad, convexidad y coercitividad (43). El control

$$f = \int_0^T \int_\omega |\widehat{\varphi}| \, dxdt \operatorname{sgn}(\widehat{\varphi}) \quad (46)$$

siendo  $\widehat{\varphi}$  la solución de (41) con dato  $\widehat{\varphi}^0$ , el mínimo de  $\widehat{J}_\varepsilon$ , es tal que la solución  $u$  de (39) con dato inicial nulo satisface (46). En (46)  $\operatorname{sgn}$  denota la función multívoca tal que  $\operatorname{sgn}(s) = 1$  si  $s > 0$ ,  $\operatorname{sgn}(s) = -1$  si  $s < 0$  y  $\operatorname{sgn}(0) = [-1, 1]$ .

Gracias al efecto regularizante de la ecuación del calor el conjunto de ceros de las soluciones no triviales de (41) es de medida  $(n+1)$ -dimensional de Lebesgue nula. Por tanto, el control  $f$  de (46) es de tipo *bang-bang*, i.e.  $f = \pm\lambda$  en casi todo punto de  $\omega \times (0, T)$  con  $\lambda = \int_0^T \int_\omega |\widehat{\varphi}| \, dxdt$ . Por tanto (46) define un control de forma única. Si no supusiesemos que el conjunto de ceros de  $\widehat{\varphi}$  es de medida nula se obtendría la existencia de un control  $f \in \int_0^T \int_\omega |\widehat{\varphi}| \, dxdt \operatorname{sgn}(\widehat{\varphi})$ . En este caso  $f$  sería de forma “cuasi *bang-bang*” puesto que en el conjunto  $\widehat{\varphi} = 0$  sólo se podría garantizar que  $f \in [-\lambda, \lambda]$ .

Hemos probado el siguiente resultado:

**Teorema 3.1** *Sea  $\omega$  un abierto no vacío de  $\Omega$  y  $T > 0$ . Entonces, para todo  $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $E$  subespacio de dimensión finita de  $L^2(\Omega)$ , existe un control *bang-bang*  $f \in L^\infty(Q)$  tal que la solución de (39) satisface (44).*

**Observación 3.2** El control (46) obtenido minimizando  $\widehat{J}_\varepsilon$  es el de norma mínima en  $L^\infty(Q)$  de entre los controles admisibles (véase [FPZ2] para la demostración en el caso  $E = \{0\}$ ).

### 3.3 Control a cero

El control a cero de (39) es equivalente a la siguiente desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto (41):

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} \varphi^2 dx dt, \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega). \quad (47)$$

Gracias al efecto regularizante de la ecuación del calor, la norma a la izquierda (47) es sumamente débil. Sin embargo, a causa de la irreversibilidad del sistema (47) no es fácil de probar. En particular, los métodos de multiplicadores descritos en el marco de la ecuación de ondas no proporcionan (47).

En [R1] se probó la controlabilidad a cero de la ecuación del calor en una dimensión espacial mediante problemas de momentos y utilizando resultados clásicos sobre la independencia de familias de exponenciales reales en  $L^2(0, T)$ .

Más tarde, en [R2] se obtuvo un profundo resultado que garantiza que si la ecuación de ondas es exactamente controlable para un cierto tiempo  $T$  con controles con soporte en  $\omega$ , entonces la ecuación del calor es controlable a cero para todo  $T > 0$  con controles de soporte en  $\omega$ . Como consecuencia de esto y en vista de los resultados de controlabilidad de la sección 2.3 se deduce que la ecuación del calor es controlable a cero para todo  $T > 0$  con controles con soporte en cualquier conjunto  $\omega$  que verifique la condición de control geométrico.

Sin embargo, la condición de control geométrico no es natural en el contexto de la ecuación del calor.

Más recientemente G. Lebeau y L. Robbiano [LeR] han probado que la ecuación del calor es controlable a cero para cualquier abierto no vacío  $\omega$  de  $\Omega$  y  $T > 0$ . Este resultado muestra, como era previsible, que la condición de control geométrico es innecesaria en el marco de la ecuación del calor.

En [LeZ1] se estudió el sistema de la termoelasticidad y se dió una prueba más simple del resultado de [LeR]. El ingrediente más importante de esta prueba es una desigualdad de observabilidad para las autofunciones del Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta \psi_j = \lambda_j \psi_j & \text{in } \Omega \\ \psi_j = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (48)$$

Recordemos que los autovalores  $\lambda_j$  constituyen una sucesión creciente de números positivos tal que  $\lambda_j \rightarrow \infty$  cuando  $j \rightarrow \infty$  y que las autofunciones  $\{\psi_j\}$  pueden ser elegidas de modo que completen una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$ .

Se tiene el siguiente resultado:



**Teorema 3.2** *Para cualquier subconjunto abierto no vacío  $\omega$  de  $\Omega$  existen constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que*

$$\int_{\omega} \left| \sum_{\lambda_j \leq \mu} a_j \psi_j(x) \right|^2 dx \geq C_1 e^{-C_2 \sqrt{\mu}} \sum_{\lambda_j \leq \mu} |a_j|^2 \quad (49)$$

para todo  $\{a_j\} \in \ell^2$  y  $\mu > 0$ .

Este resultado fue implícitamente utilizado en [LeR] y probado en [LeZ1] mediante desigualdades de Carleman.

Como consecuencia en (49) se deduce que la desigualdad de observabilidad (47) se cumple para las soluciones de (41) con dato inicial en  $E_{\mu} = \text{span} \{\psi_j\}_{\lambda_j \leq \mu}$ , con una constante del orden de  $\exp(C\sqrt{\mu})$ . Esto muestra que la proyección de la solución sobre  $E_{\mu}$  puede controlarse mediante controles de talla  $\exp(C\sqrt{\mu})$ . Sin embargo, tal y como se observó en [LeR], las soluciones de (39) sin control ( $f = 0$ ) y tales que la proyección del dato inicial sobre  $E_{\mu}$  se anula, decaen en  $L^2(\Omega)$  con una tasa del orden de  $\exp(-\mu t)$ .

Por tanto, si dividimos el intervalo  $[0, T]$  en dos subintervalos  $[0, T/2]$  y  $[T/2, T]$ , podemos controlar a cero las frecuencias  $\lambda_j \leq \mu$  en el intervalo y después permitir que la ecuación evolucione sin control en el intervalo  $[T/2, T]$ . De este modo, en tiempo  $t = T$  la proyección de la solución  $u$  sobre  $E_{\mu}$  se anula y la norma de las altas frecuencias no excede la norma del dato inicial.

Este argumento permite controlar a cero la proyección sobre cualquier subespacio  $E_{\mu}$  pero no toda la solución. Esto último exige un argumento iterativo adicional. Descomponemos el intervalo  $[0, T)$  en subintervalos disjuntos  $[T_j, T_{j+1})$  para  $j \in N$  con una elección adecuada de la sucesión  $\{T_j\}$ . En cada intervalo  $[T_j, T_{j+1}]$  controlamos a cero las frecuencias  $\lambda_j \leq 2^j$ . Haciendo tender  $j \rightarrow \infty$  obtenemos un control  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (39) satisface  $u(T) \equiv 0$ .

### Observación 3.3

- (a) Obsérvese que la controlabilidad a cero no ha sido probada como consecuencia de la desigualdad de observabilidad (47). En realidad, se concluye que (47) se verifica como consecuencia de la propiedad de controlabilidad a cero.
- (b) Una vez que sabemos que (47) se cumple podemos obtener el control de norma en  $L^2(Q)$  mínima. Para ello basta minimizar el funcional

$$J(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} \varphi^2 dx dt + \int_{\Omega} \varphi(0) u^0 dx, \quad (50)$$

en el espacio de Hilbert  $H = \{\varphi^0 : \varphi \in L^2(\omega \times (0, T))\}$ . Nótese que  $J$  es continua y convexa en  $H$ . La coercividad es consecuencia de (47). Esto garantiza que el mínimo se alcanza.

- (c) A partir de (47) y gracias al efecto regularizante de la ecuación del calor se deduce que para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $\delta > 0$  existe  $C_k > 0$  tal que

$$\|\varphi(0)\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq C_k \int_{\delta}^{T-\delta} \int_{\omega} \varphi^2 dx dt. \tag{51}$$

Esto permite probar que la controlabilidad a cero se puede realizar mediante controles  $C^\infty$ .

- (d) Como consecuencia de la controlabilidad interna a cero de la ecuación del calor podemos deducir fácilmente la controlabilidad a cero frontera con controles en un subconjunto arbitrariamente pequeño de la frontera. En efecto, sea  $\Gamma_0$  un abierto no vacío de  $\partial\Omega$ . Podemos extender  $\Omega$  a otro dominio más grande  $\tilde{\Omega}$  tal que  $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \Gamma_0 \cup \omega$  siendo  $\omega$  abierto no vacío de  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  tal que  $\partial\omega \cap \partial\Omega \subset \Gamma_0$ . Dado  $u^0 \in L^2(\Omega)$  lo extendemos por cero a  $\tilde{\Omega}$  y denotamos la extensión por  $\tilde{u}^0$ . Entonces, podemos controlar el dato inicial  $\tilde{u}^0$  para la ecuación del calor en el cilindro  $\tilde{Q} = \tilde{\Omega} \times (0, T)$  con control  $f$  de soporte en  $\omega \times (0, T)$ . La restricción de la solución controlada a  $Q = \Omega \times (0, T)$  satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma_1 = (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T) \\ u = v & \text{en } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega \\ u(x, T) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{52}$$

con control  $v$ , la restricción de la solución  $\tilde{u}$  a  $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$ . Como consecuencia de la controlabilidad frontera a cero deducimos que se verifica la siguiente propiedad de observabilidad frontera:

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt. \tag{53}$$

Esta desigualdad de observabilidad fue derivada en [LeR] mediante desigualdades de Carleman.

