Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, **10**, 1997

responsables de sección

Vida de la Sociedad
Juan Luis Vázquez
Universidad Autónoma de Madrid
jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es
fax: (91) 397 48 89

Congresos y seminarios
Tomás Chacón
Universidad de Sevilla
chacon@numer.us.es
fax: (95) 455 28 98

Novedades bibliográficas
Luis Abia
Universidad de Cantabria
sema@macc.unican.es
fax: (942) 20 17 03

Actividad académica
Vicent Caselles
Universidad de las Islas Baleares
dmivca0@PS.unib.es

Relaciones con la industria
Juan Manuel Viaño
Universidad de Santiago de Compostela
viano@zmat.usc.es
fax: (981) 59 70 54

corresponsales **Almería**: Ramón Carreño : ramon@ualm.es **Barcelona**: Gerard Gómez : gomez@cerber.mat.ub.es **Bilbao**: Eduardo Sáinz de la Maza : eduardo@ picasso.lc.ehu.es **Córdoba**: Mercedes Marín Beltrán : ma1mabem@lucano.uco.es **Coruña**: José Manuel Rodríguez Seijo : mmrseijo@udc.es **Extremadura**: Mariano Rodríguez-Arias : arias@ba.unex.es **Granada**: José Miguel Alonso Alonso : jalonso@goliat.ugr.es **Huelva**: Manuel Merino Morlesín : morlesin@uhu.es **Islas Baleares**: Vicent Casselles : dmivca0@PS.uib.es **Jaén**: Javier Muñoz : fax: 953-212400, telef. 953-212409 **Madrid (Autónoma)**: Juan Luis Vázquez : jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es **Madrid (Complutense y Politécnica)**: Francisco Padial : jfpadial@sunma4.mat.ucm.es **Málaga**: Antonio Valle : valle@anamat.cie.uma.es **Oviedo**: Javier Valdés García : valdes@pinon.ccu.uniovi.es **Santander**: Luis Alberto Fernández Fernández : lafernandez@besaya.unican.es **Santiago de Compostela**: Peregrina Quintela : pere@zmat.usc.es **Sevilla**: Tomas Chacón : chacon@numer.us.es **Valencia**: José M. Mazón : mazon@mac.uv.es **Valladolid**: Begoña Cano : becano@mac.cie.uva.es **Vigo**: José Durany : durany@dma.uvigo.es **Zaragoza**: Francisco Javier Sayas : jsayas@posta.unizar.es

sumario

Temas:

edición

Colabora el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza

---

Dirección editorial: Departamento de Matemática Aplicada, Edificio de Matemáticas, primera planta, Campus Universitario, 50009 Zaragoza.

e-mail: `sema@posta.unizar.es` Fax: 976 76 11 25

Esta es la lista de los corresponsales con sus direcciones electrónicas (o número de fax o teléfono) con los que podéis contactar con el fin de hacernos llegar todo tipo de información y mejorar el boletín como medio de contacto entre los miembros de la Sociedad.

Almería: Ramón Carreño	`ramon@ualm.es`
Barcelona: Gerard Gómez	`gomez@cerber.mat.ub.es`
Bilbao: Eduardo Sáinz de la Maza	`eduardo@ picasso.lc.ehu.es`
Córdoba: Mercedes Marín Beltrán	`ma1mabem@lucano.uco.es`
Coruña: José Manuel Rodríguez Seijo	`mmrseijo@udc.es`
Extremadura: Mariano Rodríguez-Arias	`arias@ba.unex.es`
Granada: José Miguel Alonso Alonso	`jalonso@goliat.ugr.es`
Huelva: Manuel Merino Morlesín	`morlesin@uhu.es`
Islas Baleares: Vicent Casselles	`dmivca0@PS. uib.es`
Jaén: Javier Muñoz	`fax:953-212400, telef:953-212409`
Madrid (Autónoma): Juan Luis Vázquez	`jvazquez@ccuam3.sdi.uam.es`
Madrid (Complutense y Politécnica): Francisco Padial	`jfpadial@sunma4.mat.ucm.es`
Málaga: Antonio Valle	`valle@anamat.cie.uma.es`
Oviedo: Javier Valdés García	`valdes@pinon.ccu.uniovi.es`
Santander: Luis A. Fernández Fernández	`lafernandez@besaya.unican.es`
Santiago de Compostela: Peregrina Quintela	`pere@zmat.usc.es`
Sevilla: Tomas Chacón	`chacon@numer.us.es`
Valencia: José M. Mazón	`mazon@mac.uv.es`
Valladolid: Begoña Cano	`becano@mac.cie.uva.es`
Vigo: José Durany	`durany@dma.uvigo.es`
Zaragoza: Francisco Javier Sayas	`jsayas@posta.unizar.es`

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 3-7

¿QUÉ ES LA INTEGRACIÓN GEOMÉTRICA?

JESÚS M. SANZ-SERNA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y COMPUTACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

e-mail: sanzserna@cpd.uva.es

1 Presentación

Cada diez años se organiza en el Reino Unido un congreso llamado del Estado del Arte en Análisis Numérico cuyo objetivo es sintetizar los avances más significativos de la década. El de 1996 se celebró en York y se me solicitó presentase mi visión del desarrollo reciente de los métodos de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mi ponencia [7] aparecerá publicada en el correspondiente libro de Actas y está a disposición de quien quiera pedírmela.

A comienzos del curso 1996–1997 tuve el honor de ser invitado por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense a inaugurar su ciclo de seminarios y me pareció oportuno exponer allí el trabajo de las Actas de York. Los compañeros de Madrid me han animado a escribir estas líneas, que sintetizan la parte menos técnica de mi seminario, es decir, la parte menos técnica de [7].

2 ¿Por qué integración geométrica?

En la última decada ha habido tal diluvio de artículos sobre la solución numérica de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias que no es en absoluto factible enumerar, y mucho menos resumir, todas las contribuciones. Estas son las palabras de apertura del artículo de J. D. Lambert [5] en las Actas del Congreso del Estado del Arte de 1976. A pesar de tal excusa, el artículo consigue presentar, en menos de cincuenta páginas de letra grande, una visión unificada de todo lo que, en el momento de escribirse, era conocido sobre problemas de valores iniciales (PVI) numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Diez años más tarde, la materia era ya demasiado extensa y, aunque el Congreso del Estado del Arte de 1986 contó con tres ponentes (J. D. Lambert, A. R. Curtis y G. Wanner), la combinación de sus contribuciones está muy lejos de contemplar todo el campo de las EDOs numéricas. Tras otra década de crecimiento en la materia, mi artículo [7] debió limitarse a la presentación de un tema particular, la integración geométrica, sin ninguna ambición de ser exhaustivo. Intentamos transmitir al lector una convicción de lo que nosotros entendemos una nueva manera de hacer EDOs numéricas.

Antes de definir integración geométrica situémonos en el punto de vista 'clásico' de la Conferencia sobre el Estado del Arte de 1976. Se consideraban entonces dos situaciones, 'general' y 'rígida (stiff)'. Para problemas generales Lambert [5] percibía un *consenso de opinión sobre cuáles son los 'mejores' métodos* y refería que estaban disponibles *algunos paquetes altamente afinados y probados a fondo.* El campo 'rígido' no estaba tan maduro, con *la sugerencia continua de nuevos métodos,* y, como consecuencia, no estábamos todavía *en situación de ser capaces de recomendar firmemente los 'mejores' paquetes.*

Dado un PVI

$$\dot{y} = f(y), \qquad y(0) = \alpha \in \mathcal{R}^D \tag{1}$$

(el punto representa derivación respecto del tiempo t), en 1976 teníamos

- *Un objetivo bien definido.* Encontrar de la manera más barata posible con una precisión deseada los vectores $y(t_i)$ en algunos puntos de salida prescritos t_i.

- *Una herramienta para conseguir tal objetivo.* Esta era un paquete, o mejor una pareja de ellos, general/rígido, donde 'conectar' la subrutina que evalúa f. El paquete general vale para toda f general y el paquete 'rígido' toda f 'rígida.'

- *Un marco teórico para diseñar/entender la herramienta.* Este incluía dos grupos principales de ideas (i) consistencia, error local, constantes de error, (ii) estabilidad, propagación del error, región de estabilidad.

El segundo de los puntos mencionados merece algunos comentarios. Por supuesto, hace veinte años se era consciente de las limitaciones de resolver todo con dos paquetes. Lambert mencionaba *tipos especiales de PVIs ... como problemas con soluciones periódicas* y se lamentaba de que *recibieran relativamente poca atención.* (¿Era 'relativamente' un leve eufemismo cuando sólo se citaba en [5] un artículo sobre tipos especiales?) Mientras Lambert concluía oportunamente que *donde existe estructura, deberíamos ser capaces de utilizarla en el método numérico,* para el analista numérico el campo de problemas especiales era un gran terreno completamente desconocido.

