

DINÁMICA DE FRENTE DE LA ECUACIÓN 2D QUASI-GEOSTRÓFICA

DIEGO CÓRDOBA GAZOLAZ

Consejo Superior de Investigaciones Científicas
C/ Serrano 123, 28006 Madrid

dcg@imaff.cfmac.csic.es

Resumen

En estas notas describimos algunos resultados recientes que nos ayudan a entender la posible formación y evolución de singularidades para la ecuación 2D quasi-geostrófica.

Palabras clave: *Ecuación quasi-geostrófica, singularidades, ecuaciones de Euler.*

Clasificación por materias AMS: 86A10 35Q35 76U05 42A24

1 Introducción

En lo que sigue, C designará distintas constantes positivas que permitirán expresar estimaciones uniformes adecuadas. Llamaremos Π^N al toro unidad de \mathbf{R}^{N+1} y pondremos $Q = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ o $Q = \Pi^2 \times \mathbf{R}_+$.

La ecuación quasi-geostrófica bidimensional, que en lo sucesivo, representaremos por las siglas QG, se deduce dentro de un contexto geofísico y tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} (\partial_t + u \cdot \nabla) \theta = 0, \\ u = \nabla^\perp \psi = (\partial_2 \psi, -\partial_1 \psi), \quad \psi = -(-\Delta)^{-1/2} \theta. \end{cases} \quad (1)$$

Aquí, $\theta = \theta(x, t)$, con $(x, t) \in Q$, es el escalar de temperatura, $u = u(x, t)$ es la velocidad y $\psi = \psi(x, t)$ es la función de corriente. El operador no local $\Lambda^\gamma = (-\Delta)^{\gamma/2}$ está definido mediante la transformada de Fourier por $\widehat{\Lambda^\gamma f}(\xi) = |\xi|^\gamma \widehat{f}(\xi)$, donde \widehat{f} es la transformada de Fourier de f y el espacio de Sobolev H^s es por definición el formado por todas las funciones f tales que la norma $\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_{L^2}$ está acotada. La ecuación QG debe ser satisfecha en Q y ha de ser complementada con condiciones iniciales para θ , condiciones “en el infinito” cuando $Q = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$ y condiciones de periodicidad en espacio cuando $Q = \Pi^2 \times \mathbf{R}_+$.

Esta ecuación, que tiene aplicaciones en Meteorología y Oceanografía, es un caso especial de la ecuación general quasi-geostrófica (tridimensional) que modela fluidos atmosféricos y oceánicos para constantes de Rossby y Eckman pequeñas (véase [30], [38] y [41]).

Debido a la incompresibilidad del fluido, las normas L^p de θ se conservan para todo tiempo. En particular, se conserva la norma L^2 de θ y esto implica que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2$$

también se conserva, debido a que la velocidad se puede escribir como

$$u = (-\partial_2 \Lambda^{-1} \theta, \partial_1 \Lambda^{-1} \theta) = (-R_2 \theta, R_1 \theta),$$

donde los operadores R_j son las transformadas de Riesz:

$$(R_j \theta)(x, t) = \partial_j (\Lambda^{-1} \theta)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \text{V.P.} \int \frac{y_j \cdot \theta(x + y, t)}{|y|^3} dy.$$

En los últimos años ha habido un intenso interés científico por entender el comportamiento de las ecuaciones quasi-geostróficas, por ser un posible modelo para explicar la formación de frentes de masas de aire caliente y frío. Por otra parte, Constantin, Majda y Tabak [16] mostraron que la ecuación QG es un análogo bidimensional de la ecuación de Euler en tres dimensiones y que los resultados que se verifican para cada una de ellas se dan también en el caso de la otra, aunque la existencia de singularidades para cualquiera de las dos ecuaciones es un problema que sigue abierto.

Para comprender mejor esta similitud, consideremos el sistema incompresible de Euler en dimension tres

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{1 \leq j \leq n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i}, & 1 \leq i \leq 3, \\ \nabla \cdot u := \sum_{1 \leq i \leq 3} \partial_i u_i = 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$ es un campo de velocidades y la presión viene dada por la función escalar P .

La vorticidad se define por $\omega = \nabla \times u$. Las ecuaciones (2) pueden escribirse en términos de ω como sigue:

$$\begin{cases} (\partial_t + u \cdot \nabla) \omega = (\nabla u) \omega, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Usando la ley de Biot-Savart, la velocidad puede ser recuperada a partir de ω por la igualdad

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{y \times \omega(x + y, t)}{|y|^3} dy.$$

De forma análoga, la ecuación QG (1) se puede escribir como sigue:

$$\begin{cases} (\partial_t + u \cdot \nabla) \nabla^\perp \theta = (\nabla u) \cdot \nabla^\perp \theta, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (4)$$

La función de corriente ψ se obtiene de θ mediante la identidad

$$\psi(x, t) = - \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\theta(x + y, t)}{|y|} dy.$$

Por tanto,

$$u(x, t) = - \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\nabla^\perp \theta(x + y, t)}{|y|} dy.$$

Los dos sistemas (3) y (4) son similares: el vector $\nabla^\perp \theta = (\partial_2 \theta, -\partial_1 \theta)$ desempeña el papel de $\omega = \nabla \times u$ en (3). Además, en el caso de la ecuación QG, ∇u es una integral singular en dimensión dos con respecto a $\nabla^\perp \theta$. Mientras que, para (3), ∇u es una integral singular con respecto a la vorticidad; véase [43] y [44].

La similitud también es geométrica, puesto que los vectores ω y $\nabla^\perp \theta$ son tangentes a las líneas de vorticidad y a las curvas de nivel de θ , respectivamente. Las líneas de vorticidad y las curvas de nivel de θ satisfacen la propiedad de moverse con el fluido. En la monografía [3] se describen con más detalle las propiedades de QG y sus similitudes con la ecuación de Euler.

Los primeros resultados de regularidad para (1) se obtuvieron en [16] (resultados equivalentes para Euler en [14],[1], [6] y [34]):

- Si $\theta_0 \in H^k$ con $k \geq 3$, es condición necesaria y suficiente que sea

$$\int_0^T \|\nabla^\perp \theta\|_\infty dt = +\infty \quad (5)$$

para tener una singularidad en el tiempo T . Usando técnicas del análisis microlocal, se puede mejorar el criterio sustituyendo la norma L^∞ por normas en los espacios BMO y Triebel-Lizorkin [7].

- Si el vector dirección

$$\xi = \frac{\nabla^\perp \theta}{|\nabla^\perp \theta|} \quad (6)$$

es regular en las regiones donde $|\nabla^\perp \theta|$ es grande, entonces no se puede producir una singularidad.

La ecuación QG tiene una propiedad adicional: todas las normas L^p ($1 < p < \infty$) de la velocidad se mantienen acotadas por la norma L^p del dato inicial. Pero esto no conduce a una mejora en los resultados de regularidad respecto de los que son conocidos para las ecuaciones de Euler.

