sumario

edición

Imprime: COMETA, S.A., carretera de Castellón, km. 3,400. 50013 Zaragoza
Dirección editorial: Departamento de Matemática Aplicada, Edificio de Matemáticas, primera planta, Campus Universitario, 50009 Zaragoza.
e-mail: `sema@cc.unizar.es` Teléfono: (976) 35 66 17. Fax: (976) 35 62 44

INFORME DEL PRESIDENTE

Con el relevo de parte de los cargos directivos, producidos tras las elecciones celebradas en la Asamblea General de Sevilla, SEMA da un paso más en su normal funcionamiento y renueva su vitalidad con la incorporación de Tomás Chacón, Gerard Gómez y Juan Luis Vázquez al Consejo Ejecutivo. Una vez más reiteramos nuestro agradecimiento a los tres miembros salientes, Amable Liñán, Joan Solá-Morales y Antonio Valle, pertenecientes en su día a la Comisión Gestora de SEMA. Ante todo, permitidme que aproveche esta ocasión para agradeceros la confianza que depositasteis en mí, primero para el Consejo Ejecutivo y ahora para la Presidencia de SEMA. Me esforzaré en ejercer estas funciones siguiendo el ejemplo de mi predecesor Antonio Valle. Creo ser fiel al sentimiento de todos nosotros al manifestarle nuestro más sincero agradecimiento por la labor realizada al frente de la sociedad y las muchas energías dedicadas a dar cuerpo a un proyecto inicial que hoy es una realidad rica y viva.

Para recorrer esta nueva andadura cuento con la colaboración directa de Jesús Sanz Serna y Gerard Gómez, en calidad de Vicepresidente y Secretario respectivamente, y la participación del Consejo Ejecutivo que aprobó dichos nombramientos en su reunión de 21 de Octubre.

Abordamos el curso 1994/1995 con nuevos retos e ilusiones. El próximo CEDYA (el XIV de la serie), a celebrar en Vic, inaugura un modelo de congreso en el que SEMA desempeña un papel muy activo, iniciado ya con el proceso de asignación de la sede. La reducción de la cuota de inscripción a los socios de SEMA y el ingreso en la Sociedad (hasta final de 1995) a que dará lugar la inscripción en el CEDYA se asemejan a prácticas comunes de congresos similares de otros países y ha mostrado ser muy útil para consolidar las sociedades al aumentar con ello su base social. En el seno del CEDYA se celebrará la Asamblea anual correspondiente. Además SEMA organizará una serie de Jornadas Industriales Monográficas que pretenden potenciar los contactos con la industria. Junto a la aportación de una cantidad simbólica (250.000 pts) al presupuesto del CEDYA, SEMA contribuirá a la organización del congreso mediante la cesión de su base de datos, difusión de la convocatoria y cuantos asesoramientos le sean requeridos por el Comité Organizador.

Otra novedad radica en el equipo encargado de elaborar el Boletín de SEMA. Tras la edición del número cero por un grupo de personas de la Universidad de Valladolid capitaneado por Jesús Sanz Serna, los Boletines aparecidos fueron elaborados por un equipo de personas bajo la tutela de Antonio Valle. Gracias al generoso (y casi anónimo) esfuerzo de ese equipo, el Boletín posee hoy día una estructura consolidada que hacen de él una de las actividades más valiosas de nuestra sociedad. Vaya desde aquí nuestro agradecimiento. Recientemente este grupo manifestó su deseo de ser relevado en esas tareas por lo que el Consejo Ejecutivo realizó un rápido sondeo entre los colectivos de socios más numerosos. La consulta dio su fruto y en su reunión de 21 de Octubre el Consejo Ejecutivo acordó aceptar el ofrecimiento de un grupo de profesores de la Universidad de Zaragoza, creándose la figura de Editor Jefe responsable del equipo encargado de la edición. Para tal cargo se nombró a Francisco Lisbona por un periodo de dos años. En números sucesivos será él quien abra las páginas del Boletín como último responsable del mismo. Todos le deseamos el mejor de los éxitos y le ofrecemos lo que de útil tenga nuestra colaboración.

La Sociedad tiene también una renovada preocupación por abrirse a las personas más jovenes interesadas en la Matemática Aplicada. Así, en la última Asamblea General se acordó potenciar la figura de Socio Estudiante contemplada en los Estatutos para alumnos matriculados en alguno de los tres ciclos de enseñanza universitaria y cuya cuota para 1995 se fijó en 2.500 pesetas. Simultáneamente, el Consejo Ejecutivo acordó abrir un capítulo en el Presupuesto de 1995 en el que la subvención a la organización de reuniones en el ámbito científico de la Matemática Aplicada se canaliza a través de la concesión de becas de asistencia. En el próximo Boletín se hará público el procedimiento de solicitud y resolución de tales ayudas. Mientras tanto las personas interesadas pueden hacer llegar su petición a la sede de la Sociedad mediante un escrito pormenorizando los detalles. En la actualidad, el montante real de ese capítulo depende de los ingresos de la sociedad que se nutre exclusivamente del pago de las cuotas de los socios de SEMA.

También vemos con ilusión los distintos contactos ya establecidos con sociedades similares de otros países y que esperamos se plasmen en futuros acuerdos de reciprocidad, organización común de congresos, publicaciones conjuntas, etc. La celebración en Hamburgo, el próximo mes de Julio, de la Third International Conference on Industrial and Applied Mathematics, en cuyo seno será debatida la solicitud de SEMA de entrar en el consorcio de sociedades constituido por el organismo CICIAM, marca otra fecha distinguida del presente curso académico.

Los contactos con la industria en nuestro país están aún en una fase incipiente, pues si bien ya existen grupos con contratos concretos, este acercamiento es aún mucho más pobre de lo que es práctica habitual en otros países. Es claro que la ruptura de esas barreras invisibles no será tarea de unos pocos años pero esto no obsta para que figure entre los retos a lograr en un próximo futuro. En este sentido, se tiene la intención de establecer contactos con algunas industrias con unidades de investigación y estimular su participación con nuestra Sociedad.

Finalmente, me gustaría utilizar esta oportunidad para invitar a todos los socios de SEMA a una participación activa en la Sociedad, sugiriendo nuevas ideas y mejoras, asistiendo a la Asamblea General, difundiendo los fines y actividades de la Sociedad, sufragando las cuotas, actualizando la base de datos, etc. Sólo si nos mentalizamos de que esto no es tarea de unos pocos, de que lo conseguido es fácilmente mejorable, podremos hacer este proyecto perdurable y útil.

J.I.Díaz, Presidente de SEMA

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 5-8

OPINIÓN

EL COMPLEMENTO DE PRODUCTIVIDAD A DEBATE

EDUARDO CASAS RENTERÍA
DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA Y C.C.
E.T.S.I. INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, 39071 SANTANDER
y
TOMÁS CHACÓN REBOLLO
DPTO. DE ANÁLISIS NUMÉRICO Y ECUACIONES FUNCIONALES
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA, 41012 SEVILLA

Un año más, la adjudicación de *Complementos de Productividad* (los famosos "tramos de investigación") ha vuelto a producir cierta inquietud entre no pocos miembros de la comunidad matemática. De nuevo asistimos a la denegación de tramos por no haberse alcanzado la puntuación necesaria para su obtención. Pero la pregunta que se hacen los afectados (tanto aquéllos que superan la evaluación como los que no lo hacen) es: ¿De qué forma se obtienen los puntos?

Hace ya 5 años que este complemento de productividad comenzó a adjudicarse, de modo que la experiencia adquirida durante este tiempo permite realizar un balance con cierta perspectiva y garantías de objetividad.

La adjudicación de uno o varios tramos ha supuesto para muchos profesores no solamente un incremento de salario, sino también un reconocimiento de una labor de calidad, así como un estímulo a seguir desarrollándola de la misma forma. Sin embargo, la denegación de los mismos ha supuesto para otros muchos un elemento de discriminación y desánimo al considerarse tratados de forma injusta. Creemos que existe un importante elemento de inseguridad provocado por la falta de transparencia en los criterios seguidos.

Ello redunda en este sentimiento de injusticia al que antes aludíamos, que podría ser evitado si se siguiese un baremo objetivo y computable por los propios interesados. La existencia de tal clase de baremo no es algo insólito en la Eduación. De hecho, existe un complemento de productividad entre los profesores de enseñanza primaria y secundaria cuya concesión depende de una puntuación totalmente objetivable.

Creemos de interés promover un debate sobre este tema entre los asociados a SEMA, y estamos abiertos a sugerencias tanto sobre experiencias como análisis personales sobre el tema, así como sobre el posible papel de SEMA como asociación. A tal efecto conviene recordar el Artículo 3.5 de nuestros estatutos, que señala como uno de los fines de la Asociación

> Influir en la orientación de la política educativa y de investigación, haciendo llegar la opinión de los miembros de la Asociación a las instancias competentes.

Para iniciar el debate, vamos a plantear algunos puntos de discusión. En primer lugar señalar que, en nuestra opinión, la idea de introducir un complemento de productividad nos parece acertada y estamos de acuerdo con el espíritu del Real Decreto 1086/1989, de 28 de agosto, sobre retribuciones del profesorado universitario, cuando precisa:

> La rígida aplicación del criterio de igualdad retributiva por Cuerpos constituye un límite para la consecución de uno de los objetivos básicos de todo sistema retributivo consistente en ser un mecanismo para reconocer los especiales méritos en la actividad desarrollada e incentivar el ejercicio de la misma.

Sin embargo, no estamos de acuerdo con el mecanismo seguido para poner en práctica tal principio. Nuestra crítica se centra en los siguientes puntos:

Ausencia de Transparencia

Esto está relacionado con la pregunta que nos hacíamos al comienzo del artículo. No sabemos cuántos artículos necesitamos escribir; en qué revistas debemos publicarlos; si la participación en congresos o la dirección de

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 5-8

tesis doctorales tiene algún valor; si participar en/o dirigir proyectos de investigación supone alguna puntuación; etc. Consideramos que se debe precisar qué actividades contribuyen a una positiva evaluación y cuántos puntos pueden obtenerse por cada una de ellas. Obviamente nos referimos aquí a las actividades que las comisiones evaluadoras consideran merecedoras de una puntuación, lo cual no parece ser coincidente con los criterios específicos de evaluación enunciados en la Orden de 5 de febrero de 1990, que desarrolla el Real Decreto 1086/1989, de 28 de agosto.

También es importante precisar las revistas científicas que se consideren de "calidad" y cuántos puntos proporciona un artículo en cada una de ellas. ¿Qué es una revista de calidad para la Comisión Nacional de Evaluación?, aquellas que poseen un buen comité editorial, las que tienen un índice de impacto alto (¿qué altura?), las que tienen una larga tradición matemática ... ¿Qué sucede con las revistas de nueva creación?.

Criterios Variables

Es nuestra impresión que los criterios de evaluación son variables de un año a otro, apareciendo ligados a los profesores concretos que en un momento dado forman parte de las comisiones adjudicadoras. Esto provoca agravios comparativos entre las personas evaluadas en función del momento y del área concretos en que solicitan ser evaluados. También puede conllevar efectos perniciosos para los evaluadores y, eventualmente, para colaboradores suyos. No se trata aquí de un planteamiento hipotético, ya que nos consta que tales efectos ya se han producido en algún caso.

Consideramos que no solamente deben elaborarse unos criterios claros de evaluación, sino que además la modificación de los mismos no debe tener efectos retroactivos negativos. Más precisamente, si un profesor trabaja durante 4 o 5 años siguiendo una linea marcada por los criterios de evaluación (que, en definitva, definen una política de investigación), no se pueden cambiar los criterios el quinto o sexto año provocando con ello un cambio de signo en la evaluación del supuesto profesor.

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 5-8

Agravios Comparativos con Otros Campos Científicos

De todos es conocido las grandes diferencias que se han producido en la adjudicación de los tramos entre unos campos científicos y otros. Se han dado grandes desajustes, variando el porcentaje de tramos adjudicados de un 50 a un 90 por ciento, aproximadamente. En general, los campos con mayores índices de concesión están vinculados a áreas de conocimiento con mayor proyección social (Ciencias Biomédicas, Derecho y Jurisprudencia, Ingeniería y Arquitectura, ...), mientras que los menores índices se han correspondido con áreas de caracter mucho más académico. Esto nos parece altamente contradictorio con el espíritu de la ley.