- (e) El método de demostración de la controlabilidad a cero está basado en la posibilidad de desarrollar las soluciones en series de Fourier. Por tanto puede aplicarse a una clase más general de ecuaciones parabólicas con coeficientes independientes del tiempo. También los métodos de [R2] se

aplican en este contexto y se encuentran con la misma limitación: los coeficientes han de ser independientes del tiempo.

- (f) La controlabilidad a cero de la ecuación del calor con potencial de la forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + a(x, t)u = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (54)$$

ha sido estudiado por A. Fursikov y O. Yu. Imanuvilov (véase por ejemplo [CIK], [F], [FI1,2] y [I]). Su método es distinto al que hemos desarrollado aquí. Como consecuencia de su resultado de controlabilidad a cero se deduce que una desigualdad de la forma (53) se verifica también para las soluciones del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a(x, t)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (55)$$

cuando  $\Gamma_0$  es cualquier abierto no vacío de  $\partial\Omega$ .

Como consecuencia de esto y procediendo como en [L2], vol. 1, (donde se prueba que, en general, la observabilidad frontera implica la observabilidad interna cuando  $\omega$  es un entorno de la frontera) se puede probar (47) se cumple cuando  $\omega$  es cualquier abierto no vacío de  $\Omega$ .

Por tanto, el sistema (54) es controlable a cero para cualquier  $a \in L^\infty(Q)$  y para todo  $\omega$  abierto no vacío de  $\Omega$  y  $T > 0$ .

- (g) Recientemente, E. Fernández-Cara [FC], utilizando técnicas semejantes a las mencionadas en el apartado anterior ha probado que una desigualdad del tipo (53) se cumple para las soluciones de (55) con constantes del orden de  $\exp(C \| a \|_\infty)$  cuando  $\| a \|_\infty \rightarrow \infty$ . ■

### 3.4 La ecuación del calor semilineal

Consideremos la siguiente ecuación del calor semilineal

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + h(u) = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (56)$$

con  $h \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  tal que

$$|h(s_1) - h(s_2) - h'(0)(s_1 - s_2)| \leq C (|s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2|, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} \quad (57)$$

para algún  $C > 0$  y  $1 < p \leq (n + 4)/n$ .

Bajo las hipótesis (57) el sistema (56) está localmente bien puesto para  $u^0 \in L^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(Q)$ . De modo más preciso, existe  $\delta > 0$  tal que el sistema (56) tiene una única solución  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  para cualquier  $(u^0, f) \in L^2(\Omega) \times L^2(Q)$  tal que

$$\|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \leq \delta. \quad (58)$$

Por otra parte, cuando  $h$  es globalmente Lipschitz, i.e. cuando (57) se cumple con  $p = 1$  el sistema (56) está globalmente bien puesto y existe una única solución para cada  $u^0 \in L^2(\Omega)$  y  $f \in L^2(Q)$ .

El siguiente resultado fue demostrado en [Z6]:

**Teorema 3.3** *Supongamos que  $h$  es globalmente Lipschitz. Sea  $\omega$  un abierto no vacío de  $\Omega$  y  $T > 0$ . Entonces, para todo  $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  y todo subespacio de dimensión finita  $E$  de  $L^2(\Omega)$  existe  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (56) satisface (44).*

#### Observación 3.4

- (a) Este resultado fue demostrado en [FPZ1] en el contexto del control aproximado, i.e. cuando  $E = \{0\}$ . El método de demostración es semejante cuando  $E \neq \{0\}$ . Tal y como veremos, está basado en el método variacional descrito en la sección 3.2 y el método de punto fijo introducido en [Z4] para probar la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas semi-lineal.
- (b) El método de demostración del Teorema 3.3 no se puede aplicar cuando la no-linealidad crece en el infinito de forma superlineal, i.e. si se cumple (57) con  $p > 1$ . Esto es debido a que el método de demostración no proporciona estimaciones del control en función de la constante de Lipschitz de la no-linealidad. ■

#### Idea de la prueba del Teorema 3.3.

Fijemos  $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  y un subespacio de dimensión finita  $E$  de  $L^2(\Omega)$ .

Para simplificar la prueba suponemos que  $u^0 = 0$  si bien esto restringe la generalidad al ser el sistema no lineal. Suponemos también que  $h(0) = 0$ .

Observamos que la ecuación del calor (56) puede escribirse como

$$u_t - \Delta u + g(u)u = f1_\omega \tag{59}$$

con

$$g(s) = h(s)/s \text{ si } s \neq 0; g(0) = h'(0). \tag{60}$$

Como  $h$  es globalmente Lipschitz, la función  $g$  es acotada y se tiene

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{61}$$

Dado  $w \in L^2(Q)$  cualquiera consideramos el sistema linealizado

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(w)u = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{62}$$

Obsérvese que  $g(w) \in L^\infty(Q)$  y que

$$\|g(w)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \forall w \in L^2(Q). \tag{63}$$

Buscamos ahora  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (62) satisfaga (44). Obviamente, el control  $f$  ha de depender de  $w$ .

Para construir el control introducimos el funcional

$$J_{\varepsilon, w}(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega \varphi^2 dxdt + \varepsilon \| (I - \pi_E)\varphi^0 \|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \varphi^0 v^0 dx \tag{64}$$

donde  $\varphi = \varphi(x, t)$  es solución del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta \varphi + g(w)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{65}$$

El funcional  $J_{\varepsilon, w}$  es continuo y convexo en  $L^2(\Omega)$ . Por otra parte, la propiedad de continuación única también se verifica para las soluciones de (65), i.e. si  $\varphi$  resuelve (65) y  $\varphi = 0$  en  $\omega \times (0, T)$ , entonces  $\varphi \equiv 0$  y  $\varphi^0 \equiv 0$  (véase [SS]). Por tanto,  $J_{\varepsilon, w}$  es coerciva en  $L^2(\Omega)$  y satisface (43). De este modo, se deduce que  $J_{\varepsilon, w}$  posee un único minimizador  $\hat{\varphi}^0$  en  $L^2(\Omega)$ . El control  $f = \hat{\varphi}$ , siendo  $\hat{\varphi}$  la solución de (65) con dato  $\hat{\varphi}^0$  es tal que la solución de (62) satisface (44).

Hemos construido una aplicación  $N : L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$  tal que  $N(w) = u$ , i.e. a cada  $w \in L^2(Q)$  le asociamos la solución  $u$  de (62) que satisface (44) con el control  $f$  obtenido minimizando el funcional  $J_{\varepsilon, w}$ . Se comprueba fácilmente que  $N$  es continuo y compacto.

Por otra parte, se comprueba que, para  $\varepsilon > 0$  fijado, los funcionales  $J_{\varepsilon, w}$  son uniformemente coercitivos para  $w \in L^2(Q)$ . Por tanto, los minimizadores  $\hat{\varphi}^0$  están uniformemente acotados en  $L^2(\Omega)$  para todo  $w \in L^2(Q)$ . Esto es debido a que los potenciales  $g(w)$  están uniformemente acotados en  $L^\infty(Q)$ . Por tanto, los controles  $f$  están uniformemente acotados en  $L^2(Q)$  y las soluciones  $u$  de (62) también. Esto muestra que el rango de  $N$  está acotado en  $L^2(Q)$ .

Por tanto, podemos aplicar el Teorema de punto fijo de Schauder a  $N$  y deducir la existencia de un punto fijo  $u$  tal que  $Nu = u$ . Este punto fijo es solución de (56) con  $u^0 \equiv 0$  y por construcción satisface (44). ■

**Observación 3.5** En la prueba del Teorema 3.3 podemos considerar funcionales  $\tilde{J}_\varepsilon$  de la forma (45). De este modo se deduce que  $f$  puede ser construido de la forma (46) con  $\hat{\varphi}$  solución de (65) para algún  $w \in L^2(Q)$ . Sin embargo, a nuestro entender se desconoce si la medida de Lebesgue  $(n + 1)$ -dimensional de las soluciones no triviales de (65) es nulo. ■

Tal y como mencionamos anteriormente, la prueba del Teorema 3.3 no se aplica si  $p > 1$ . Sin embargo, podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa si la condición de control (44) se debilita y sustituye por

$$\pi_E(u(T)) = \pi_E(v^0), \tag{66}$$

i.e. si controlamos exclusivamente las proyecciones sobre subespacios de dimensión finita. En efecto, en este contexto se puede probar que para cada abierto no vacío  $\omega$  de  $\Omega$ ,  $T > 0$  y subespacio de dimensión finita  $E$  de  $L^2(\Omega)$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$  con

$$\|u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|v^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \tag{67}$$

existe un control  $f \in L^2(Q)$  tal que la solución de (56) satisface (66).

Cuando la no-linealidad tiene el “buen signo”; por ejemplo, en el caso de la no-linealidad homogénea

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + |u|^{p-1}u = f1_\omega & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{68}$$

y teniendo en cuenta que las soluciones de (68) sin control (i.e. con  $f = 0$ ) decaen exponencialmente en  $L^2(\Omega)$  cuando  $T$  crece, se deduce que para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$  existe  $T > 0$  suficientemente grande de modo que existe  $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$  tal que la solución de (68) satisface

$$\pi_E(u(T)) = 0. \tag{69}$$

Teniendo en cuenta que  $((p-1)t)^{-1/(p-1)}$  es una supersolución de (68) con  $f = 0$  y aplicando el principio del máximo se puede comprobar la existencia de  $T > 0$  de modo que esto ocurre para todo  $u^0 \in L^2(\Omega)$  simultáneamente. Sin embargo este argumento no permite tomar  $T > 0$  arbitrariamente pequeño.