2 Singularidades

En [16] se considera la ecuación QG junto con el dato inicial

$$\theta_0(x) = \sin x_1 \sin x_2 + \cos x_2$$

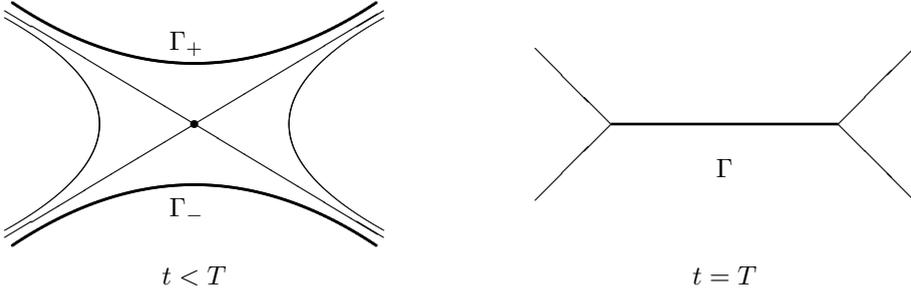


Figura 1: Curvas de nivel de θ .

como posible candidato a desarrollar una singularidad en tiempo finito. Las simulaciones numéricas indican la formación de un frente cuando las curvas de nivel contienen un punto hiperbólico. Las curvas de nivel tienden a colapsar sobre una curva, pasándose de una configuración X a una configuración doble Y :

La función θ es constante sobre curvas del tipo

$$\Gamma_{\pm} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 = f_{\pm}(x_1, t), x_1 \in [a, b]\} \text{ para } 0 \leq t < T. \quad (7)$$

Tres años después, Ohkitani y Yamada [37], con una resolución numérica mucho más precisa, sugirieron que, en vez de una singularidad racional, el crecimiento de las derivadas conduce a una singularidad (al menos) comparable al de una doble exponencial con respecto al tiempo. Constantin, Nie y Schorghofer [17] confirmaron los resultados de [37]. Un resumen de los resultados obtenidos es por tanto el siguiente:

$$\begin{aligned} 1994: \quad \sup_x |\nabla_x \theta(x, t)| &\gtrsim \frac{1}{(8,25 - t)^{1,66}}, \text{ véase [16];} \\ 1997: \quad \sup_x |\nabla_x \theta(x, t)| &\gtrsim e^{e^{[b(t-t_0)]}}, \text{ véase [37];} \\ 1998: \quad \sup_x |\nabla_x \theta(x, t)| &\gtrsim e^{e^{[0,038(t-4,1)]}}, \text{ véase [17].} \end{aligned}$$

Estos escenarios resultan de la colisión de las trayectorias de las partículas del fluido sobre la curva Γ . Cada trayectoria $X = X(q, t)$ se obtiene al resolver el problema de Cauchy

$$\frac{dX(q, t)}{dt} = u(X(q, t), t), \quad X(q, 0) = q.$$

Para que se produzca la colisión en el tiempo T de las trayectorias $X(p, \cdot)$ y $X(q, \cdot)$ que en el instante inicial están respectivamente ubicadas en $p \in \Gamma_+(0)$

y $q \in \Gamma_-(0)$, se necesita la condición siguiente:

$$\int_0^T \|\nabla u\|_{L^\infty} ds = +\infty. \quad (8)$$

Este criterio se obtiene al aplicar el teorema del valor medio a la diferencia de las velocidades de cada trayectoria:

$$|X_t(q, t) - X_t(p, t)| = |u(X(q, t), t) - u(X(p, t), t)| \leq |X(q, t) - X(p, t)| \|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

Integrando respecto de t se obtiene la estimación

$$|X(q, t) - X(p, t)| \geq |X(q, 0) - X(p, 0)| e^{-\int_0^t \|\nabla u\|_{L^\infty} ds},$$

de la que se deduce la condición (8).

El criterio clásico para la formación de singularidades en la evolución de un fluido está dado por el teorema de Beale, Kato y Majda [1] (el equivalente para QG es (5)). Este criterio sirve para cualquier tipo de ellas y es una mejora de la estimación (8). Desde el punto de vista de la geometría de las curvas de nivel, el resultado (6) implica que la dirección de ellas tiene que cambiar bruscamente en un entorno de la singularidad, que es exactamente lo que ocurre alrededor de un punto hiperbólico cuando el ángulo de las hipérbolas tiende a cero.

Para atacar el problema analíticamente, supongamos que las curvas de nivel en un entorno U del punto hiperbólico son hipérbolas “simples”, definidas por las igualdades $\rho = \text{Const.}$ (supongamos que el punto hiperbólico está en el origen), con

$$\rho = (y_1 \beta(t) + y_2)(y_1 \delta(t) - y_2). \quad (9)$$

Aquí se ha realizado un cambio de coordenadas no lineal dependiente del tiempo

$$y_1 = F_1(x_1, x_2, t), \quad y_2 = F_2(x_1, x_2, t).$$

Suponemos que las funciones β , δ y F_i verifican

$$\begin{cases} \beta, \delta \in C^1([0, T_*]), & F_i \in C^2(\bar{U} \times [0, T_*]), \\ |\beta|, |\delta| \leq C, & \beta + \delta \geq 0, \\ \left| \det \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| \geq c > 0 & \forall x \in U, \quad \forall t \in [0, T_*]. \end{cases} \quad (10)$$

Como las curvas de nivel se mueven con el fluido, es lógico suponer que para cada t la temperatura $\theta(\cdot, t)$ es constante a lo largo de ρ . Con estas hipótesis demostramos en el teorema siguiente que el ángulo $\alpha(t) = \beta(t) + \delta(t)$ no puede cerrarse más rápidamente que una doble exponencial en tiempo y que las derivadas de la temperatura están acotadas por una cuádruple exponencial también en el tiempo:

Teorema 1 *Sea $\theta = \theta(x, t)$ una solución de (1). Supongamos que θ es constante a lo largo de las curvas $\rho = \text{Const.}$ definidas por (9) – (10) con $T_* = +\infty$. Para*

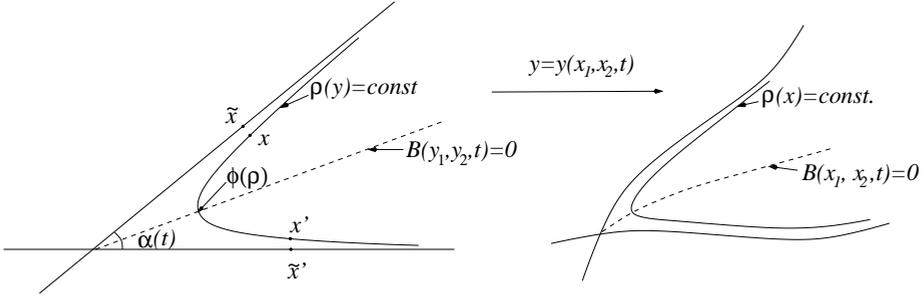


Figura 2: Cambio de coordenadas no lineal dependiente del tiempo.

cada t , supongamos además que θ no es constante en un entorno de U y que las C^2 -seminormas de las F_i están acotadas. Entonces

$$\left| \log \log \frac{1}{\alpha(t)} \right| \leq Ct + C.$$

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN: La demostración se divide en dos partes. En la primera se obtiene una expresión de la función de corriente en las nuevas variables (ρ, σ) . La variable ρ está asociada a las curvas de nivel y la variable σ satisface las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial x_1}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}.$$

Haciendo el cambio de variables en la ecuación original, bajo la hipótesis $\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \neq 0$ en U y escribiendo que $\tilde{\theta}(\rho, t) := \theta(x_1, x_2, t)$, obtenemos:

$$u \cdot \nabla_x \theta = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} (u \cdot \nabla_x \rho) = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \right).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = 0,$$

donde la velocidad satisface $u = \nabla^\perp \psi$. Podemos escribir que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + E_1(\rho, t).$$

Integrando con respecto a σ , obtenemos la expresión deseada de la función de corriente en las nuevas variables:

$$\psi(\rho, \sigma, t) = E_1(\rho, t) \cdot \sigma + \int_0^\sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma + E_2(\rho, t), \quad (11)$$

donde E_1 y E_2 son funciones independientes de la variable σ .