La aproximación clásica señalada arriba ha supuesto claramente una contribución de valor excepcional a la solución de problemas científicos. Pero, como todo lo humano, tiene sus limitaciones. Estas se ilustrarán en dos ejemplos.

En Julio de 1992, la prestigiosa revista Science presentaba en su sección de Noticias de Investigación [3] la información de que *Desde Mercurio hasta Plutón, el caos impregna el Sistema Solar,* como se confirmaba tras la integración numérica por Sussman y Wisdom [10] de las ecuaciones del movimiento planetario sobre un lapso de tiempo de cerca de cien millones de años. ¿Cabe esta, ya célebre, integración numérica de EDOs en el paradigma clásico?

- El objetivo no era calcular exactamente el estado del sistema solar tras un tiempo largo; era más una cuestión de decidir si el movimiento es regular o caótico. Al comparar resultados de diferentes técnicas de integración en este tipo de estudio, se observaba en [11] que *los dibujos eran notablemente similares,* indicación clara de que los autores no tenían la esperanza de haber alcanzado ninguna precisión en sentido convencional, es decir, de haber conseguido errores (globales) pequeños.

- La herramienta era un método de pasos fraccionarios (splitting) confeccionado a la medida para el problema en cuestión.

- La herramienta se diseñó a través de consideraciones físicas y geométricas que iban bastante más allá de la aproximación clásica consistencia/estabilidad.

El segundo ejemplo trata la simulación de la dinámica de las biomoléculas [2]: integrar la segunda ley de Newton para el movimiento de los átomos en la molécula (el número de átomos podría ser hasta 10,000 o 100,000 y hay seis ecuaciones diferenciales por átomo).

- El objetivo es obtener información sobre energías medias, configuraciones, plegado de proteínas a gran escala, etc. No hay esperanza de calcular la solución con ninguna precisión: las perturbaciones del sistema que se integra típicamente se doblan en tamaño cada picosegundo y, en la actualidad, las simulaciones pueden cubrir intervalos de tiempo de 1000 picosegundos. Además, las velocidades iniciales son desconocidas y *se asignan al azar.* También las expresiones utilizadas para las fuerzas interatómicas son sólo aproximaciones que precisan de parámetros ajustados semiempíricamente.

- El método hoy recomendado, 'leapfrog' (conocido en dinámica molecular como Verlet [1]), está lejos de la noción de paquete del paradigma clásico. Incluso si pudieran aplicarse paquetes convencionales a un problema tan grande, es improbable que superaran al sencillo método 'leapfrog'.

- El éxito del método leapfrog no puede ser explicado a través de las ideas tradicionales de estabilidad y consistencia. El esquema es sólamente de segundo orden. Siendo tan sólo marginalmente estable para fuerzas lineales y pasos de tiempos pequeños, cabría temer que el más pequeño término no lineal pudiera hacerlo inestable (ver la discusión en [9], [6]).

3 La integración geométrica

Las consideraciones precedentes han debido mostrar la necesidad de redefinir los objetivos y herramientas de la simulación de EDOs en ciertos casos. Se necesitan metodologías que, abandonando la idea de paquete-resolvedor-de-todos-los-problemas, presten atención a problemas individuales de importancia en las aplicaciones. Y hay que conocer qué se desea conocer con la simulación —no siempre la solución en sentido convencional—. He introducido la expresión 'Integración Geométrica' para aludir a un grupo de técnicas recientes que dan una alternativa al paradigma clásico. El término se justifica porque todas esas técnicas comparten el rasgo de basarse en conceptos geométricos del espacio de fases, por ejemplo en la geometría simpléctica de los sistemas Hamiltonianos [8]. El lector interesado en conocer algo de ellas puede acudir a [7], que contiene 116 referencias a la literatura.

4 Epílogo

Finalizaremos como empezamos: citando a Lambert. En su libro de texto (1973) [4], escribía: *Se requieren bastantes pocos requisitos previos para estudiar métodos computacionales para EDOs.* Operando con subrutinas caja negra, el analista numérico se escondía de la estructura específica del problema a resolver, de sus singularidades matemáticas y de los campos de aplicación. Las cosas han cambiado y presentimos que cambiarán aún más. Quienes han venido contribuyendo a las EDOs numéricas necesitarán familiarizarse con los avances más relevantes en la teoría de ecuaciones diferenciales. Además, es probable que surjan muchos desarrollos significativos al considerar problemas específicos de los diferentes campos de aplicación y por lo tanto será esencial algún grado de trabajo interdisciplinario.

Agradecimiento. Mi investigación está financiada por el Proyecto PB95-705. Estoy en deuda con la Dra. B. Cano por ayudarme a traducir estos párrafos del inglés en que se escribieron originalmente al castellano en que se concibieron.

Referencias

[1] Allen, M. P. y Tildesley, D. J. (1989). *Computer simulation of liquids.* Clarendon, Oxford.

[2] Board, J. A., Kalé, L. V., Schulten, K., Skeel, R. D. y Schlick, T. (1994). Modeling biomolecules: larger scales, longer durations. *IEEE Comput. Sci. Engrg.*, *1-4*, 19–30.

[3] Kerr, R. A. (1992). From Mercury to Pluto, chaos pervades the solar system. *Science*, *257*, 33.

[4] Lambert, J. D. (1973). *Computational methods in ordinary differential equations.* John Wiley, Chichester.

[5] Lambert, J. D. (1976). The initial value problem for ordinary differential equations. En *The state of the art in numerical analysis*, D. A. H. Jacobs ed. Academic Press, Londres, 451–500.

[6] Sanz-Serna, J.M. (1991) Two topics in nonlinear stability. En *Advances in numerical analysis,* Vol. I, Light, W. ed. , Clarendon Press, Oxford, 147–174.

[7] Sanz-Serna, J.M. (1996) Geometric integration. En *The state of the art in numerical analysis, York 1996*, I. Duff y G.A. Watson eds., en prensa.

[8] Sanz-Serna, J.M. y Calvo, M.P. (1994). *Numerical Hamiltonian problems.* Chapman and Hall, Londres.

[9] Sanz-Serna, J. M. y Vadillo, F. (1987). Studies in numerical nonlinear instability III: Augmented Hamiltonian systems. *SIAM J. Appl. Math.* , *47*, 92–108.

[10] Sussman, G. J. y Wisdom, J. (1992). Chaotic evolution of the solar system. *Science*, *257*, 56–62.

[11] Wisdom, J. y Holman, M. (1991). Symplectic maps for the N-body problem. *Astron. J.*, *102*, 1528–1538.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 8-13

ON THE ALGEBRAIC SOLUTIONS OF POLYNOMIAL SYSTEMS

JAUME LLIBRE[1]
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
BELLATERRA, 08193 BARCELONA

e-mail: jllibre@mat.uab.es

This note is based in the results of Chavarriga, Llibre and Sotomayor [1].

By definition a *polynomial system* is a differential system of the form

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)\,, \tag{1}$$

where P and Q are polynomials with real or complex coefficients; i.e. $P, Q \in \mathbf{R}[x,y]$ or $P, Q \in \mathbf{C}[x,y]$ respectively. We say that $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ is the *degree* of this polynomial system.

Studies of polynomial vector fields were carried out by Poincaré in his memoirs [5]. Poincaré's aim was the global qualitative study on the whole plane of all the solutions of a differential system, and since this is a broad subject he decided to limit it in the first instance to polynomial vector fields.

The algebraic feature of polynomial systems renders natural certain questions and problems of an algebraic or an algebro-geometric nature. Darboux wrote three nice papers on this subject and Poincaré followed him with several of his papers.

The subject of polynomial systems figures also on Hilbert's list of problems [3]. Hilbert formulated his 16-th problem by dividing it in two parts. One about real algebraic curves (or surfaces) and another about the maximum number of limit cycles which could appear in a polynomial system (1).

Problems on polynomial systems (as in many other areas of Mathematics) are usually easy to state and hard to solve and progress in this subject is slow.

In this note we study the link between the integrability of a polynomial system (1) and their algebraic solutions. A key contribution in this direction are Darboux results. Our contribution consists in some results on cases not covered by Darboux Theorem. First we need some preliminary definitions.

[1]The author is partially supported by a DGICYT grant number PB93-0860.

We denote by

$$D = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$$

the differential operator associated to system (1).

A real (complex) system (1) is *integrable* on an open set U of $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{C}^2$) if there exists a nonconstant analytic function $F : U \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$), called a *first integral* of the system on U, which is constant on all solutions curves $(x(t), y(t))$ in U; i.e. $F(x(t), y(t)) =$ constant, for all values of t where the solution is defined. Clearly F is a first integral of system (1) on U if and only if $DF \equiv 0$ on U.