### Observación 3.6

- (a) Este método no permite obtener ningún resultado sobre la controlabilidad de la proyección sobre  $E^\perp$ , el complemento ortogonal de  $E$ .
- (b) A nuestro entender no existen resultados sobre el control de las soluciones explosivas. En particular, consideremos el conjunto de los pares  $\{u, f\}$  tales que

$$u_t - \Delta u - |u|^{p-1} u = f1_\omega \text{ en } \Omega \times (0, T)$$

con  $p > 1$ ,  $f \in L^2(Q)$ , que satisfacen la condición inicial  $u(0) = u^0 \in L^2(\Omega)$  y toman condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas.

Obsérvese que para algunos datos iniciales  $u^0$ , las soluciones de este problema con  $f \equiv 0$  pueden explotar en tiempo  $t \leq T$ . Por tanto, la existencia de pares admisibles  $\{u^0, f\}$  no siempre es trivial.

Uno de los problemas que pueden considerarse en este contexto es si el conjunto que recorren las soluciones  $u$  en tiempo  $t = T$ , i.e.  $\{u(T)\}$ , es denso en  $L^2(\Omega)$ .

Tal y como mencionamos en la sección 2.4, en el contexto de la ecuación de ondas, debido a la velocidad finita de propagación de las soluciones, la explosión de las soluciones no puede evitarse salvo en el caso trivial  $\omega = \Omega$ . Por tanto, en este caso, para algunos datos iniciales el conjunto de pares admisibles  $\{u, f\}$  es vacío. Sin embargo, la posibilidad de evitar la explosión mediante la elección de un control  $f$  adecuado no puede excluirse en el contexto de la ecuación del calor. Por ejemplo, en el caso de la ecuación con no-linealidad exponencial.

$$u_t - \Delta u = e^u + f1_\omega$$

se puede comprobar que si el dato inicial  $u^0$  es tal que  $u$  explota en tiempo  $t = T$  para  $f = 0$ , entonces, si  $f \leq 0$  en  $\omega \times (0, T)$  y  $f \not\equiv 0$ , la solución permanece acotada en  $\Omega \times (0, T)$ . Obviamente, la obtención de este tipo de resultados es posible gracias al principio del máximo que no se puede aplicar en el contexto de la ecuación de ondas. ■

Recientemente se han obtenido diversos resultados de control a cero para ecuaciones parabólicas semilineales. Lin Guo y Littman en [LiL] mediante una versión no lineal del Teorema de Cauchy-Kovalevski han demostrado que, en una dimensión espacial y cuando el control actúa en un extremo de la frontera, se tiene la controlabilidad a cero de los datos iniciales continuos y acotados, suficientemente pequeños si la no-linealidad es analítica y pertenece a la clase de Gevrey 2. Por otra parte, Fursikov e Imanuvilov [FI1] han probado la controlabilidad a cero local de la ecuación del calor semilineal usando desigualdades de Carleman. En ambos casos, cuando la no-linealidad tiene el buen signo como en (68) se puede probar la existencia de  $T > 0$  tal que todo dato inicial sea controlable a cero.

Más recientemente, E. Fernández Cara [FC] ha probado que la ecuación del calor semilineal (56) es controlable a cero en tiempo  $T > 0$  arbitrariamente pequeño si la no-linealidad satisface la condición de crecimiento

$$|h(s)| \leq C |s| \log(1 + |s|), \forall s \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

Se trata del análogo del resultado de controlabilidad exacta para la ecuación de ondas del Teorema 2.3. Obsérvese que (70) es una condición de crecimiento casi óptima puesto que pueden producirse fenómenos de explosión si (70) no se cumple. En efecto, cuando  $h(s) = -s \log^p(|s|)$  cuando  $|s| \rightarrow \infty$  con  $p > 1$ , hay soluciones de la ecuación sin control que explotan en tiempo finito arbitrariamente pequeño. El método de demostración de [FC] combina un argumento de punto fijo y las estimaciones de observabilidad explícitas mencionadas en el apartado (g) de la Observación 3.3.

A este respecto cabe mencionar que se desconoce si la ecuación del calor semilineal bajo la condición de crecimiento (70) es aproximadamente controlable.

A nuestro entender, el único resultado de controlabilidad en un tiempo uniforme que se conoce para un sistema no-lineal con no-linealidad superlineal en el infinito es el de J.-M. Coron [C2] en el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión  $n = 2$ . En este trabajo se demuestra que la controlabilidad aproximada en un tiempo arbitrariamente pequeño como consecuencia de la controlabilidad de las ecuaciones de Euler (véase [C1]) mediante un argumento de paso al límite cuando la viscosidad tiende a cero. El método de J.-M. Coron es totalmente distinto a los métodos de punto fijo que hemos descrito anteriormente que consisten en analizar el control del sistema no-lineal como una perturbación del correspondiente sistema lineal. El punto de vista de Coron es



diametralmente opuesto pues considera las ecuaciones de Navier-Stokes como una perturbación de las de Euler.

En [LZ3] se ha demostrado la controlabilidad exacta de ciertas aproximaciones de Galerkin de las ecuaciones de Navier-Stokes.

## 4 El sistema de la termoelasticidad

### 4.1 Formulación del problema

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\Gamma$  y sea  $\omega$  un subconjunto abierto no vacío de  $\Omega$ .

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \alpha \nabla \theta = f 1_{\omega} & \text{en } Q \\ \theta_t - \Delta \theta + \beta \operatorname{div} u_t = 0 & \text{in } Q \\ u = 0, \theta = 0 & \text{en } \Sigma \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{en } \Omega \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (71)$$

En (71),  $u = (u_1, u_2, u_3)$  denota el campo de deformaciones y  $\theta$  la temperatura. Las constantes de Lamé  $\lambda, \mu$  y las constantes de acoplamiento  $\alpha, \beta$  se suponen positivas. El control  $f = (f_1, f_2, f_3)$  actúa en el sistema como una fuerza de volumen concentrada en  $\omega$ .

Obsérvese que no hemos introducido ningún control en la ecuación del calor del sistema. Por tanto, pretendemos controlar tanto la deformación como la temperatura a través de un único control  $f$  que actúa en la componente elástica del sistema. Obviamente, para que esto sea posible es preciso que las dos componentes del sistema  $u$  y  $\theta$  estén fuertemente acopladas.

El sistema (71) combina el carácter hiperbólico del sistema de Lamé y el carácter parabólico de la ecuación del calor.

El sistema (71) está bien puesto para  $(u^0, u^1, \theta^0) \in H = (H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$  y  $f \in (L^2(Q))^3$  y admite una única solución en la clase  $(u, u_t, \theta) \in C([0, T]; H)$ .

Los diferentes problemas de control introducidos en las secciones anteriores pueden plantearse también para este sistema. Sin embargo, la controlabilidad exacta no puede obtenerse debido al carácter irreversible del sistema. Por otra parte la controlabilidad aproximada puede deducirse fácilmente gracias al Teorema de unicidad de Holmgren si  $T$  es suficientemente grande.

Pero en este contexto cabe también plantearse otros problemas de controlabilidad. Por ejemplo, J. Lagnese y J.-L. Lions en [LaL] probaron la *controlabilidad parcial* de diversos sistemas de la termoelasticidad. El sistema (71) se dice

parcialmente controlable si para todo  $(u^0, u^1, \theta^0) \in H$  existe  $f \in (L^2(Q))^3$  tal que la solución de (71) satisface

$$u(x, T) \equiv u_t(x, T) \equiv 0 \text{ en } \Omega.$$

En otras palabras, la controlabilidad parcial garantiza la controlabilidad a cero del desplazamiento  $u$  pero no proporciona ninguna información sobre la temperatura  $\theta$ .

En [LaL] se probó que si  $\omega$  y  $T$  son tales que el sistema de Lamé es exactamente controlable, entonces el sistema (71) es parcialmente controlable si los parámetros de acoplamiento  $\alpha$  y  $\beta$  son suficientemente pequeños.

Más recientemente, en [Z2] se introdujo la siguiente noción de *controlabilidad exacta-parcial*: El sistema (71) se dice exacta-parcialmente controlable si para todo  $(u^0, u^1, \theta^0), (v^0, v^1, \eta^0) \in H$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $f \in (L^2(Q))^3$  tal que la solución de (71) satisface

$$\begin{cases} u(x, T) = v^0(x), u_t(x, T) = v^1(x) & \text{in } \Omega \\ \|\theta(T) - \eta^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (72)$$

Obsérvese que en (72) se exige que  $(u, u_t)$  alcancen exactamente el estado  $(v^0, v^1)$  mientras que la temperatura alcanza el estado final de forma aproximada.

Obviamente, la noción de controlabilidad exacta-aproximada es más fuerte que la de controlabilidad parcial. Por otra parte, se espera que la noción de controlabilidad a cero sea más fuerte que la de controlabilidad exacta-aproximada. Sin embargo, para probar esto último se necesita un resultado de unicidad retrógrada para el sistema con  $f = 0$  que, a nuestro entender, constituye un problema abierto.

En la sección 4.2 describimos brevemente los resultados de [Z2] sobre la controlabilidad exacta aproximada. En la sección 4.3 presentamos los resultados de controlabilidad a cero de [LeZ1] que son válidos cuando se introduce un control adicional que actúa sobre la ecuación del calor o bien cuando las condiciones de contorno de Dirichlet se sustituyen por condiciones de contorno periódicas.

Cabe esperar que el sistema (71) sea controlable a cero cuando  $\omega$  y  $T$  son tales que el sistema de Lamé es exactamente controlable. Sin embargo este resultado no ha sido probado aún.

Resultados semejantes a los que aquí presentamos han sido obtenidos también en el marco de las ecuaciones de placas termoelásticas (véase [TZ]).

En este artículo no describiremos otros resultados relevantes de controlabilidad para sistemas de la termoelasticidad. En particular, cabe mencionar el

trabajo de S. Hansen [H] en el que se prueba que el sistema de la termoelasticidad en dimensión  $n = 1$  es controlable a cero mediante controles frontera. Los métodos de [H] son distintos a los que aquí presentamos y están basados en la reducción del problema de control a un problema de momentos y la utilización de la teoría de las series de Fourier no armónicas.