En la segunda parte de la demostración elegimos dos puntos x y x' en la misma curva de nivel, pero situadas en distintas ramas de la hipérbola. Evaluamos la función de corriente en los dos puntos y restamos un valor del otro. Luego tomamos límites cuando $\rho \rightarrow 0$. De la igualdad (11) se obtiene que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\psi(x) - \psi(x')] = C \frac{d\alpha}{dt} + O(\alpha). \tag{12}$$

También se puede escribir la función de corriente en la forma

$$\psi(x, t) = - \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\theta(x + y, t)}{|y|} dy,$$

expresión que proviene de la igualdad $\theta = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi$. Por tanto, tomando límite cuando $\rho \rightarrow 0$, obtenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |\psi(x) - \psi(x')| \leq K |\log \alpha| |\alpha|. \tag{13}$$

El teorema es una consecuencia de (12) y (13) e implica que

$$\alpha(t) \geq c_1 e^{-e^t},$$

que es una estimación local. Por otra parte, para obtener una cota superior de las derivadas de θ , es necesario tener en cuenta el comportamiento de la solución en el exterior de un entorno U .

Corolario 2 *Supongamos que θ es como en el teorema anterior y que, además, $\xi(x) = \frac{\nabla^\perp \theta}{|\nabla^\perp \theta|}$ satisface $|\nabla \xi| \leq \Phi(t)$ en $(\mathbf{R}^2 \setminus U) \times [0, \infty)$, donde Φ es una función integrable. Entonces*

$$|\nabla \theta| \leq \exp \left(\exp \left(c \int_0^t (e^{e^s} + \Phi(s)) ds \right) \right)$$

en $\mathbf{R}^2 \times [0, \infty)$.

La posibilidad de tener una singularidad a lo largo de una curva de nivel ayudaría a entender el fenómeno denominado “frontogénesis”. Modelar adecuadamente este fenómeno, la formación de frentes de aire frío y aire caliente, es uno de los principales objetivos de la Meteorología.

Los arcos $\Gamma_+(t), \Gamma_-(t)$, definidos anteriormente en (7), representan las curvas de nivel que se mueven con el fluido. Las funciones f_\pm verifican

$$f_\pm \in C^1([a, b] \times [0, T]),$$

$$f_-(x_1, t) < f_+(x_1, t) \quad \forall x_1 \in [a, b], \quad \forall t \in [0, T].$$

La longitud del frente viene dado por la medida del intervalo $[a, b]$. Las curvas $\Gamma_{\pm}(t)$ están determinadas por las soluciones f_{\pm} de la ecuación

$$u_2(x_1, x_2, t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, t) \cdot u_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_1, t). \quad (14)$$

En particular, las curvas de nivel de la función escalar $g(x, t)$, que satisface la ecuación $(\partial_t + u \cdot \nabla_x)g = 0$, también cumplen (14). El colapso de las curvas $\Gamma_{\pm}(t)$ en la curva Γ en el instante T quiere decir que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (f_+(x_1, t) - f_-(x_1, t)) = 0 \quad \forall x_1 \in [a, b] \quad (15)$$

y $f_+(x_1, t) - f_-(x_1, t)$ está acotada para $x_1 \in [a, b]$, $t \in [0, T]$. Una vez formalizada la dinámica de un frente, se mejora en [23] el criterio de singularidades: no puede darse (15) si

$$\int_0^T \sup\{|u(x_1, x_2, t)| : x_1 \in [a, b], f_-(x_1, t) \leq x_2 \leq f_+(x_1, t)\} dt < +\infty. \quad (16)$$

Un frente es uniforme cuando tenemos dos curvas de nivel evolucionando de manera que la distancia (en una región) de los puntos de una de ellas a la otra es comparable. Esto quiere decir que, si definimos δ a partir de la relación

$$\delta(x_1, t) = |f_+(x_1, t) - f_-(x_1, t)|,$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\text{mín } \delta(x_1, t) \geq C \text{ máx } \delta(x_1, t).$$

En [24] se obtiene la siguiente estimación de un frente uniforme:

$$\sup_x |\nabla_x \theta(x, t)| \leq e^{A t + B},$$

donde A y B son constantes. Este resultado es independiente del crecimiento de la velocidad.

3 Soluciones viscosas

En esta sección consideramos el problema de Cauchy para la ecuación quasi-geostrófica con viscosidad, denotada QGV. Esta ecuación ha sido estudiada en [5], [12], [18], [13], [37], [39], [9], [19], [20], [42], [45], [46] y [47] y es la siguiente:

$$\begin{cases} (\partial_t + u \cdot \nabla) \theta = -\kappa(-\Delta)^{\gamma} \theta, \\ u = \nabla^{\perp} \psi, \quad \psi = -(-\Delta)^{-1/2} \theta \quad \text{en } Q, \end{cases} \quad (17)$$

donde $\gamma \in (0, 1]$.

En [37] también se realizaron simulaciones de la ecuación viscosa en el caso $\gamma = 1$ y se observó un crecimiento sólo exponencial de las derivadas de θ en el entorno de un punto hiperbólico.

Con $\kappa > 0$, Constantin y Wu [18] demostraron la existencia de solución global para $1/2 < \gamma \leq 1$, y recientemente se ha resuelto el caso crítico en [33] y [4]. Es un problema abierto la existencia o no de singularidades cuando $\gamma < 1/2$. Hasta el momento, los resultados de existencia global que se conocen son válidos para datos iniciales cuya norma (en un espacio funcional adecuado) es más pequeña que la viscosidad.

En el siguiente cálculo mostramos que si el dato inicial $\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\theta}(l, 0)|$ es pequeño comparado con la viscosidad, entonces

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\theta}(l, t)| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\theta}(l, 0)| \tag{18}$$

para todo tiempo.

En el dominio periodico Π^2 , los coeficientes de Fourier de las soluciones de la ecuación QGV satisfacen:

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}(l, t) + \kappa |l|^{2\gamma} \hat{\theta}(l, t) = i \sum_{j+k=l} \frac{j^\perp \cdot k}{|j|} \hat{\theta}(j, t) \hat{\theta}(k, t).$$

Multiplicando la ecuación por $\hat{\theta}(l, t)^*$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\hat{\theta}(l, t)|^2 + \kappa |l|^{2\gamma} |\hat{\theta}(l, t)|^2 = \text{Re } i \hat{\theta}(l, t)^* \sum_{j+k=l} \frac{j^\perp \cdot k}{|j|} \hat{\theta}(j, t) \hat{\theta}(k, t),$$

donde $\text{Re } z$ denota la parte real de z . Entonces

$$\frac{d}{dt} |\hat{\theta}(l, t)| + \kappa |l|^{2\gamma} |\hat{\theta}(l, t)| \leq \sum_{j+k=l} |k| |\hat{\theta}(j, t)| |\hat{\theta}(k, t)|.$$

Sumando en l , obtenemos la desigualdad

$$\frac{d}{dt} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\theta}(l, t)| + \kappa \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |l|^{2\gamma} |\hat{\theta}(l, t)| \leq \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\theta}(l, t)| \right] \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |l| |\hat{\theta}(l, t)| \right],$$

de la que se deduce (18) cuando $\gamma \geq \frac{1}{2}$ y $\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\theta}(l, 0)| \leq \kappa$.

En el trabajo en colaboración con Constantin y Wu [13], demostramos el siguiente resultado:

Teorema 3 *Existe una constante C_∞ tal que, para todo $\theta_0 \in H^2$ con*

$$\|\theta_0\|_{L^\infty} \leq C_\infty \kappa,$$

la solución θ del problema del valor inicial para QGV ($\gamma = \frac{1}{2}$) con dato inicial θ_0 satisface

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{H^2} \leq \|\theta_0\|_{H^2} \quad \forall t \geq 0.$$

Bajo las hipótesis del teorema, probamos también que la solución es única y satisface

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{H^2} \leq e^{-Ct} \|\theta_0\|_{H^2}.$$

La importancia de este resultado, que le distingue de otros de datos pequeños, radica en que en él vemos que la norma L^∞ decrece con el tiempo. En su Tesis Doctoral, Resnick [39] demostró de una forma muy ingeniosa que las soluciones de (17) satisfacen

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p} \quad \forall t \geq 0$$

para $1 < p \leq +\infty$.