Por otro lado, una de las consecuencias de estas diferencias por campos es que algunos de nuestros colegas matemáticos han pedido ser evaluados en campos científicos tales como Ingeniería y Arquitectura, Ciencias Económicas y Empresariales o Ciencias Sociales, Políticas, del Comportamiento y de la Educación (Didáctica de la Matemática), obteniendo una evaluación positiva. Se ha dado incluso la circunstancia de que el mismo tramo ha recibido valoración negativa en un campo y positiva en otro (tras el correspondiente recurso dirigido al segundo campo). Esto provoca un fuerte agravio comparativo, por cuanto que en ocasiones se puede tratar de profesores que conviven en un mismo departamento e incluso comparten área de conocimiento, con calidades de la labor investigadora inversamente proporcionales a la puntuación obtenida en la evaluación.

En fin, creemos que hemos introducido suficientes elementos para un debate, pero, sin duda, habrá algunos otros defectos de implementación del sistema de evaluación que se han quedado en el tintero. Os animamos a intervenir en este debate y a expresar vuestra opinión, ya sea a modo de artículo o de carta dirigida al editor.

Es intención de los editores que a partir del próximo número del boletín aparezca una sección de *Cartas al editor*. Las contribuciones deben ser enviadas a `sema@cc.unizar.es` preferiblemente en formato Plain TeX (o como texto ASCII), sin superar las 25 líneas.

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 9-23

MATHEMATICS FOR INDUSTRY: SOME PROBLEMS SOLVED BY THE RESEARCH GROUP IN FLORENCE

ANTONIO FASANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA U. DINI
UNIVERSITÀ DI FIRENZE, VIALE MORGAGNI 67/A, FIRENZE, ITALY

1. Introduction

In this report I wish to illustrate very briefly the kind of work performed by the research group of the Mathematical Department U. Dini of the University of Florence in cooperation with industrial companies.

In reviewing the work done during the last six or seven years I realize that we have followed a few basic principles, inspired to the fact that an academic group (notably in a mathematical department) is definitely different from a consulting enterprise.

First of all we prefer to select long term projects, containing a substantial part of mathematical modelling. Typically a good project deals with some complex and non-standard phenomena, involving the organization of a large experimental work to be carried out in the companies laboratories in order to obtain the relevant data, leading through successive steps to the formulation of a reasonable mathematical model and to the identification of the important parameters.

The reason of this choice lies not only in the intrinsic scientific interest offered by a rather broad topic, but also in the possibility of developing new classes of mathematical problems, far beyond the specific objectives pursued by the companies.

Another nontrivial consequence is that some of the material produced in the framework of a research of such a complexity can often be organized in a form suitable for classes to undergraduate or graduate students having a sufficient background in differential equations and functional analysis. In other words, it is possible to teach industrial mathematics through examples taken from real problems, illustrating the various stages of the mathematical modelling and of the theoretical and practical implications.

A selection of topics from industrial applications of mathematics has proved to be attractive for the students in our Department. In what follows I will try to summarize three large projects on which our group has been working during the last few years and that have been particularly successful.

Before passing to the technical part of the paper, let me recall that in many cases we have cooperated very tightly with other groups in Italy and abroad. Such cooperation has been favoured by the presence of ECMI (the European Consortium for Mathematics in Industry), where we found practical support and a good ground of discussion with experts in various fields. The successful application of ECMI for an EEC grant in the framework of the HCM Programme (Mathematics as an Industry Resource), lead to the constitution of a European network which is a very effective tool for promoting more contracts between industrial companies and university mathematicians. Still at the European level our group participates in the HCM Project "Singularities and Interfaces" and in the ESF Programme "Mathematical Treatment of Free Boundary Problems". We have several contracts with Italian and foreign Industries and Laboratories . I also want to mention our participation in the Project "Mathematical Methods for Advanced Technologies and Materials" of the Italian CNR.

I. Pipelining of coal-water slurries (CWS).

1. Stress induced rheological degeneration.

A CWS is a highly concentrated suspension of finely ground coal particles and of water (roughly speaking the weight proportion is 70% of coal and 30% of water). This mixture is fluidized by adding a small amount ($\simeq 1\%$) of suitable chemical substances, whose molecules are designed in such a way to be adsorbed at the coal particle surface, which acquires a positive charge, due to the polarity of the attached molecules. The fluidizing action is resulting from Coulomb repulsion. A CWS can be transported through pipelines and can be used as a fuel as such, with no previous treatment.

A well prepared CWS is very stable at rest, in the sense that it maintains a uniform density and that basically no sedimentation of impurities can be observed. The rheological properties of the system remain constant in time. It is however a peculiar behaviour of a CWS that under stress conditions after some time the system progressively loses its ability to flow, until it becomes impossible to pump it through a pipeline.

This was a strong motivation for Snamproggetti, an Italian Company that constructed the first pipeline (so far the only one existing) for transporting high density CWS, to undertake a large scale research on the subject. The pipeline is 400 km long and is operating in central Siberia.

The data from Snamproggetti's laboratories pointed out the following features.

(i) Keeping the strain rate $\dot{\gamma}$ constant, the stress (i.e. the stress at the wall) first decreases, then remains constant for some time and eventually it increases exponentially,

(ii) the process is accelerated by increasing $\dot{\gamma}$,

(iii) the time elapsed before the exponential increase (the rheological degradation) for a given $\dot{\gamma}$ increases if the amount of additive is increased,

(iv) the final stage (degradation) can be described by a curve independent of $\dot{\gamma}$ if the data are plotted not versus time, but versus the overall energy dissipated within the flow.

A mathematical model accounting for these experimental facts is described in [13]. The following symbols are used.

$A =$ concentration of additive in the solution,

$B =$ concentration of additive forming the positively charged coating,

$Y =$ concentration of positive ions adsorbed on the coal particles,

$\Sigma =$ specific number of sites on the coal particles capable of adsorbing either additive molecules or ions dissolved in the sorrounding liquid.

The microscopic dynamics is described by the following system of o.d.e.'s (we are considering a spatially homogeneous system)

$$\dot{B} = \mu_1 A(\Sigma - B - Y) - \mu_2 B, \tag{1.1}$$

$$\dot{Y} = \delta_1 (I - Y)(\Sigma - B - Y) - \delta_2 Y, \tag{1.2}$$

$$\dot{\Sigma} = \lambda_1(W)(\Sigma_{\max} - \Sigma) - \lambda_2(\Sigma - \Sigma_{\min}), \tag{1.3}$$

$$\dot{A} = -\dot{B} - \nu(W) A (Y + Y_I). \tag{1.4}$$

The first equation governs the reversible reaction $A \rightleftarrows B$ (note that $\Sigma - B - Y$ represents the specific number of available active sites), the second equation deals with the ion sorption-desorption phenomenon (I is the total ions concentration), equation (1.3) describes the fragmentation and recombination of clusters of coal particles, which affects the number of active sites during the process, the last equation is the one responsible for degradation and is associated to the process of stress-induced irreversible capture of additive molecules by the sites occupied by an ion (Y_I is the concentration of adsorbed ions that for any reason, e.g. the presence of impurities, do not undergo the sorption-desorption process).

It is important to remark that the irreversible capture rate coefficient $\nu(W)$ (eventually responsible for the rheological degradation) depends on the power dissipated in the flow, as well as the fragmentation rate coefficient $\lambda_1(W)$.

The system above contains several coefficients, most of which can be identified in a simple way by studying equilibrium states corresponding to different values of the percentage of additive. As we have pointed out, the coupling of (1.1)-(1.4) to the flow occurs through the coefficients $\lambda_1(W)$, $\nu(W)$. At this point the specific rheological model of the system comes into play.

Experiments indicate that a CWS can be reasonably considered a Bingham fluid. However a simple model can be based on the so-called apparent viscosity (proportional to the measured wall stress). Relating this physical parameter to the concentration B via the equation

$$\eta = \eta_0 \exp\left[(B_{\text{eq}} - B)/\Theta_s\right] \tag{1.5}$$

where η_0, B_{eq} are the equilibrium value at rest and Θ_s is to be chosen appropriately, the experimental curves were fitted with very good accuracy.

The theory above was perfectly satisfactory to the company. In addition several interesting problems can be studied. For instance in [21] it was proved the well-posedness of a problem describing the flow of a fluid between two parallel plates obeying Navier-Stokes equation with a viscosity evolving according to the law

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \alpha W, \tag{1.6}$$

where again W is the dissipated power and α is a positive constant.

In [17] it was considered the problem of a Bingham fluid flowing in a loop (like the one on which Snamproggetti performed a series of experiments). The Bingham fluid has a constitutive equation of the type

$$\tau = \tau_0 + \eta_B \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|$$

(τ_0 yield stress, η_B Bingham viscosity, v velocity, r radial coordinate in the pipe) and τ_0 is subject to the evolution law

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial t} = \alpha W, \tag{1.7}$$

while η_B remains constant (this seems to be the actual behaviour of a CWS). Assuming the velocity profile to be quasi-steady, it has been shown that many different situations can occur, including the appearance of a rigid layer at the wall and the finite time extinction of the flow.

Another interesting problem suggested by the viscosity measurement procedure used for CWS is the general question of the behaviour of Bingham fluids subject to rotational stress. Such a problem has been studied in [9] and exhibits remarkable features (obstacles, need of regularization, etc.).

The two-dimensional problem of the flow of a CWS pumped from a reservoir in the pipeline remains open. However the full problem is not of relevant practical interest, due to the established fact that the time scale for rheological degradation is much larger than the transit time between two pumping stations. Also the question of the appropriate boundary conditions at the pipe wall has not been investigated completely.

2. Sedimentation in a CWS transported through a pipeline.

Any CWS contains solid impurities that are stable at rest, due to the internal structure of the system (i.e. to the presence of an yield stress). However, since the impurities are not modified by the additive, sedimentation is started when the internal links of the CWS are broken by a sufficiently high stress. Fields experiments have proven the practical importance of this phenomenon.

Sedimentation in non-Newtonian fluids is a subject not widely studied (see [10] for references).

In [10] we formulated the assumption that for a spherical particle with radius r the settling velocity has the expression

$$v_s = \alpha r(r - R_0)_+, \tag{2.1}$$

where $(\cdot)_+$ denotes the positive part and R_0 is a threshold value. Both α and R_0 depend on $\dot{\gamma}$.

We planned a series of experiments in a spinning viscometer which lead to the determination of the function $\alpha(\dot{\gamma})$ for a typical CWS, showing at the same time that R_0 is negligible for practical purposes.

Using this result, the actual sedimentation process in a pipeline carrying a Bingham fluid has been studied (see [11]). The problem is complicated by the fact that the settling particles experience variable $\dot{\gamma}$ along their trajectories. For each cross section of the pipeline it has been calculated the curve Γ of the entrance points for the particles of given radius ending their fall at the chosen cross section. Then it has been shown that the local sedimentation rate per unit time and unit length of the pipe is given by

$$S(x) = \int_{\Gamma(x)} v_s \, dy, \tag{2.2}$$

x being the coordinate along the pipe and y the horizontal radial coordinate. Equation (2.2) allows to calculate the sedimentation rate due to the entire population of impurities. After introducing some simplifying assumptions about the shape of the sediment and the rate at which it is transported by the main flow, the evolution equation for the transport profile has been written as a degenerate parabolic equation and the expression of the asymptotic profile has been determined. Denoting by $h(x)$ the asymptotic thickness of the sediment profile, the final result is

$$h(x) = \left(\frac{\xi}{Q} \int_0^x S_T(y)\, dy \right)^{1/2} \tag{2.3}$$

where ξ is a physical constant, Q the discharge of the main flow (which is supposed not to be substantially perturbed by the sediment), and $S_T(x)$ is the total sedimentation rate per unit lenght of the pipe.

II. Solidification of polymers.

1. Macroscopic models.

It is extremely hard to summarize this highly complex phenomenon, characterized by two main features:

(i) crystals can be formed in a temperature interval (T_g, T_m) depending on the polymer. T_m is the melting point (for $T > T_m$ the system is liquid), while below T_g the system acquires infinite viscosity, the crystallization process is stopped and no latent heat is released (T_g is called the glassy transition temperature),

(ii) in the crystallization range (T_g, T_m) the nucleation rate and crystal growth depend in a sensitive way on temperature,

(iii) the range (T_g, T_m) depends on pressure,

(iv) the crystals have a lamellar structure with an amorphous component in between (they are called spherulites) which can in turn undergo a partial crystallization (secondary crystallization),

(v) after melting, a successive cooling process may show that the system keeps memory of the previous location of the crystals, in the sense that this may be a favourite site for nucleation.