En este trabajo no abordaremos tampoco el problema de la estabilización. El lector interesado puede consultar [PZ] y [LeZ2]. En el primero de estos trabajos se demuestra que la energía de las soluciones del sistema de las placas termoelásticas de von Kármán decae exponencialmente y se obtienen estimaciones explícitas sobre la tasa de decaimiento. Esto se realiza mediante la construcción de un funcional de energía, equivalente a la energía natural del sistema, y para el cual se obtienen desigualdades diferenciales que conducen al decaimiento exponencial. En el segundo se analiza el sistema de la elasticidad tridimensional (71) en ausencia de control (i.e. con  $f \equiv 0$ ) y se prueba que cuando el dominio es convexo la tasa de decaimiento no es uniforme. Esto es debido a la débil interacción entre las ondas longitudinales y transversales cuando estas se reflejan de forma perpendicular en la frontera.

#### 4.2 Controlabilidad exacta-aproximada

En [Z2] demostramos el siguiente resultado:

**Teorema 4.1** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\Gamma$  de clase  $C^2$ . Supongamos que  $\omega$  es un entorno de  $\partial\Omega$  en  $\Omega$  y que  $T > \text{diam}(\Omega \setminus \omega) / \sqrt{\mu}$ .*

*Entonces, el sistema (71) es controlable exacta-aproximadamente, i.e. para todo  $(u^0, u^1, \theta^0), (v^0, v^1, \eta^0) \in H$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $f \in (L^2(Q))^3$  tal que la solución de (71) verifica (72).*

En [Z2] se demuestra que este resultado puede reducirse a la obtención de desigualdades de observabilidad adecuadas para el sistema adjunto

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \mu \Delta \varphi - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \varphi + \beta \nabla \psi_t = 0 & \text{en } Q \\ -\psi_t - \Delta \psi - \alpha \text{div} \varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0, \psi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x), \varphi_t(x, T) = \varphi^1(x) & \text{en } \Omega \\ \psi(x, T) = \psi^0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (73)$$

De modo más preciso, se demostró que el Teorema 4.1 es consecuencia de los dos resultados siguientes:

**Teorema 4.2** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.1, para todo conjunto acotado  $B$  de  $L^2(\Omega)$  existe  $\delta = \delta(B)$  tal que se verifica*

$$\delta \leq \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dxdt \tag{74}$$

para toda solución de (73) con datos iniciales tales que

$$\|(\varphi^0, \varphi^1 + \beta \nabla \psi^0)\|_{(L^2(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3} \geq 1, \psi^0 \in B. \tag{75}$$

**Teorema 4.3** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.1, si  $\varphi = 0$  en  $\omega \times (0, T)$  entonces, necesariamente,  $\varphi^0 \equiv \varphi^1 \equiv 0$  y  $\psi^0 \equiv 0$  en  $\Omega$ .*

**Observación 4.1**

- (a) El resultado de controlabilidad parcial de [LaL] mencionado en la sección 4.1 es una consecuencia de la desigualdad de observabilidad (74) en el caso particular  $B = \{0\}$ . En este caso, suponiendo que  $\alpha\beta$  es suficientemente pequeño, (74) se obtiene como consecuencia de la desigualdad de observabilidad para el sistema de Lamé.

En efecto bajo las hipótesis del Teorema 4.1 se tiene

$$\|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{(L^2(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dxdt \tag{76}$$

para cada solución de

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \mu \Delta \varphi - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi^0(x), \varphi_t(x, T) = \varphi^1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{77}$$

De (76) se deduce que (74) se verifica cuando  $B = \{0\}$  y  $\alpha\beta$  es suficientemente pequeño.

- (b) En el Teorema 4.2,  $B$  es cualquier dominio acotado y no se impone ninguna restricción sobre la talla del producto  $\alpha\beta$  de los parámetros de acoplamiento. Por lo tanto, el Teorema 4.2 no se puede deducir mediante un argumento perturbativo a partir de la desigualdad de observabilidad (76) para el sistema de Lamé (77).
- (c) El Teorema 4.2 proporciona una desigualdad de observabilidad que es uniforme cuando  $\psi^0$  permanece acotada a priori. Sin embargo no proporciona

ninguna información sobre el comportamiento de  $\delta$  cuando  $\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ .

Ovsérvese sin embargo que, a causa de la irreversibilidad del sistema (73), una estimación de la forma

$$\|(\varphi^0, \varphi^1 + \beta \nabla \psi^0, \psi^0)\|_{(L^2(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dxdt$$

no puede verificarse para todo dato  $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0)$  con una constante  $C$  uniforme.

Sin embargo, muy probablemente la desigualdad

$$\|(\varphi(0), \varphi_t + \beta \nabla \psi(0), \psi(0))\|_{(L^2(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dxdt. \tag{78}$$

es cierta y es equivalente a la controlabilidad a cero del sistema. ■

Suponiendo que se cumplen los Teoremas 4.2 y 4.3 indiquemos brevemente la demostración del Teorema 4.1.

En primer lugar observemos que el problema puede ser reducido al caso  $w^0 \equiv u^1 \equiv 0$  y  $\theta^0 \equiv 0$ . Entonces, dado  $(v^0, v^1, \eta^0) \in H$  y  $\varepsilon > 0$  introducimos el funcional

$$J_{\varepsilon}(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|\psi^0\|_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} v^1 \cdot \varphi^0 dx + \langle v^0, \varphi^1 \rangle - \int_{\Omega} (\eta^0 + \beta \operatorname{div} v^0) \psi^0 dx \tag{79}$$

definido para  $(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0) \in H' = (L^2(\Omega))^3 \times (H^{-1}(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$  donde  $\cdot$  denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^3$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto de dualidad entre  $(H_0^1(\Omega))^3$  y  $(H^{-1}(\Omega))^3$ .

En vista de los Teoremas 4.2 y 4.3 podemos probar la siguiente propiedad de coercividad

$$\liminf_{\|(\varphi^0, \varphi^1 + \beta \nabla \psi^0, \psi^0)\|_{H'} \rightarrow \infty} \frac{J_{\varepsilon}(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0)}{\|(\varphi^0, \varphi^1 + \beta \nabla \psi^0, \psi^0)\|_{H'}} \geq \varepsilon. \tag{80}$$

Como  $J_{\varepsilon}$  es continuo y convexo en  $H'$ , de (80) se deduce la existencia de un único minimizador en  $H'$  que denotaremos por  $(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\varphi}^1, \widehat{\psi}^0)$ . El control  $f = \widehat{\varphi}$  donde  $(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$  es solución de (73) con el minimizador como dato inicial es tal que la solución de (71) con dato inicial nulo satisface (72).

**Observación 4.2** Es fácil comprobar que el Teorema 4.1 puede ser mejorado para garantizar que la temperatura verifica de forma exacta un número finito de restricciones. En otras palabras, si  $E$  es un subespacio de dimensión finita de  $L^2(\Omega)$  el control  $f$  puede ser elegido de modo que la solución de (71) satisfaga

$$\begin{cases} u(x, T) = u^0(x), u_t(x, T) = u^1(x) & \text{en } \Omega \\ \|\theta(T) - \eta^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \pi_E(\theta(T)) = \pi_E(\eta^0). \end{cases} \quad (81)$$

Para comprobar esto basta sustituir el funcional  $J_\varepsilon$  anterior por

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1, \psi^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \varepsilon \|(I - \pi_E)\psi^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &- \int_\Omega v^1 \cdot \varphi^0 dx + \langle v^0, \varphi^1 \rangle - \int_\Omega (\eta^0 + \beta \operatorname{div} v^0) \psi^0 dx. \end{aligned}$$

■

Tal y como hemos indicado, el Teorema 4.3 se puede probar mediante el Teorema de unicidad de Holmgren. Indiquemos brevemente los pasos principales de la demostración del Teorema 4.2.

**Paso 1.** Introducimos la nueva variable

$$\phi(x, t) = - \int_t^T \varphi(x, s) ds + \phi^0(x)$$

con

$$-\mu \Delta \phi^0 - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \phi^0 = 0\varphi^1 - \beta \nabla \psi^0 \text{ en } \Omega; \phi^0 \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Observamos que  $(\phi, \psi)$  satisface

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \mu \Delta \phi - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \phi + \beta \nabla \psi = 0 & \text{en } Q \\ -\psi_t - \Delta \psi - \alpha \operatorname{div} \phi_t = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0, \psi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(x, T) = \phi^0(x), \phi_t(x, T) = \phi^1(x), \psi(x, T) = \psi^0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (82)$$

El problema se reduce a probar que para cualquier conjunto acotado  $B$  de  $L^2(\Omega)$  existe  $\delta = \delta(B)$  tal que

$$\delta \leq \int_0^T \int_\omega |\phi_t|^2 dxdt \quad (83)$$

para toda solución de (82) con datos

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|_{(H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3} \geq 1, \psi^0 \in B. \quad (84)$$

**Paso 2.** Siguiendo el método de desacoplamiento propuesto en [HLP] introducimos el sistema desacoplado

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{tt} - \mu\Delta\tilde{\phi} - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \tilde{\phi} - \alpha\beta P\tilde{\phi}_t = 0 & \text{en } Q \\ -\tilde{\psi}_t - \Delta\tilde{\psi} - \alpha \operatorname{div} \tilde{\phi}_t = 0 & \text{en } Q \\ \tilde{\phi} = 0, \tilde{\psi} = 0 & \text{en } \Sigma \\ \tilde{\phi}(x, T) = \phi^0(x), \tilde{\phi}_t(x, T) = \phi^1(x), \tilde{\psi}(x, T) = \psi^0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (85)$$

siendo  $P$  la proyección ortogonal de  $(L^2(\Omega))^3$  en el subespacio cerrado  $\{\nabla\varphi : \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$ .