En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes es posible probar resultados de regularidad bajo la hipótesis de que ciertas normas son pequeñas comparadas con la viscosidad. Pero no hay resultados de tipo principio del máximo y por tanto no se llega a la estimación (ni al decaimiento) de la norma L^∞ .

Tratando de entender el decaimiento de la norma L^∞ de θ , en los trabajos [19] y [20] obtenemos la siguiente

Desigualdad puntual: Sean $0 \leq \gamma \leq 2$ y sea θ una función C_0^∞ (en \mathbf{R}^2 o Π^2). Entonces

$$2(\theta \Lambda^\gamma \theta)(x) \geq (\Lambda^\gamma \theta^2)(x)$$

(recuérdese que $\Lambda^\gamma = (-\Delta)^{\gamma/2}$).

Se trata de una estimación puntual, generalización de la regla de la cadena para derivadas fraccionarias, que implica diversos principios del máximo en modelos con origen en la Mecánica de medios continuos. En estos trabajos se demuestra una propiedad local que resulta sorprendente (dado el carácter no local de los operadores involucrados) y es muy útil y complementa la información que proporciona el Cálculo Diferencial.

Aplicando la desigualdad puntual y las desigualdades de energía en los espacios de Sobolev, a partir de la ecuación QGV obtenemos la siguiente estimación en L^p con $1 \leq p < +\infty$:

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^p}^p \leq \frac{\|\theta_0\|_{L^p}^p}{(1 + \epsilon C t \|\theta_0\|_{L^p}^{p\epsilon})^{1/\epsilon}}, \quad (19)$$

donde $C = C(\kappa, \gamma, p, \|\theta_0\|_1)$ es una constante positiva y $\epsilon = \frac{\gamma}{2(p-1)}$.

Para estudiar el caso $p = +\infty$ no es suficiente tomar el límite $p \rightarrow +\infty$ en la desigualdad (19). Hay que estudiar la evolución de θ a lo largo de la trayectoria donde alcanza el máximo (o el mínimo) y usar las propiedades de diferenciabilidad de las funciones Lipschitz-continuas para justificar la existencia para casi todo tiempo de la derivada.

Teorema 4 Sean θ y u funciones regulares en Q verificando (17) con $\kappa > 0$ y $0 < \gamma \leq 2$ y $\nabla \cdot u = 0$. Entonces

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \frac{\|\theta_0\|_{L^\infty}}{(1 + \gamma C t \|\theta_0\|_{L^\infty}^\gamma)^{1/\gamma}} \quad \forall t \in [0, T),$$

donde $\theta_0 = \theta(\cdot, 0)$ y $C = C(\kappa, \theta_0) > 0$. Además, cuando $\gamma = 0$, tenemos un decaimiento exponencial de $\|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty}$. Más precisamente,

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} e^{-\kappa t} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (20)$$

Los teoremas 3.1 y 3.2 nos permiten ahora estudiar la existencia de soluciones a partir de un tiempo T . Con ese propósito, nos interesamos por las soluciones débiles de

$$\theta_t + R(\theta) \cdot \nabla^\perp \theta = -\kappa \Lambda \theta. \quad (21)$$

Así, dado un dato inicial $\theta_0 \in H^s$ con $s > 1$, llamaremos *solución viscosa* a todo límite débil, cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$, de una sucesión de soluciones, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, de la ecuación

$$\theta_t^\epsilon + R(\theta^\epsilon) \cdot \nabla^\perp \theta^\epsilon = -\kappa \Lambda \theta^\epsilon + \epsilon \Delta \theta^\epsilon$$

con $\theta^\epsilon(x, 0) = \theta_0$. El resultado que se obtiene es el siguiente:

Teorema 5 *Sea θ una solución viscosa de (21) con dato inicial $\theta_0 \in H^s$, con $s > 3/2$. Entonces existen dos tiempos T_1 y T_2 con $0 < T_1 \leq T_2$ que dependen sólo de κ y del dato inicial θ_0 , tales que:*

1) $\theta|_{[0, T_1)} \in C^1([0, T_1); H^s)$ es una solución fuerte de la ecuación que verifica

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{H^s} \leq C \|\theta_0\|_{H^s} \quad \forall t \in [0, T_1).$$

2) $\theta|_{[T_2, +\infty)} \in C^1([T_2, +\infty); H^s)$ también es solución fuerte y $\|\theta(\cdot, t)\|_{H^s}$ es monótona decreciente en t , está acotada por $C \|\theta_0\|_{H^s}$ y verifica

$$\int_{T_2}^{+\infty} \|\theta\|_{H^s}^2 dt < +\infty.$$

En particular, esto último implica que

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{H^s} = O(t^{-1/2}) \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

La demostración del teorema está basada en el decaimiento de la norma L^∞ y un argumento de *bootstrap* asociado a la evolución de diferentes normas de Sobolev. Un ejemplo típico de este mecanismo es la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\theta^\epsilon\|_{L^2}^2 &= 2 \int \theta^\epsilon R(\theta^\epsilon) \cdot \nabla^\perp \theta^\epsilon - 2\kappa \int \theta^\epsilon \Lambda \theta^\epsilon - 2\epsilon \int |\Lambda \theta^\epsilon|^2 \\ &= -2\kappa \|\Lambda^{\frac{1}{2}} \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 - 2\epsilon \|\Lambda \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 \leq -2\kappa \|\Lambda^{\frac{1}{2}} \theta^\epsilon\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\Lambda^{\frac{1}{2}} \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 &= 2 \int \Lambda^{\frac{1}{2}} \theta^\epsilon \Lambda^{\frac{1}{2}} (R(\theta^\epsilon) \cdot \nabla^\perp \theta^\epsilon) - 2\kappa \|\Lambda \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 - 2\epsilon \|\Lambda^{\frac{3}{2}} \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 \\ &\leq (C \|\theta^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty} - 2\kappa) \|\Lambda \theta^\epsilon\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \|\Lambda \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 \leq (C \|\Lambda \theta^\epsilon\|_{L^2} - \kappa) \|\Lambda^{\frac{3}{2}} \theta^\epsilon\|_{L^2}^2,$$

$$\frac{d}{dt} \|\Lambda^{\frac{3}{2}} \theta^\epsilon\|_{L^2}^2 \leq (C \|\theta^\epsilon\|_{L^\infty} - \kappa) \|\Delta \theta^\epsilon\|_{L^2}^2,$$

donde C es una constante independiente de la viscosidad artificial ϵ .

4 Modelos unidimensionales

Siguiendo la línea de trabajo de [15], construimos modelos unidimensionales de la ecuación QG capturando la propiedad de que θ se mueve con un flujo no local, representado por una integral singular con respecto a θ , i.e. la convolución de θ con un núcleo de media cero en la esfera unidad y homogéneo de grado igual a menos la dimensión espacial. Si además conservamos la propiedad de que el escalar θ se mueve con el fluido, obtenemos el siguiente modelo:

$$\theta_t - H\theta\theta_x = 0, \quad (22)$$

donde la “velocidad” $H\theta$ es la transformada de Hilbert de θ , definida por

$$H\theta(x) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(y)}{x-y} dy,$$

o bien

$$H\theta(x) = \frac{1}{2\pi} \text{V.P.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta(x-y)}{\text{tg} \frac{y}{2}} dy,$$

según estemos considerando la ecuación (22) en $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ o $\Pi \times \mathbf{R}_+$.