Clearly, a complete description of the process, possibly including the fluid dynamical aspects like in the injection mould problem, is not feasible, although a considerable progress has been made in understanding the basic mechanisms.

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 9-23

Crystal growth and nucleation are limited by the presence of the already formed crystals and by the fact that the less crystallizable component of the polymer tend to be segregated in the residual liquid phase.

For a review of the existing macroscopic models we refer to [12]. Here we confine ourselves to recalling the model proposed in [1] and based on the assumption that at each point the nucleation rate $\dot{N}$ and the crystal growth rate $\dot{R}$ can be expressed by

$$\dot{N} = \dot{N}_0\Big(1 - \frac{w}{w_m}\Big)^p, \tag{1.1}$$

$$\dot{R} = \dot{R}_0\Big(1 - \frac{w}{w_m}\Big)^q, \tag{1.2}$$

where $\dot{N}_0$ and $\dot{R}_0$ are bell-shaped functions of the temperature vanishing outside (T_g, T_m), while the exponents p and q are positive (typically $p = 1$ and q ranging between 0.7 to 1.25). The quantity w is the volume fraction occupied by crystals and w_m is the maximum attainable value for w (possibly depending on temperature). We are supposing that the pressure is constant.

This model reproduces with good accuracy the experimental data for isothermal crystallization (courtesy of HIMONT-Italia) and gives equivalent results as other classical isothermal models. The advantage of system (1.1), (1.2) is that it provides a much more flexible tool to deal with non-isothermal processes, in addition predicting the density and size distribution of crystals. The non-isothermal model based on (1.1), (1.2) takes the form

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{4}{3}\pi r_0^3(T)\dot{N}_0(T)\Big(1 - \frac{w}{w_m}\Big)^p + \tag{1.3}$$

$$4\pi\dot{R}_0(T)\Big(1 - \frac{w}{w_m}\Big)^q \int_0^t \dot{N}_0(T(x,\tau))\Big(1 - \frac{w(x,\tau)}{w_m}\Big)^p \rho^2(t,\tau,x)\,dx,$$

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla T) + L\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.4}$$

where r_0 is the radius of the nuclei, c is the thermal capacity, k the thermal conductivity, L the latent heat, and $\rho(t,\tau,x)$ is the radius of an equivalent crystal (ideally representing a spherulite) born at the time instant τ and developed up to the time instant t, i.e.

$$\rho(t,\tau,x) = r_0(T(x,t) + \int_\tau^t \dot{R}_0(T(x,s))\Big(1 - \frac{w(x,s)}{w_m}\Big)^q ds. \tag{1.5}$$

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 9-23

Well-posedness of the corresponding initial-boundary value problem has been proved in [1]. A convergent numerical procedure has been developed in [2].

A critical review of the existing non-isothermal models with particular reference to the well-known and widely used Scheil's rule can be found in [15], where the existence of traveling wave solutions for a particular class of processes is discussed.

A probabilistic approach supporting (1.1), (1.2), on the style of a celebrated paper by Kolmogorov [19], is described in [6], [7], [8].

2. A microscopic model for nucleation.

Following the point of view of [23], in the liquid phase at a given temperature segments of molecules organize themselves in specific patterns forming "clusters" or "germs" which may then dissolve or grow up to becoming real nuclei. Therefore at a given point x we can introduce distribution function $f(g,t,x)$ of the time t and of a "cluster size" coordinate g such that $f\,dg$ represents the density of clusters with volume between g and $g+dg$. The coordinate g is normalized so that the size of the smallest cluster corresponds to $g=1$. Assuming that the concentration of such elements is so large to be considered constant during a nucleation process, the function f can be normalized in such a way that

$$f(1,t,x)=1, \qquad \lim_{g\to+\infty} f(g,t,x)=0. \tag{2.1}$$

The time evolution of the function f is driven by the free energy

$$\Delta F(g,T)=a(T)g^{2/3}+b(T)g, \tag{2.2}$$

the two terms representing the surface and the volume contributions, respectively. While $a(T)$ is positive for all temperatures, the coefficient $b(T)$ is positive for $T>T_m$ and negative for $T<T_m$. Thus $\dfrac{\partial \Delta F}{\partial g}$ is positive for any $g\geq 1$ when $T>T_m$ and vanishes at some $g_*(T)$ for $T<T_m$. The decreasing branch of ΔF corresponds to the values of g for which the growth of the cluster is favoured.

The cluster dynamics is then governed by the evolution equation for f

$$\frac{\partial f}{\partial t}=cTe^{-\epsilon/T}\frac{\partial}{\partial g}\Big[g^{2/3}\Big(\frac{\partial f}{\partial g}+A(g,T)f\Big)\Big], \tag{2.3}$$

where c, ϵ are positive constants and

$$A(g,T) = \frac{c_1}{T}\frac{\partial}{\partial g}\Delta F. \tag{2.4}$$

Equation (2.3) is a consequence of the assumption that the quantity

$$J = cTe^{-\epsilon/T}g^{2/3}\Big(\frac{\partial f}{\partial g} + A(g,T)f\Big) \tag{2.5}$$

plays the role of the cluster flux in the g-space. This expression of the flux is conceived in such a way that f is a Maxwell-Boltzmann distribution at equilibrium.

For $T < T_m$ we can consider that a cluster behaves like a nucleous if its size is beyond the maximum point $g^*(T)$ of ΔF. Therefore we can define the nucleation rate as

$$\dot{N}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{g^*(T)}^{+\infty} f(g,t,x)\,dg. \tag{2.6}$$

Hence (2.6) replaces (1.1) and (1.3) is modified accordingly. Clearly the Fokker-Planck equation (2.3) is coupled with the thermal field and requires an initial condition

$$f(g,0,x) = f_0(g,x), \tag{2.7}$$

besides the boundary conditions (2.1) in the g-space. It is understandable that this model can interpret memory effects by predicting the behaviour of f in a melting-cooling cycle.

The model is described in [4]. More papers about qualitative properties and numerical solutions are in preparation.

III. The espresso coffee problem.

1. The basic model.

Illycaffè s.p.a. (an Italian firm based in Trieste) asked our group in Florence to produce a mathematical model describing the chemical and mechanical phenomena occurring in the ground coffee layer during coffee brewing in an espresso coffee machine, i.e. a filtration-extraction process occurring at high temperature ($95\,°C$) and under high pressure (9 bars) (see [20] for a general description).

We planned a first series of experiments to be performed at the company's laboratories, using water at $4\,°C$, in order to eliminate all the chemical effects. The results showed that the system was behaving in a way very far from the classical Darcy's law (see e.g. [5]). Namely, two phenomena were observed:

(i) for a given applied constant pressure p_0 the volumetric velocity (discharge) is not a constant, but decays exponentially with time, tending to an asymptotic value q_∞,

(ii) q_∞ does not depend monotonically on p_0.

This nonlinear behaviour has been explained in terms of two fact:

(a) flow-induced non-elastic deformations of the porous medium,

(b) removal of a fine component of the porous matrix and accumulation of the particles transported towards the outflow surface.

The effect of (b) is that until the flow carries solid particles, a layer of low hydraulic conductivity keeps growing with a large influence on the flow.

For the sake of brevity we confine ourselves to describing a model taking into account (b) and reducing (a) to the dependence of the hydraulic conductivity k on the concentration of bound solid particles (denoted by b) and of mobile solid particles (denoted by m).

The model is fully described in [16] and using non- dimensional normalized variables it consists of the following equations

$$(1.1)\qquad \frac{\partial m}{\partial t} + \mu q(t)\frac{\partial m}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial t}, \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0,$$

$$(1.2)\qquad \frac{\partial b}{\partial t} = -q(t)[b - \beta(q)]_+, \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0,$$

$$(1.3)\qquad q(t) = -K(b,m)\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0,$$

$$(1.4)\qquad q(t) = -K_c\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad s(t) < x < 1,\ t > 0,$$

$$(1.5)\qquad \dot{s}(t) = -\frac{\mu q(t) m(s(t),t)}{M - b(s(t),t) - m(s(t),t)}, \qquad t > 0,$$

Bol. Soc.Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 9-23

plus the continuity of pressure at the free boundary and normalized initial and boundary conditions

(1.6) $s(0) = 1,$

(1.7) $m(x,0) = m_0 \geq 0 \qquad b(x,0) = 1, \qquad 0 < x < 1,$

(1.8) $p(0,t) = 1, \qquad t > 0,$

(1.9) $m(0,t) = 0, \qquad t > 0.$

Here $K_c \ll K$ is the hydraulic conductivity of the compact layer, M is the density of the fine component in it, and p is the rescaled pressure. The first equation describes the convective transport of the particles, whose velocity is proportional to $q(t)$. The volumetric velocity $q(t)$ depends on time only because the fluid is incompressible and the change of porosity is neglected. Equation (1.2) is the particle release equation, in which the removal rate is proportional to the flux intensity and to the excess of the bound particle concentration b w.r.t. a threshold value $\beta(q)$, which decreases with q. The meaning of the threshold is that the population of removable particle depends on the intensity of the flow. As we shall see, the presence of the threshold plays an important role in the model. The last equation needing an explanation is (1.5), which expresses the mass balance of the moving particles at the free boundary, i.e. at the boundary of the compact layer.

The model above has been thoughrouly investigated in [16] and it has been proved that $q(t)$ decreases to a limit which indeed may not be a monotone function of the external pressure. The necessary condition for the nonmonotonicity to occur is that the removal process is switched off in a finite time. Numerical examples (see [18]), how that this case can indeed be constructed.

2. A large field of investigation.

The success of the theory just illustrated suggested to reconsider the whole question of filtration processes accompanied by chemical or mechanical actions of the flow on the medium. We can list some phenomena which can be studied in the presence of chemical reactions (modifying the medium and the fluid) and of mechanical deformations (elastic, plastic, quasi-static, hysteretic, partially reversible, etc.):

1. Penetration fronts in dry media (extensions of the so-called Green-Ampt model).

2. Transport of solid components by the flow.

3. Transport of various chemical substances dissolved or produced by chemical reactions.

4. Propagation of reaction fronts and of extinction fronts.

5. Multiphase flows (miscible, partially miscible, immiscible).

This is an impressively wide research area, in which much has been done but not frequently considering the coupling among such phenomena and the resulting modification of the porous medium.

For instance the wetting front problem in which both the porosity and the hydraulic conductivity depend on the flux intensity is a very hard free boundary problem, partially solved in [22] by means of an intriguing fixed point argument.

Problem 3 has been considered with some generality in [14], including relaxation laws for the porosity and the hydraulic conductivity, but it has not been coupled with Problem 2. Likewise there are many different couplings not yet studied and having a remarkable physical interest.

References

[1] D. Andreucci, A. Fasano, and M. Primicerio. On a mathematical model for the crystallization of polymers. Proc. 4th ECMI Conference, H.J. Wacker, W. Zulehner eds., Teubner and Kluwer, 1991, 3–16.

[2] D. Andreucci, A. Fasano, M. Primicerio, M. Paolini, and C. Verdi. Numerical simulation of polymer crystallization. *Math. Models Meth. Appl. Sci.* **4**, (1994), 135–145.

[3] D. Andreucci, A. Fasano, M. Primicerio, and R. Ricci. Nucleation kinetics in variable thermal fields. Internal Report, 1994.

[4] D. Andreucci, A. Fasano, M. Primicerio, R. Ricci, and C. Verdi. Modelling nucleation in crystallization of polymers. In *Free Boundary Problems*. I.J. Diaz, M. Herrero, J.L. Vazquez eds. To appear.

[5] G. Baldini and M. Petracco. Models for water percolation during the preparation of expresso coffee. 7th ECMI Conference A. Fasano, M. Primicerio eds. (1994), 131–138.

[6] V. Capasso, M. De Giosa, A. Micheletti, R. Mininni. Statistics of spatially structured stochastic processes modeling crystallization of polymers. Proceedings of the 7th European Conf. of Math. in Ind., A. Fasano, M. Primicerio eds., B.G. Teubner, Stuttgart, 1994, 157–165.

[7] V. Capasso, A. Micheletti. Spatially structured stochastic processes modeling crystallization of polymers. Quad. 39/1994, Dip. Matematica, Milan Univ., 1994.