Tanto (82) como (85) generan un semigrupo continuo en  $H$  que denotamos por  $S(t)$  y  $\tilde{S}(t)$  respectivamente.

Gracias a [HLP] sabemos que  $S - \tilde{S} : H \rightarrow C([0, T]; H)$  es una aplicación completamente continua.

**Paso 3.** En vista de la compacidad de la diferencia de los dos semigrupos  $S$  y  $\tilde{S}$  basta probar la desigualdad de observabilidad para el sistema hiperbólico que  $\tilde{\phi}$  verifica en (85).

De modo más preciso, consideremos el sistema

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{tt} - \mu\Delta\tilde{\phi} - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \tilde{\phi} - \alpha\beta P\tilde{\phi}_t = 0 & \text{en } Q \\ \tilde{\phi} = 0 & \text{en } \Sigma \\ \tilde{\phi}(T) = \phi^0, \tilde{\phi}_t(T) = \phi^1 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (86)$$

y supongamos que se verifica la siguiente desigualdad de observabilidad:

$$\|(\phi^0, \phi^1)\|_{(H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\tilde{\phi}_t|^2 dx dt. \quad (87)$$

Entonces, por un argumento clásico de compacidad-unicidad (véase por ejemplo el Apéndice 1 del volumen 1 de [L2]) y en vista de la compacidad de  $S - \tilde{S}$  y del resultado de unicidad que el Teorema 4.3 proporciona deducimos que (83) se cumple para las soluciones de (82) con datos iniciales (84).

**Paso 4.** Mediante métodos de multiplicadores se demuestra que (87) se cumple cuando  $\omega$  es un entorno de la frontera y  $T > \operatorname{diam}(\Omega \setminus \omega) / \sqrt{\mu}$ . ■

**Observación 4.3** La demostración del Teorema 4.3 muestra que el sistema (71) es exacta-aproximadamente controlable siempre que la desigualdad (87) se verifica por el sistema (86). En [Z2] probamos (87) en el caso particular en que  $\omega$  es un entorno de la frontera y  $T > \operatorname{diam}(\Omega \setminus \omega) / \sqrt{\mu}$ . Sin embargo, la caracterización de los pares  $(\omega, T)$  tales que (87) se cumple en términos de condiciones de control geométrico como las introducidas por [BLR] en el contexto de la ecuación de ondas es un problema abierto. ■

### 4.3 Controlabilidad a cero

Supongamos que  $\Omega$  es el cubo unidad de  $\mathbb{R}^3$ , i.e.  $\Omega = (0, 1)^3$  y consideremos el sistema (71) con condiciones de contorno periódicas en lugar de las condiciones de Dirichlet consideradas hasta ahora. Se trata de un caso particular del abordado en [LeZ1] en donde se estudia este tipo de cuestiones sobre una variedad de Riemann  $M$  compacta, conexa y sin borde de clase  $C^\infty$  y dimensión 3.

Consideramos el sistema de la termoelasticidad en la variedad  $M$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \alpha \nabla \theta = f 1_\omega & \text{en } Q \\ \theta_t - \Delta \theta + \beta \operatorname{div} u_t = 0 & \text{en } Q \\ u(0) = u^0, u_t(0) = u^1, \theta(0) = \theta^1 & \text{en } M, \end{cases} \quad (88)$$

donde  $Q = M \times (0, T)$  y  $\omega$  es un subconjunto abierto de  $M$ . Nos interesa controlar el sistema (88) mediante el control  $f$  localizado en  $\bar{\omega} \times [0, T]$ .

En (88)  $\theta$  es nuevamente una función escalar y  $u$  es un campo de vectores. Denotemos mediante  $\widetilde{H}^s(M)$  el espacio de campos de vectores sobre  $M$  de regularidad  $H^s$ .

El siguiente resultado fue demostrado en [LeZ1]:

**Teorema 4.4** *Supongamos que cualquier curva geodésica en  $M$  de longitud  $\sqrt{\mu}T$  intersecta  $\omega$ . Entonces, para todo  $(u^0, u^1, \theta^0) \in H = \widetilde{H}^0(M) \times \widetilde{H}^{-1}(M) \times H^{-1}(M)$  tal que  $\int_M \theta^0 dx = 0$  existe  $f \in L^2(0, T; \widetilde{H}^{-1}(M))$  con soporte en  $\bar{\omega} \times [0, T]$  tal que la solución de (88) satisface*

$$u(T) = u_t(T) = 0, \theta(T) = 0 \text{ en } M. \quad (89)$$

Además, existe  $C > 0$  tal que

$$\|f\|_{L^2(0, T; \widetilde{H}^{-1}(M))} \leq C \|(u^0, u^1, \theta^0)\|_H, \quad (90)$$

para todo  $(u^0, u^1, \theta^0) \in H$ .

#### Observación 4.4

- (a) La condición impuesta sobre  $(\omega, T)$  es la condición de control geométrico para el sistema de la elasticidad en la variedad sin borde  $M$ . En este sentido el resultado es óptimo.
- (b) La condición  $\int_M \theta^0 dx = 0$  es necesaria para conducir (88) a cero mediante un único control  $f$  que actúa en la ecuación hiperbólica. En efecto, integrando la ecuación del calor de (88) sobre  $M$  se observa que



$\int_M \theta(x, T) dx$  permanece constante a lo largo de trayectorias. Por lo tanto  $\int_M \theta^0(x) dx = 0$  es una condición necesaria para la existencia de  $f$  tal que la solución de (88) satisfaga  $\int_M \theta(x, T) dx = 0$ .

- (c) Con el objeto de simplificar la prueba hemos preferido enunciar el resultado en el contexto de las soluciones débiles en lugar de hacerlo en el de las soluciones de energía finita del Teorema 4.1. Por consiguiente el control  $f$  es menos regular y pertenece a  $L^2(0, T; \widetilde{H}^{-1}(M))$ . Por esta razón no hemos multiplicado el control por la función característica de  $\omega$ . Sin embargo los controles que se consideran tienen su soporte en  $\bar{\omega} \times [0, T]$  tal y como se indica explícitamente en el enunciado del Teorema 4.4.
- (d) Como consecuencia del Teorema 4.4, cuando consideramos el sistema en un dominio acotado con controles que actúan sobre la condición de contorno de Dirichlet, se puede probar la controlabilidad a cero en tiempo  $T > \text{diam}(\Omega) / \sqrt{\mu}$  mediante controles que actúan tanto sobre el desplazamiento como la temperatura y sobre toda la frontera lateral  $\partial\Omega \times (0, T)$ . Para ver esto basta construir un cubo  $\tilde{\Omega}$  que contenga  $\Omega$  y considerar controles para el sistema en  $\tilde{\Omega}$  con soporte en  $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ . Entonces la restricción de la solución controlada a  $\Omega$  satisface las condiciones requeridas. La extensión del Teorema 4.4 al caso de las condiciones de contorno de Dirichlet con un control que actúe exclusivamente en el desplazamiento y localizado en un subconjunto  $\omega$  que satisfaga una condición de control geométrico es un problema abierto. ■

#### Idea de la demostración del Teorema 4.4

En primer lugar obsérvese que la controlabilidad a cero de (88) es equivalente a una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \mu \Delta \varphi - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \varphi + \beta \nabla \psi_t = 0 & \text{en } Q \\ -\psi_t - \Delta \psi - \alpha \operatorname{div} \varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi(T) = \varphi^0, \varphi_t(T) = \varphi^1, \psi(T) = \psi^0 & \text{en } M. \end{cases} \quad (91)$$

De forma más precisa, el resultado de controlabilidad del Teorema 4.4 es equivalente a la existencia de una constante  $C > 0$  tal que

$$\|\varphi(0)\|_{(H^1(M))^3}^2 + \|\varphi_t(0) + \beta \nabla \psi(0)\|_{(L^2(M))^3}^2 + \|\psi(0)\|_{H^1(M)}^2 \leq C \int_0^T \|\varphi\|_{H^1(M)}^2 dt, \quad (92)$$

para toda solución de (89) con  $\int_M \psi^0 dx = 0$ .

Probamos (92) en varias etapas.

**Etapa 1.** Consideramos en primer lugar el campo vectorial  $\sigma = \text{curl } \varphi$  que satisface

$$\begin{cases} \sigma_{tt} - \mu \Delta \sigma = 0 & \text{en } Q \\ \sigma(T) = \text{curl } \varphi^0 = \sigma^0, \sigma_t(T) = \text{curl } \varphi^1 = \sigma^1 & \text{en } M. \end{cases} \quad (93)$$

Por [BLR] sabemos que bajo la condición de control geométrico que hemos impuesto sobre  $\omega$  y  $T$  existe  $C > 0$  tal que

$$\| \sigma(0) \|_{\widetilde{H^0(M)}}^2 + \| \sigma_t(0) \|_{\widetilde{H^{-1}(M)}}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} | \sigma |^2 dx dt \quad (94)$$

para toda solución de (93).