A real (complex) *algebraic invariant curve* of system (1) is a real (complex) algebraic curve, $f(x, y) = 0$, such that for some real (complex) polynomial $K(x, y)$ we have $Df = Kf$. The following proposition is easy to prove.

Darboux Proposition 1: *Suppose that $f \in \mathbf{R}[x,y]$ ($\mathbf{C}[x,y]$) and let $f = f_1^{n_1} \cdots f_q^{n_q}$ be the factorization of f in irreducible factors over $\mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$). If Df=0 then, for all $i = 1, \ldots, q$, f_i is a divisor of Df_i in $\mathbf{R}[x,y]$ ($\mathbf{C}[x,y]$).*

We say that the real (complex) curve $f = 0$ with $f \in \mathbf{R}[x,y]$ ($\mathbf{C}[x,y]$) is a real (complex) *algebraic solution* of system (1) if and only if it is a real (complex) algebraic invariant curve and if f is an irreducible polynomial over $\mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$).

The problem of integrating a polynomial system by using invariant algebraic curves was considered for the first time by Darboux [2] in 1878.

Darboux Theorem 1: *If a real (complex) polynomial system of degree m admits q real (complex) algebraic solutions $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$, with $q > m(m+1)/2$, then it has a first integral of the form $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ with $\lambda_i \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$).*

A first integral of system (1) of the form $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ with $\lambda_i \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$) and $f_i \in \mathbf{R}[x,y](\mathbf{C}[x,y])$ is called a *Darboux first integral*.

Jouanolou [4] proved that if the number of algebraic solutions $q \geq 2 + [m(m+1)/2]$, then the exponents λ_i in the statement of Darboux Theorem 1 may be chosen to be integers and hence we have a rational first integral in this case.

Let U be an open set of $\mathbf{R}^2$ and let $R : U \to \mathbf{R}$ be a C^1 function which is not identically zero on U. The function R is an *integrating factor* of the real system (1) if on U we have $\partial(RP)/\partial x = -\partial(RQ)/\partial y$, or $\operatorname{div}(RP, RQ) = 0$. This condition is equivalent to

$$DR = -R\operatorname{div}(P, Q)\,. \tag{2}$$

For a complex system (1) we consider a nonzero analytic function $R : U \to \mathbf{C}$ is an *integrating factor* if it satisfies (2).

When we do not have a Darboux first integral, Darboux proposes to search for an integrating factor R of the same form $R = f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 8-13

Darboux Proposition 2: *Assume that a system (1) with $P, Q \in \mathbf{R}[x,y]$ ($\mathbf{C}[x,y]$) has an integrating factor which is of the form $R = f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ with f_i, $i = 1, \ldots, q$, non constant polynomials with real (complex) coefficients and λ_i nonzero real (complex) numbers. Then necessarily the curves $f_i(x,y) = 0$ are invariant algebraic curves of system (1).*

Darboux stated a result for integrating factors similar to Theorem 1 for Darboux integrals.

Darboux Theorem 2: *If a real (complex) polynomial system of degree m admits q real (complex) algebraic solutions $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$, with $q \geq m(m+1)/2$, then there exist $\lambda_i \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$) such that either $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ is a Darboux first integral , or $R = f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ is an integrating factor of the system.*

In this note we pursue further the connections between polynomial systems, algebraic curves and first integrals. We will stablish some results on the cases not covered by the Darboux Theorems. In fact, Darboux observed in [2] that we may have less than or equal to $m(m+1)/2$ algebraic solutions $f_i = 0$ and the system still can have a first integral of the form $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$. This situation will occur when there exist independent singular points (Theorem 3) and when there are independent weak singular points (Theorem 4). In order to be more precise we need some notation and definitions. 3 If $K(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x^i y^j$ is an arbitrary real (complex) polynomial of degree $m-1$, then we write $K \in \mathbf{R}_{m-1}[x,y]$ ($\mathbf{C}_{m-1}[x,y]$). We identify the linear vector space $\mathbf{R}_{m-1}[x,y]$ ($\mathbf{C}_{m-1}[x,y]$) with $\mathbf{R}^{m(m+1)/2}$ ($\mathbf{C}^{m(m+1)/2}$) through the isomorphism

$$K \longrightarrow (a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \ldots, a_{0,m-1}) .$$

We say that p points (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, p$, are real (complex) *independent* with respect to $\mathbf{R}_{m-1}[x,y]$ ($\mathbf{C}_{m-1}[x,y]$) if the intersection of the p hyperplanes

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x_k^i y_k^j = 0 , \quad k = 1, \ldots, p ,$$

in $\mathbf{R}^{m(m+1)/2}$ ($\mathbf{C}^{m(m+1)/2}$) is a linear subspace of dimension $[m(m+1)/2] - p$.

The next result improves Darboux Theorem 1 when the polynomial system has independent singular points. We note that one or two arbitrary singular points are always independent (for more details see [1]).

Theorem 3: *Assume that a real (complex) polynomial system of degree m admits $q = [m(m+1)/2] + 1 - p$ real (complex) algebraic solutions $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$, and p real (complex) independent singular points (x_k, y_k), $k =$*

$1, \ldots, p$, *such that* $f_i(x_k, y_k) \neq 0$. *Then the system has a first integral of the form* $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ *with* $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(\mathbf{C})$.

We remark that, in general, a singular point is not contained in an algebraic solution, see for instance Propositions 8 and 9 of [1]. Therefore, Theorem 3 is not a corollary of Darboux Theorem 1.

A singular point (x_0, y_0) of system (1) is called *weak* if the trace of the linearization of system (1) at (x_0, y_0) is zero.

The next result improves Darboux Theorem 2 (Theorem 3) when some (all) independent singular points of the polynomial system, not contained in algebraic solutions, are weak.

Theorem 4: *Assume that a real (complex) polynomial system of degree* m *admits* $q = [m(m+1)/2] - p$ *real (complex) algebraic solutions* $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$, *and* p *real independent weak singular points* (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, p$, *such that* $f_i(x_k, y_k) \neq 0$. *Then there exist* $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(\mathbf{C})$ *such that either* $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ *is a Darboux first integral , or* $R = f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ *is an integrating factor of the system.*

Now we shall prove Theorems 3 and 4.

Proof of Theorem 3: We prove it in the complex setting. The proof in the real setting is similar. By hypothesis we have q algebraic solutions $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$, of a polynomial system (1) of degree m. That is, the f_i's are polynomials such that $Df_i = K_i f_i$ with K_i a complex polynomial of degree $m-1$, or equivalently $K_i \in \mathbf{C}_{m-1}[x,y]$. We note that that the dimension of $\mathbf{C}_{m-1}[x,y]$ as a vector space over $\mathbf{C}$ is $1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2$.

Since (x_k, y_k) is a singular point, $P(x_k, y_k) = Q(x_k, y_k) = 0$. Then, from $Df_i = P[\partial f_i/\partial x] + Q[\partial f_i/\partial y]$, it follows that $K_i(x_k, y_k) f_i(x_k, y_k) = 0$. By assumption $f_i(x_k, y_k) \neq 0$, therefore $K_i(x_k, y_k) = 0$ for $i = 1, \ldots, p$. Consequently, since the p singular points are independent, all the polynomial K_i belong to a linear subspace S of $\mathbf{C}_{m-1}[x,y]$ of dimension $[m(m+1)/2] - p$.

Now, since $q = [m(m+1)/2] + 1 - p > [m(m+1)/2] - p$, we obtain that the q polynomials K_i must be linearly dependent on S. So, there are complex λ_i's not all zero such that $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i K_i = 0$. Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} D(f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}) &= (f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}) \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{Df_i}{f_i} \right) \\ &= (f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}) \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i K_i \right) \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

i.e. $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ is a first integral of system (1).

Proof of Theorem 4: Again we prove it in the complex case, the proof in the real case is similar. From the assumptions we have q algebraic solutions $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$, of a polynomial system (1) of degree m. Therefore, there exist $K_i \in \mathbf{C}_{m-1}[x, y]$ such that $Df_i = K_i f_i$. As in the proof of Theorem 3 we obtain that $K_i(x_k, y_k) = 0$ for $i = 1, \ldots, p$. Consequently, since the p singular points are independent, all the polynomial K_i belong to a linear subspace S of $\mathbf{C}_{m-1}[x, y]$ of dimension $[m(m+1)/2] - p$.

Let $K = \operatorname{div}(P, Q)$, clearly $K \in \mathbf{C}_{m-1}[x, y]$. Since the singular points (x_k, y_k) are weak, $K(x_k, y_k) = 0$ for $k = 1, \ldots, p$. So K belongs to the linear subspace S.