[8] V. Capasso, M. De Giosa, R. Mininni. Convergence theorems for maximum likelihood estimators of a spatial counting process. Stoch. An. and Appl. **13**. To appear.

[9] E. Comparini and E. De Angelis. Flow of a Bingham fluid in a concentric cylinder viscometer. *Adv. Math. Sc. Appl.* To appear.

[10] E. De Angelis, A. Fasano, M. Primicerio, and F. Rosso. Modeling sedimentation in CWS. In *Slurry Handling and Pipeline Transport*. C. Shook ed., Mech. Eng. Publications, London, 1993, 399–414.

[11] E. De Angelis, A. Fasano, M. Primicerio, F. Rosso, and E. Carniani. Sedimentation bed dynamics for fluids with yield stress in a pipe. Internal Report, 1994.

[12] A. Fasano. Modeling the solidification of polymers. ICIAM 91, R.E. O'Malley ed., SIAM Philadelphia, 1991, 99–118.

[13] A. Fasano, E. Manni, and M. Primicerio. Modelling the dynamics of fluidizing agents in coal-water slurries. In *Nonlinear Problems in Engineering and Science*. Shutie Xiao, Xian-Cheng Hu eds., Science Press, Beijing, 1991, 64–71.

[14] A. Fasano and M. Primicerio. Flows throgh saturated mass exchanging porous media under high pressure gradients. 2nd Eur. Conf. on Elliptic and Parabolic Problems, C. Bandle, J. Bebernes, M. Chipot eds. To appear.

[15] A. Fasano and M. Primicerio. On mathematical models for nucleation and crystal growth processes. In *Boundary Value Problems for P.D.E.'s and Applications*. J.L. Lions, C. Baiocchi eds., Masson, 1993, 351–358.

[16] A. Fasano and M. Primicerio. Mathematical models for filtration through porous media interacting with the flow. In *Nonlinear Mathematical Problems in Industry, I.* M. Kawarada, N. Kenmocki, N. Yanagilan eds., Math. Sci. & Appl. **1** Gakkotosho, Tokyo, 1993, 61–85.

[17] A. Fasano, M. Primicerio, and F. Rosso. On quasisteady axisymmetric flows of Bingham type with stress-induced degradation. *Computing* **49**, (1992), 213–237.

[18] A. Fasano, M. Primicerio, and A. Watts. On a filtration problem with flow-induced displacement of fine particles. In *Boundary Control and Boundary Variations* . (7th IFIP Conference), J.P. Zolesio ed. To appear.

[19] A.N. Kolmogorov. Statistical theory of crystallization of metals. *Bull. Acad. Sci. USSR Mat. Sci.,* **1**, (1937), 355–359.

[20] M. Petracco. Physico-chemical and structural characterization of espresso coffee brew. 13th Colloquiun ASIC, Paipa 1989, Pavia.

[21] M. Primicerio. Dynamics of slurries. Proc. 2nd Eur. Symp. Math. Ind., Neunzert ed., Kluwer Ac. Publ. (1987), 1–7.

[22] P. Tani. Wetting fronts in deformable porous media. To appear.

[23] A. Ziabicki. Generalized theory of nucleation kinetics I, II. *J. Chem. Phys.,* **48**, (1968), 4368–4380.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 24-30

SOBRE SATÉLITES ARTIFICIALES

Gerard Gómez
Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

He dudado bastante sobre el tono a darle a este artículo de encargo. Finalmente me he decidido por uno algo discursivo y de reflexión general que creo viene bien para un trabajo, también de encargo (y no sé si esto es un valor añadido), que venimos realizando desde hace ya más de 10 años un grupo de profesores de Universidades catalanas bajo la batuta, siempre maestra, del Profesor Carles Simó.

Para centrar las cosas empezaré describiendo brevemente, que nunca es mucho contar, el tipo de tareas que nos tienen ocupados. En cualquier caso los tecnicismos han servido para rellenar a estas alturas más de 1500 páginas de memorias, artículos e informes (sin contar software y guías de usuario) y que, por descontado, están a la disposición del interesado lector. Allá voy.

El lanzamiento de un satélite artificial es una de las últimas etapas de un proceso largo que empieza con la recogida de ideas sobre las distintas tareas que se le podrían encomendar. Cuando un número suficiente de ellas, por sus características, parece que pueden ser realizadas por un mismo satélite, empieza una primera fase de definición de la misión espacial. A partir de entonces es preciso concretar desde el peso de los instrumentos que las han de llevar a cabo, hasta el lugar idóneo para realizarlas. En esta primera fase las cuestiones que hay que considerar y estudiar, aparte el presupuesto necesario para su realización, son las siguientes: el lanzador, las trayectorias nominales, la órbita de transferencia hasta la órbita nominal, la configuración del satélite, los sistemas de observación y seguimiento terrestre, la estimación de la órbita real seguida por el satélite, las maniobras para el mantenimiento cerca de la órbita nominal, etc. Todas juntas se conocen con el nombre genérico de análisis de misión. En unas pocas de ellas hemos desarrollado nuestra actividad.

La trayectoria nominal sobre la que se ha de situar un satélite depende de manera obvia del tipo de misión que tenga encomendada. Una parte importante de las misiones científicas que se llevan a cabo están relacionadas con

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 24-30

la Tierra y su entorno (atmósfera, ionosfera, campo magnético, cinturones de Van Allen, etc.) aunque cada vez son más numerosas las dedicadas al estudio de otros cuerpos celestes: Sol, planetas, cometas, fuentes de rayos X, etc.

Ya se ve que las misiones espaciales se pueden clasificar fácilmente en dos familias: las que se desarrollan en las proximidades de la Tierra y las interplanetarias. La clasificación atiende sólo a la dinámica de la trayectoria del satélite artificial y deja al margen cualquier otro aspecto. Esta clasificación es útil para la modelización del escenario en que se desenvuelve la vida del satélite. No es posible hacer siempre la modelización previa de manera precisa. Una de las primeras consecuencias que se derivan es que las trayectorias nominales no son siempre trayectorias "excesivamente reale" (es decir, las que el satélite describiría como soluciónes de las ecuaciones de movimiento). Ya se ve que esto puede tener consecuencias poco deseables: obligaremos al satélite a que siga una órbita de manera forzada y ello nos obligará a consumir una cierta cantidad de combustible que con una órbita nominal más precisa nos podríamos ahorrar. Pero la situación puede ser más embarazosa como muestra el siguiente ejemplo.

Supongamos que nos proponemos poner en órbita lunar un cierto satélite artificial en órbita polar, circular y con una altitud de 100 Km. sobre la superficie lunar. La fuerza más relevante que actuará sobre el satélite es la debida al campo gravitatorio lunar. Se dispone de distintos modelos para este campo de fuerzas, en el sentido de disponer, en el desarrollo del potencial en armónicos esféricos, de valores para los coeficientes hasta un orden relativamente elevado tanto para los coeficientes zonales como para los teserales. El modelo de Liu-Laing (de grado 15 para los coeficientes zonales y 8 para los teserales) predice un impacto con la superficie lunar después de 34 días. El de Bills-Ferrary (16×16) predice el impacto para después de 475 días. Otros modelos, como los de Ferrary (16×16), Sagitov (16×16), Akim-Vlasova (7×7), Komopliv et al. (60×60), dan resultados también distintos, de manera que en estos momentos resulta difícil obtener resultados concluyentes para este tipo de órbitas.

A pesar de lo dicho, actualmente se dispone de modelos fiables que determinan el campo de fuerzas gravitatorias que actúa sobre un satélite artificial moviéndose en el sistema solar, siempre y cuando se mantenga suficientemente alejado de los planetas, excepción hecha de la Tierra cuyo campo se conoce aceptablemente bien. Uno de los más utilizados es el que, en forma

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 24-30

de efemérides para los distintos cuerpos del sistema solar, elabora el Jet Propulsion Laboratory. Para su confección se ajustan primero los distintos parámetros que intervienen (condiciones iniciales, masas,...) a partir de las observaciones disponibles. Luego se procede a la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del movimiento. Una idea de la complejidad de la tarea la puede dar el que para la elaboración de las efemérides conocidas como DE118/LE62 fue necesario ajustar el valor de 175 parámetros a partir de 50424 observaciones para luego integrar un total de 33 ecuaciones diferenciales durante un lapso de tiempo de aproximadamente 50 años.

Cuando las fuerzas que actúan sobre el satélite artificial son del tipo: frenado atmosférico, presión de radiación solar, presión de la radiación reflejada por la Tierra (con todas las incertidumbres del albedo terrestre), electrostáticas y magnéticas, etc. los modelos dejan de ser deterministas y la propia dinámica del satélite puede proporcionarnos información "on line" que permita ajustar los parámetros que permiten la modelización de estos efectos.

Quizás tan importante como disponer de modelos fiables, es el poder utilizar modelos más simplificados con los que hacer unas primeras estimaciones y tener una idea cualitativa más global del tipo de soluciones que queremos considerar. El paso de un modelo simplificado, como el problema restringido de tres cuerpos, al problema real plantea normalmente más dificultades de tipo técnico que conceptual. No obstante, estas dificultades técnicas pueden obligar a que sea preciso introducir modelos intermedios auxiliares bien de forma discreta entre el modelo de partida y el final, o bien de forma continua entre ambos.

Para satélites artificiales que se mueven alrededor de la Tierra, si tenemos sólo en cuenta las fuerzas gravitatorias centrales, un modelo aproximado útil para poder hacer estimaciones preliminares es el problema de Kepler que todos hemos estudiado en los cursos de física general. A medida que nos alejamos de la Tierra la influencia del Sol es cada vez más notable y el problema de Kepler deja de ser un buen modelo. Entonces el Problema Restringido de Tres Cuerpos tridimensional (PRTC-3D) resulta, para muchos propósitos, más próximo a la realidad. El PRTC-3D estudia el movimiento de una partícula en el campo de fuerzas creado por dos cuerpos llamados primarios, que se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 24-30

masas, sin que la presencia de la partícula influya en el movimiento de los dos cuerpos principales. Este problema, simplificación del problema general de tres cuerpos, que ya despertó el interés de Euler, Lagrange y Jacobi, fue utilizado por Hill para el estudio del movimiento de la Luna, y es uno de los paradigmas, en la teoría general de los Sistemas Dinámicos, de sistema hamiltoniano con tres grados de libertad no integrable. Cuando se trata de investigar el movimiento en las proximidades del sistema Tierra-Luna no se pueden obviar los efectos los efectos simultáneos de la Tierra, la Luna y el Sol, entonces es preciso introducir otros modelos intermedios como el llamado problema bicircular, u otros que se puedan construir exprofeso.

Una vez que está claro el modelo inicial que es conveniente utilizar para representar nuestro problema podemos ya entrar en el estudio de otras cuestiones: posibles trayectorias nominales, transferencias, mantenimiento en estación, etc. Dicho de una manera muy simple lo que se pretende siempre es utilizar trayectorias nominales sobre las que sea poco costoso mantener el satélite y para las que tampoco sea caro el llegar hasta ellas. Los términos caro/barato tienen aquí un sentido amplio y pueden significar: que no sea necesario ejecutar muchas maniobras de mantenimiento, que las maniobras no requieran mucho combustible, que una vez realizada una maniobra no se tarde mucho en alcanzar el objetivo, etc. Para todas estas cuestiones hay una regla de oro que consiste en “incitar” a que el satélite haga aquello que la dinámica global del problema aconseja que sea más natural hacer. Es aquí donde las herramientas que proporciona la teoría general de los sistemas dinámicos son de una ayuda inestimable.

El estudio del retrato de fases puede darnos una idea bastante clara de las posibilidades de movimiento que tiene nuestro satélite. La determinación de zonas estables puede revelarnos regiones de movimiento para las que podamos prescindir de cualquier tipo de mantenimiento en estación. El estudio de las variedades invariantes estables e inestables, cuando existan, de las órbitas nominales pueden facilitar la transferencia desde la Tierra, el cambio de órbita o el mantenimiento en estación. Es a todo este tipo de cuestiones a las que hemos dedicado esfuerzos y para las que hemos aportado resultados que van más allá de la exploración numérica masiva o la utilización de un buen algoritmo de optimización que, trabajando como caja negra, permita decidir entre una cierta familia de órbitas cual es la más idónea para un cierto propósito.