**Etapa 2.** Consideramos el par  $(\rho, \psi)$  con  $\rho = \text{div } \varphi$  que satisface

$$\begin{cases} \rho_{tt} - (\lambda + 2\mu)\Delta \varphi + \beta \Delta \psi_t = 0 & \text{en } Q \\ -\psi_t - \Delta \psi - \alpha \rho = 0 & \text{en } Q \\ \rho(T) = \text{div } \varphi^0 = \rho^0, \rho_t(T) = \text{div } \varphi^1 = \rho^1, \psi(T) = \psi^0 & \text{en } M. \end{cases} \quad (95)$$

Por medio del cambio de variables  $\xi = -\Delta \psi$  este sistema se reduce a

$$\begin{cases} \rho_{tt} - (\lambda + 2\mu + \alpha\beta)\Delta \rho + \beta \Delta \xi = 0 & \text{en } Q \\ -\xi_t - \Delta \xi + \alpha \Delta \rho = 0 & \text{en } Q \\ \rho(T) = \rho^0, \rho_t(T) = \rho^1, \xi(T) = -\Delta \psi^0 & \text{en } M. \end{cases} \quad (96)$$

En vista de (94), para deducir (92) basta probar

$$\| \rho(0) \|_{L^2(M)}^2 + \| \rho_t(0) - \beta \xi(0) \|_{H^{-1}(M)}^2 + \| \xi(0) \|_{H^{-1}(M)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} \rho^2 dx dt. \quad (97)$$

**Etapa 3.** La desigualdad de observabilidad (97) es equivalente a la controlabilidad a cero del sistema

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w + \alpha \Delta \eta = g 1_{\omega} & \text{en } Q \\ \eta_t - \Delta \eta + \beta w_t = 0 & \text{en } Q \\ w(0) = w^0, w_t(0) = w^1, \eta(0) = \eta^0 & \text{en } M, \end{cases} \quad (98)$$

con  $c^2 = \lambda + 2\mu$ . Obsérvese que en (98) tanto  $w$  como  $\eta$  son funciones escalares.

De manera más precisa, (97) se verifica si y sólo si para todo  $(w^0, w^1, \eta^0) \in H^1(M) \times L^2 \times H^1(M)$  con  $\int_M (\eta^0 + \beta w^0) dx = 0$  existe  $g \in L^2(Q)$  tal que la solución de (98) satisface

$$w(T) = w_t(T) = \eta(T) = 0 \text{ en } M$$

y existe  $C > 0$  tal que

$$\|g\|_{L^2(Q)} \leq C \| (w^0, w^1, \eta^0) \|_{H^1(M) \times L^2(M) \times H^1(M)}$$

para todo  $(w^0, w^1, \eta^0)$  tal que  $\int_M (\eta^0 + \beta u^0) dx = 0$ .

**Etapla 4.** La controlabilidad a cero de (98) fue demostrada en [LeZ1] tanto en el caso en que  $\partial M = \emptyset$  como en el caso  $\partial M \neq \emptyset$  con condiciones de contorno de Dirichlet.

La demostración está basada en una descomposición espectral que permite separar el semigrupo generado por (98) con  $f = 0$  en su proyección hiperbólica y parabólica. Esto puede hacerse con facilidad puesto que el espectro puede calcularse casi explícitamente ya que todos los operadores diferenciales (con respecto a las variables espaciales) que intervienen en (98) son potencias del Laplaciano.

Una vez que el semigrupo ha sido descompuesto en su componente hiperbólica y parabólica se procede del siguiente modo:

- (a) Se demuestra que la componente hiperbólica es exactamente controlable con controles a soporte en  $\omega$  en cuanto  $\omega$  satisface la condición de control geométrico del Teorema 4.4 en tiempo  $\sqrt{\lambda + 2\mu}T$  como consecuencia de los resultados de [BLR].
- (b) Se prueba que la componente parabólica es controlable a cero para cualquier subconjunto abierto no vacío  $\omega$  de  $M$  y  $T > 0$  mediante el método descrito en la sección 3.3 en el marco de la controlabilidad a cero de la ecuación del calor.
- (c) Por último el problema de controlar simultáneamente la componente hiperbólica y parabólica se formula como un problema de punto fijo y resuelve el contexto de la alternativa de Fredholm. A este nivel la compacidad de la aplicación que a cada dato en  $L^2(M)$  le asocia el control en  $L^2(Q)$  de la componente parabólica juega un papel esencial. De este modo el problema se reduce al control de un subespacio de dimensión finita y esto se realiza mediante argumentos de compacidad-unicidad. ■

#### Observación 4.5

- (a) El punto en el que se usa de manera esencial que  $M$  no tenga frontera es cuando se obtienen las ecuaciones verificadas por  $\sigma = \text{curl} \varphi$  y  $(\rho =$

$\operatorname{div} \varphi, \psi$ ). Obviamente, cuando  $\partial M \neq \emptyset$  los sistemas (94) y (95) están acoplados en la frontera  $\partial M$  y por lo tanto no pueden ser tratados de forma independiente.

- (b) Obsérvese que la restricción sobre el tiempo de control se impone para garantizar la observabilidad de (93) puesto que (95) es controlable en un tiempo menor a causa de la mayor velocidad de propagación.
- (c) Se pueden formular problemas similares en el caso en que el control actúa sobre la ecuación parabólica, i.e. cuando las ecuaciones (88) se sustituyen por

$$\begin{aligned} u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \alpha \nabla \theta &= 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \theta_t - \Delta \theta + \beta \operatorname{div} u_t &= g & \text{en } \Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

En este caso, si  $\partial M = \emptyset$ ,  $v = \operatorname{curl} u$  satisface

$$v_{tt} - \mu \Delta v = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T)$$

i.e. sobre  $v$  no actúa ningún control y por tanto no se puede esperar que se tenga controlabilidad a cero. Sin embargo, en este contexto y bajo las hipótesis del Teorema 4.4 se puede probar que tanto  $\operatorname{div} u$  como  $\theta$  pueden controlarse a cero.

## Referencias

- [AB] S. Alinhac y M. S. Baouendi, A non uniqueness result for operators of principal type, *Math. Z.*, **220** (1995), 561-568.
- [Al] B. Allibert, Contrôle analytique de l'équation des ondes sur des surfaces de révolution, Tesis Doctoral, Escuela Politécnica de Paris, 1997.
- [BLR] C. Bardos, G. Lebeau y J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Cont. Optim.*, **30** (1992), 1024-1065.
- [Bu] N. Burq, Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers, *Asymptotic Analysis*, **14** (1997), 157-191.
- [C] T. Cazenave, On the propagation of confined waves along the geodesics, *J. Math. Anal. Appl.*, **146** (1990), 591-603.
- [CIK] D. Chae, O. Yu. Imanuvilov y S. M. Kim, Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions, RIM GARC Preprint Series 95-76, Seoul National University, Korea, 1995.
- [Ch] G. Chen, Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain, *J. Math. Pures Appl.*, **58** (1979), 249-274.
- [Co1] J.-M. Coron, On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, *J. Maths Pures Appl.*, **75**(2)(1996), 155-188.

- [Co2] J.-M. Coron, On the controllability of the 2-D incompressible Navier Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, *ESAIM : COCV*, **1** (1996), 35-75.
- [DR] J. I. Díaz y A. Ramos, Un método de viscosidad para la controlabilidad aproximada de ciertas ecuaciones parabólicas cuasilineales, *Actas de la Jornada Científica en homenaje a Antonio Valle*, Ed. Univ. de Sevilla, 1997, 133-151.
- [FPZ1] C. Fabre, J. P. Puel and E. Zuazua, Approximate controllability of the semilinear heat equation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **125 A** (1995), 31-61.
- [FPZ2] C. Fabre, J. P. Puel and E. Zuazua, Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur linéaire avec des contrôles de norme  $L^\infty$  minimale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **316** (1993), 679-684.
- [FZ] E. Feireisl y E. Zuazua, Global attractors for semilinear wave equations with locally distributed damping and critical exponent, *Comm. P.D.E.*, **18**(9&10), (1993), 1539-1556.
- [FC] E. Fernández-Cara, Null controllability of the semilinear heat equation, *ESAIM:COCV*, (1997), 87-103.
- [F] A. V. Fursikov, Exact boundary zero controllability of three dimensional Navier-Stokes equations, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **1** (3)(1995), 325-350.
- [FI1] A. V. Fursikov y O. Yu. Imanuilov, Local exact controllability of the Boussinesque equation, *RIM-GARC Preprint Series 95-50*, Seoul National University, Korea, 1995.
- [FI2] A. V. Fursikov y O. Yu. Imanuilov, On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equation, *Acta Applicandae Mathematicae*, **37** (1994), 67-76.
- [Ge] P. Gérard, Microlocal defect measures, *Comm. P.D.E.*, **16** (1991), 1761-1794.
- [GLL] R. Glowinski, C. H. Li y J.-L. Lions, A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls: Description of the numerical methods, *Japan J. Appl. Math.*, **7** (1990), 1-76.
- [Gr] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, *J. Math. Pures Appl.*, **68** (1989), 215-259.
- [H] S. Hansen, Boundary control of a one-dimensional, linear, thermoelastic rod, *SIAM J. Cont. Optim.*, **32** (4) (1994), 1052-1074.
- [Ha] A. Haraux, On a completion problem in the theory of distributed control of the wave equation, en *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, Collège de France Seminar, vol. X, H. Brezis and J.-L. Lions eds, Pitman Research Notes in Mathematics, **220** (1991), 241-271.
- [HLP] D. Henry, O. Lopes y A. Perissinotto, On the essential spectrum of a semigroup of thermoelasticity, *Nonlinear Analysis TMA*, **21** (1) (1993), 65-75.
- [Ho] L. F. Ho, Observabilité frontière de l'équation des ondes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **302** (1986), 443-446.
- [I] O. Yu. Imanuilov, Boundary controllability of parabolic equations, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **186**, 109-132 (en Ruso).