Since $\dim S = q$ and we have $q+1$ polynomials $K_1, \ldots, K_q, K$ in S, it follows that $K_1, \ldots, K_q, K$ are linearly dependent on S. Therefore, we obtain complex λ_i's and λ not all zero such that $(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i K_i) + \lambda K = 0$.

If $\lambda = 0$ then, as in the proof of Theorem 3, we obtain that $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ is a first integral of system (1).

Now we assume that $\lambda \neq 0$. So, if $\mu_i = \lambda_i / \lambda$, we have that $K = -\sum_{i=1}^{q} \mu_i K_i$. Therefore, we obtain

$$
\begin{aligned}
D(f_1^{\mu_1} \cdots f_q^{\mu_q}) &= (f_1^{\mu_1} \cdots f_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{q} \mu_i K_i \right) \\
&= -(f_1^{\mu_1} \cdots f_q^{\mu_q}) K \\
&= -(f_1^{\mu_1} \cdots f_q^{\mu_q}) \operatorname{div}(P, Q),
\end{aligned}
$$

i.e. $f_1^{\lambda_1} \cdots f_q^{\lambda_q}$ is an integrating factor of system (1).

Roughly speaking an *elementary first integral* is a first integral expressible in terms of exponentials, logarithms and algebraic functions. The notion of elementary function of one variable is due to Liouville who, between 1833 and 1841, used it in the theory of integration. Elementary functions of two variables are defined by starting with the field of rational functions in two variables $\mathbf{C}(x, y)$ and using extension fields but with two conmmuting derivations $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$, for more details see [7]. Of course, Darboux first integrals are elementary functions.

Prelle and Singer [6] in 1983 proved that if a polynomial system (1) admits an elementary first integral, then it has invariant algebraic curves.

More information about polynomial systems can be find in the interesting papers of Schlomiuk [7] and [8].

References

[1] J. Chavarriga, J. Llibre and J.Sotomayor, "Algebraic solutions for polynomial systems with emphasis in the quadratic case", to appear in Expositiones Mathematicae.

[2] G. Darboux, "Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)", Bull. Sci. Math. (1878), 60–96; 123–144; 151–200.

[3] D. Hilbert, "Mathematische Probleme (Lecture at the Second International Congress of Mathematics, Paris 1900)", Nachr. Ges. Wiss. Gttingen Math.-Phys. Kl., 1900, pp 253–297.

[4] J.P. Jouanolou, "Equations de Pfaff algébriques", Lecture Notes in Mathematics **708**, Springer–Verlag, 1979.

[5] H. Poincaré, "Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles", J. de Math. **37**(1881), 375–422; **8**(1882), 251–296; Oeuvres de Henri Poincaré, vol. I, Gauthier–Villars, Paris, 1951, pp 3–84.

[6] M.J. Prelle and M.F. Singer, "Elementary first integrals of differential equations", Trans. Amer. Math. Soc. **279**(1983), 215–229.

[7] D. Schlomiuk, "Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations", Expositiones Math. **11**(1993), 433–454.

[8] D. Schlomiuk, "Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields", in Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields, Ed. D. Schlomiuk, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp 429–467.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.nº10 (1997) 14-14

Nonlinear Klein-Gordon and Schrodinger Systems: Theory and Applications

L. Vazquez, L. Streit y V. M. Perez-Garcia (Eds.)
Editado por World Scientific, 1996
363 páginas. ISBN 9810225652

El libro recoge algunas contribuciones largas sobre temas seleccionados en el campo de las ecuaciones de Klein-Gordon y Schrodinger, asi como 26 contribuciones cortas sobre el tema y sus aplicaciones, que fueron presentadas en la Euroconferencia del mismo título, celebrada en San Lorenzo del Escorial en septiembre de 1995.

Contribuciones Largas: 1.- Lectures on Nonlinear Klein-Gordon Equations. 2.- Mathematical Aspects of the Nonlinear Schrodinger Equation. 3.- Stochastic PDE's. 4.- Stochastic Differential Equations. 5.- Spectral Methods for solving Nonlinear Klein-Gordon Equation. 6.- Existence and stablitity problems of Solitary Waves in Nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon systems. 7.- Mode interactions in Nonlinear Discrete Klein-Gordon Models. 8.- Nonlinear Equations and Phase Transitions. 9.- Applications of some NLS systems. 10.- Modulationa instability, a source for solitons and localized modes.

En esta sección del boletín recogeremos los libros publicados en el campo de la Matemática Aplicada. Por lo tanto, si sois autores de algún libro, aquí podéis encontrar un lugar para darlo a conocer. También será bienvenida información sobre novedades bibliográficas correspondientes a otros autores y que consideréis de gran interés. Los datos sobre los libros para su inclusión en esta sección podéis enviarlos por correo electrónico a nuestra dirección:

`sema@macc.unican.es`

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 15-19

Como sabéis por pasados boletines el 22 de septiembre último se celebró en Oviedo la asamblea anual de nuestra sociedad en el marco de la VII Escuela de Otoño Hispano-Francesa sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería. En la asamblea fueron elegidos nuevos cargos directivos, presidente y comité ejecutivo. Quiero agradecer a la sociedad la confianza depositada en mí para el cargo de presidente en el que espero continuar la labor realizada por mis antecesores, Antonio Valle, Ildefonso Díaz y Mariano Gasca, en cuyos mandatos nuestra sociedad ha nacido, ha establecido unos objetivos de actividad y crecimiento y se ha afianzado. También es de señalar la aprobación de la ligera modificación en los estatutos de la sociedad. En particular, el cargo de presidente pasa a ser bianual, lo que ofrece una posibilidad de planificación que puede ser muy útil en esta etapa. Con todo, creo que se refleja un sentir muy amplio al decir que nuestra sociedad se mantiene en las ideas de la descentralización y la rotación en los cargos.

Aprovecho esta ocasión para dar la bienvenida a los nuevos miembros de comité, Rafael Bru de la Universidad de Valencia, Vicente Caselles de la Universidad de las Islas Baleares y Santiago de Vicente de la Universidad de Oviedo, y espero de ellos la dedicación suficiente para que cumplamos los objetivos propuestos, junto con Luis María Abia (Santander), Alfonso Casal (Universidad Polit. de Madrid), Tomás Chacón (Sevilla), Gerard Gómez (Barcelona) y Juan Manuel Viaño (Santiago). Juan Manuel es, como anunciamos, el Vicepresidente y Tomás Chacón es Secretario. Por último, es de justicia agradecer el trabajo de los miembros salientes, Eduardo Casas (Santander), Rafael Ortega (Granada) y nuestro anterior presidente, Mariano Gasca (Zaragoza), con quienes he tenido la ocasión y el placer de trabajar el año pasado y nos han legado una sociedad en marcha y un ambiente de colaboración envidiable. Aprovecho asimismo para dar la bienvenida a los nuevos socios que en número de varias decenas han ingresado en la sociedad en estos meses. Esperamos que la encuentren un medio útil al desarrollo de sus intereses profesionales y humanos.

Proyectos y realidades

He aquí brevemente algunas de las ideas en las que deseamos basar nuestra gestión. Esta debería continuar la llevada a cabo por los anteriores presidentes y comités. No esperamos pues grandes novedades cualitativas, aunque si desearía que en todos los aspectos mejorásemos y pasemos gradualmente de la etapa fundacional a una de expansión de nuestra actividad.

La sociedad tiene como misión ayudar a CAMBIAR LA IMAGEN de la matemática aplicada. Ello implica una cierta propaganda positiva, hacer que las cosas funcionen y que se sepa. Se trata de tener una repercusión positiva sobre nuestros socios, sobre la práctica de enseñanza e investigación en nuestro campo, sobre los contactos industria-universidad y más en general sobre la visión que la sociedad tiene de nuestro papel. Todo ello está claramente enunciado en los estatutos y hay mucho por hacer.

Para cumplir su misión la sociedad debe crecer en socios y actividades, ser más efectiva en sus cometidos (que deberían ser pocos en número y bien definidos), ser más *visible* para el exterior y debería ser un punto de unión del gremio MAT-APLI. Y cuando digo gremio debería usar otra palabra como "mundo" para evitar la tentación corporativa, que no es ni honesta ni útil. Todo buenas intenciones como veis, pero en estas direcciones se ha hecho ya bastante progreso y hay que hacer mucho más.

Pasando a los hechos, tras informarme M. Gasca de que la figura ya estaba prevista y aprobada, he decidido nombrar TESORERO en la persona de Bosco García Archilla, profesor titular de la Universidad Autónoma, especialista en Cálculo Numérico de EDPs. El nombramiento ha sido aprobado por el comité ejecutivo. Tendrá pues firma en la cuenta del banco y preparará los estados financieros. La modestia de nuestros compromisos y una buena administración nos proporcionan actualmente un pequeño superávit.