La metodología utilizada ha sido uno de los puntos clave en la realización de nuestro trabajo y su uso sistemático nos ha permitido obtener la mayoría de los resultados. Citaré a continuación algunas de las técnicas que hemos desarrollado y utilizado con más provecho.

a) Utilización de sistemas de referencia que permitan tener en cuenta los efectos de los distintos cuerpos del sistema solar de una forma clara, simple y eficiente. Esto es, que al escribir las ecuaciones finales del movimiento queden en la forma de las de un problema simplificado (PRTC, bicircular, modelo analítico intermedio,...) más perturbaciones.

b) Utilización de la teoría de Formas Normales. Con ello se pueden extraer las características más relevantes de un campo vectorial alrededor de un punto fijo o, eventualmente, una órbita periódica. Se han tenido que desarrollar extensiones que hacen uso de la teoría de Floquet como paso previo. En cualquier caso, la manipulación de las series de d'Alembert se ha de hacer con la ayuda de manipuladores algebraicos especialmente construidos para el propósito.

c) Implementación de métodos tipo Lindstedt-Poincaré para obtener representaciones semianalíticas de soluciones periódicas y cuasi-periódicas de las ecuaciones del movimiento. Como en el caso anterior aquí también es necesario construir manipuladores algebraicos para el propósito.

d) Procedimientos de refinado numérico para las soluciones aproximadas obtenidas de forma semi-analítica. Con ello es posible determinar trayectorias nominales, en el sistema solar real, de manera muy precisa.

e) Cálculo de aproximaciones analíticas locales de variedades invariantes estables e inestables para su posterior refinado numérico y globalización. El comportamiento de estas variedades revela una parte importante de la dinámica del problema.

f) Desarrollo de procedimientos de análisis de Fourier que permiten la determinación muy exacta de frecuéncias y amplitudes cuando la función que se analiza es cuasi-periódica (o muy próxima a ella). Estos procedimientos son de utilidad en muchas situaciones y para la construccion de modelos analíticos intermedios de las ecuaciones del movimiento resultan imprescindibles.

g) Cálculo de variedades centrales. Permiten dar explicaciones geométricas de resultados observados numéricamente relativos a la existencia de "regiones estable" en un entorno grande de los puntos triangulares de equilibrio.

El respaldo teórico, en forma de teoremas, para todas estas técnicas se ha llevado a cabo hasta donde ha sido posible.

No quisiera acabar sin antes hacer un par de reflexiones generales. Sin lugar a dudas los avances obtenidos en la investigación espacial se nos han presentado como uno de los paradigmas del progreso del presente siglo y seguramente lo son. Pero su repercusión en el progreso lo es mucho más desde un punto de vista tecnológico que como locomotora de arrastre de ciencias básicas como las matemáticas o la física. Seguramente todos tenemos idealizado el papel que han de tener éstas en el mundo que nos rodea. Quizás la deformación profesional nos incita a confundirlo con el que nos gustaría que fuera. Ya he dicho más arriba cuánto tiempo llevamos en contacto profesional con este ámbito. Tras todo este tiempo, mi impresión no es la más deseable. Aunque en un contexto muy distinto, un poco la sensación que tengo es parecida a la que me produce la lectura de la prensa diaria. Por una parte leo algunos artículos de opinión que son una reflexión no trivial y a menudo brillante del acontecer diario. Por otra, el periodista profesional, que desde su oficina o agencia es quien acaba dando cuerpo al diario, nos escribe el día a día con un estilo que a menudo está lleno de tópicos, tics y deformaciones de los que sólo sabe que le garantizan una clientela fija, adepta al color y sesgo de sus características.

En las agencias espaciales, y muy especialmente en la americana, quienes de manera profesional dictan lo que ha de ser el día a día utilizan también sólo aquello de lo que están muy seguros funcionará, lo que en principio no es criticable salvo que se traduzca en un "aquello que alguna vez ya funcionó". Con esta forma de proceder es fácil constatar que los métodos, técnicas y resultados que se manejan a menudo están lejos de ser los óptimos, más actuales y mejores. De hecho hemos oído decir a algún investigador del JPL que "las técnicas usadas habitualmente en los análisis de las misiones espaciales están ancladas en el siglo XIX".

Finalmente no quiero dejar escapar la oportunidad de hablar algo mal de nuestros administradores por lo que se refiere a este tipo de cuestiones. Seguramente es conocido por todos que en España existe un Instituto Nacional de Técnicas Aerospaciales (INTA). Aunque quizás mi ignorancia sea algo atrevida y mis limitaciones evidentes, jamás he coincidido en ninguna reunión científica ni he visto firmados artículos por parte de personal de esta institución sobre temas más o menos afines a los que me he estado refiriendo. La excepción fue uno aparecido en la prensa diaria, y firmado por el Presidente del INTA, justificando el "éxito" de una pequeña sonda lanzada desde la base de Arenosillo, en la provincia de Huelva. Por contra, la práctica totalidad de la actividad relacionada con el análisis de misión que han requerido y requieren los satélites de la serie Hispasat se ha dejado en manos francesas, ciertamente expertas, pero que poco ayudarán a enriquecer una mínima infraestructura dentro de este, cada vez más importante, sector industrial.

En un reciente número del NA Digest se indica, para quien pueda estar interesado, una dirección electrónica vía `ftp` donde se puede encontrar abundante información de primera mano sobre el fallo descubierto en la FPU de Pentium. Para ello basta hacer un `ftp` a

`ftp.mathworks.com`

y entrar en el directorio

`/pub/tech-support/moler/pentium`

donde se halla una colección de artículos breves en modo ASCII sobre este tema. Para cambiar de directorio utilizar el comando `set def` con el nombre de directorio entre comillas y para importar un documento el comando `get` con el nombre de documento igualmente entrecomillado.

VI Simposium Nacional de Reconocimiento de Formas y Análisis de Imágenes
Córdoba, 3 a 6 de abril de 1995
Información en el Boletín de SEMA de junio de 1994

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

APPROCHE MATHEMATIQUE DE LA NOTION D'ONDE DE CHOC

GÉRARD GAGNEUX ET MONIQUE MADAUNE-TORT
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
URA -C.N.R.S. 1204
UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR (FRANCE)

Resumen. En su interpretación matemática, la noción de onda de choque está ligada al concepto de discontinuidad. Sin embargo, se sabe que el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales de carácter localmente hiperbólico - que modelan los procesos de choques- se desarrolló en el contexto de espacios de funciones $\mathcal{L}^m$−medibles y localmente integrables de variación acotada. La noción de continuidad en el sentido clásico resulta inadecuada en este contexto y se plantea el problema de definir qué se entiende por onda de choque. Para dar rigurosamente una definición intrínseca se utiliza la teoría de las medidas geométricas y se dan algunas propiedades de la onda de choque en espacios de funciones de variación acotada y de Sobolev.

Vers une définition intrinsèque de l'onde de choc

Les bases de la théorie de l'onde de choc semblent avoir été jetées vers 1860 par B. Riemann, puis vers 1885, par H. Hugoniot et W. Rankine en assimilant dans l'interprétation mathématique la notion d'onde de choc à la notion de discontinuité. Cependant, l'analyse des équations aux dérivées partielles sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^m$ a trouvé son développement hors du cadre classique des fonctions partout définies grâce à l'introduction d'espaces fonctionnels modelés sur des classes de fonctions localement $\mathcal{L}^m$-intégrables. Dès lors que les grandeurs physiques régies par des équations aux dérivées partielles sont recherchées dans des classes de fonctions $\mathcal{L}^m$-mesurables et essentiellement bornées, la notion de discontinuité au sens classique est *a priori* inadaptée. Aussi est-on conduit, pour toute fonction F de $L^\infty(\mathcal{O})$, à considérer dans le **cadre des mesures géométriques** la notion de $(\mathcal{L}^m)$ limites approximatives inférieure et supérieure qui permet, **en tout point** x de $\mathcal{O}$, de définir

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

les deux fonctions **boréliennes** à valeurs dans $\mathbf{R}$, λ_F et μ_F représentatives de la classe de Lebesgue de F (au sens de l'égalité $\mathcal{L}^m$−presque partout) mais **indépendantes du choix du représentant** dans cette classe, en introduisant

$$\lambda_F(x) = (\mathcal{L}^m)\,\text{app.}\liminf_{z\to x} F(z)\,,\ \ \mu_F(x) = (\mathcal{L}^m)\,\text{app.}\limsup_{z\to x} F(z)\,.$$

Les notions d'approximative limite, puis d'approximative continuité sont alors la clé d'une bonne compréhension et d'une modélisation rigoureuse du phénomène physique que décrit le concept d'onde de choc.

Aussi, en vue de définir rigoureusement la notion d'onde de choc, on rappelle brièvement pour la commodité de lecture quelques propriétés ponctuelles des fonctions $\mathcal{L}^m$−mesurables sur $\mathbf{R}^m$, à travers le concept d'approximative limite ; l'étude approfondie complète peut être trouvée dans les ouvrages de H. Federer [2] (pp. 158-159) et L.C. Evans-R.F. Gariepy [1] (pp. 46-48 et 209-219).

Soit $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$.

On appelle, au point générique x de $\mathbf{R}^m$, **limite approximative supérieure** de F lorsque y tend vers x, notée $\mu_F(x)$, la borne inférieure de l'ensemble des réels t tels que :

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathcal{L}^m\left(B(x,r)\cap\{F>t\}\right)}{\mathcal{L}^m\left(B(x,r)\right)} = 0,$$

$B(x,r)$ désignant la boule euclidienne de $\mathbf{R}^m$, fermée centrée en x, de rayon r.

De façon similaire, on définit la **limite approximative inférieure** de F en x, notée $\lambda_F(x)$, par

$$\lambda_F(x) = \sup\left\{t\in\mathbf{R}\ ;\ \lim_{r\to 0^+}\frac{\mathcal{L}^m\left(B(x,r)\cap\{F<t\}\right)}{\mathcal{L}^m\left(B(x,r)\right)} = 0\right\}$$

Lorsque, au point x de $\mathbf{R}^m$, il se trouve que

$$\lambda_F(x) = \mu_F(x) = l,$$

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

on dit que l est la **limite approximative** de F au point x.

Naturellement, dans le cas où

$$\lambda_F(x) = \mu_F(x) = F(x),$$

la fonction F est dite **approximativement continue** au point $x \in \mathbf{R}^m$ (ou ($\mathcal{L}^m$) approximativement continue, en cas d'ambiguïté).

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles à l'exposé qui suit des fonctions λ_F et μ_F sont les suivantes :

i) toute fonction $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $\mathcal{L}^m$ -mesurable, est $\mathcal{L}^m$−presque partout approximativement continue, la réciproque étant vraie ([2], théorème 2.9.13). Ceci montre que les propriétés de mesurabilité et d'approximative continuité sont étroitement liées pour une application à valeur dans un **espace métrique séparable.**

ii) lorsque $F \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^m)$, tout point de Lebesgue est un point d'approximative continuité.

iii) pour $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $\mathcal{L}^m$-mesurable, les fonctions $x \to \lambda_F(x)$, $x \to \mu_F(x)$ sont des fonctions **boréliennes**, avec

$$\forall x \in \mathbf{R}^m, \quad -\infty \leq \lambda_F(x) \leq \mu_F(x) \leq +\infty.$$

iv) lorsque $F \in L^\infty(\mathbf{R}^m)$, il y a coïncidence entre les points de Lebesgue et les points d'approximative continuité de F ; les fonctions λ_F et μ_F sont alors bornées.

v) F désignant une fonction $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $\mathcal{L}^m$-mesurable, l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R}^m, \ \lambda_F(x) < \mu_F(x)\},$$

i.e., l'ensemble des points où la ($\mathcal{L}^m$) limite approximative de F n'existe pas est un borélien $\mathcal{L}^m$ -négligeable.

Ces considérations conduisent naturellement à la définition de l'onde de choc.

On désigne alors par **onde de choc** associée à la classe de F, le complémentaire de l'ensemble des points où F admet une ($\mathcal{L}^m$) limite approximative, *i.e.*, l'ensemble Λ_F défini par :

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

$$\Lambda_F = \{x \in \mathcal{O},\ \lambda_F(x) < \mu_F(x)\}.$$

Il en résulte immédiatement que l'ensemble Λ_F est un **borélien** de $\mathcal{O}$, $\mathcal{L}^m-$négligeable, **indépendant du choix du représentant de F** dans sa classe, au sens de l'égalité $\mathcal{L}^m-$presque partout.