Otra forma de escribir la ecuación QG es $\theta_t + \nabla \cdot (u\theta) = 0$. Por tanto, sustituyendo $u = (-R_2\theta, R_1\theta)$ por su equivalente unidimensional $H\theta$, se obtiene el modelo:

$$\theta_t + (\theta H\theta)_x = 0. \quad (23)$$

A. Morlet, motivado por una situación física diferente, estudió en [36] la ecuación

$$\theta_t + \delta(\theta H\theta)_x + (1-\delta)H\theta\theta_x = 0, \quad (24)$$

donde $0 \leq \delta \leq 1$. Para esta ecuación, demostró la existencia de singularidades cuando $0 < \delta < 1/3$, $\delta = 1/2$ y $\delta = 1$. En [8] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 6 *Dado un dato inicial periódico $\theta_0 \in C^1([-\pi, \pi])$, no constante y tal que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0 dx = 0,$$

no existen soluciones $\theta \in C^1([-\pi, \pi] \times [0, \infty))$ de la ecuación (11) para $\delta > 0$.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN: Se observa que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(x, t) dx &= -\delta \int_{-\pi}^{\pi} (\theta H\theta)_x dx - (1-\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \theta_x H\theta dx \\ &= (1-\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \theta H\theta_x dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, poniendo

$$M(t) \equiv \max_x \theta(x, t) \geq 0, \quad m(t) \equiv \min_x \theta(x, t),$$

tenemos en $t = 0$ las desigualdades $M(0) > 0$, $m(0) < 0$.

Las funciones M y m son Lipschitz-continuas y, por el teorema de H. Rademacher, diferenciables en casi todo t . Para cada t podemos elegir $x(t)$ y $\bar{x}(t)$ tales que

$$M(t) = \theta(x(t), t), \quad m(t) = \theta(\bar{x}(t), t).$$

Sea t_0 un punto de diferenciabilidad de $M(t)$. Por compacidad podemos escoger una sucesión $h_j \rightarrow 0$ tal que $x(t_0 + h_j)$ converge a x_0 . Entonces por continuidad se obtiene que $M(t_0) = \theta(x_0, t_0)$ y además

$$\begin{aligned} \frac{M(t_0 + h_j) - M(t_0)}{h_j} &= \frac{\theta(x(t_0 + h_j), t_0 + h_j) - \theta(x_0, t_0)}{h_j} \\ &= \frac{\theta(x(t_0 + h_j), t_0 + h_j) - \theta(x(t_0 + h_j), t_0)}{h_j} + \frac{\theta(x(t_0 + h_j), t_0) - \theta(x_0, t_0)}{h_j} \\ &\leq \frac{\theta_t(x(t_0 + h_j), t_0 + \bar{h}_j) \cdot h_j}{h_j} \\ &= -\theta_x(x(t_0 + h_j), t_0 + \bar{h}_j) \cdot H\theta(x(t_0 + h_j), t_0 + \bar{h}_j) \\ &\quad -\theta(x(t_0 + h_j), t_0 + \bar{h}_j) \cdot \Lambda\theta(x(t_0 + h_j), t_0 + \bar{h}_j) \end{aligned}$$

para ciertos \bar{h}_j , $0 \leq \bar{h}_j \leq h_j$.

Tomando el límite $h_j \rightarrow 0$ obtenemos la desigualdad

$$M'(t_0) \leq -\delta\theta(x_0, t_0)\Lambda\theta(x_0, t_0).$$

Cuando la sucesión h_j es negativa entonces se obtiene la desigualdad contraria que implica

$$M'(t_0) = -\delta\theta(x_0, t_0)\Lambda\theta(x_0, t_0).$$

Por un argumento análogo se demuestra que la función m decae y satisface:

$$m'(t) = -\frac{\delta}{2\pi}m(t) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta(\bar{x}, t) - \theta(y, t)}{\text{sen}^2 \frac{\bar{x}-y}{2}} dy \leq 0$$

en casi todo t , donde \bar{x} es un punto tal que $m(t) = \theta(\bar{x}, t)$. Además, $\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(x) dx \geq 0$, $M(t) \leq M(0)$ y $m(t) \leq m(0) < 0$. Luego el conjunto

$$\left\{ y : \theta(y, t) \geq \frac{\theta(\bar{x}, t)}{2} \right\}$$

tiene medida estrictamente positiva. En particular, existe una constante C tal que:

$$\frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta(y, t) - \theta(\bar{x}, t)}{\text{sen}^2 \frac{\bar{x}-y}{2}} dy \geq C|\theta(\bar{x}, t)|.$$

Entonces

$$|m|'(t) \geq C|m(t)|^2$$

y la función m explota en tiempo finito, contradiciendo la hipótesis de existencia de solución regular θ para todo $t \geq 0$.

En el caso $\delta = 1$ se pueden construir soluciones exactas por medio de una *transformación hodógrafa*, con dato inicial $\theta_0 = \sin x$. Entonces las soluciones θ y $u = H\theta$ satisfacen

$$-t\theta = \log \sqrt{u^2 + \theta^2}, \quad -(x - tu) = \arctg \frac{\theta}{u}.$$

En las Figuras 3 y 4 representamos los perfiles de θ y u en cinco instantes de tiempo diferentes: $t = 0, 0,09, 0,18, 0,27, e^{-1}$.

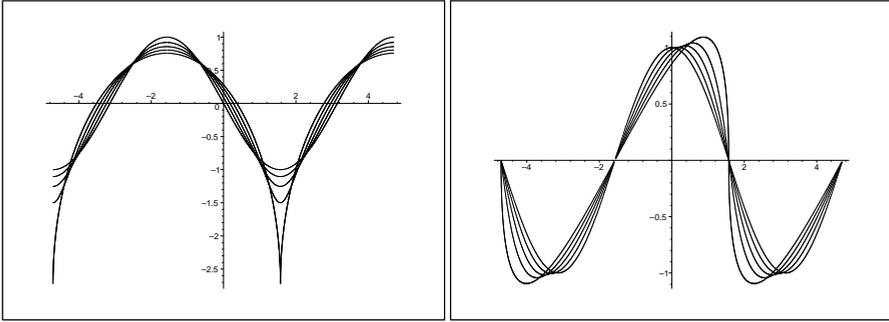


Figura 3: θ evaluado para $t = 0, 0,09, 0,18, 0,27, e^{-1}$.

Figura 4: u evaluado para $t = 0, 0,09, 0,18, 0,27, e^{-1}$.

El caso $\delta = 0$ de (24), es decir, la ecuación (22), se estudia en [21]. Si se toma $-H\theta = v$, sin más que derivar respecto de x , vemos que $\theta_{xt} - H\theta\theta_{xx} = H\theta_x\theta_x$; se observa por tanto la similitud con (3) tomando $w = \theta_x$.