Se ha confirmado la continuidad del equipo de Francisco Lisbona en Zaragoza que edita el boletín. La situación de autofinaciación del mismo esta prácticamente conseguida. Es de destacar la labor que esta llevando a cabo el actual equipo. También hemos confirmado las dos personas que ayudan en la gestión, Javier Sayas en Zaragoza para la confección del Boletín, y Francisco Padial, de la Universidad Politécnica de Madrid, para la gestión de socios.

En estos meses hemos dedicado atención preferente a la cuestión de **visibilidad** de la sociedad. Mediante una beca de nuestro equipo de investigación y con el apoyo de la Universidad Autónoma un joven estudiante posgraduado, Juan Manuel Gómez Mayoral, ha diseñado la hoja WEB de la Sociedad en INTERNET que salió a la red en enero de 1997 y podeis consultar en la dirección de

`http://www.uam.es/sema`

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 15-19

La combinación Boletín - Hoja Web nos pone en inmejorables condiciones de tener un servicio de noticias e información científica de utilidad real para los socios en sus aspectos investigador, académico y social. Permitidme que recuerde la importancia que el aspecto social tiene al lado de los otros dos en la vida de una sociedad. La utilización de la base de direcciones o de la página de anuncio de conferencias y congresos no debería pasar desapercibida. Todas vuestras opiniones son bienvenidas en el email de la sociedad, `semauam.es`, o en los de los miembros de comité o colaboradores listados en Internet.

Al mismo tiempo hemos hecho un esfuerzo en la campaña de afiliación y en clarificación de la pertenencia del gran número de socios que se han ido acumulando. Estamos creciendo razonablemente y los socios estabilizados son unos 300.

Por último en este apartado, el trabajo de dirección se realiza fundamentalemente mediante contacto electrónico, que lo hace descentralizado y flexible, a costa claro está de un cierto trabajo adicional para quien coordina el servicio de *email* común. El comité ha tenido una reunión formal en Madrid el 31 de enero de la que se da cuenta en otro lado y que fue larga, interesante y emotiva. Dos miembros que hubieron de perder la reunión por motivos profesionales hicieron viaje a Madrid en otra fecha para entrevistarse con el presidente, lo que deseo hacer constar como muestra del interés con que se vive el proyecto SEMA en el comité.

Relaciones Internacionales

He asistido a la reunión preparatoria del congreso ICIAM99 que se celebró en Reading, cerca de Londres, 16-18 de octubre de 1996. Había sido nombrado para ello hace más de un año junto con Jesús Sanz Serna (que no pudo acudir). El congreso, gran "muestra" del estado del arte en Matemática Aplicada, se celebrará en Edimburgo en 1999. En la reunión había representantes de unas 10 sociedades y otras personas de representatividad indirecta. Estaba poco preparada por los responsables ingleses y fue un poco caótica. Se trató ante todo de fijar la lista de conferenciantes principales en número y aproximadamente en personas y de decidir la existencia de minisimposia según el modelo de lo sucedido en Hamburgo. Las principales conclusiones son que habrá unas 20 conferencias plenarias (muchas menos que en Hamburgo), que España estará representada al menos por Amable Liñán, quien debe reflejar los progresos en la teoría de la combustión, y que el número de minisimposia será elevado, unos 300 o más, y es preciso sugerir temas en fechas próximas, como anunciaremos

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 15-19

en Internet. En la primavera habrá más información.

Congresos, cursos, grupos de actividad

Como sabeis, el próximo CEDYA se celebrará en Vigo, organizado por José Durany y sus colaboradores. La participación en el congreso me parece que es un punto importante a la hora de formar una sociedad viva de matemáticos aplicados que "promueva y estimule la investigacion" y "consiga una mayor sensibilización de la comunidad científica"... Creemos que se debe defender la existencia de este congreso central de la Matemática Aplicada que acoja el mayor número de campos científicos de las Matemáticas Aplicadas. Es preciso pues que nos preocupemos de que nuestros colegas asistan al Congreso y presenten sus mejores obras. En todo caso es preciso recordar que los organizadores son independientes en sus decisiones.

Hay por otra parte un gran esfuerzo por hacer aún en el anuncio y apoyo a toda otra suerte de cursos, workshops, congresos, etc., que los más diversos grupos de la sociedad organizan. La Matemática Aplicada es plural por naturaleza y por ello la descentralización de actividades debe ir acompañada de la agilidad y fluidez de información.

En este sentido, el crecimiento de la Sociedad nos lleva a prever la necesidad de articular la pluralidad de intereses. Siguiendo a la sociedad SIAM, modelo en tantos sentidos, propongo la introducción de la idea de *Grupos de Actividad* para agrupar actividades de tipo sectorial. Sin duda esta idea necesita una reflexión que debemos acometer. El comité está presto a oir las propuestas según surjan.

Por otra parte hemos de cambiar la imagen de la matemática aplicada informando de su realidad en España y en el mundo a nuestros colegas, a la industria, a la sociedad civil y a nuestras autoridades. Es preciso motivar la discusión de la utilidad y belleza de las matemáticas participando en foros abiertos, escribiendo artículos o haciendo que otros los escriban.

Sociedades españolas

Sabido es que existen diversos movimientos asociativos que interesan a los matemáticos españoles, entre ellas SEMNI, de Métodos Numéricos en la Ingeniería, SEEIO, de Estadística e Investigación Operativa, la Sociedad Catalana SCM, las Sociedades de Enseñantes federadas en FESPM, la Asociación AME y la RSME, Real Sociedad Matemática Española. Existen novedades de interés acerca de esta última, la cual tras un período de práctica inactividad que ha durado algunos años, ha entrado en fase de reconstitución. El profesor Antonio Martínez Naveira, de la Univ. de Valencia, como "Presidente de una Comisión Gestora" ha enviado una circular a toda la comunidad matemática y se ha puesto en contacto conmigo como presidente de SEMA exponiendo el proyecto de reconstitución. Tras debate de su misiva por el comité y tras una cordial reunión en que auguramos al Prof. Naveira y su equipo un completo éxito y nuestro apoyo, hemos decidido aceptar la invitación a nombrar un representante de nuestra Sociedad en este proceso. Este será el catedrático de la Universidad de Sevilla, Enrique Fernández-Cara.

En breve se contará con información más detallada del alcance de este proyecto y de su futura relación con SEMA, que ha de ser debatida por nuestra sociedad. Previo a cualquier toma de posición sobre estos aspectos prácticos he de señalar el consenso del comité que esperamos la sociedad refrende en su día: por una parte la matemática aplicada cuenta en estos momentos con unos cauces asociativos que parecen suficientes si funcionan adecuandamente y que debemos desarrollar; por otra parte, la ausencia de una sociedad matemática de índole general es una anomalía muy de lamentar y la propuesta de subsanar este estado de cosas es bienvenida por SEMA, que desea establecer con la sociedad resultante relaciones de la más estrecha colaboración. Añado que la existencia de dos o varias sociedades con estrechas relaciones es la realidad de los países más próximos científicamente, como Francia o Estados Unidos. Ahora bien, la vista de las dimensiones de la comunidad matemática en nuestro país, la actual dispersión es quizá algo excesiva. Es deseable que existan pocas sociedades, que tengan actividad real, objetivos distintos pero confluyentes y relaciones mutuas amistosas, intensas y bien estructuradas.

Termino en un tono festivo, acorde con el gran progreso que las matemáticas aplicadas están haciendo entre nosotros: Como dijo el sabio, *leed a Euler, es el maestro de todos nosotros* y todo momento es bueno. Pero un minuto os quedará para nuestra hoja en Internet... Un cordial saludo.

JUAN LUIS VÁZQUEZ, PRESIDENTE DE SEMA

NUEVOS SOCIOS

Socios ordinarios:

ARANDA ORTEGA, Ernesto

Dpto. de Matemáticas, C-XV – Fac. de Ciencias – Univ. Autónoma de Madrid – 28049 Madrid. e-mail: ernesto.aranda@uam.es

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 22-23

JORNADA SOBRE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA

UNIVERSIDAD CARLOS III, MADRID
10 DE MAYO DE 1996

El pasado 10 de mayo tuvo lugar en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid una Jornada sobre diversos aspectos del estado actual de la investigación en Matemática Aplicada y Estadística bajo la coordinación del Vicerrectorado de Investigación de dicha Universidad.