- [K] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization: the multiplier method*, Masson & John Wiley, RAM 36, 1994.
- [La] J. E. Lagnese, *Boundary stabilization of thin plates*, SIAM Studies in Appl. Math., Philadelphia, 1989.
- [LaLeS] J. E. Lagnese, G. Leugering y E. J. P. G. Schmidt, *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.
- [LaL] J. Lagnese y J.-L. Lions, *Modelling, analysis and control of thin plates*, Masson, Paris, 1988.
- [LT1] I. Lasiecka y R. Triggiani, Exact controllability of semilinear abstract systems with applications to waves and plates boundary control, *Appl. Math. & Optim.*, **23** (1991), 109-154.
- [LT2] I. Lasiecka y R. Triggiani, Uniform exponential decay in a bounded region with  $L^2(0, T; L^2(\Sigma))$ -feedback control in the Dirichlet boundary conditions, *J. Diff. Equations*, **66** (1987), 340-390.
- [Le1] G. Lebeau, Contrôle analytique I: Estimations a priori, *Duke Math. J.*, **68** (1) (1992), 1-30.
- [Le2] G. Lebeau, Contrôle for distributed systems: The microlocal approach, en "Current trends in applied mathematics", M. A. Herrero y E. Zuazua eds., Editorial Complutense, Madrid, 1996.
- [LeR] G. Lebeau y L. Robbiano, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, *Comm. P.D.E.*, **20** (1995), 335-356.
- [LeZ1] G. Lebeau y E. Zuazua, Null controllability of a system of linear thermoelasticity, *Archive Rat. Mech. Anal*, en vías de publicación.
- [LeZ2] G. Lebeau y E. Zuazua, Sur la décroissance non uniforme de l'énergie dans le système de la thermoélasticité linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **324** (1997), 409-415.
- [LiY] X. Li y J. Yong, *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [LiL] Y.-J. Lin Guo y W. Littman, Null Boundary Controllability for Semilinear Heat Equations, *Appl. Math. Optim.*, **32** (1995), 281-316.
- [L1] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.* **30** (1988), 1-68.
- [L2] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués. Tomes 1 & 2*. Masson, RMA 8 & 9, Paris, 1988.
- [L3] J.-L. Lions, Remarks on approximate controllability, *J. Analyse Math.*, **59** (1992), 103-116.
- [LiZ1] J.-L. Lions y E. Zuazua, The cost of controlling unstable systems: Time irreversible systems, *Rev. Matemática de la UCM*, en vías de publicación.
- [LiZ2] J.-L. Lions y E. Zuazua, Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **324** (1997), 1015-1021.

- [M] C. Morawetz, *Notes on time decay and scattering for some hyperbolic problems*, Regional conference series in applied mathematics, vol. 19, SIAM, Philadelphia, 1975.
- [Mi] S. Micu, *Análisis de un sistema híbrido bidimensional fluido-estructura*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1996.
- [MM] M. Milla Miranda, HUM and the wave equation with variable coefficients, *Asymptotic Analysis*, **11**(1995), 317-341.
- [PZ] G. Perla Menzala y E. Zuazua, Explicit exponential decay rates for solutions of von Kármán system of thermoelastic plates, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **324** (1997), 49-54.
- [Ru] A. Ruíz, Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential, *J. Math. Pures Appl.*, **71**(5) (1992), 455-467.
- [R1] D. L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, *SIAM Rev.* **20** (1978), 639-739.
- [R2] D. L. Russell, A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations, *Studies in Appl. Math.*, **52** (1973), 189-221.
- [SS] J. C. Saut y B. Scheurer, Unique continuation for some evolution equations, *J. Diff. Equations*, **66** (1) (1987).
- [T1] D. Tataru, A priori estimates of Carleman's type in domains with boundary, *J. Math. Pures Appl.*, **73** (1994), 355-387.
- [T2] D. Tataru, Unique continuation for solutions to PDE's: between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem, *Comm. PDE*, **20** (6-7)(1996), 855-884.
- [TZ] L. de Teresa y E. Zuazua, Controllability of the linear system of thermoelastic plates, *Advances Diff. Equations*, **1** (3) (1996), 369-402.
- [Za] J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 1992.
- [Z1] E. Zuazua, Exponential decay for semilinear wave equations with localized damping, *Comm. in P.D.E.*, **15** (2) (1990), 205-235.
- [Z2] E. Zuazua, Controllability of the linear system of thermoelasticity, *J. Math. Pures Appl.*, **74** (1995), 303-346.
- [Z3] E. Zuazua, Exact controllability for the semilinear wave equation, *J. Math. Pures appl.*, **69** (1) (1990), 33-55.
- [Z4] E. Zuazua, Exact boundary controllability for the semilinear wave equation, en *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, vol. X, H. Brezis y J.-L. Lions eds., Pitman, 1991, 357-391.
- [Z5] E. Zuazua, Exact controllability for semilinear wave equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **10** (1) (1993), 109-129.
- [Z6] E. Zuazua, Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation, *J. Math. Pures Appl.*, **76** (1997), 237-264.
- [Z7] E. Zuazua, Some problems and results on the controllability of Partial Differential Equations, *Proceedings del "Second European Conference of Mathematics"*, Budapest, Julio 1996, Birkäuser, en vías de publicación.

## INFORME DEL PRESIDENTE

Queridos amigos,

durante los días 23 al 26 del pasado mes de septiembre se celebró en Vigo el XIV CEDYA / V CMA, cómo pasa el tiempo, era aún ayer cuando se reunía el primer CEDYA en El Escorial, al que siguieron en veloz sucesión tantos otros. En fin, nuestro principal evento científico-social fue en opinión de muchos un éxito con sus cerca de 300 participantes, 22 conferencias y 180 comunicaciones y un ambiente formidable a la orilla del mar (que desde que algunos de nuestros colegas nos lo andan modelando ya no parece el mismo). No dejaré de reseñar la presencia de grandes científicos extranjeros, como K.H. Hoffmann (Institut für Mathematik München, Alemania), V. Lakshmikantham (Florida Institute of Technology, USA), P.L. Lions (Univ. Paris Dauphine, Francia) y P.A. Raviart (Ecole Polytechnique, Francia), junto con las glorias nacionales, que afortunadamente háylas y ya las vamos conociendo. Tuvimos entre nosotros a miembros de otras sociedades, como Eugenio Oñate, presidente de SEMNI. Mencionaré también el éxito de la jornada industrial, organizada por los colegas Juan M. Viaño y Santiago de Vicente. La buena marcha del congreso es una consecuencia del esfuerzo constante de tantos investigadores durante estos años y síntoma claro de la buena marcha de la sociedad y de la matemática aplicada en España. Deseo aquí expresar en nombre de todos mi felicitación y agradecimiento al Comité Organizador de la Universidad de Vigo y muy especialmente a Pepe Durany. Como todo lo bueno tiene que tener una *suite*, podemos anunciar que Gabriel Winter ha aceptado en nombre de un equipo de la Universidad de Las Palmas el encargo de organizar la próxima edición del congreso. Gracias anticipadas a nuestros colegas.

Con ocasión del congreso se celebraron en Vigo una reunión del Comité Ejecutivo y la Asamblea General reglamentaria. Información sobre los acuerdos de ésta figura en otras páginas. Deseo solamente aprovechar la oportunidad para dar la bienvenida a los nuevos miembros del comité Ejecutivo, los profesores Enrique Fernández Cara, de la Universidad de Sevilla, y Francisco Lisbona



**Complex Methods in Approximation Theory**

*A. Martínez Finkelshtein, F. Marcellán y J. J. Moreno Balcázar (Eds.)*

*Universidad de Almería. Servicio de Publicaciones.*

*xvi + 171 páginas, ISBN 84-8240-046-0*

Este volumen contiene los Proceedings del Workshop in Methods of Complex Analysis in Approximation Theory, celebrado en la Universidad de Almería entre el 5 y el 8 de junio de 1.995. El libro recoge una selección de contribuciones, formada por artículos de investigación originales y algunos artículos de revisión, que reflejan el estado actual de algunas líneas de investigación en Teoría de la Aproximación. El énfasis se pone en el uso de técnicas de Análisis Complejo con objeto de dar una visión moderna del potencial que el uso de dichas técnicas tiene en relación con problemas de Teoría de la Aproximación. Los artículos son escritos por especialistas en el campo y tocan áreas tan diversas como Polinomios Ortogonales (con respecto a productos internos clásicos o de Sobolev), Aproximación en varias variables, Teoría del Potencial, Aproximación Racional, Teoremas tipo Korovkin y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

L. M. ABIA

**Fronteras de la Ciencia y la Tecnología**

*Revista del Consejo Superior de Investigaciones Científicas,*

*número 14, enero/marzo de 1997 - Dossier MATEMATICAS*

El número contiene un largo e interesante dossier sobre algunas de las tendencias recientes de la matemática. En su introducción, titulada "Divulgar las matemáticas", el prof. A. Córdoba señala como la divulgación de la investigación matemática es una tarea difícil, pues cuando se observa la divulgación de otras ciencias bien parece que acercar la ciencia al público consiste en suprimir las ecuaciones, lo que nos lleva a la pregunta de qué hacer para divulgar la investigación matemática. El autor aporta una serie de observaciones sobre esta

tarea, que siempre ha preocupado a los matemáticos que desean comunicar la belleza e importancia de su ciencia.

El contenido del dossier está articulado en 11 ensayos divulgativos a cargo de conocidos profesores españoles, algunos de ellos activos en universidades americanas. El sumario es como sigue:

1. "Monstruos, cuerdas, fantasmas y claros de luna", por Pilar Bayer, de la Univ. de Barcelona.
2. "Números, ondas y cristales", por Antonio Córdoba, de la Univ. Autónoma de Madrid.
3. "La matemática de la incertidumbre financiera", por Jose Luis Fernández, de la Univ. Autónoma de Madrid.
4. "Fronteras libres: el problema de Stefan", por Miguel Angel Herrero, de la Univ. Complutense de Madrid.
5. "Sistemas dinámicos, pequeños denominadores", por Ricardo Pérez Marco, de la UCLA.
6. "La clasificación de los grupos finitos simples", por Luis Ribes, de la Carleton Univ., Ottawa.
7. "Películas de jabón", por Antonio Ros, de la Univ. de Granada.
8. "El problema espectral inverso ¿puede oírse la forma de un tambor?" por Antonio Sánchez-Calle, de la Univ. Autónoma de Madrid.
9. "Integradores simplécticos y sistemas hamiltonianos", por Jose María Sanz Serna, de la Univ. de Valladolid.
10. "Las matemáticas de los átomos", por Luis Angel Seco, de la Univ. de Toronto.
11. "¿El caos? Síntesis de atractores extraños", por Carles Simó, de la Univ. de Barcelona.