Aussi, il peut être commode de représenter "**canoniquement**" la classe de F, pour $F \in L^\infty(\Omega)$, par la fonction borélienne bornée $\overline{F} = \frac{1}{2}(\lambda_F + \mu_F)$.

On remarquera que Λ_F est alors, en fait, le complémentaire de l'ensemble des points de Lebesgue de ce représentant $\frac{1}{2}(\lambda_F + \mu_F)$ et on note que l'onde de choc Λ_F est le complémentaire de l'ensemble des points d'approximative continuité de $\overline{F}$.

Le lien entre la dimension de Hausdorff de l'onde de choc et la régularité de la solution d'une équation aux dérivées partielles résulte des considérations suivantes :

Soient A un ensemble borné de $\mathbf{R}^m$ et δ un réel, $\delta > 0$. On désigne par $\{U_i\}$ tout recouvrement de A par des ensembles U_i de diamètre au plus δ. Pour tout réel $s \geq 0$, on pose (cf. [2], 2.10.1 et 2.10.2 ou [1], p. 60), selon la **construction de Carathéodory**,

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^s / \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\ 2^{-s}\mathrm{diam}\,(U_i)^s \right\},$$

Γ représentant ici la fonction gamma d'Euler, avec $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Alors, le paramètre δ étant pris arbitrairement petit pour tenir compte de la **géométrie microlocale** de l'ensemble A, **la mesure** (extérieure) **s-dimensionnelle** de Hausdorff de A se définit par

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A),$$

et la dimension de Hausdorff du sous-ensemble A de $\mathbf{R}^m$ est donnée par

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\left\{ s \in \mathbf{R}^+ \mid \mathcal{H}^s(A) = 0 \right\}.$$

On sait que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure pour laquelle les ensembles boréliens sont mesurables ; $\mathcal{H}^0$ est la mesure de dénombrement et $\mathcal{H}^m$ coïncide

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

sur $\mathbf{R}^m$ avec la mesure $\mathcal{L}^m$; la mesure **borélienne régulière** $\mathcal{H}^s$, pour $0 \leq s < m$, n'est pas une mesure de Radon, puisqu'elle n'est pas finie sur tout compact de $\mathbf{R}^m$ ($\mathbf{R}^m$ n'est pas σ-fini relativement à $\mathcal{H}^s$, pour $0 \leq s < m$).

Notant $\overline{BV}(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions localement intégrables sur l'ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^m$ dont les dérivées-distributions au premier ordre sont éléments de l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ des mesures de Radon sommables sur $\mathcal{O}$, on dispose des informations suivantes, lorsque l'ouvert $\mathcal{O}$, pris suffisamment régulier, permet le prolongement des fonctions de $W^{1,p}(\mathcal{O})$, $1 \leq p < m$, en des fonctions de $W^{1,p}(\mathbf{R}^m)$, selon le principe des réflexions, puis de troncature régulière (ce sera le cas pour des ouverts cylindriques du type $Q =]0,T[\times\Omega$, Ω "régulier").

Si $g \in L^\infty(\mathcal{O}) \cap \overline{BV}(\mathcal{O})$, moyennant le prolongement de g ici possible en $\tilde{g}$ dans $L^\infty(\mathbf{R}^m) \cap \overline{BV}(\mathbf{R}^m)$, on introduit, suivant H. Federer ([2], 4.5.9. (16)), $E(\tilde{g}) = \left\{x \in \mathbf{R}^m,\ \lambda_{\tilde{g}}(x) < \mu_{\tilde{g}}(x)\right\}$, borélien tel que $\dim_{\mathcal{H}}(E(\tilde{g})) \leq m-1$, et donc finalement, Λ_g , l'**onde de choc** relative à la classe de la fonction g, vérifie :

$$\Lambda_g = \mathcal{O} \cap E(\tilde{g}), \text{ borélien de } \mathcal{O}, \text{ avec } \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_g) \leq m-1 .$$

Les propriétés suivantes de l'onde de choc d'une fonction de $\overline{BV}(\mathcal{O}) \cap L^\infty(\mathcal{O})$ présentent un intérêt particulier pour l'étude des problèmes hyperboliques non linéaires du premier ordre (cf.[6], [7]).

Si $f \in \overline{BV}(\mathcal{O}) \cap L^\infty(\mathcal{O})$,

i) Λ_f est une réunion dénombrable d'hypersurfaces de classe $\mathcal{C}^1$.

ii) pour tout x de Λ_f, il existe un vecteur unitaire et un seul ν tel que :

$$\lambda_f(x) = \text{app.}\lim_{y \in H_\nu^-,\, y \to x} f(y) \quad \text{et} \quad \mu_f(x) = \text{app.}\lim_{y \in H_\nu^+,\, y \to x} f(y) ,$$

où H_ν désigne l' hyperplan défini par :

$$H_\nu = \{y \in I\!R^n \ ; \ \nu.(y-x) = 0\},$$

H_ν^- et H_ν^+ les demi-espaces délimités par H_ν , soit :

$$H_\nu^- = \{y \in I\!R^n \ ; \ \nu.(y-x) \leq 0\},$$

$$H_\nu^+ = \{y \in I\!R^n \ ; \ \nu.(y-x) \geq 0\}.$$

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

Si, en outre, $g \in L^{\infty}(\mathcal{O}) \cap W^{1,1}(\mathcal{O})$, il résulte de [2], 4.5.9. (30), (29), après extension, hors de l'ouvert $\mathcal{O}$, de g en une fonction $\widetilde{g}$ de $L^{\infty}(\mathbf{R}^m) \cap W^{1,1}(\mathbf{R}^m)$, que l'onde de choc Λ_g est un borélien de $\mathcal{O}$, $\mathcal{H}^{m-1}-$ négligeable, et donc, $\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_g) < m-1$.

H. Federer et W.P. Ziemer [3] fournissent des résultats complé mentaires par l'étude des points de Lebesgue de degré $mp/(m-p)$, $1 \leq p < m$, des fonctions de $W^{1,p}(\mathcal{O})$; il en résulte que si

$$g \in L^{\infty}(\mathcal{O}) \cap W^{1,p}(\mathcal{O}),\ 1 \leq p < m,$$

alors, pour un choix convenable du représentant et pour tout $\varepsilon > 0$, g est $\mathcal{H}^{m-p+\varepsilon}-$p.p. $(\mathcal{L}^m)$ approximativement continue sur $\mathcal{O}$, et donc, par la définition intrinsèque de l'onde de choc,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_g) \leq m-p\,.$$

De plus, g est Γ_p-quasi continue sur $\overline{\mathcal{O}}$, Γ_p désignant la capacité de degré p, *i.e.*, selon [3], p. 155, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé C de $\overline{\mathcal{O}}$ tel que $g_{|C}$ soit continue et $\Gamma_p\left(\overline{\mathcal{O}} \setminus C\right) < \varepsilon$.

A titre d'illustration, on considère deux applications de ces considérations à des modélisations issues de l'ingénierie pétrolière.

I) **l'équation des milieux poreux** :

cela concerne l'étude générale des problèmes de Cauchy associés aux équations **dégénérées** de diffusion-transport sur des ouverts cylindriques bornés $Q =]0,T[\times\Omega$, de type divergentiel:

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle\varphi(u) + \mathbf{div}\ (g(u)\nabla p) = 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1},$$

avec :

$$p \in W^{1,+\infty}(\Omega) \quad , \quad \triangle p = 0 \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Sous des conditions de bord assez générales et pour une donnée initiale suffisamment régulière, (cf.[4] y [5]), on établit l'existence et l'unicité d'une solution u telle que :

$$u \in BV\left(0,T;L^1(\Omega)\right) \cap L^{\infty}(Q)\,,$$

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 31-38

$$\varphi(u) \in H^1(Q) \cap W^{1,+\infty}\left(0,T;L^1(\Omega)\right).$$

Il en résulte alors que, pour le choix approprié d'un représentant et par le fait que φ est un homéomorphisme dans de tels modèles prenant en compte les **effets de diffusion** de la pression capillaire, $\left(\text{d'où la relation : } \Lambda_u = \Lambda_{\varphi(u)}\right)$, la solution u est :

i) Γ_2-quasi continue sur $\overline{Q}$,

ii) $\mathcal{H}^{n-1+\varepsilon}-$p.p. $(\mathcal{L}^{n+1})$ approximativement continue sur Q, pour tout ε strictement positif.

Dès lors, il apparaît que l'onde de choc Λ_u, relative à la solution u , est un borélien de $Q \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, tel que :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda_u) \leq n-1\ , \quad \Gamma_2(\Lambda_u) = 0.$$

On peut remarquer que la solution de tels problèmes de diffusion-convection vérifie de fait une condition d'entropie du type Kruskov dès que la fonction $g \circ \varphi^{-1}$ est continue.

II) **l'équation de Buckley-Leverett non linéaire:**

Il s'agit des équations de transport correspondant, selon la méthode de **viscosité artificielle**, à l'état limite du cas précédent lorsque les effets de la capillarité deviennent négligeables, *i.e.*, de problèmes de Cauchy attachés à l'équation de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{div}\ (g(u)\nabla p) = 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

On sait (cf. [6], [7]) que les solutions u sont assez communément recherchées dans $BV(\mathcal{O}) \cap L^\infty(\mathcal{O})$, et qu'alors, les dérivées partielles distributions au premier ordre sont des mesures de Radon sommables sur Q, $\mathcal{H}^n-$absolument continues. Or, *a priori*, Λ_u , réunion dénombrable d'**hypersurfaces** de classe C^1, est $\mathcal{H}^n-$non négligeable et il est bien connu que la recherche d'un critère discriminant permettant de sélectionner la solution physiquement admissible (*i.e.*, la **condition d'entropie**) entraîne une condition à la traversée de l'onde de choc ; ainsi, selon la terminologie précédente, on impose une condition sur les **sauts** (au sens des $(\mathcal{L}^{n+1})$ approximatives limites inférieure et supérieure) de part et d'autre de Λ_u, qui donc est, par exemple, l'ensemble des "points d'approximative discontinuité" du représentant borélien borné $\overline{u}$. On garde cependant à l'esprit que Λ_u est indépendante du représentant choisi.

Références Bibliographiques

[1] Evans L.C., Gariepy R.F. :*Measure theory and fine properties of functions.* Studies in advanced mathematics, CRC Press, London,1992.

[2] Federer H. : *Geometric Measure Theory.* Die Grundlehren der Math. Wiss., **153**, Springer Verlag, Berlin, 1969.

[3] Federer H., Ziemer W.P. : *The Lebesgue set of a function whose distribution derivatives are p^{-th} power summable.* Indiana University Mathematics Journal, **22**, n° 2, pp.139-158, 1972.

[4] Gagneux G., Madaune-Tort M. : *Sur la question de l'unicité pour des inéquations des milieux poreux.* C. R. Acad. Sci. Paris, **314**, Série I, pp. 605-608, 1992.

[5] Gagneux G., Madaune-Tort M. : *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière.* Livre en préparation. (collection Mathématiques & Applications, S.M.A.I.).

[6] Vol'pert A.I. : *The spaces BV and quasilinear equations.* Math. U.S.S.R. Sbornik, **2**, n° 2, pp. 225-267, 1967.

[7] Vol'pert A.I., Hudjaev S.I. : *Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equation,* Math. USSR Sbornik, **7**, n° 3, pp. 365-387, 1969.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 39-46

INTERNATIONAL SCHOOL OF MATHEMATICS "MATHEMATICAL PROBLEMS OF FLUID MECHANICS AND COMBUSTION"

UIMP, Santander, España
27 Junio - 1 Julio (1994)

Una nueva edición de la Escuela Internacional de Matemáticas UIMP-UAM se ha celebrado como es ya habitual en la península de La Magdalena, Santander, del 27 de junio al 1 de julio de 1994. La escuela está dirigida a jóvenes investigadores, en su mayoría estudiantes doctorales, interesados en las matemáticas y sus aplicaciones, con una orientación hacia las ecuaciones diferenciales y la física de medios continuos. En la presente edición los temas elegidos eran la teoría matemática de la combustión, en que España tiene un relieve notable, los fenómenos de difusión turbulenta y el estudio de frentes de propagación. La escuela pretende servir de marco de encuentro a estudiantes de formación matemática con otros activos en las ciencias o la ingeniería. Para ello se intenta combinar un interés auténtico en las aplicaciones que motivan estas teorías con un énfasis fundamental en las matemáticas.