Tras unas palabras de bienvenida a cargo del Profesor Francisco Marcellán Español, Vicerrector de Investigacisn de la UC3M, la ponencia de apertura estuvo a cargo del Profesor Bernd Wegner (TU Berlin), Editor Jefe de Zentralblatt für Mathematik y Miembro del Comité Editorial del Boletín Electrónico de la European Mathematical Society. Su ponencia se centró en *Información y Bases de Datos en Matemáticas y Estadística*, presentando, en primer lugar los diferentes servidores electrónicos para la búsqueda sistemática de información sobre literatura matemática basados bien en INTERNET, bien en la instalación local mediante CD-ROM, facilitada a través de revistas de referencias como el propio Zentralblatt o Mathematical Reviews. Asimismo, describió una variedad de servicios electrónicos de información ofrecidos por la EMS en cooperación con Zentralblatt y Fachinformationszentrum Karlsruhe, tales como una biblioteca electrónica de la EMS con acceso libre al texto completo de revistas electrónicas en matemática, información sobre prepublicaciones (EMPRESS) y un catálogo sobre acontecimientoss científicos. Finalmente, presentó las perspectivas de desarrollo futuro de European Mathematical Information Service (EMIS) basado en una red de servidores locales (espejos) de INTERNET con un servidor principal en Berlín. El acceso a dicho servidor especial es posible sobre `http:www.emis.de`.

El resto de la Jornada se estructuró en tres mesas redondas. La primera de ellas se dedicó a Perspectivas y Áreas Emergentes de Investigación en Matemática Aplicada y Estadística y contó con la participación de los Profesores Luis López Bonilla (UC3M), Ildefonso Díaz (UCM), Juan Luis Vázquez (UAM), Jesús Sanz

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 22-23

Serna (UValladolid), José Manuel Vega de Prada (UPM) y Daniel Peña (UC3M). Sugerencias lanzadas de forma insistente por los ponentes fueron la necesidad de potenciar grupos de investigación interdisciplinares y la conveniencia de investigar preferentemente problemas cuyas aplicaciones fueran relevantes y se reflejaran en revistas de calidad contrastada.

La segunda mesa redonda estuvo dedicada al Papel de las Sociedades Profesionales en Matemáticas y Estadística estando representadas la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa por su presidente el Prof. Jesús Pastor (UA), la Sociedad Española de Matemática Aplicada por su presidente el Prof. Mariano Gasca (UZ) y la Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería, asmmismo por su presidente el Prof. Eugenio Oñate (UPB). Todos ellos describieron los objetivos, actividades y estructura de las mismas así como la conveniencia de asumir un mayor protagonismo como interlocutores reconocidos ante aquellas instituciones con responsabilidades directas en los campos profesionales objeto de su actividad.

La tercera mesa redonda abordó la Evaluación y Financiación de la Investigación en Matemática Aplicada y Estadística. Moderada por la Profesora Aurelia Modrego (UC3M) contó con la participación de los profesores Amable Liñán (UPM), Pedro Gil (UO), David Nualart (UB) y Enrique Zuazua (UCM). Los ponentes resaltaron la introducción de parámetros correctores y determinantes en el proceso de financiación de proyectos, el papel de la evaluación según modelos de medición altamente contrastados y la necesidad de que la evaluación se convierta en un instrumento orientador de la actividad científica de los Departamentos universitarios para mejorar la calidad de los mismos y definir líneas de actuación futuras.

Los coloquios que siguieron a las diferentes ponencias mostraron el interés de los asistentes a la Jornada por unos temas que tradicionalmente se consideran compartimentados y que no facilitan una visión global acerca de los contenidos, infraestructura y diseminación de los resultados científicos en las áreas anteriormente mencionadas.

El alto grado de participación de los 75 profesores de 22 universidades españolas que asistieron a esta reunión constituye una buena muestra de las espectativas que este tipo de actividades despiertan y que, de cara a un futuro próximo, pueden jugar un importante papel como lugar de reflexión, intercambio de ideas y contribución a la definición de ejes de intervención para una mejora de la calidad científica de los organismos públicos de investigación.

FRANCISCO MARCELLÁN

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 29-36

Análisis de un sistema híbrido bidimensional fluido-estructura

Doctorando: Sorin Micu.

Director/es: Enrique Zuazua.

Defensa: 5 de febrero de 1996, Universidad Complutense de Madrid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se abordan diversos problemas matemáticos relacionados con el análisis de las propiedades cualitativas de un sistema híbrido bidimensional lineal que han surgido en los ultimos años en el desarrollo de nuevas técnicas para la reducción de ruido en el interior de un recinto (avión, automóvil, etc).

Un sistema híbrido describe una estructura compleja que acopla el movimiento vibratorio de dos o más componentes de naturalezas diferentes. Por ejemplo, en nuestro caso, se estudia la propagación de las ondas acústicas en un fluido compresible, dentro de un dominio bidimensional con una parte de la frontera flexible. Desde el punto de vista matemático el problema consiste en considerar dos ecuaciones hiperbólicas, una en dimensión dos y otra en dimensión uno, acopladas mediante las condiciones de contorno.

La pregunta a la que pretendemos responder es la siguiente: ¿se puede cambiar la dinámica del sistema actuando solamente sobre la parte flexible de la frontera? La respuesta a esta pregunta depende del tipo de acción que estamos considerando, pero la conclusión general es que la interacción fluido-estructura es muy débil a altas frecuencias, debido tanto al "tamaño" de la parte flexible de la frontera como a la misma estructura híbrida del problema (dicho de otro modo, a la naturaleza del acoplamiento mediante las condiciones de contorno). De esta forma se explican los resultados matemáticos obtenidos, que contienen importantes restricciones de regularidad en algunos de los casos analizados.

Los principales problemas estudiados son los siguientes: estabilización del sistema mediante un término disipativo que actúa en la parte flexible de la frontera (Capítulo 2), controlabilidad del sistema mediante un control localizado en la misma región (Capítulo 4) y existencia de soluciones periódicas (Capítulo 5). También se realiza un análisis detallado del espectro del operador diferencial asociado al sistema (Capítulo 3) y se comentan algunas variantes del modelo original (Capítulo 5).

Blow-up en discretizaciones de ecuaciones de reacción-difusión

Doctorando: Julia Martínez Rodríguez.

Director/es: Luis Abia Llera, Juan Carlos López Marcos.

Defensa: 3 de junio de 1996, Universidad de Valladolid.

Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Muchas ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos de la naturaleza tienen soluciones que presentan singularidades en tiempo finito. Se ha utilizado el

termino blow-up para describir este fenómeno.
En la literatura existen numerosos trabajos que se ocupan del estudio del blow-up; sin embargo, son muy pocos los que analizan este fenómeno desde el punto de vista numérico.
En la memoria se aborda el estudio del blow-up en discretizaciones de un problema modelo de reacción-difusión, centrando la atención en las aproximaciones al tiempo en el que se produce el blow-up. En particular se aportan resultados de convergencia de los tiempos de blow-up obtenidos, con los métodos estudiados, al del problema modelo considerado. Dichos resultados generalizan los ya existentes en la literatura en dos sentidos, ya que, por un lado, se aplican una mayor variedad de funciones de reacción y, por otro, las hipótesis requeridas sobre el comportamiento de la solución del problema modelo en el tiempo de blow-up son más realistas.

Modelos logísticos. Aplicaciones a la Agronomía

Doctorando: Ramon Carreño Carreño.
Director/es: Antonio Tineo Bello, Tomás Cabello García.
Defensa: 9 de julio de 1996, Universidad de Almería.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: El objetivo de la memoria es utilizar modelos matemáticos para describir la evolución de plagas y enfermedades, con el fin de aplicar estos conocimientos al control de las mismas, en cultivos en invernaderos.
Los modelos logísticos autónomos se han utilizado como una herramienta de tipo empírico, cuya única pretensión ha sido la de ajustar los datos observados a una determinada curva logística, mediante la cual sea posible representar el fenómeno estudiado y obtener información sobre los parámetros que definen el proceso.
En ese sentido, se realiza una revisión de los modelos logísticos autónomos y se presenta un estudio completo de la ecuación de logística no autónoma: $X' = X * F(t, X)$ la cual ha sido aceptada universalmente como un modelo para describir el crecimiento de una poblacion en un medio cerrado. En particular, se obtienen nuevos resultados para caracterizar la disipatividad, persistencia y propiedades asintóticas de la ecuación precedente.
En el capítulo de aplicaciones se utilizan los modelos logísticos autónomos y un modelo no autónomo propuesto por el autor, a partir del cual se obtienen todos los modelos clásicos, en los ajustes a datos reales de campo de la curva de progresión de la plaga o enfermedad en el tiempo.

Formación y dinámica de estructuras en sistemas físicos con inestabilidades hidrotermales

Doctorando: Ana María Mancho Sánchez.
Director/es: Carlos Perez García y Henar Herrero Sanz.
Defensa: 16 de septiembre de 1996, Universidad de Navarra.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: El objetivo del trabajo es analizar desde el punto de vista teórico, la formación y movimiento de estructuras en sistemas físicos que presentan inestabilidades hidrotermales.