Para este modelo estudiamos la evolución de un dato inicial positivo simétrico, con $\max_x \theta_0 = \theta_0(0)$ y soporte compacto. Entonces el perfil de θ se transporta con el flujo $-H\theta$. Así, $\theta(\cdot, t)$ continúa siendo una función positiva simétrica, con soporte contenido en el soporte inicial y con $\|\theta(\cdot, t)\|_{L^2}$ acotada por $\|\theta_0\|_{L^2}$. Para datos de este tipo, mediante uso de transformadas de Mellin, se obtiene en [21] que $\|\theta_x(\cdot, t)\|_{L^2}$ explota en tiempo finito. La idea de la demostración es escribir (22) en la forma

$$(1 - \theta)_t = -H(1 - \theta)(1 - \theta)_x,$$

dividir por $x^{1+\delta}$ ($0 < \delta < 1$) e integrar respecto de x en el intervalo $(0, L)$. Se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^L \frac{(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \right) &= - \int_0^L \frac{(1 - \theta)_x H(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx \\ &= - \int_0^\infty \frac{(1 - \theta)_x H(1 - \theta)}{x^{1+\delta}} dx. \end{aligned} \quad (25)$$

Se usa el resultado siguiente:

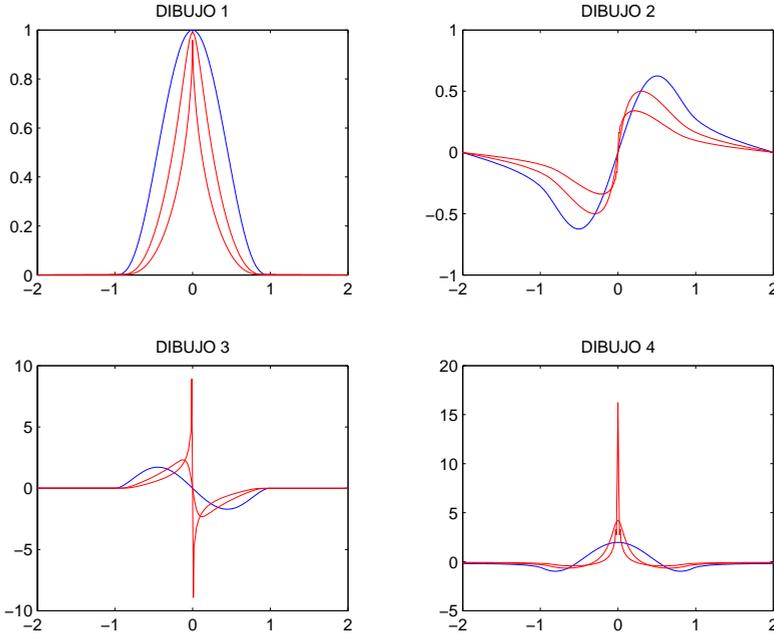


Figura 5: Se muestra la evolución para tiempos $t = 0, t = 0,35$ y $t = 0,7$ y viscosidad $\nu = 0,01$ de las siguientes cantidades: θ en Dibujo 1, $H\theta$ en Dibujo 2, θ_x en Dibujo 3 y $\Lambda\theta$ en Dibujo 4.

Lema 7 Sea $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$. Entonces, para cada $0 < \delta < 1$ existe una constante $C_\delta > 0$ tal que

$$-\int_0^\infty \frac{f_x(x)(Hf)(x)}{x^{1+\delta}} dx \geq C_\delta \int_0^\infty \frac{1}{x^{2+\delta}} f^2(x) dx. \tag{26}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy, se deduce que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L \frac{(1-\theta)}{x^{1+\delta}} dx \right) \geq C_{L,\delta} \left(\int_0^L \frac{(1-\theta)}{x^{1+\delta}} dx \right)^2,$$

con lo que se demuestra explosión en tiempo finito.

Si introducimos un término disipativo en la ecuación, es decir, poniendo

$$\theta_t - H\theta\theta_x = -\kappa\Lambda^\gamma\theta, \tag{27}$$

para datos iniciales positivos θ_0 , obtenemos $0 \leq \theta(x, t) \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}$ y $\|\theta(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|\theta_0\|_{L^2}$. Así, cuando $\gamma > 1$, se obtiene regularidad global. Aparece como caso crítico $\gamma = 1$, para el que tenemos existencia global cuando $\|\theta_0\|_{L^\infty}$ es pequeño, i.e. cuando $\|\theta_0\|_{L^\infty} < C\kappa$.

No se sabe qué ocurre en este caso crítico si el dato inicial inicial no es pequeño, ni cuál es el comportamiento de las soluciones cuando $0 < \gamma < 1$.

Mediante simulaciones numéricas obtenemos la evolución de θ , $H\theta$, θ_x y $\Lambda\theta$ según se muestra en la Figura 5, observándose la formación de singularidades.

5 “Patches”

El primero en abordar la formulación débil de (1) fue Resnick [39]. Este autor llamó solución débil a toda función θ que verifica

$$\int_{\Pi^2} \varphi(x)\theta(x, T) dx - \int_{\Pi^2} \varphi(x)\theta_0(x) dx = \int_0^T \int_{\Pi^2} \nabla\varphi \theta u dx dt$$

para toda función $\varphi \in C_c^\infty$, donde $u = (-R_2\theta, R_1\theta)$ para casi todo $t \in [0, T]$. Y demostró la existencia global por el método de Galerkin en Π^2 . Esta solución cumple $\|\theta(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|\theta_0\|_{L^2}$ y, por tanto, $\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$. El problema de la unicidad de solución débil está abierto.

La ecuación QG tiene la propiedad fundamental de que las curvas de nivel se mueven con el fluido, i.e. no se transfiere fluido a través de ellas. Entonces una solución natural, con energía finita, es una región cerrada (acotada y conexa) $\Omega(t)$ donde θ verifica

$$\theta(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega(t), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Omega(t), \end{cases}$$

que evoluciona con la velocidad del fluido, conservando el área inicial. Estas soluciones parten con un frente ya formado sobre la frontera de $\Omega(t)$ y se denominan “patches”. Este tipo de soluciones fueron estudiadas en [2], [10] y [3] para la ecuación de la vorticidad para el sistema de Euler incompresible (donde la vorticidad se conserva a lo largo de trayectorias).

En [27] estudiamos la dinámica de α -“patches” para una familia de ecuaciones que “interpola” las ecuaciones QG y Euler 2D. Un α -patch ($0 < \alpha < 1$) consiste en una región $\Omega(t)$ de \mathbf{R}^2 (conexa y acotada) que se mueve con una velocidad dada por

$$u(x(s, t), t) = \frac{\theta_0}{2\pi} \int_{C(t)} |x(s, t) - x(s', t)|^{-\alpha} \frac{\partial x}{\partial s}(s', t) ds'.$$

Aquí, $x(s, t)$ determina la posición de la frontera del dominio $\Omega(t)$, parametrizada con s . La dinámica de la evolución del contorno $\partial\Omega(t)$ viene dada por

$$\frac{dx(s, t)}{dt} = u(x(s, t), t),$$

y los α -patches determinan soluciones débiles de la ecuación

$$\begin{cases} (\partial_t + u \cdot \nabla) \theta = 0, \\ u = \nabla^\perp \psi, \quad \theta = -(-\Delta)^{1-\gamma/2} \psi. \end{cases} \quad (28)$$

El caso límite en que $\gamma = 0$ (2D Euler) ha sido estudiado analíticamente con éxito por Chemin [10] y Bertozzi-Constantin [2], demostrándose la existencia