Un total de unos cincuenta alumnos asistió a los cursos. Aparte los estudiantes de diversas universidades españolas, es de resaltar la presencia de quince estudiantes extranjeros, once de ellos europeos financiados por un proyecto comunitario.

La actividad académica consistió en una serie de tres mini-cursos de cinco lecciones:

Amable Liñán, profesor de mecánica de fluídos en la ETS de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid, figura carismática de las matemáticas aplicadas en España, dio una introducción a la "Teoría matemática de la combustión".

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 39-46

Andrew J. Majda, director del Programa de Matemática Aplicada y Computacional de la Universidad de Princeton, EE. UU., impartió un curso titulado "Introduction to the theory of turbulent diffusion", tema de su actividad investigadora actual. Es de resaltar el énfasis en la utilización de métodos probabilísticos en combinación con la utillería tradicional del análisis.

El tercer tema corrió a cargo del joven profesor de la Universidad de Wisconsin, EE. UU., **Panagiotis E. Souganidis**, cuyo curso, "Evolution fronts in reaction-diffusion and combustion", se centró alrededor del movimiento por curvatura.

Una serie de conferencias de una hora complementaron el programa:

Chris Budd (Universidad de Bristol, UK) expuso trabajos de su grupo sobre problemas de explosión en la conferencia "Combustion when the solution has constant mass".

Carlos Vázquez Espí (ETSI Aeronáuticos, U.P. Madrid), colaborador del Prof. Liñán, habló de "Ignition in solid material".

Pedro F. Embid (Universidad de New Mexico, EE. UU.), asociado al proyecto del Prof. Majda, habló de "Rigorous examples with enhanced flame speed for turbulent diffusion".

Alfredo Bermúdez de Castro (Universidad de Santiago de Compostela), contribuyó el aspecto más aplicado de la semana en su charla "Mathematical modelling of coal particles", un proyecto industrial del que expuso la modelización y la implementación numérica.

Juan L. Vázquez (U.A.Madrid) disertó sobre el trabajo que se desarrolla actualmente en la UAM acerca de problemas de combustión y explosión, en particular sobre la teoría de llamas en el límite de alta energía de activación (con L.A. Caffarelli) y la continuación de soluciones de ecuaciones de reacción-difusión tras el momento de ignición (con V. Galaktionov).

JUAN L. VÁZQUEZ, VICTOR A. GALAKTIONOV

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 39-46

VI ESCUELA HISPANO-FRANCESA SOBRE SOBRE SIMULACIÓN NUMÉRICA EN FÍSICA E INGENIERÍA

SEVILLA, ESPAÑA
19 - 23 SEPTIEMBRE (1994)

Las Escuelas Hispano-Francesas sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería vienen constituyendo una muestra de la colaboración entre matemáticos e ingenieros de ambos países, en el ámbito de la Matemática Aplicada y el Análisis Numérico. Estas Escuelas se vienen desarrollando desde 1982 con periodicidad bianual, por iniciativa de los grupos organizadores. Por la parte francesa, ha sido el INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) el organismo coorganizador, representado por el Dr. Michel Bernadou. Por la parte española, la organización a corrido a cargo de las Universidades de Santiago de Compostela (Ediciones de 1984 y 1990), Málaga (1986), Politécnica de Madrid (1988), Castellón (1992) y Sevilla, que organizó la actual edición, del 19 al 23 de Septiembre pasado.

Estas Escuelas están dirigidas sobre todo a estudiantes de segundo y tercer ciclo, y a jóvenes licenciados que deseen iniciarse en la Simulación Numérica con fines investigadores o profesionales. Sin embargo, también son de gran interés para el profesorado, para mantener su formación y encontrar un foro de comunicación con colegas con intereses semejantes. Por último, también pueden interesar a profesionales que utilicen métodos de cálculo científico.

Su objetivo fundamental es el iniciar a las personas con interés por la Simulación Numérica en algunas líneas de Investigación que son actualmente desarrolladas en Francia y España. Igualmente, mostrar usos de la Simulación Numérica en la empresa y la industria española y francesa.

Participación

La actual edición de la Escuela ha contado con un total de 130 participantes, de los cuales unos 80 han sido estudiantes y el resto profesores, procedentes de toda España. Básicamente hemos contado con alumnos de matemáticas, aunque también de disciplinas afines, especialmente física. Hemos tenido algunas solicitudes de inscripción de alumnos franceses, que finalmente no han podido asistir debido sobre todo a la escasez de financiación para los viajes.

Se ha concedido un total de 35 becas de 50 solicitadas. De ellas, 11 han sido para estudiantes de Sevilla (becas de inscripción), y 24 para estudiantes foráneos (becas de inscripción y alojamiento).

Desarrollo de la Escuela

El desarrollo de la Escuela ha constado de cursos de cinco horas y conferencias de una hora. En los cursos se ha intentado dar una perspectiva amplia de un par de temas de interés en el Análisis Numérico. Por su parte, las conferencias han estado destinadas a mostrar líneas de investigación de relevancia que actualmente están siendo objeto de estudio por parte de los Grupos Organizadores. Se ha intentado mantener un equilibrio entre conferenciantes españoles y franceses. Los conferenciantes fueron los siguientes:

E. Casas (Universidad de Cantabria): Curso sobre "Control Optimo de Sistemas Distribuidos".

J. L. Lions (Collège de France): Curso sobre "Controlabilidad de Sistemas Distribuidos".

Y. Maday (Universidad de París VI): Curso sobre "Cálculo de Flujos por Métodos Espectrales".

C. Parés(Universidad de Málaga): Curso sobre "Método de los Elementos Finitos en Mecánica de Fluídos".

M. Bernadou (INRIA - Rocquencourt): Conferencia sobre "Biblioteca de Logiciales MODULEF" y "Algunas Observaciones sobre Cáscaras Piezoeléctricas".

L. Ferragut (Universidad Politécnica de Madrid): Conferencia sobre "Adaptabilidad y Métodos Multimalla".

D. Gómez(Universidad de Santiago de Compostela): Conferencia sobre "Guías de Ondas Electromagnéticas".

C. Moreno(Universidad Politécnica de Madrid): Conferencia sobre "Teoría Matemática de la Plasticidad".

O. Pironneau(Universidad de París VI): Conferencia sobre "Simulación Numérica de la Turbulencia mediante Modelos de tipo k-ϵ".

J. Real(Universidad de Sevilla): Conferencia sobre "Controlabilidad de las Ecuaciones de Navier-Stokes".

El Prof. J. L. Lions pronunció la conferencia plenaria de la Escuela, sobre el tema "Matemáticas y Medio Ambiente".

Se celebraron también algunos actos sociales, que comprendieron visitas al Ayuntamiento de Sevilla y a los Reales Alcázares. Asimismo, se celebró la Cena de la Escuela en la Venta Antequera, que culminó con una participativa velada flamenca.

Por último, cabe reseñar que la Escuela encuadró la celebración de la segunda Asamblea Plenaria del SEMA.

Conclusiones

La Escuela se desarrolló en un ambiente de grupo que facilitó el conocimiento mutuo y el intercambio de puntos de vista y temas de trabajo entre los participantes. La calidad y claridad expositiva de los intervinientes permitió una buena comprensión por parte de los asistentes. A ello contribuyó también la duración de los cursos, y el existir textos de cursos y conferencias disponibles antes del comienzo de las sesiones. Entendemos que el objetivo de iniciar a jóvenes investigadores en algunos temas de relevancia del Análisis Numérico ha sido razonablemente alcanzado. Igualmente, creemos que se ha producido notables contactos e intercambios de información entre los participantes. Lamentablemente, la participación de industrias susceptibles de interesarse por temas relacionados con la Simulación Numérica ha sido muy escasa. Por último, es de reseñar que la Escuela ha sido una buena muestra de la relevancia y de la calidad de la investigación que ha alcanzado en España la Matemática Aplicada.

TOMÁS CHACÓN REBOLLO.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 39-46

MEETING ON MATRIX ANALYSIS AND APPLICATIONS

VITORIA-GASTEIZ, ESPAÑA
21 - 23 SEPTIEMBRE (1994)

Durante los días 21 al 23 de Septiembre de 1994 se celebró en Vitoria-Gasteiz un Encuentro de Análisis Matricial y Aplicaciones. La principal característica de este simposio desde el punto de vista de su organización se puede resumir en una palabra: flexibilidad. Esta Conferencia prosigue una serie de reuniones sobre Algebra lineal, teoría de las matrices y análisis matricial y sus aplicaciones, celebradas en Portugal y España desde 1982. Estas reuniones científicas tuvieron lugar en Coimbra (1982), Vitoria (1983), Coimbra (1984), Valenci a(1987), Lisboa (1988), Valencia (1989) y algunos "workshops" en Lisboa en 1990- 91. En esta última ciudad tuvo lugar en 1992 una Conferencia organizada por la Sociedad Internacional de Algebra Lineal (ILAS).

El Encuentro de Vitoria que estamos reseñando ha sido patrocinado conjuntamente por la ILAS y la Universidad del País Vasco. Ha sido organizado por el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e I.O. de esta universidad. Han asistido al mismo 110 participantes, repartidos así por países: España 84, Portugal 14, Rusia 2, Alemania 2, Reino Unido 1, Holanda 1, Estados Unidos 1, Ucrania 1, Polonia 1, Italia 1, Hong Kong 1 y China 1. Hubo 7 conferencias plenarias de una hora, 8 conferencias de media hora y 53 comunicaciones de 15 minutos con dos sesiones en paralelo casi todo el tiempo. Los temas tratados versaron sobre Algebra Lineal propiamente dicha, sistemas lineales con control y aplicaciones físicas, económicas y biológicas, polinomios ortogonales, análisis modal selectivo y sus aplicaciones a redes eléctricas, matrices que dependen de parámetros, análisis matricial numérico (sobre todo sobre computación en paralelo y valores singulares), computabilidad en topología algebraica, computación simbólica con polinomios, matrices aleatorias, matrices circulantes y el problema de n cuerpos, conjetura del jacobiano para aplicaciones polinómicas, etc.

También hubo una sesión de debate de 90 minutos sobre la enseñanza del Algebra Lineal moderada por Juan M. Gracia y presentada por Francisco

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 39-46

Marcellán y Charles R. Johnson. El debate evidenció la existencia de tensiones entre: el Algebra lineal y la teoría de las matrices, la manipulación matricial y la geometría subyacente, los textos que se han venido utilizando y la nueva generación de libros significativos sobre estas materias, los problemas acädémicos prefabricados y las posibilidades que ofrecen los paquetes para ordenadores, la formación bourbakista de los profesores y una nueva orientación que tenga en cuenta las investigaciones en Algebra lineal en las dos últimas décadas.

JUAN M. GRACIA

INTERNATIONAL WORKSHOP ON TOTAL POSITIVITY AND ITS APPLICATIONS

JACA (HUESCA), ESPAÑA
26 - 30 SEPTIEMBRE (1994)

Del 26 al 30 de septiembre se celebró en la Residencia de la Universidad de Zaragoza, en Jaca (Huesca), el congreso **International Workshop on Total Positivity and its Applications.** Participaron casi cincuenta investigadores de quince países distintos. Como consecuencia se publicará un libro, por la casa Kluwer Academic Publishers, con M.Gasca y C.A.Micchelli como editores, titulado *Total Positivity and its Applications.* La lista de conferenciantes invitados y títulos de las conferencias es la siguiente:

B. Bojanov (Sofía): On the total positivity of the spline kernel.

F. Brenti (Perugia): The applications of Total Positivity to Combinatorics and conversely.

J.M. Carnicer (Zaragoza): Tchebycheff spaces and Total Positivity.

J. Garloff (Konstanz): Externe point results for totally nonnegative matrices.

M.Gasca (Zaragoza): On the factorization of totally posotive matrices.

G. Goodman (Dundee): Total Positivity and the shape of curves.

B. Heiligers (Ausburg): Totally nonnegative moment matrices and E-optimal polunomial regression designs.

R.Q. Jia (Edmonton): Total Positivity and Nonlinear Analysis.

K. Morken (Oslo): Some consequences of Total Positivity in Spline Theory.

J.M. Peña (Zaragoza): Total Positivity and Optimal Bases.

A. Pinkus (Haifa): Spectral Properties of Totally Positive Kernels and Matrices: Its History and Proof.

R. Zalik (Auburn): Tchebycheff and Weak Tchebycheff systems.

No pudo participar finalmente el profesor Samuel Karlin, de Stanford, pero enviará su conferencia para ser incluída en los Proceedings.