Sobre la formación de estructuras estudiamos un problema de convección en un fluido con calentamiento casi unidimensional y superficie libre. Se tienen en cuenta efectos acoplados de empuje y termocapilaridad. Apenas la temperatura de la banda calentadora aumenta, surge un estado básico convectivo que hemos determinado resolviendo numéricamente las ecuaciones de la hidrodinámica con un método pseudoespectral. Esta solución consiste en dos grandes rollos que se sitúan paralelos al calentador y que llenan toda la celda. Hemos realizado un análisis de estabilidad lineal de la solución y los resultados indican que el estado básico sufre una bifurcación estacionaria que depende de los valores del gradiente de temperatura aplicados, de la geometría del calentador y de las propiedades del fluido y del ambiente.
En relación con el movimiento de estructuras estudiamos las desarrolladas en la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, de la que se ha probado que es un buen modelo para las inestabilidades hidrotermales bajo ciertas condiciones físicas. Estudiamos los comportamientos dinámicos de esta ecuación en baja dimensión para condiciones de contorno periódicas. Analizamos las bifurcaciones que ocurren en una aproximación 6D a la variedad inercial y nos centramos principalmente en las conexiones heteroclinas. Se ha encontrado una región de parámetros en la que existen variedades de ciclos heteroclinos estructuralmente estables. La existencia de esta variedad es responsable de un comportamiento intermitente con rasgos de impredecibilidad.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS CON MÉTODOS MULTIPASO

Doctorando: Begoña Cano Urdiales.
Director/es: Jesús M. Sanz Serna.
Defensa: 16 de octubre de 1996, Universidad de Valladolid.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Basándonos en nuestro estudio del crecimiento del error al integrar órbitas periódicas con métodos numéricos de un paso, decidimos generalizar nuestros resultados a métodos multipaso.
El primer capítulo expone cómo crecen los coeficientes del desarrollo en potencias de la longitud de paso del error cuando el método con el que se integra es fuertemente estable. Mención especial merecen los problemas diferenciales reversibles.
El segundo capítulo es un estudio de los métodos débilmente estables. Los resultados obtenidos son bastante negativos, con lo cual los métodos multipaso simétricos, que tan buenas propiedades muestran en el caso de métodos de un paso, no resultan en absoluto competitivos.
Por último, en el capítulo tercero demostramos que la simetría sí produce un crecimiento del error favorable en una gran cantidad de métodos multipaso para ecuaciones de segundo orden.

ESTUDIO MATEMÁTICO DE FENÓMENOS DE CAVITACIÓN EN LUBRICACIÓN ELASTOHIDRODINÁMICA PIEZOVISCOSA

Doctorando: Guillermo García Lomba.
Director/es: José Durany Castrillo, Carlos Vázquez Cendón.
Defensa: 25 de octubre de 1996, Universidad de Santiago de Compostela.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria doctoral se han aplicado diferentes técnicas del análisis matemático y del análisis numérico a varios problemas del ámbito de la Tribología formulados mediante ecuaciones en derivadas parciales. En concreto, el trabajo se ha centrado en dos problemas matemáticos que surgen de los modelos de lubricación elastohidrodinámica con cavitación y que incluyen, por una parte, las dificultades intrínsecas de los problemas de frontera libre y, por otra, las no linealidades debidas a las leyes de comportamiento de los fluidos que intervienen.
En relación con el análisis matemático, se han obtenido resultados de existencia de solución para el problema elastohidrodinámico de tipo hertziano con fluidos piezoviscosos y condiciones de contorno de tipo mixto. Asimismo, se ha demostrado la existencia de solución para el problema elastohidrodinámico de tipo placa con condiciones de contorno periódicas.
En cuanto al análisis numérico, se han combinado las siguientes técnicas: algoritmos de *regula falsi* para ajustar la carga impuesta; algoritmos de punto fijo para desacoplar las partes hidrodinámica y elástica; algoritmos de transporte–difusión para tratar los términos de carácter convectivo; algoritmos de resolución de problemas no lineales de frontera libre como, por ejemplo, métodos de dualidad; y discretizaciones espaciales de elementos finitos.

Generación y Adaptación Anisótropa de Mallados de Elementos Finitos para la Resolución Numérica de E.D.P. Aplicaciones

Doctorando: Manuel J. Castro Díaz.
Director/es: Carlos Parés Madroñal.
Defensa: 11 de noviembre de 1996, Universidad de Málaga.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: La memoria, estructurada en cinco capítulos y un apéndice, estudia la aplicación del Método de Elementos Finitos a la resolución numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales, lo que requiere la construcción de una partición en trozos de geometría sencilla. Dicha partición, denominada *mallado*, influye tanto en el coste de los cálculos como en la calidad de la aproximación obtenida.
En esta memoria, se aborda el problema de generar mallados que permitan obtener buenas aproximaciones con el menor número de grados de libertad posible. Para ello, se utilizan las denominadas *técnicas de adaptación*. Estas técnicas, desarrolladas en los últimos años, parten de un mallado inicial, a partir del cual, se obtiene una primera solución aproximada y se estima el error que se comete en cada triángulo. Esta estimación de error *a posteriori* se usa para obtener un segundo mallado con mejores propiedades. Si fuera necesario, se volvería a realizar el proceso, obteniéndose un bucle de adaptación.
Un aspecto fundamental en este tipo de técnicas es la estimación a posteriori usada, que se estudiará en los capítulos 3 y 5. En este trabajo, se consideran estimadores *anisótropos*: se obtienen métricas que dan indicaciones no sólo del tamaño óptimo de los elementos, sino también de su forma. Se incluye en la memoria una revisión y mejora de algunos resultados conocidos en este terreno para el caso de interpolación lineal y se propone un nuevo método de obtención de métricas en el caso no lineal, usando problemas locales de optimización. Asimismo, se construye un estimador de error específico para un problema de semiconductores, para el que se demuestra pre-

viamente su carácter "bien planteado" en el sentido de Hadamard. El análisis antes citado se realiza en el capítulo 5.
En los aspectos prácticos, descritos en los capítulos 1 y 2, se han desarrollado e implementado algoritmos que permiten tratar de forma automática la generación y adaptación de mallados de dominios planos o de superficies, a partir de una métrica proporcionada por el estimador de error. Estos algoritmos se basan en técnicas locales de tipo Delaunay, lo que permite un coste computacional poco elevado. Se ha implementado también una mejora del algoritmo de Farin, que permite aproximar la geometría de una superficie a partir de un mallado de la misma.
En el capítulo 4, se muestran la aplicación de estos algoritmos a algunos problemas de mecánica de fluidos, poniéndose de manifiesto el buen comportamiento de las mallas obtenidas, especialmente cuando aparecen fenómenos fuertemente direccionales.

ANÁLISIS ASINTÓTICO Y CONTROL DE ALGUNOS PROBLEMAS DE VIBRACIONES UNIDIMENSIONALES

Doctorando: Carlos Manuel Castro Barbero.
Director/es: Enrique Zuazua Iriondo.
Defensa: 26 de noviembre de 1996, Universidad Complutense de Madrid.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se estudian algunas propiedades analíticas y sus consecuencias respecto al control en algunos sistemas mecánicos unidimensionales gobernados por ecuaciones en derivadas parciales lineales.
Los dos primeros sistemas estudiados se engloban dentro de los llamados sistemas híbridos que acoplan estructuras flexibles de diferente naturaleza.
El primero de ellos es el formado por dos cuerdas vibrantes unidas por una masa puntual y sujetas en los extremos libres. En este tipo de sistemas se conoce el siguiente fenómeno: Si tomamos un dato inicial que sea C^1 a uno de los lados de la masa y C^2 al otro, entonces la solución mantiene dicha regularidad a lo largo del tiempo. Naturalmente se trata de un fenómeno debido a la presencia de la masa ya que en ausencia de la misma el sistema queda gobernado por una ecuación de ondas y las singularidades se propagan a través de las características alcanzando cualquier parte del dominio.
En nuestro trabajo hemos realizado un cuidadoso análisis que nos ha permitido caracterizar dicho fenómeno mediante una propiedad espectral. También hemos analizado cómo aparece cuando aproximamos el sistema por una familia de sistemas formados por tres cuerdas en los que la cuerda central es cada vez más pequeña y más densa.
El segundo sistema que hemos tratado es el formado por dos vigas unidas por una masa y apoyadas en los extremos. Para describir las vibraciones de las vigas hemos considerado dos modelos diferentes: el primero de ellos incorpora un término en las ecuaciones llamado de inercia de rotación, mientras que el segundo es el más conocido modelo de Euler-Bernoulli en el que dicho término se toma nulo por tratarse de un término pequeño por lo general. Como resultado, analizando propiedades espectrales, hemos probado que el fenómeno descrito arriba se produce cuando consideramos el primer modelo pero no cuando se considera el segundo.
Por último hemos estudiado un problema que se engloba dentro de la teoría de la homogenización. Se trata de un sistema formado por una ecuación de ondas con una

densidad periódica muy oscilante. Se sabe que en estos sistemas pueden producirse fenómenos de localización de energía en la frontera. Sin embargo, dichos fenómenos sólo han sido observados cuando las vibraciones del medio son comparables a la oscilación de la densidad. En esta memoria hemos probado que cuando las vibraciones tienen una longitud de onda mayor o menor que la oscilación de la densidad no aparece dicha localización.
Las técnicas usadas están basadas en el análisis espectral, la teoría de series de Fourier no armónicas y el método asintótico WKB.