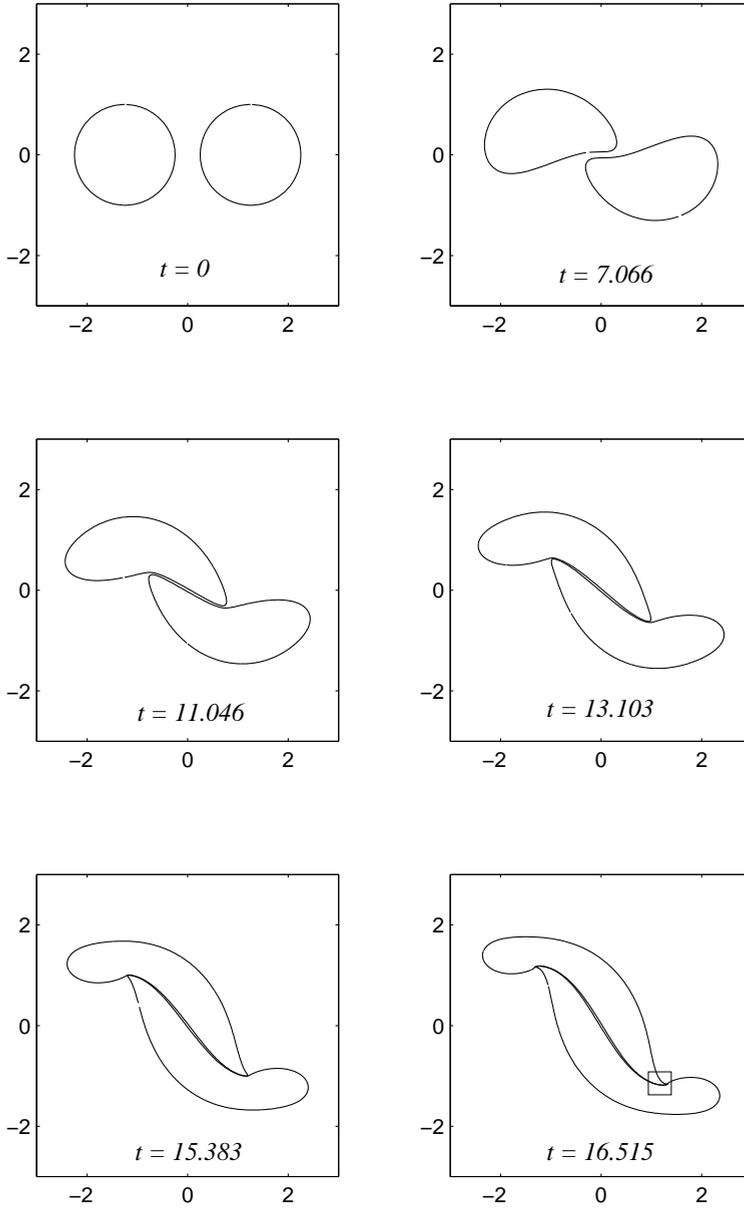


Figura 6: Evolución de dos patches con $\alpha = 0,5$. El recuadro que aparece en el tiempo $t=16.515$ está ampliada en la Figura 8 a)

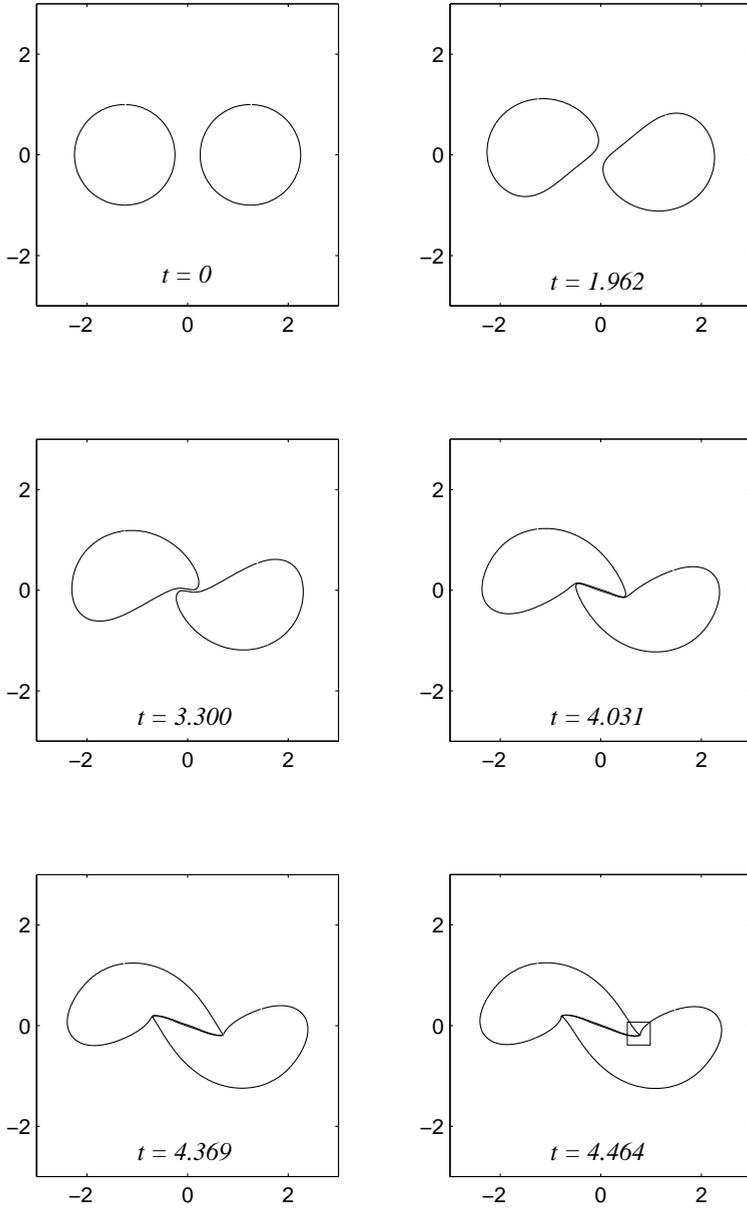


Figura 7: Evolución de dos patches con $\alpha = 1$. El recuadro que aparece en el tiempo $t=4.464$ está ampliada en la Figura 8 b)

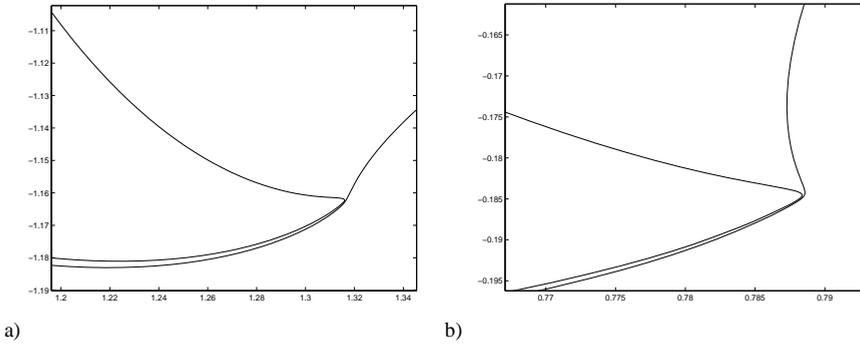


Figura 8: Colapso y explosión de la curvatura de los α -patches a) $\alpha = 0,5$ y b) $\alpha = 0,5$.

global de solución. En el caso $\gamma = 1$, Rodrigo [40] ha demostrado la existencia local de solución usando argumentos de tipo Nash-Moser.

En [27] hemos encontrado numéricamente posibles candidatos de singularidades para la familia de ecuaciones (28). En los casos particulares $\alpha = 0,8$ y $\alpha = 1$ (véase Figuras 6 y 7), observamos la formación de una “esquina” que desarrolla un alto crecimiento de la curvatura en el mismo punto donde se produce la mínima distancia entre los dos patches. En la Figura 7 aparece con más detalle el posible escenario para el colapso de patches.

Además, al re-escalar la variable espacial en la forma

$$x = (t_0 - t)^\delta, \quad \text{con } \delta = 1/\alpha,$$

introduciendo la nueva variable $\tau = -\log(t_0 - t)$, la ecuación se transforma en

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \delta y = \frac{\theta_0}{2\pi} \int_{C(t)} |y(s, t) - y(s', t)|^{-\alpha} \frac{\partial y}{\partial s}(s', t) ds'. \quad (29)$$

Las soluciones de (29) independientes de τ representan soluciones de (28) con la propiedad de que la curvatura máxima crece como

$$\kappa = \frac{1}{R} \sim \frac{C}{(t_0 - t)^{1/\gamma}} \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0$$

y la distancia mínima entre los dos patches satisface

$$d \sim C(t_0 - t)^{1/\gamma} \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0.$$

Estas singularidades tienen la característica de ser estables y auto-similares y aparecen en un punto del plano en el que la curvatura explota al mismo tiempo que colapsa dos curvas de nivel.