MARIANO GASCA

ANUNCIOS

Nombre	XIV CEDYA, IV CONGRESO DE MATEMÁTICA APLICADA
Lugar	Vic, Barcelona
Fecha	18 - 23 Septiembre 1995
Organización	Departamento de Matemàtica Aplicada I (UPC) Departamento de Matemàtica Aplicada i Anàlisi (UB) Departamento de Matemàtica Aplicada (EUPO)
Información	Comité Organizador XIV CEDYA, IV CMA Dept. Matemàtica Aplicada i Anàlisi Universitat de Barcelona Gran Vía 585, 08071 Barcelona Teléfono: (93) 4021649, Fax: (93) 4021601, e-mail:cedya@maia.ub.es

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 55-56

Útiles Básicos de Cálculo Numérico
A. Aubanell, A. Benseny y A. Delshams
Editado por Editorial Labor S.A., 1993
465 páginas. ISBN 84-335-5156-6

Este texto representa un primer curso de cálculo numérico y va dirigido a estudiantes de carreras científicas, técnicas o sociales que deseen conocer, de manera tan práctica como posible, útiles básicos que les permitan afrontar cuestiones numéricas con comodidad y rigor.

CONTENIDOS: 1 - Errores. 2 - Sistemas Lineales. 3 - Interpolación y Aproximación de Funciones. 4 - Derivación, Integración y Sumación. 5 - Ecuaciones No Lineales.

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
C. Martínez Carracedo y Miguel A. Sanz Alix
Editado por Editorial Reverte S.A., 1991
325 páginas. ISBN 84-291-5043-9

Este libro tiene por objeto introducir al alumno en el estudio del problema de Cauchy y de las ecuaciones diferenciales lineales. La teoría se presenta con rigor y generalidad y el texto es breve y autocontenido.

CONTENIDOS: 1 - Soluciones Locales. 2 - Soluciones Globales. Unicidad. Métodos Numéricos. 3 - Estimación de Soluciones y de Intervalos de Existencia. 4 - Influencia de Datos Iniciales y Parámetros. 5 - Ecuaciones Diferenciales Lineales. 6 - Ecuaciones Lineales con Coeficientes Analíticos. 7 - Estabilidad de las Soluciones. 8 - Métodos de Punto Fijo en Problemas de Contorno. 9 - Dos Temas en Variable Compleja.

Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ireneo Peral Alonso
Editado por Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid. 1994
326 páginas. ISBN 0-201-65357-5

Este libro es un texto clásico desde un punto de vista moderno. Pretende buscar los conocimientos realmente básicos para estudiantes motivados por las matemáticas y sus aplicaciones, así como ser el puente natural para cursos más avanzados de ecuaciones en derivadas parciales. El texto es apropiado para estudiantes de matemáticas, física e ingeniería, con la conveniente selección de temas en cada caso.

CONTENIDOS: 1 - Los Ejemplos Clásicos de Ecuaciones en Derivadas Parciales de la Física Matemática. 2 - Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden: El Problema de Cauchy. 3 - Problema de Sturm-Liouville. Series e Integrales de Fourier. Método de Separación de Variables. 4 - La Ecuación de Ondas en Dimensiones Espaciales Uno, Dos y Tres. El Problema de Cauchy. 5 - La Ecuación de Laplace. El Problema de Dirichlet. 6 - La Ecuación del Calor.

EDUARDO CASAS

En esta sección del boletín recogeremos los libros publicados en el campo de la Matemática Aplicada. Por lo tanto, si sois autores de algún libro, aquí podéis encontrar un lugar para darlo a conocer. También será bienvenida información sobre novedades bibliográficas correspondientes a otros autores y que consideréis de gran interés. Los datos sobre los libros para su inclusión en esta sección podéis enviarlos por correo electrónico a nuestra dirección:

`sema@masun1.unican.es`

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 57-58

PIERRE-LOUIS LIONS, MEDALLA FIELDS

Es conocido de toda la comunidad matemática que uno de los recepcionarios de las Medallas Fields de este año ha sido Pierre-Louis Lions. Este premio viene a reconocer su ya prolongada labor investigadora en diversas áreas de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Aunque su actividad se encuandra dentro del campo de la matemática pura, su atención constante a problemas de la física matemática y la industria, de donde parte para su trabajo teórico, le mantiene en contacto con la matemática aplicada. Por ello y por su relación con varios grupos de investigación de nuestro país, hemos querido reseñar este reconocimiento internacional.

DOCTORADO 'HONORIS CAUSA' PARA CHARLES A. MICCHELLI

Para el día 13 de diciembre, está prevista la investidura de Charles A. Micchelli, del laboratorio Tom J. Watson (de la IBM en Nueva York), como Doctor Honoris Causa por la Universidad de Zaragoza. Con esta investidura la Universidad de Zaragoza ha querido reconocer tanto la excelencia investigadora del Dr. Micchelli en teoría de aproximación como el frecuente contacto que mantiene con el departamento de Matemática Aplicada de esta universidad.

PRIMER CONCURSO DE PROBLEMAS "JAVIER MARTÍNEZ MAURICA"

El Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria ha organizado el I Concurso de Resolución de Problemas "Javier Martínez Maurica" en memoria del recientemente fallecido profesor de ese Departamento, que da nombre al certamen.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 57-58

El concurso ha tenido una dotación económica de 100.000pts. repartidas en dos premios de 60.000pts y 25.000pts respectivamente y un accésit de 15.000pts. Esta primera convocatoria ha estado dirigida a todos los alumnos de los dos primeros ciclos de la Universidad de Cantabria, excluyendo la participación de personas con estudios superiores finalizados, con objeto de evitar desigualdades excesivas en cuanto a la formación de los concursantes.

Con el fin de animar a la participación, se ha optado por un sistema lo más abierto posible consistente en hacer pública una lista de problemas con un mes de plazo para la entrega de soluciones, al tiempo que se permitía los alumnos optar entre participar a título individual o colectivo, si bien para la adjudicación del accésit tenían preferencia los alumnos que participasen a título individual.

Los conceptos utilizados en los problemas propuestos eran en todos los casos elementales; para las soluciones se requerian únicamente ingenio y habilidad en el razonamiento matemático.

El concurso ha despertado considerable interés en la Universidad como lo demuestran los más de 400 solicitantes (entre individuales y colectivos) de los enunciados de los problemas. Finalmente, el número de grupos que llegaron a entregar sus soluciones bajó considerablemente: solamente 15, aunque todas ellas de gran calidad por lo que cabe pensar en un proceso de autoselección muy exigente por parte de los participantes.

Los ganadores fueron

1^er^ premio al grupo "Racing Gauss", integrado por los almunos del programa Erasmus, Arnaldur Gylfason (islandés, estudiante de 4º de Industriales) y Hanno Hesse (alemán, estudiante de 5º de Matemáticas).

2º premio al grupo "Exploradores Abstractos", integrado por los alumnos Mª Ángeles Gómez Molleda (2º de Matemáticas) y José Antonio Reyero del Prado (4º de Industriales).

Accésit al alumno Luis Cosín Ayerbe (también estudiante de 2º de Matemáticas) que participaba a título individual.

La entrega de los diplomas acreditativos y los correspondientes premios en metálico tuvo lugar durante los actos que la Facultad de Ciencias celebró para conmemorar la festividad de su patrón, San Alberto Magno, el dia 15 de noviembre, a las 12h, en el Salón de Actos de dicha Facultad.

Juan A. Cuesta, Universidad de Cantabria

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 60-62

ESTUDIO DE ESQUEMAS DESCENTRADOS PARA SU APLICACIÓN A LAS LEYES DE CONSERVACIÓN HIPERBÓLICAS CON TÉRMINOS FUENTE.

Doctorando: María Elena Vázquez Cendón.
Director: Alfredo Bermúdez de Castro.
Defensa: 22 de julio de 1994, Universidad de Santiago de Compostela.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: El tema central de la memoria es la resolución numérica de las ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas con términos fuente.

Se proponen técnicas de tipo general para extender algunos de los esquemas descentrados clásicos al caso de las leyes de conservación con términos fuente. Concretamente los Q-esquemas de Roe y van Leer y las técnicas de descomposición del flujo de Steger-warming y Vijayasundaram.

La metodología desarrollada se aplica a las ecuaciones de Saint-Venant (shallow water equations), tanto en una como en dos dimensiones, lo que supone resolver ciertas dificultades como pueden ser la no homogeneidad de la función flujo, el cálculo de una solución estacionaria de dichas ecuaciones y el correcto tratamiento de la condición de contorno de deslizamiento que, en el caso bidimensional, conduce a la definición de un nuevo tipo de volúmenes finitos. Se presentan asímismo resultados numéricos para diferentes problemas test. Entre ellos está el estudio de corrientes en la ría de Pontevedra.

El último capítulo las técnicas desarrolladas se combinan con una discretización temporal que permite eliminar la restricción sobre el paso de tiempo.

Los resultados utilizados para analizar la estabilidad contituyen el anexo de la memoria.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 60-62

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DEL MODELO LINEAL DE LÁMINAS DELGADAS DE W. T. KOITER: FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA Y APROXIMACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO NO CONFORME DE ELEMENTOS FINITOS DELINCUENTE DE SANDER.

Doctorando: Ángeles Vilariño Moreno.
Director: Francisco José Palma Molina.
Defensa: 26 de septiembre de 1994, Universidad de Málaga.
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: La memoria se estructura en dos bloques temáticos: el primero de ellos gira en torno al estudio del modelo lineal de Koiter de láminas delgadas, mientras que el segundo trata del análisis numérico de un método no conforme de elementos finitos de convergencia cuadrática.

En el primer bloque se realiza un análisis matemático detallado del modelo lineal de láminas delgadas de W.T. Koiter; así, partiendo de las ecuaciones clásicas de la elasticidad lineal tridimensional y de las hipótesis de Kirchoff-Love, se fundamenta el origen de las ecuaciones de láminas. Se realiza una discusión sobre el proceso de simplificación de las mismas, analizando el orden de error de cada uno de los términos despreciados. Por otro lado, el uso de técnicas de geometría diferencial permite diferentes escrituras de las ecuaciones de equilibrio, lo que da una gran amplitud al estudio realizado.

En el segundo bloque se realiza el análisis numérico del método no conforme de elementos finitos, llamado "delincuente de Sander", y su aplicación para aproximar las ecuaciones del modelo de láminas anteriormente expuesto. El método propuesto da una estimación asintótica del error del orden de $\mathcal{O}(h^2)$, a diferencia de otros métodos no conformes que son de convergencia lineal. Este estudio es muy completo, pues abarca desde la definición precisa del elemento finito y el cálculo de las funciones de base correspondientes, hasta la obtención de resultados numéricos que sirvan para validar los resultados teóricos presentados.

Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº5 (1994) 60-62

PROBLEMAS DE FRONTERA PARA NUEVOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Doctorando: Eduardo Liz Marzan.
Director: Juan José Nieto Roig.
Defensa: 18 de noviembre de 1994
Calificación: Apto cum laude.

Resumen: En la memoria se estudian varios problemas de ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales no lineales con distintas condiciones sobre la frontera. Para estos problemas se definen los conceptos de subsolución y sobresolución y se prueba la validez del método monótono, que proporciona demostraciones constructivas de existencia y aproximación de las soluciones.

Tras un primer capítulo dedicado a resultados preliminares, los resultados principales se engloban en tres capítulos. En el primero de ellos se estudian problemas de ecuaciones integro-diferenciales de primer y segundo orden con condiciones de frontera lineales (periódicas, de valor inicial y de tipo Dirichlet). Para el caso periódico se estudia también el problema con efectos de impulso en instantes fijos. Se ilustran los resultados obtenidos con algunos ejemplos de sus aplicaciones al estudio de ciertos problemas de orden superior. En el tercer capítulo se estudia un problema periódico de primer orden para ecuaciones diferenciales funcionales con máximo. Finalmente, en el cuarto capítulo se estudia una ecuación diferencial de primer orden con término no lineal discontinuo y condiciones de frontera no lineales.

Todo aquél que haya realizado/dirigido recientemente tesis doctoral en algún tema de Matemática Aplicada, puede enviar los datos de la tesis y un resumen para su publicación en este boletín. Remitirlos a

`sema@cc.unizar.es`