Obviamente los temas elegidos representan una parte pequeña dentro de la inmensa variedad de intereses de la matemática contemporánea, incluso de la practicada en nuestro país, pero la selección incluye temas de gran importancia por los que el profesional culto se interesa o debería interesarse. Los artículos están escritos en un estilo claro y sencillo dentro del respeto al nivel científico y ello permite obtener una fugaz visión de cómo están las cosas. Es pues muy de agradecer el esfuerzo de los autores, muchos de los cuales han contribuido notablemente con su investigación al tema que exponen.

La divulgación matemática tiene aún poca tradición en un país como el nuestro donde para empezar no ha habido apenas investigación hasta hace muy poco. Es de esperar que este y otros ejemplos, como el que ofrecen las páginas de nuestro boletín, sirvan para paliar la situación y dotarnos de un instrumento cultural imprescindible, que otras ramas de la ciencia cultivan asiduamente.

J. L. VÁZQUEZ

ANALYSIS OF FRACTIONAL STEP, FINITE ELEMENT METHODS  
FOR THE INCOMPRESSIBLE NAVIER-STOKES EQUATIONS

**Doctorando:** Jorge Blasco Lorente.

**Director/es:** Antonio Huerta Cerezuela, Ramón Codina Rovira.

**Defensa:** 7 de Marzo de 1997, Universitat Politècnica de Catalunya.

**Calificación:** Apto cum laude.

*Resumen:* Se estudian los métodos de paso fraccionado para la ecuación de Navier-Stokes incompresible no estacionaria. En la primera parte se explica por qué el método de proyección con ecuación de Poisson continua para la presión permite el empleo de igual interpolación para la velocidad y la presión. Para ello se desarrolla en el Capítulo II un nuevo método para el problema de Stokes estacionario con las mismas propiedades en cuanto a discretización espacial que el método de proyección, demostrando convergencia óptima del nuevo método tanto en  $L^2(\Omega)$  como en  $H_0^1(\Omega)$ , bajo una cierta condición débil de estabilidad. Dicho método se extiende en el Capítulo III a la ecuación de Navier-Stokes incompresible estacionaria.

En la segunda parte se introduce un nuevo método de paso fraccionado que, a diferencia del método de proyección, permite la imposición de las condiciones de contorno originales en todos los pasos. Se demuestra la convergencia de este método a la solución continua en el tiempo y se obtienen unas estimaciones de error de primer orden el el paso de tiempo para las velocidades intermedia y final de paso, tanto en  $L^2(\Omega)$  como en  $H_0^1(\Omega)$ .

Para todos los métodos introducidos se estudian esquemas eficientes de resolución de las ecuaciones discretas resultantes (lineales o no lineales) y se presentan numerosos resultados numéricos.

PROPAGACIÓN DEL ERROR EN LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA  
DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

**Doctorando:** Ángel Durán Martín.

**Director/es:** Jesús María Sanz Serna.

**Defensa:** 10 de octubre de 1997, Universidad de Valladolid.

**Calificación:** Apto cum laude.

*Resumen:* Varios resultados recientes han puesto en evidencia la influencia de las propiedades de conservación en la integración numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales. En nuestro trabajo, tratamos esta cuestión para el caso de la integración de solitones para ecuaciones no lineales de Schroedinger. Primeramente, analizamos la estructura Hamiltoniana de tales ecuaciones y determinamos las ondas solitarias como equilibrios relativos del sistema reducido bajo la acción del grupo de simetrías generado

---

**ANTONIO VALLE, CHEVALIER  
DE L'ORDRE NATIONALE DU MÉRITE**

El pasado 18 de noviembre, en la Embajada Francesa en Madrid, el Prof. Antonio Valle Sánchez, primer Presidente de nuestra Sociedad, fue distinguido por el gobierno francés *Chevalier de l'Ordre Nationale du Mérite*, en justo reconocimiento a la labor realizada en distintas universidades españolas.

El Profesor Antonio Valle Sánchez nació en Málaga en diciembre de 1930. Cursó los estudios de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad Complutense, doctorándose por la misma en 1965. Entre 1960 y 1966, fue becario y agregado de investigación del *Instituto Jorge Juan* del Consejo Superior de



Investigaciones Científicas y, de manera simultánea, profesor adjunto en la Universidad Complutense. Entre 1967 y 1973, fue catedrático de la Universidad de Santiago de Compostela; entre 1973 y 1984, fue catedrático de la Universidad de Sevilla. Desde 1984, es catedrático en la Universidad de Málaga. En estas universidades ha ocupado varios cargos académicos, entre otros el de *Vicerrector de Investigación* de la Universidad de Málaga.

Su labor investigadora estuvo centrada en el control óptimo de los sistemas de evolución. Su importantísima labor docente contribuyó de manera decisiva al desarrollo teórico y numérico de las ecuaciones diferenciales en nuestro país.

El Prof. A. Valle ha impulsado con entusiasmo el desarrollo de la Matemática Aplicada, habiendo participado en numerosos comités científicos y organizadores de congresos, seminarios, escuelas, etc., entre los que cabe destacar los

de *Fronteras Libres y sus Aplicaciones*, que reúne cada tres años a los mejores especialistas del mundo. Es actualmente representante español en el "Steering Committee" del *Proyecto Europeo de Fronteras Libres*. En la actualidad, uno de sus temas preferidos de investigación es la Climatología; estos días pasados (diciembre de 1997) se celebró en Madrid un congreso internacional sobre las Matemáticas del Medio Ambiente auspiciado por la Sociedad Matemática Europea. El nuevo académico es Doctor Honoris Causa por la Universidad de Pau, Francia, galardón que fue reseñado en el Boletín número 8 de nuestra Sociedad.

A pesar del espectacular crecimiento de estos últimos años, el futuro de la investigación matemática en nuestro país es aún inseguro y la responsabilidad de sus figuras destacadas es muy grande. Dada la dilatada trayectoria profesional y la intensa actividad presente del nuevo académico, formulamos desde estas líneas el deseo y la esperanza de un fructífero desarrollo de los lazos de amistad y colaboración entre la Academia y nuestra Sociedad y todas las sociedades afines. Junto con nuestra más sincera enhorabuena, queremos desear a nuestro compañero Ildefonso muchos éxitos en el seno de su nueva institución.

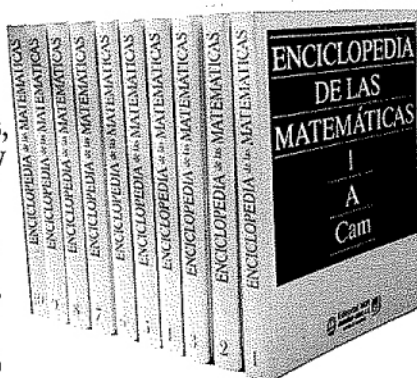
J.L. VÁZQUEZ, PRESIDENTE DE SEMA

# ENCICLOPEDIA DE LAS MATEMÁTICAS

La obra de referencia más importante del S. XX en la rama de las matemáticas, dirigida por el Profesor VINOGRADOV y con la colaboración de más de 200 eminentes profesores y catedráticos

**OBRA COMPLETA 10 TOMOS**  
(EN IMPRENTA TOMOS IX-X)

**Precio: 79.000 pts. (IVA incluido)**



*Solicite más información y nuestro catálogo general de matemáticas 1997*

 **RUBIÑOS-1860** C/ ALCALÁ, 98 - 28009 MADRID - TELF.: 91/575 42 27 - FAX: 91/575 32 72

*C.E.D.Y.A. – Congresos de Matemática Aplicada y las Escuelas Hispano-Francesas sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería.* Además de primer Presidente de la *Sociedad Española de Matemática Aplicada*, fue promotor y miembro del Comité Ejecutivo de la *Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería*.

Desde aquí, queremos enviar al Prof. Valle Sánchez nuestra más ferviente y sincera enhorabuena.

## ILDEFONSO DÍAZ, NUEVO ACADÉMICO DE LAS CIENCIAS

El pasado 19 de noviembre tuvo lugar la recepción como nuevo miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales del Prof. Jesús Ildefonso Díaz Díaz, que fue segundo Presidente de nuestra Sociedad, en justo reconocimiento a su labor docente, investigadora y organizativa de la matemática aplicada en España.

El Profesor Díaz Díaz nació en Toledo el 11 de Diciembre de 1950. Cursó los estudios de la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad Complutense, doctorándose por la misma en 1976. Discípulo y continuador de la labor del Prof. Alberto Dou, es catedrático de esa universidad desde 1986, habiendo sido propulsor de la creación del Departamento de Matemática Aplicada y director del mismo durante bastantes años. Se ha distinguido en la profesión por su intensa actividad investigadora, contribuyendo de forma notable al desarrollo de la investigación en las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones. En el ámbito de la matemática aplicada es una de las personas más representativas de la enorme actividad desarrollada en nuestro país los últimos veinte años, en particular en las universidades madrileñas. Su participación ha tenido lugar en la gran mayoría de eventos, habiendo tomado parte en numerosos comités científicos y organizadores de congresos, seminarios, escuelas, etc. En particular, fue coorganizador del primero de los congresos *C.E.D.Y.A.* celebrado en El Escorial en 1979 y participó activamente en la creación de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. Actualmente, colabora activamente en la refundación de la Real Sociedad Matemática Española, que felizmente está teniendo lugar.

Entre sus muchas actividades científicas, el profesor Díaz ha sido pionero en el estudio de los problemas de frontera libre en España. En 1993 organizó en su ciudad natal, a la que gusta llamar la ciudad de las tres culturas, y junto con otros profesores de las universidades madrileñas, el *Congreso Internacional*