Referencias

- [1] J. T. Beale, T. Kato, y A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3D Euler equations. *Comm. Math. Phys.*, 94:61–64, 1984.
- [2] A. L. Bertozzi y P. Constantin. Global regularity for vortex patches. *Commun. Math. Phys.* **152** (1993), no.1, 19-28.
- [3] A. L. Bertozzi y A. J. Majda. Vorticity and the Mathematical Theory of Incompressible Fluid Flow. *Cambridge Press*
- [4] L. Caffarelli, A. Vasseur. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. Arxiv preprint math.AP/0608447, 2006.
- [5] J.A. Carrillo y L.C.F. Ferreira. Convergence towards a self-similar asymptotic behavior for the dissipative quasi-geostrophic equations. *Aparecera en Banach center of publications.*
- [6] D. Chae. On the Euler equations in the critical Triebel-Lizorkin spaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 170 (2003), no. 3, 185–210.
- [7] D. Chae, The quasi-geostrophic equation in the Triebel-Lizorkin spaces. *Nonlinearity* **16** n° 2 (2003), 479-495.
- [8] D. Chae, A. Córdoba, D. Córdoba y M. Fontelos. Finite time singularities in a 1D model of the quasi-geostrophic equations., *Advances in Math.*, 194 (2005).
- [9] D. Chae and J. Lee, Global Well-Posedness in the super critical dissipative Quasi-geostrophic equations. *Commun. Math. Phys.* **233** (2003), 297-311.
- [10] J.Y. Chemin. “Persistence de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels”. *Ann. Ec. Norm. Supér.* **26** (1993), no.4, 1-16.
- [11] P. Constantin. Geometric Statistics turbulence. *SIAM Rev.*, 36:73-98, 1994.
- [12] P. Constantin, Energy Spectrum of Quasi-geostrophic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **89** n° 18 (2002), 1804501-4.
- [13] P. Constantin, D. Córdoba y J. Wu. On the critical dissipative quasi-geostrophic equation. *Indiana Univ. Math. J.* 50: 97-107, 2001.
- [14] P. Constantin, C. Fefferman, y A. J. Majda. Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations. *Commun. Part. Diff. Eq.*, 21:559–571, 1996.
- [15] P. Constantin, P.D. Lax y A. J. Majda. A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation *Comm. Pure Appl. Math* 38:715-724.

- [16] P. Constantin, A. J. Majda, y E. Tabak. Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar. *Nonlinearity*, 7:1495–1533, 1994.
- [17] P. Constantin, P. Nie y N. Schorghofer. Nonsingular surface-quasi-geostrophic flow. *Phys. Lett. A* 241:168-172, 1998.
- [18] P. Constantin y J. Wu. Behavior of solutions of 2D Quasi-geostrophic equations. *SIAM J. Math. Anal* 30:937-948, 1999.
- [19] A. Córdoba y D. Córdoba, A pointwise estimate for fractionary derivatives with applications to P.D.E., *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **100**, n^o 26, (2003), 15316-15317.
- [20] A. Córdoba y D. Córdoba, A maximum principle applied to Quasi-geostrophic equations, *Comm. Math. Phys.* 249 (2004), no. 3, 511–528.
- [21] A. Córdoba, D. Córdoba, y M. Fontelos. “Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity”, *Annals of Math.* 162 (3) (2005).
- [22] D. Córdoba. Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation. *Ann. of Math.*, 148(3), 1998.
- [23] D. Córdoba y C. Fefferman. Scalars convected by a 2D incompressible flow. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 55:255-260, 2002.
- [24] D. Córdoba y C. Fefferman. Growth of solutions for QG and 2D Euler equations. *Journal Amer. Math. Soc.*, 15(3):665-670, 2002.
- [25] D. Córdoba, C. Fefferman y R. de la LLave. On squirt singularities in hydrodynamics. *SIAM J. Math. Anal.* 36 (2004), no. 1, 204–213 .
- [26] D. Córdoba, C. Fefferman y J.L. Rodrigo. Almost sharp fronts for the surface quasi-geostrophic equations, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 101 (2004), no. 9, 2687–2691.
- [27] D. Córdoba, M. Fontelos, A. Mancho y J.L. Rodrigo. “Evidence of singularities for a family of countor dynamics equations”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 102 (2005), no. 17, 5949–5952.
- [28] E. Dinaburg, V. Posvyanskii y Ya. Sinai. On some approximations of the Quasi-geostrophic equation. *Geometric methods in dynamics. II. Astérisque* No. 287 (2003), xvii, 19–32.
- [29] S. Friedlander y R. Shvydkoy. The unstable spectrum of the surface quasi-geostrophic equation. *J. Math. Fluid Mech.* 7 (2005), suppl. 1, S81–S93.
- [30] I. Held, R. Pierrehumbert y S. Garner. Surface quasi-geostrophic dynamics. *J. Fluid Mech.* 282:1-20, 1995.

- [31] N. Ju. The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasi-geostrophic equations. *Comm. Math. Phys.* 255 (2005), no. 1, 161–181.
- [32] N. Ju. On the two dimensional quasi-geostrophic equations. *Indiana Univ. Math. J.* 54 (2005), no. 3, 897–926. .
- [33] A. Kiselev, F. Nazarov, A. Volberg. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Arxiv preprint math.AP/0604185, 2006
- [34] H. Kozono y Y. Taniuchi. “Limiting case of the Sobolev inequality in BMO, with application to the Euler equations.” *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 1, 191–200.
- [35] A. Majda y E. Tabak. A two-dimensional model for quasi-geostrophic flow: comparison with the two-dimensional Euler flow. *Physica D* , 98:515-522, 1996.
- [36] A. Morlet. Further properties of a continuum of model equations with globally defined flux. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **221** (1998), 132-160.
- [37] K. Ohkitani y M. Yamada. Inviscid and inviscid-limit behavior of a surface quasi-geostrophic flow. *Phys. Fluids* , 9: 876-882, 1997.
- [38] J. Pedlosky. Geophysical fluid dynamics. *Springer-Verlag* New york, 345-368, 1987.
- [39] S. Resnick. Dynamical problem in nonlinear advective partial differential equations. *PhD thesis University of Chicago*, 1995.
- [40] J.L. Rodrigo. “On the evolution of sharp fronts for the Quasi-geostrophic equation”. *Comm. Pure Appl. Math.* 58 (2005), 821-866.
- [41] R. Salmon. Lectures on Geophysical Fluid Dynamics. *Oxford University Press*
- [42] M.E. Schonbek y T.P. Schonbek, Asymptotic behavior to dissipative quasi-geostrophic flows, *SIAM J. Math. Anal.*, **35**, n^o 2, (2003), 357-375.
- [43] E. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. *Princeton University Press*. Princeton, NJ, 1970.
- [44] E. Stein. Harmonic Analysis. *Princeton University Press*. Princeton, NJ, 1993.
- [45] J. Wu. Dissipative quasi-geostrophic equations with L^p data, *Electronic Journal of Differential Equations* **56** (2001), 1-13.

- [46] J. Wu. The quasi-geostrophic equations and its two regularizations. *Comm. Partial Differential Equations* **27** n° 5-6 (2002), 1161-1181.
- [47] J. Wu. Inviscid limits and regularity estimates for the solutions of the 2-D dissipative Quasi-geostrophic equations. *Indiana Univ. Math. J.* **46** n° 4 (1997), 1113-1124.