MÉTODOS TOPOLÓGICOS Y VARIACIONALES EN EL ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES CON APLICACIONES A LA BIOLOGÍA

Doctorando: Abderrahim Zertiti.
Director/es: David Arcoya Alvarez y Antonio Canada Villar.
Defensa: 4 de diciembre de 1.996, Universidad de Granada.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: Esta tesis contiene dos partes distintas. En la primera de ellas se estudia una clase de ecuaciones integrales que surgen en Teoría de Epidemias y Dinámica de Poblaciones. La segunda trata sobre ecuaciones elípticas no lineales.
Respecto de la primera parte, se considera una clase de ecuaciones integrales no lineales con retraso introducidas por Cooke y Kaplan en 1.976, para explicar el brote periódico de algunas enfermedades infecciosas. Tales ecuaciones modelan, además, el crecimiento de ciertas poblaciones cuando las condiciones ambientales varían de manera periódica. El interés primordial se centra en el estudio de la existencia de soluciones positivas periódicas no triviales, así como en posibles resultados de unicidad y multiplicidad, además de la aproximación de dichas soluciones. Ello se lleva a cabo mediante el uso de métodos monotonos (soluciones superiores e inferiores) y métodos topológicos (índice de puntos fijos en espacios de Banach ordenados con respecto a un cono). Se tratan ecuaciones escalares y sistemas. Algunos de los teoremas de punto fijo obtenidos para él estudio de este último caso, son de interés no sólo en el campo de las ecuaciones integrales sino también en el de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.
La segunda parte de la tesis contiene el estudio de diferentes problemas de contorno no lineales de tipo elíptico. En primer lugar se tratan problemas "non-positone" sobre un dominio anular, utilizándose el "método de tiro" para encontrar soluciones radiales. A continuación se examinan problemas de contorno con término no lineal discontinuo. Mediante teoría de bifurcación se obtienen ramas globales de soluciones sobre dominios anulares; haciendo tender a infinito el radio mayor de tales dominios, se prueba la existencia de una rama de bifurcación global de soluciones sobre el exterior de una bola euclídea. La parte final se dedica a una clase de problemas casi-lineales con operador lineal degenerado, utilizándose espacios de Sobolev con peso y herramientas variacionales.

UN NUEVO ESTIMADOR DE ERROR PARA EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Doctorando: Pedro Díez Mejía.

Director/es: Juan José Egozcue Rubí, Antonio Huerta Cerezuela.
Defensa: 5 de diciembre de 1996, Universidad Politécnica de Cataluña.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta tesis se presenta un nuevo estimador de error para el método de los elementos finitos. Se trata de un estimador residual basado en la proyección del error sobre espacios de funciones con soporte local. El cálculo de la estima se realiza en dos fases, una primera que tiene en cuenta el residuo interior a los elementos y una segunda que incluye el efecto de los saltos de flujo a través de los lados. Ambas fases se calculan resolviendo problemas locales utilizando el método de los elementos finitos con submallas que discretizan pequeños subdominios. Las estima que proporciona este método infravalora el error exacto pero se ajusta a éste satisfactoriamente. El estimador se generaliza de manera natural a problemas no lineales, utilizando una aproximación tangente.
Se propone, además, un método de análisis del estimador basado en estudiar su comportamiento frente a un error aleatorio.
El estimador se aplica en procesos de remallado adaptable. En este contexto se presenta una visión unificada de las diferentes estrategias de remallado que permite, además, introducir un nuevo criterio de remallado.
El estimador que se ha presentado se basa en cálculos locales y, por tanto, no permite captar el error de contaminación. A partir de este estimador local se presenta, además, un método de estima global que permite mejorar la aproximación al error teniendo en cuenta los efectos de contaminación.

DINÁMICA EN DIMENSIÓN INFINITA: MODELOS DE CAMPOS DE FASE Y UN TERMOSIFÓN CERRADO

Doctorando: Angela Jiménez Casas.
Director/es: Aníbal Rodríguez Bernal.
Defensa: 12 de diciembre de 1996, Universidad Complutense de Madrid.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En esta memoria se estudian dos modelos diferentes de sistemas dinámicos en dimensión infinita, representados por dos sistemas acoplados de ecuaciones en derivadas parciales semilineales.
El primer modelo denominado **Modelo de campos de fase** rige las transiciones de fases en las que se considera una región de interfase plana. Se obtienen resultados de existencia y unicidad de soluciones considerando una no linealidad dada por una función regular más general y partiendo de datos iniciales en otros espacios topólogicos distintos de los tratados en la literatura existente.
Se prueba la existencia de un atractor global, compacto y conexo para las soluciones del sistema en estos espacios utilizando la teoría de operadores disipativos de J.K. Hale, 1989.
Se estudia también la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio probando que dicha estabilidad es independiente de la temperatura. Finalmente, estudiamos el comportamiento de las soluciones del sistema, cuando el espesor de la interfase, tiende a cero. En este sentido se prueba la existencia de soluciones **metaestables**, que sin ser estacionarias, persisten por un largo período de tiempo, para valores pequeños de este espesor.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº10 (1997) 29-36

El segundo es un modelo de flujo en un **Termosifón con efecto Soret**, que consiste en un dispositivo formado por un circuito cerrado por el que circula un fluido binario a temperatura variable. Se prueba la existencia de una única solución, para datos iniciales de velocidad, temperatura y salinidad en un espacio de fases muy general, que depende de las propiedades de las funciones que representan la geometría del circuito y la temperatura ambiente. También se prueba la existencia de un atractor maximal y una variedad inercial para el flujo generado por las soluciones del sistema.

MÉTODO DE GAUSS PARA EL CÁLCULO DE LAS PERTURBACIONES SECULARES PRODUCIDAS POR UN TERCER CUERPO

Doctorando: Fernando Belizón Rodríguez.
Director/es: Alberto José Abad Medina.
Defensa: 15 de febrero de 1997, Universidad de Zaragoza.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: El problema de la perturbación producida por un tercer cuerpo es un problema clásico de la Mecánica Celeste. Su tratamiento desde el punto de vista analítico es difícil debido a que la perturbación depende explícitamente del tiempo.
Históricamente encontramos dos aproximaciones distintas a este problema. Por un lado, la más clásica está basada en el desarrollo del potencial en potencias de la razón de masas de los cuerpos o la razón de semiejes, dependiendo del tipo de restricción del problema. La otra aproximación es menos usada y proviene de Gauss, quién propone sustituir la atracción del tercer cuerpo por la de un anillo elíptico infinitesimal cuya densidad es proporcional al tiempo necesario para que el tercer cuerpo describa el elemento de línea. En la presente memoria se aborda un estudio exhaustivo de este segundo tratamiento del problema.
Se presentan dos soluciones distintas a este problema. En primer lugar se obtiene una expresión púramente analítica de la fuerza de atracción para cualquier tipo de excentricidad del anillo de Gauss. En segundo lugar, con objeto de poder aplicar el modelo de Gauss en problemas basados en la dinámica hamiltoniana, se obtiene el potencial de atracción aunque, en este caso, únicamente para valores pequeños de la excentricidad del anillo. Esta hipótesis se adapta a muchos de los problemas reales a los que dicho modelo puede ser aplicado, entre ellos, el modelo de perturbación luni-solar del satélite artificial.
Para conocer las condiciones de aplicabilidad del modelo de Gauss se ha procedido a realizar un estudio numérico exhaustivo del mismo, para diferentes conjuntos de casos teóricos, que abarcan una gran diversidad de situaciones, similares a los casos que se presentarán en la realidad. En dicho estudio se compara mediante una integración numérica por un método Runge–Kutta el modelo de tres cuerpos y el modelo de Gauss con las expresiones de la fuerza y potencial obtenidas por nosotros.
Por último, se aplica el método a una serie de problemas reales: La acción que Júpiter ejerce sobre la órbita del asteroide Ceres, la evolución secular de la órbita interior de la estrella triple ADS 440 y la perturbación luni-solar del satélite artificial terrestre considerando dos problemas. En el último caso se obtiene la evolución orbital para un satélite tipo GPS, considerado un modelo con el término J_2 y la perturbación luni-solar y se analiza la separación, que la perturbación luni-solar produce en un satélite geoestacionario, con respecto a su posición geográfica nominal.